



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

تست های نسبت های مثلثاتی.

سؤال ۱: با توجه به رابطه‌ی $\cos x = \sin 3^\circ \cos 6^\circ + \sin 6^\circ \cos 3^\circ$ مقدار x چند درجه است.

- (۱) 0° (۲) 3° (۳) 45° (۴) 90°

سؤال ۲: حاصل عبارت $\frac{\cot 6^\circ - \tan 3^\circ + 5 \cot 45^\circ}{8 \cot 45^\circ - \sin 90^\circ + 5 \tan 45^\circ}$ کدام است.

- (۱) $\frac{5}{12}$ (۲) $\frac{5}{13}$ (۳) $\frac{8}{15}$ (۴) $\frac{15}{8}$

سؤال ۳: حاصل عبارت $|\tan^2 6^\circ - \cot^2 3^\circ| + |\tan 5^\circ - \tan 6^\circ| + |\tan 3^\circ - \tan 5^\circ|$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

سؤال ۴: حاصل عبارت $|\sin 1^\circ - \sin 9^\circ| + |\sin 1^\circ - \sin 7^\circ| + |\sin 7^\circ - \sin 0^\circ|$ را بدست آورید.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{3}{6}$

سؤال ۵: اگر $20^\circ < x < 70^\circ$ باشد حاصل $|\cos x - \cos 19^\circ| + |\cos 71^\circ - \cos x| + (\cos 71^\circ - \cos 19^\circ)$ را بدست آورید.

- (۱) صفر (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) ۱

سؤال ۶: اگر $\sin x = 3m + 1$ باشد کدام نابرابری درست است.

- (۱) $-2 \leq m \leq 0$ (۲) $-1 \leq m \leq 2$ (۳) $-\frac{2}{3} \leq m \leq 0$ (۴) $0 \leq m \leq 2$

سؤال ۷: اگر θ زاویه‌ی حاده و $\cos \theta = 2m - 1$ باشد کدام یک از مقادیر زیر می تواند باشد.

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) ۳

سؤال ۸: حاصل $|3 - 2 \cos x| + |\cos x - 3|$ برابر است با:

- (۱) $\cos x - 2$ (۲) $3 - \cos x$ (۳) $6 - 3 \cos x$ (۴) $4 \cos x - 4$

سؤال ۹: در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) اگر $\tan \hat{B} = 2\sqrt{2}$ و $AB = 8$ اندازه‌ی وتر BC چند واحد است.

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۴ (۳) ۲۱ (۴) ۱۸

سؤال ۱۰: در شکل زیر حاصل $\tan \alpha + \tan \beta$ کدام است.

$$\frac{29}{20} \quad (4)$$

$$\frac{27}{20} \quad (3)$$

$$\frac{25}{20} \quad (2)$$

$$\frac{23}{20} \quad (1)$$

سؤال ۱۱: در شکل زیر مقدار $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$ کدام است.

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \quad (4)$$

$$\sqrt{a^2+1} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{4+a^2}}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{4+a^2} \quad (1)$$

سؤال ۱۲: در نیم دایره‌ی روبرو، D مرکز دایره است. $\tan \hat{A}$ کدام است.

$$\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{5}{14} \quad (3)$$

$$\frac{5}{12} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

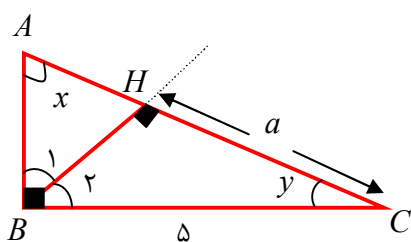
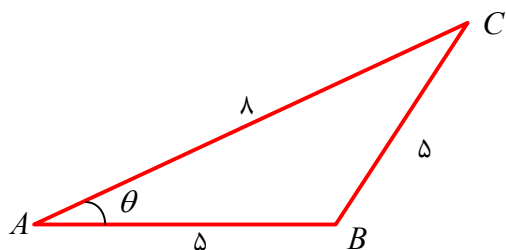
سؤال ۱۳: در شکل روبرو مقدار $\tan \theta$ کدام است.

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{5}{13} \quad (4)$$

$$\frac{5}{12} \quad (3)$$



سؤال ۱۴: در شکل زیر طول a کدام است.

$$5 \sin y \quad (2)$$

$$5 \sin x \quad (1)$$

$$\frac{1}{5} \sin x \quad (4)$$

$$\frac{1}{5} \sin y \quad (3)$$

سؤال ۱۵: در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC داریم: $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 2AC$ و مقدار کدام است؟ (کنکور سراسری)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (1)$$

سؤال ۱۶: در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC اگر $B = 90^\circ$, $\cos \hat{C} \times \cos \hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{4}$, $AC = 4$ باشد، مساحت مثلث کدام است.

$$2\sqrt{5} \quad (4)$$

$$4\sqrt{5} \quad (3)$$

$$\sqrt{5} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

سؤال ۱۷: در شکل زیر طول AD کدام است.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (4)$$

$$\cos^2 \alpha \quad (3)$$

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} \quad (2)$$

$$\cos \alpha + \tan \alpha \quad (1)$$

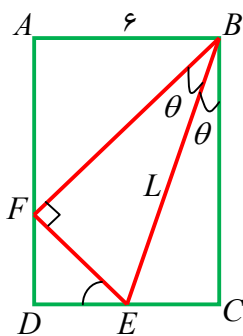
سؤال ۱۸: در مثلث قائم الزاویه ABC ، زاویه A قائمه و $\tan \hat{C} = \frac{5}{12}$ است مقدار $\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C}$ برابر

است با:

- (۱) $\frac{30}{13}$ (۲) $\frac{17}{13}$ (۳) $\frac{7}{13}$ (۴) $\frac{12}{13}$

سؤال ۱۹: با توجه به شکل مقدار عبارت $\sin \alpha + 3 \cos \beta - 2 \tan \gamma$ کدام است.

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9\sqrt{13}}{13} - \frac{4}{5}$ (۲) $\frac{8}{3} - \sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{5}$



سؤال ۲۰: یک برگ کاغذ مستطیل شکل به پهنای ۶ سانتی متر را مطابق شکل تا کرده ایم. بطوریکه یکی از گوشه ها بر ضلع مقابل منطبق شده است طول خط تا شده کاغذ بر حسب زاویه θ و به سانتی متر برابر است با:

- (۱) $\frac{6}{\sin \theta (1 + \cos 2\theta)}$ (۲) $\frac{6 \sin \theta}{\cos \theta}$ (۳) $3 \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ (۴) $\frac{6}{\cos \theta \cdot \sin^2 \theta}$

سؤال ۲۱: در شکل روبرو، $AB = AC = 8$ است مساحت مثلث کدام است.

- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) نمی توان بدست آورد

سؤال ۲۲: می خواهیم مثلی رسم کنیم که طول دو ضلعش ۸ و ۹ باشد. بیشترین مقدار مساحت مثلث چقدر است.

- (۱) ۳۶ (۲) ۷۲ (۳) $18\sqrt{2}$ (۴) ۱۳

سؤال ۲۳: در شکل روبرو $AB = AD$ است. نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث ACD کدام است.

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴) $\frac{1}{2}$

سؤال ۲۴: اگر طول ضلع مثلث متساوی الاضلاعی عدد طبیعی باشد مساحت مثلث کدام عدد می تواند باشد.

(آزاد تجربی ۸۶)

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{5}$

سؤال ۲۵: در متوازی الاضلاعی، اندازه دو قطر ۱۲ و ۸ است و زاویه بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی

الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است. (سراسری تجربی ۹۲)

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۳۲

سؤال ۲۶: مقدار عبارت زیر کدام است.

$$A = \sin 15^\circ + \sin 25^\circ + \sin 35^\circ + \sin 45^\circ - \cos 55^\circ - \cos 65^\circ - \cos 75^\circ$$

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) صفر

سؤال ۲۷: مقدار عبارت زیر کدام است.

$$A = \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \tan 4^\circ \cdot \tan 5^\circ \cdot \tan 6^\circ \cdot \tan 7^\circ$$

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) صفر

سؤال ۲۸: مقدار عبارت زیر کدام است.

$$A = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$$

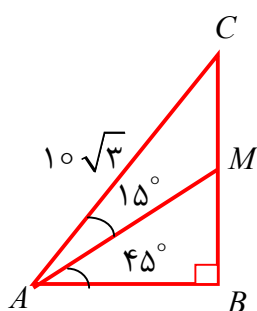
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) 2^{45} (۴) -۱

سؤال ۲۹: حاصل عبارت $A = (\sin 1^\circ - \cos 1^\circ)(\sin 2^\circ - \cos 2^\circ) \dots (\sin 89^\circ - \cos 89^\circ)$ کدام است.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) قابل محاسبه نیست

سؤال ۳۰: حاصل عبارت $A = \cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 3^\circ \dots \cos 10^\circ$ کدام است.

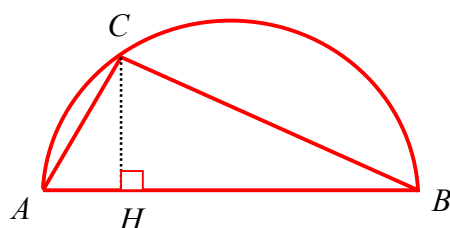
- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) $\frac{1}{2}$



سؤال ۳۱: در شکل مقابل، اندازه MC کدام است؟

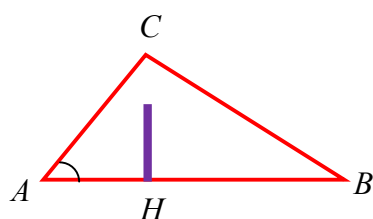
- (۱) $5\sqrt{3}$ (۲) $15\sqrt{3}$ (۳) $15 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \right)$ (۴) $15 \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} \right)$

سؤال ۳۲: در شکل مقابل AB قطر دایره است اگر $AC = 2$, $A = 60^\circ$ مقدار BH کدام است؟



- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

سؤال ۳۳: در شکل مقابل، برج CH از دو نقطه A ، B با زوایای ۶۰° ، ۳۰° دیده می شود. فاصله ۲ فرد که در نقاط

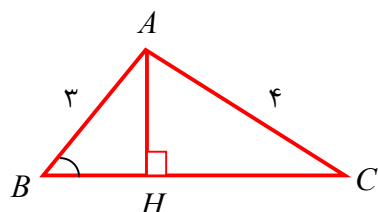


A ، B قرار دارند تا یکدیگر ۳۰۰ متر می باشد. ارتفاع برج کدام است؟

(۱) $۱۲۵\sqrt{۳}$ (۲) $۷۵\sqrt{۳}$

(۳) $۶۰\sqrt{۳}$ (۴) $۱۰۰\sqrt{۳}$

سؤال ۳۴: در شکل مقابل $b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B}$ کدام است؟



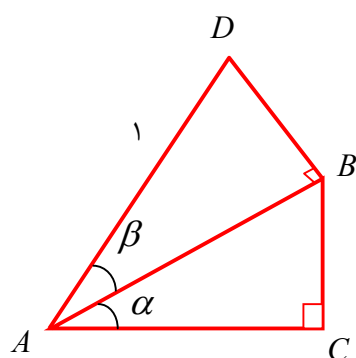
(۱) $۵\sqrt{۲}$

(۲) ۵

(۳) $۵\sqrt{۳}$

(۴) $۵ \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

سؤال ۳۵: با توجه به شکل مقابل طول BC کدام است؟



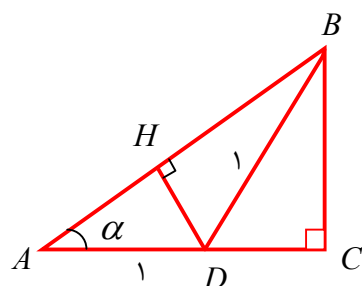
(۱) $\cos \alpha \cos \beta$

(۲) $\sin \alpha \sin \beta$

(۳) $\sin \alpha \cos \beta$

(۴) $\sin \beta \cos \alpha$

سؤال ۳۶: در شکل مقابل $AD = DB = ۱$ مقدار BC کدام است؟



(۱) $۲ \sin \alpha \cos \alpha$

(۲) $۲ \sin^2 \alpha$

(۳) $۲ \cos^2 \alpha$

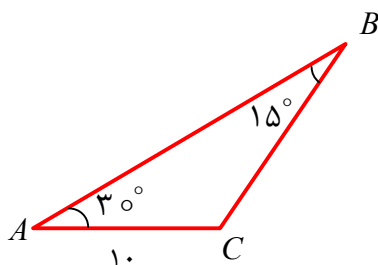
(۴) $\sin \alpha \cos \alpha$

سؤال ۳۷: در شکل مقابل BH کدام است؟

(۱) $۴ \sin \hat{C} \cos \hat{B}$ (۲) $۲ \sin \hat{B} \tan \hat{C}$

(۳) $\frac{۴ \sin \hat{C} \cos \hat{B}}{\sin \hat{B}}$ (۴) $۲ \sin \hat{C} \tan \hat{B}$

سؤال ۳۸: مساحت مثلث شکل مقابل چند برابر $\sqrt{3} + 1$ است؟



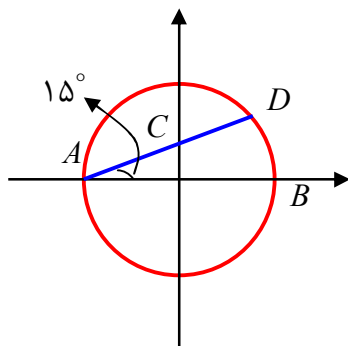
(۱) ۵۰

(۲) ۳۰

(۳) ۲۵

(۴) ۱۵

سؤال ۳۹: اگر $A = 15^\circ$ در شکل مقابل حاصل $\frac{CD}{AC}$ چه عددی است؟



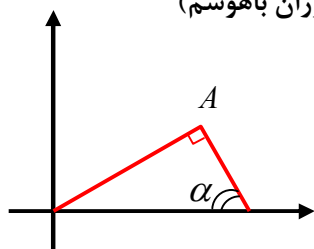
(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳) ۱

(۴) $\frac{2}{3}$

سؤال ۴۰: اگر $A(\sqrt{2}, 1)$ مقدار $\sin \alpha$ چه عددی است؟ (تقدیم به دانش آموزان باهوشم)



(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(۴) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

سؤال ۴۱: اگر برای زاویه حاده θ برقرار باشد مقدار $\sin^2 \theta = \sin 6^\circ \cot 3^\circ + \cos 6^\circ \sin 3^\circ$ کدام

است؟

(۱) ۱

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) $\frac{1}{2}$

سؤال ۴۲: مقدار $A = \frac{1 - \tan 1^\circ}{1 + \cot 1^\circ} \times \frac{1 - \tan 2^\circ}{1 + \cot 2^\circ} \times \dots \times \frac{1 - \tan 89^\circ}{1 + \cot 89^\circ}$ کدام است؟

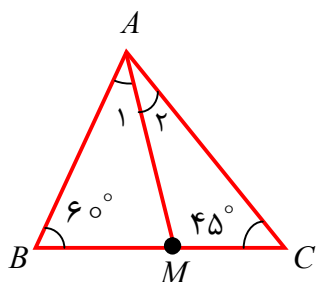
(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) صفر

سؤال ۴۳: در شکل مقابل، M وسط BC است. حاصل $\frac{\sin \hat{A}_1}{\sin \hat{A}_2}$ کدام است؟



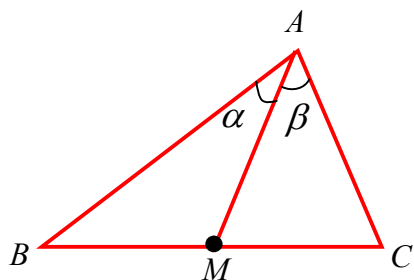
(۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

سؤال ۴۴: در شکل مقابل میانه AM را رسم کرده ایم. مقدار $\frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}$ با کدام کسر برابر است؟



(۲) $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$

(۱) $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

(۴) $\frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$

(۳) $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$

سؤال ۴۵: در مثلث ABC اندازه ارتفاع وارد بر BC با فرض $BC = ۱$ چقدر است؟

(۴) $\frac{\cos \hat{B} \cos \hat{C}}{\cos \hat{A}}$

(۳) $\frac{\sin \hat{B} \sin \hat{C}}{\cos \hat{A}}$

(۲) $\frac{\sin \hat{B} \sin \hat{C}}{\sin \hat{A}}$

(۱) $\frac{\cos \hat{B} \cos \hat{C}}{\sin \hat{A}}$

پاسخنامه تست های نسبت های مثلثاتی

۱-

$$\cos x = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow x = 0^\circ$$

۲-

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} + 5}{8 - 1 + 5} = \frac{5}{12}$$

۳-

$$|\underbrace{\tan^2 60^\circ - \cot^2 30^\circ}_{\text{صفر}}| + |\underbrace{\tan 50^\circ - \tan 60^\circ}_{\text{منفی}}| + |\underbrace{\tan 30^\circ - \tan 50^\circ}_{\text{منفی}}| = 0 - \tan 50^\circ + \tan 60^\circ - \tan 30^\circ + \tan 50^\circ$$

$$= \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۴-

$$|\underbrace{\sin 10^\circ - \sin 90^\circ}_{\text{منفی}}| + |\underbrace{\sin 10^\circ - \sin 7^\circ}_{\text{مثبت}}| + |\underbrace{\sin 7^\circ - \sin 0^\circ}_{\text{مثبت}}|$$

$$= -\sin 10^\circ + \sin 90^\circ + \sin 10^\circ - \sin 7^\circ + \sin 7^\circ - \sin 0^\circ = \sin 90^\circ - \sin 0^\circ = 1 - 0 = 1$$

۵-

$$20^\circ < x < 70^\circ \Rightarrow \cos x < \cos 19^\circ, \cos 71^\circ < \cos x \Rightarrow$$

$$(\cos 71^\circ - \cos 19^\circ) + |\underbrace{\cos x - \cos 19^\circ}_{\text{منفی}}| + |\underbrace{\cos 71^\circ - \cos x}_{\text{منفی}}|$$

$$= \cos 71^\circ - \cos 19^\circ - \cos x + \cos 19^\circ - \cos 71^\circ + \cos x = 0$$

۶-

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq 3m+1 \leq 1 \\ -\frac{2}{3} \leq m \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{-1} -2 \leq 3m \leq 0 \xrightarrow{\div 3} \text{گزینه (۳)}$$

۷-

$$\cos \theta = 2m - 1$$

$$0 < \hat{\theta} < 90^\circ \Rightarrow 0 < \cos \theta < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2m-1 < 1 \xrightarrow{+1} 1 < 2m < 2 \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2} < m < 1 \end{cases}$$

تنها گزینه (۳) در شرایط فوق صدق می کند.

۸-

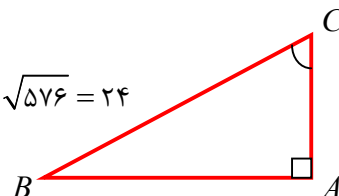
$$\begin{cases} -1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{\times 2} -2 \leq 2 \cos x \leq 2 \xrightarrow{\times (-1)} -2 \leq -2 \cos x \leq 2 \xrightarrow{+3} 1 \leq \underbrace{3 - 2 \cos x}_{\text{مثبت}} \leq 5 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{-3} -4 \leq \underbrace{\cos x - 3}_{\text{منفی}} \leq -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow |\underbrace{3 - 2 \cos x}_{\text{مثبت}}| + |\underbrace{\cos x - 3}_{\text{منفی}}| = 3 - 2 \cos x - (\cos x - 3) = 6 - 3 \cos x \quad \text{گزینه (۳)}$$

-۹

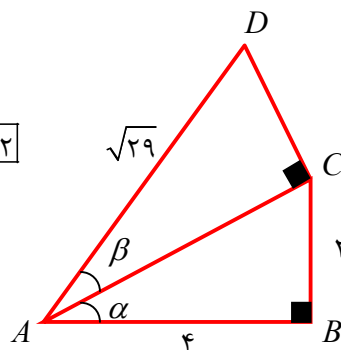
$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow AC = 8 \times 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

$$\text{رابطه فیثاغورس: } AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 64 + 512 = BC^2 \Rightarrow 576 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{576} = 24$$

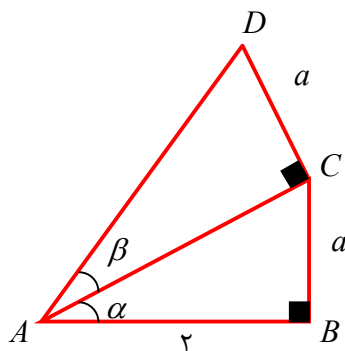


-۱۰

$$\begin{cases} AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \rightarrow AC = 5 \\ AD^2 = AC^2 + DC^2 \Rightarrow 29 = 25 + DC^2 \Rightarrow DC^2 = 4 \Rightarrow \boxed{DC = 2} \\ \Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15+8}{20} = \frac{23}{20} \end{cases}$$



-۱۱



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 2^2 + a^2 = 4 + a^2 \Rightarrow AC = \sqrt{4 + a^2}$$

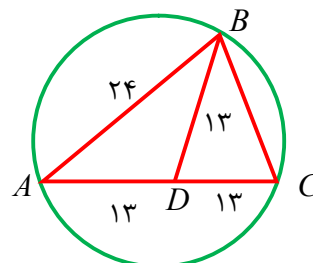
$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{2} \\ \tan \beta = \frac{CD}{AC} = \frac{a}{\sqrt{4+a^2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{\sqrt{4+a^2}}} = \frac{\sqrt{4+a^2}}{2}$$

۱۲- قطر دایره است. پس $\widehat{AC} = 180^\circ$ یعنی زاویه‌ی $\widehat{ABC} = 90^\circ$ پس مثلث ABC قائم الزاویه است و می‌توان رابطه‌ی فیثاغورس را در آن نوشت:

$$AD = DB = DC = 13 \Rightarrow AC = 26$$

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow 24^2 + BC^2 = 26^2 \Rightarrow 576 + BC^2 = 676$$

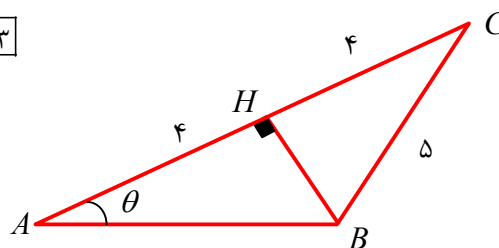
$$\Rightarrow BC^2 = 100 \Rightarrow BC = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow \tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$



۱۳- مثلث ABC متساوی الساقین است. پس اگر ارتفاع BH را رسم کنیم ضلع AC را نصف می‌کند: $AH = \frac{AC}{2} = 4$

$$BH^2 + AH^2 = AB^2 \Rightarrow BH^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow BH^2 = 9 \Rightarrow \boxed{BH = 3}$$

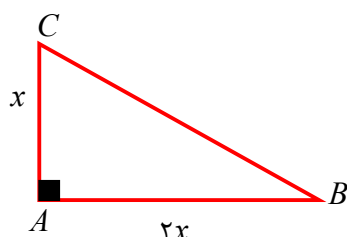
$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{BH}{AH} = \frac{3}{4}$$



-۱۴

$$\begin{cases} \hat{B}_r + \hat{C} = 90^\circ \\ A + \hat{C} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_r = \hat{A} = x \quad \sin \hat{B}_r = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \sin x = \frac{CH}{\delta} \Rightarrow CH = \delta \sin x$$

-۱۵



$$BC^r = AC^r + AB^r = x^r + (2x)^r = x^r + 4x^r = 5x^r \Rightarrow BC = \sqrt{5}x$$

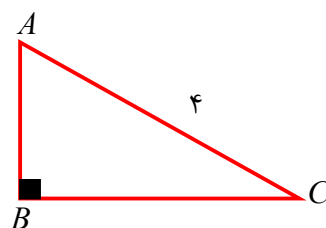
$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{x}{x\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

-۱۶

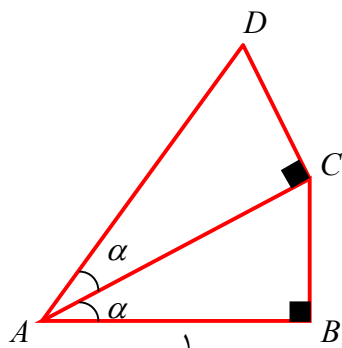
$$\left. \begin{aligned} \cos \hat{A} &= \frac{AB}{AC} \\ \cos \hat{C} &= \frac{BC}{AC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos \hat{A} \times \cos \hat{C} = \frac{AB \times BC}{AC^r} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{AB \times BC}{4^r}$$

$$\Rightarrow AB \times BC = 4\sqrt{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$



-۱۷

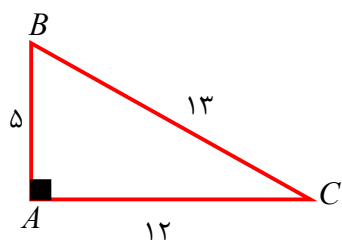


$$\triangle ABC : \cos \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{AC} \Rightarrow AC = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\triangle ADC : \cos \alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{\frac{1}{\cos \alpha}}{AD} \Rightarrow \frac{1}{(\cos \alpha) AD}$$

$$\Rightarrow AD \cos^r \alpha = 1 \Rightarrow AD = \frac{1}{\cos^r \alpha}$$

-۱۸



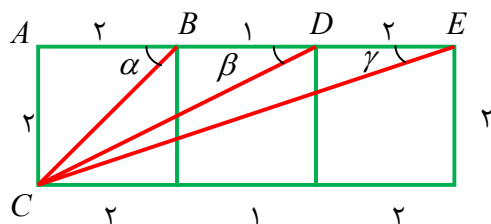
$$\left. \begin{aligned} \cos \hat{A} &= \cos 90^\circ = 0 \\ \cos \hat{B} &= \frac{5}{13} \\ \cos \hat{C} &= \frac{12}{13} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} = \frac{17}{13}$$

-۱۹

$$\begin{cases} BC^r = 2^r + 2^r = 8 \Rightarrow BC = 2\sqrt{2} \\ CD^r = 2^r + 3^r = 13 \Rightarrow CD = \sqrt{13} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha + 2 \cos \beta - 2 \tan \gamma = \frac{2}{2\sqrt{2}} + 2 \times \frac{3}{\sqrt{13}} - 2 \times \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{13}} - \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{6\sqrt{13}}{13} - \frac{4}{5}$$



-۲۰

$$\triangle BCE : \sin \theta \Rightarrow \frac{EC}{BE} = \frac{EC}{L} \Rightarrow EC = L \sin \theta \quad (۱)$$

در چهار ضلعی $BCEF$ داریم:

$$\hat{E} + \hat{F} + \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ \Rightarrow E + 0^\circ + 2\theta + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{E} = 180 - 2\theta$$

$$\Rightarrow \triangle DEF : \hat{DEF} = 180 - (180 - 2\theta) = 2\theta$$

$$\triangle DEF : \cos \hat{DEF} = \frac{DE}{EF} \xrightarrow{EF=EC} \cos 2\theta = \frac{DE}{L \sin \theta} \Rightarrow DE = L \sin \theta \cdot \cos 2\theta$$

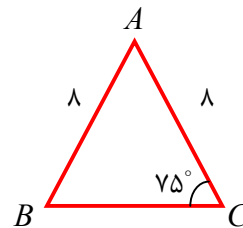
پس داریم:

$$CD = DE + CE = L \sin \theta \cdot \cos 2\theta + L \sin \theta = L \sin \theta (1 + \cos 2\theta) = 6 \Rightarrow L = \frac{6}{\sin \theta (1 + \cos 2\theta)}$$

-۲۱ چون $AB = AC = 8$ مثلث ABC متساوی الساقین است پس $B = 75^\circ$, $A = 30^\circ$ است:

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{1}{2} = 16$$

-۲۲ اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو ضلع α باشد مساحت مثلث می‌شود:

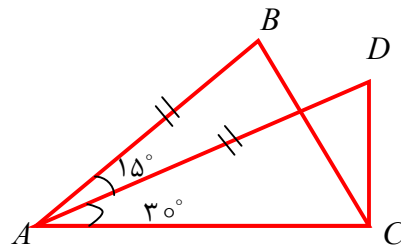
$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \times \sin \alpha = 36 \sin \alpha$$

حداکثر مقدار $\sin \alpha$ برابر با ۱ است پس حداکثر مساحت می‌شود: $36 \times 1 = 36$

-۲۳

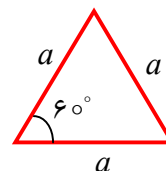
$$\hat{BAC} = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times AC \times \sin 45^\circ}{\frac{1}{2} AD \times AC \times \sin 30^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$



-۲۴

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

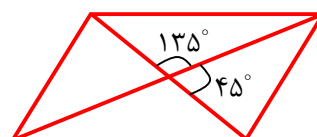


$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3} \quad \text{اگر } a = c \text{ باشد، آنگاه:}$$

-۲۵

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S = 24\sqrt{2} \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است}$$



۲۶- چون زاویه های $۷۵^\circ, ۱۵^\circ$ متمم یکدیگرند پس:

$$\sin ۱۵^\circ = \cos ۷۵^\circ \Rightarrow \sin ۱۵^\circ - \cos ۷۵^\circ = ۰$$

به همین ترتیب:

$$\sin ۳۵^\circ - \cos ۵۵^\circ = ۰ \Rightarrow \sin ۲۵^\circ - \cos ۶۵^\circ = ۰$$

بنابراین:

$$A = (\sin ۱۵^\circ - \cos ۷۵^\circ) + (\sin ۲۵^\circ - \cos ۶۵^\circ) + (\sin ۳۵^\circ - \cos ۵۵^\circ) + \sin ۴۵^\circ$$

$$A = ۰ + ۰ + ۰ + ۰ + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۷- زاویه های $۷۰^\circ, ۲۰^\circ$ متمم یکدیگرند پس: $\tan ۲۰^\circ \times \tan ۷۰^\circ = \tan ۲۰^\circ \times \cot ۲۰^\circ = ۱$

به همین ترتیب:

$$\tan ۳۰^\circ \cdot \tan ۶۰^\circ = ۱, \tan ۴۰^\circ \tan ۵۰^\circ = ۱$$

بنابراین: $A = ۱$

۲۸-

$$A = \tan ۱^\circ \cdot \tan ۲^\circ \dots \tan ۴۴^\circ \cdot \tan ۴۵^\circ \cdot \tan ۴۶^\circ \dots \tan ۸۸^\circ \cdot \tan ۸۹^\circ$$

می دانیم که $\tan ۴۶^\circ = \cot ۴۴^\circ, \dots, \tan ۸۸^\circ = \cot ۲^\circ, \tan ۸۹^\circ = \cot ۱^\circ$

پس:

$$A = (\underbrace{\tan ۱^\circ \cdot \cot ۱^\circ}_{=1}) (\underbrace{\tan ۲^\circ \cdot \cot ۲^\circ}_{=1}) \dots (\underbrace{\tan ۴۴^\circ \cdot \cot ۴۴^\circ}_{=1}) \tan ۴۵^\circ$$

$\Rightarrow A = ۱$ گزینه (۲) درست است.

۲۹-

$$A = (\sin ۱^\circ - \cos ۱^\circ)(\sin ۲^\circ - \cos ۲^\circ) \dots (\sin ۴۵^\circ - \cos ۴۵^\circ) \dots (\sin ۸۹^\circ - \cos ۸۹^\circ)$$

$\Rightarrow A = ۰$ گزینه (۱) درست است

۳۰-

$$A = \cos ۱^\circ \cdot \cos ۲^\circ \dots \underbrace{\cos ۹۰^\circ}_{=0} \dots \cos ۱۰۰^\circ = ۰$$

گزینه (۳) درست است.

۳۱- پاسخ: گزینه ۳

ابتدا طول ضلع AB را در مثلث قائم الزاویه ABC به دست می آوریم:

$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\hat{A}=60^\circ, AC=10\sqrt{3}} AB = AC \cos \hat{A} = 10^\circ \sqrt{3} \times \cos 60^\circ \times \frac{1}{2} = 5\sqrt{3}$$

از طرفی در مثلث قائم الزاویه ABM داریم:

$$\tan \hat{A} = \frac{MB}{AB} \xrightarrow{\hat{A}=45^\circ} \tan 45^\circ = \frac{MB}{AB} \xrightarrow{\tan 45^\circ=1} AB = MB = 5\sqrt{3}$$

حال در مثلث قائم الزاویه ABC طول ضلع BC را حساب می‌کنیم و سپس با کم کردن BM از آن طول MC را به دست می‌آوریم:

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} \xrightarrow{\hat{A}=60^\circ, AB=5\sqrt{3}} \tan 60^\circ = \frac{BC}{5\sqrt{3}} \xrightarrow{\tan 60^\circ = \sqrt{3}} BC = 15$$

$$\Rightarrow MC = BC - MB = 15 - 5\sqrt{3} = 15 \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = 15 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \right)$$

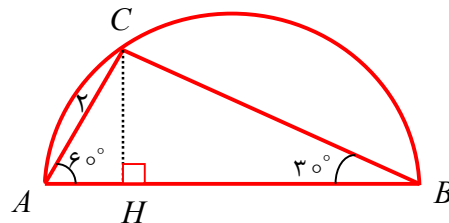
♦ تذکر: $\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

♦ تذکر: ضلع مقابل به زاویه 60° وتر و ضلع مجاور به زاویه 60° نصف وتر است.

۳۲- پاسف: گزینه ۳

سعی می‌کنیم طول ضلع HC که ضلعی مشترک بین دو مثلث AHC و CHB است به دست آوریم. طول HC برابر $2 \sin 60^\circ$ است زیرا در مثلث AHC داریم:

$$\begin{aligned} \triangle AHC : \sin 60^\circ &= \frac{HC}{AC} \xrightarrow{AC=2} HC = 2 \sin 60^\circ \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$



زاویه C در مثلث ABC برابر 90° است زیرا زاویه ممای روی کمانی برابر 180° است پس زاویه B برابر 30° است. حال سعی می‌کنیم اندازه BH را بر حسب طول ضلع AC و نسبت های مثلثاتی زاویه B بنویسیم. در مثلث CHB داریم:

$$\triangle CHB : \cot \hat{B} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow HB = HC \cot \hat{B} \xrightarrow{HC=\sqrt{3}, \hat{B}=30^\circ} HB = \sqrt{3} \cot 30^\circ = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$$

♦ تذکر: در مثلث قائم الزاویه اگر α یک زاویه غیر قائم باشد داریم:

$$\cot \alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } \alpha}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } \alpha}{\text{طول وتر}}$$

۳۳- پاسف: گزینه ۲

با توجه به شکل $AB = AH + HB$ پس سعی می‌کنیم طول AH و HB را در دو مثلث قائم الزاویه AHC و BHC بر حسب ارتفاع HC و نسبت های مثلثاتی زوایای A و B بنویسیم:

$$\triangle AHC : \tan \hat{A} = \frac{HC}{AH} \xrightarrow{\hat{A}=60^\circ} AH = \frac{\sqrt{3}}{3} HC$$

$$\triangle BHC : \tan \hat{B} = \frac{HC}{HB} \Rightarrow HB = \frac{HC}{\tan \hat{B}} \xrightarrow{\hat{B}=30^\circ} HB = \sqrt{3} HC$$

با توجه به آن که فاصله دو نقطه AB از یکدیگر ۳۰۰ متر است پس $AH + HB = 300$ است در نتیجه:

$$AB = AH + BH = \frac{\sqrt{3}}{3} HC + \sqrt{3} HC = \frac{4}{3} \sqrt{3} HC \xrightarrow{AB=300} \frac{4}{3} \sqrt{3} HC = 300$$

$$\xrightarrow{\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4}{\sqrt{3}} HC = 300 \Rightarrow HC = 75\sqrt{3}$$

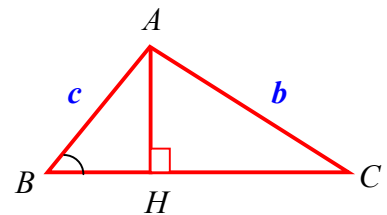
۳۴- پاسخ: گزینه ۲

فرض کنید در مثلث ABC داریم $AC = b, AB = c$ در نتیجه:

$$\triangle AHC : \cos \hat{C} = \frac{HC}{AC} \xrightarrow{AC=b} HC = b \cos \hat{C}$$

$$\triangle AHB : \cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} \xrightarrow{AB=c} BH = c \cos \hat{B}$$

$$b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B} = \underbrace{HC + BH}_{BC}$$



مس مقدار عبارت $b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B}$ برابر طول ضلع BC است. از آن جا که مثلث ABC قائم الزاویه است پس بنا بر قضیه فیثاغورس داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BC = 5$$

$$b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B} = 5$$

۳۵- پاسخ: گزینه ۳

چون همه گزینه ها بر حسب نسبت های مثلثاتی زاویه α, β است پس سعی می کنیم طول BC را بر حسب نسبت های مثلثاتی این دو زاویه بنویسیم. پس ابتدا در مثلث قائم الزاویه ABD طول ضلع AB را که ضلع مشترک بین دو مثلث ABD و ABC است را بر حسب نسبت های مثلثاتی زاویه β و ضلع AD که مقدار آن مشخص است می نویسیم:

$$\cos \beta = \frac{AB}{AD} \xrightarrow{AD=1} AB = \cos \beta$$

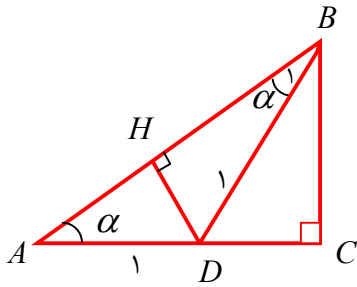
در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} \xrightarrow{AB=\cos \beta} BC = AB \sin \alpha = \cos \beta \sin \alpha$$

۳۶- پاسخ: گزینه ۱

در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BC = AB \sin \alpha$$



پس باید AB را بر حسب نسبت های مثلثاتی زاویه α بنویسیم.

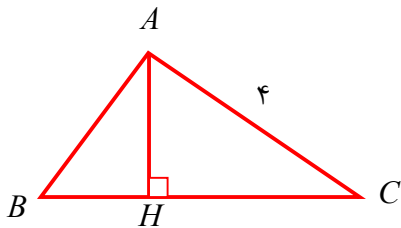
چون $BD = AD = 1$ است پس مثلث ABD متساوی الساقین است پس در این مثلث $\hat{A} = \hat{B} = \alpha$ است. پس در

مثلث های قائم الزاویه AHD و BHD داریم:

$$\triangle AHD: \cos \alpha = \frac{AH}{AD} \xrightarrow{AD=1} AH = \cos \alpha$$

$$\triangle BHD: \cos \hat{B} = \frac{HB}{BD} \xrightarrow{\hat{B}=\alpha, BD=1} HB = \cos \alpha \Rightarrow \underbrace{AH + BH}_{AB} = 2 \cos \alpha \Rightarrow AB = 2 \cos \alpha$$

پس با توجه به رابطه $BC = AB \sin \alpha$ داریم: $BC = 2 \cos \alpha \sin \alpha$



۳۷- پاسخ: گزینه ۳

با توجه به گزینه ها می فوایم طول BH را بر حسب نسبت های مثلثاتی دو زاویه C, B بنویسیم. در مثلث قائم الزاویه

AHC داریم:

$$\sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \sin \hat{C} \xrightarrow{AC=4} AH = 4 \sin \hat{C}$$

در مثلث قائم الزاویه BHA داریم:

$$\cot \hat{B} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow BH = AH \cot \hat{B} \xrightarrow{AH=4 \sin \hat{C}} BH = 4 \sin \hat{C} \cot \hat{B} \Rightarrow BH = \frac{4 \sin \hat{C} \cos \hat{B}}{\sin \hat{B}}$$

تذکر: چون AH یک ضلع مشترک بین ۳ مثلث قائم الزاویه AHB و AHC بود سعی کردیم طول BH را بر حسب نسبت

های مثلثاتی زاویه $(\cot \hat{B})B$ و ضلع AH بنویسیم.

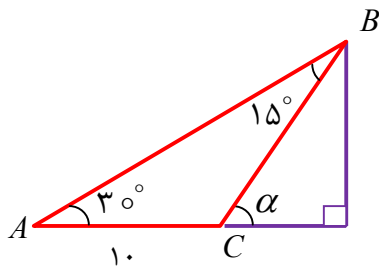
۳۸- پاسخ: گزینه ۳

مطابق شکل ضلع AC را امتداد و مثلث قائم الزاویه ADB را تشکیل می دهیم:

چون زاویه α زاویه خارجی مثلث ABC است پس مقدار آن برابر

$$\alpha = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$$

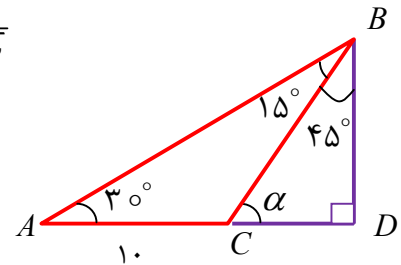
چون $\tan 45^\circ = 1$ است پس $CD = BD = x$ است اگر فرض $CD = BD$ داریم:



$$\text{در مثلث } ABD: \tan \hat{A} = \frac{BD}{AD} = \frac{x}{x+10} = \tan 30^\circ \Rightarrow \frac{x}{x+10} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x = x + 10$$

$$\sqrt{3}x - x = 10 \Rightarrow x(\sqrt{3} - 1) = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{3} - 1}$$



با ضرب صورت و مخرج کسر بالا در $\sqrt{3} + 1$ داریم:

$$x = \frac{10}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{10(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = 5(\sqrt{3} + 1)$$

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}(10+x)x - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(x^2 + 10x - x^2) = 5x$$

$$\xrightarrow{x=5(\sqrt{3}+1)} S_{\triangle ABC} = 25(\sqrt{3} + 1)$$

۳۹- پاسخ: گزینه ۱

ابتدا مانند شکل پاره خط OD را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زاویه $\hat{O}_1$ زاویه مرکزی روبه رو به کمان BD و زاویه A زاویه مماسی روبه رو به کمان BD است. با توجه به آن که $\hat{A} = 15^\circ$ است پس زاویه مرکزی $\hat{O}_1$ دو برابر زاویه A است و برابر

$$\hat{A} = 15^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 2 \times 15 = 30^\circ \text{ است.}$$

اگر شعاع دایره برابر r باشد داریم $OD = OA = r$ از طرفی در مثلث قائم الزاویه OHD داریم:

$$\triangle OHD: \cos \hat{O}_1 = \frac{OH}{OD} \xrightarrow[\substack{\hat{O}_1=30^\circ \\ OD=r}]{\substack{\hat{O}_1=30^\circ \\ OD=r}} OH \times \underbrace{\cos \hat{O}_1}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

از طرفی با توجه به آن که OC موازی HD است پس بنا بر قضیه تالس داریم:

$$\begin{cases} \triangle OHD \\ OC \parallel HD \end{cases} : \frac{AC}{CD} : \frac{AO}{OH} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{r}{\frac{\sqrt{3}}{2}r} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

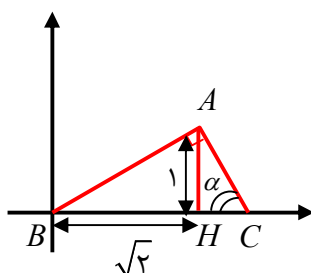
۴۰- پاسخ: گزینه ۴

در مثلث ABC ارتفاع وارد بر وتر BC را مطابق شکل رسم می‌کنیم:

با توجه به آن که مماسات نقطه A به صورت $(\sqrt{2}, 1)$ است پس $AH = 1, BH = \sqrt{2}$

است. از طرفی می‌دانیم در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب دو پاره خط ایجاد شده توسط

ارتفاع وارد بر وتر برابر مجذور ارتفاع است یعنی:

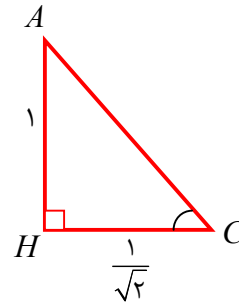


$$BH \times HC = AH^2 \xrightarrow[\substack{AH=1 \\ BH=\sqrt{2}}]{\substack{AH=1 \\ BH=\sqrt{2}}} HC = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حال در مثلث AHC با توجه به قضیه فیثاغورس طول AC را به دست می آوریم:

$$\Rightarrow AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow AC^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

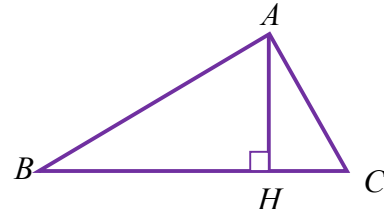


♦ **تذکر:** در هر مثلث قائم الزاویه ABC روابط طولی زیر برقرار است:

$$AB^2 = BH \times BC$$

$$\Rightarrow AC^2 = CH \times BC$$

$$\Rightarrow AH^2 = BH \times CH$$



که این روابط به کمک تشابه مثلث ها به دست می آیند.

۴۱- پاسخ: گزینه ۱

می دانیم: $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ پس:

$$-\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

چون θ یک زاویه حاده است پس $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است پس $\theta = 45^\circ$ است و در نتیجه $\tan 45^\circ = 1$ است.

۴۲- پاسخ: گزینه ۴

عبارت A را به صورت زیر می نویسیم:

$$A = \frac{1 - \tan 1^\circ}{1 + \cot 1^\circ} \times \frac{1 - \tan 2^\circ}{1 + \cot 2^\circ} \times \dots \times \frac{1 - \tan 45^\circ}{1 + \cot 45^\circ} \times \dots \times \frac{1 - \tan 89^\circ}{1 + \cot 89^\circ}$$

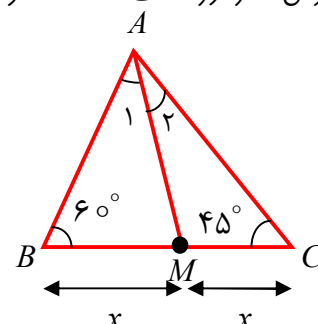
می دانیم $\tan 45^\circ = 1$ است پس $1 - \tan 45^\circ = 0$ است پس حاصل عبارت A برابر صفر است.

۴۳- پاسخ: گزینه ۱

قضیه سینوس ها را در مثلث ABM و AMC می نویسیم:

$$\triangle ABM: \frac{\sin \hat{A}_1}{BM} = \frac{\sin \hat{B}}{AM} \xrightarrow{\hat{B}=60^\circ, BM=x} \frac{\sin \hat{A}_1}{x} = \frac{\sin 60^\circ}{AM}$$

$$\triangle AMC: \frac{\sin \hat{A}_2}{MC} = \frac{\sin \hat{C}}{AM} \xrightarrow{\hat{C}=45^\circ, MC=x} \frac{\sin \hat{A}_2}{x} = \frac{\sin 45^\circ}{AM}$$



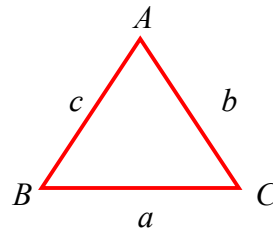
با تقسیم طرفین ۲ تساوی بالا برهم داریم:

$$\frac{\frac{\sin \hat{A}_1}{x} = \frac{\sin 60^\circ}{AM}}{\frac{\sin \hat{A}_2}{x} = \frac{\sin 45^\circ}{AM}} \Rightarrow \frac{\sin \hat{A}_1}{\sin \hat{A}_2} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

۴۴- پاسخ: گزینه ۲

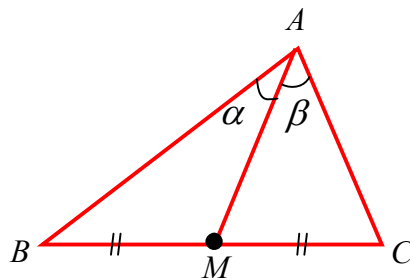
بنا بر قضیه سینوس ها در هر مثلث ABC داریم:

$$\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{\sin \hat{A}}{a}$$

پس قضیه سینوس ها را یک بار در مثلث AMB و یک بار در مثلث AMC می نویسیم:

$$\text{در مثلث } AMB, \frac{\sin \alpha}{BM} = \frac{\sin \hat{B}}{AM}$$

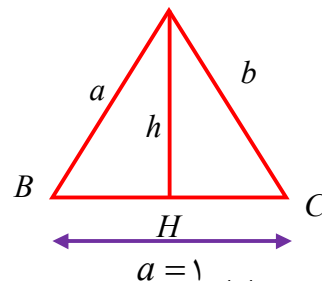
$$\text{در مثلث } AMC, \frac{\sin \alpha}{MC} = \frac{\sin \hat{C}}{AM}$$



از تقسیم دو طرف روابط فوق بر هم داریم:

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{BM} = \frac{\sin \hat{B}}{AM}}{\frac{\sin \beta}{MC} = \frac{\sin \hat{C}}{AM}} \xrightarrow{BM=MC} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

۴۵- پاسخ: گزینه ۲

در مثلث قائم الزاویه BHA داریم: $\sin \hat{B} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \sin \hat{B}$ حال سعی می کنیم به کمک قضیه سینوس ها در مثلث ABC مقدار c را بر حسب سینوس زوایای A و C بنویسیم:

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} \xrightarrow{a=1} c = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}}$$

$$h = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} \times \sin \hat{B} = \frac{\sin \hat{C} \times \sin \hat{B}}{\sin \hat{A}} \text{ در نتیجه با توجه به آن که } h = c \sin \hat{B} \text{ داریم}$$

تست های دایره مثلثاتی

۱- اگر $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ و P انتهای کمان روبه رو به زاویه α در ناحیه سوم دایره مثلثاتی باشد، مختصات P کدام است؟

- (۱) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ (۲) $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ (۳) $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ (۴) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

۲- اگر $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ و انتهای کمان روبه رو به زاویه α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\cot \alpha$ چقدر است؟

- (۱) $-\frac{2}{5}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۴) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

۳- اگر $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ و $\tan \alpha = 3 - 2m$ چند عدد طبیعی می تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی شمار

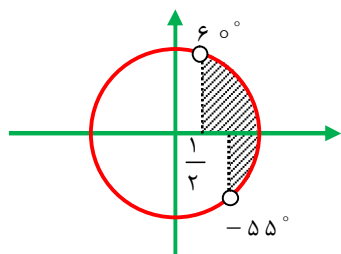
۴- اگر $18^\circ < \alpha < 225^\circ$ حاصل عبارت $A = \frac{-|\sin \alpha - \cos \alpha| - |\sin \alpha + \cos \alpha|}{|\tan \alpha - \cot \alpha| + |\tan \alpha + \cot \alpha|}$ کدام است؟

- (۱) $\sin \alpha$ (۲) $\cos \alpha$ (۳) $-\cos \alpha \cot \alpha$ (۴) $-\sin \alpha \tan \alpha$

۵- اگر $15^\circ < x < 3^\circ - 7$ ، $\sin x = 2m$ باشد حدود m کدام است.

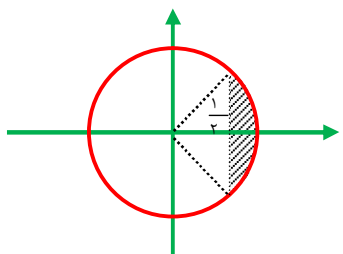
- (۱) $\left(\frac{15}{4}, 4\right)$ (۲) $\left[\frac{15}{4}, 4\right)$ (۳) $\left(\frac{15}{4}, 4\right]$ (۴) $\left[\frac{15}{4}, 4\right]$

۶- اگر $55^\circ < x < 6^\circ$ باشد حدود $\cos x$ کدام است.



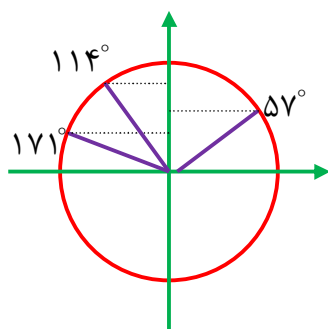
- (۱) $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ (۲) $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ (۳) $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ (۴) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

۷- اگر $20^\circ < x < 20^\circ - 1$ ، $3 \cos 3x = 3m - 1$ حدود m کدام است.



- (۱) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (۲) $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$ (۳) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (۴) $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$

۸- کدام نامساوی درست است.



(۲) $\sin 57^\circ < \sin 171^\circ < \sin 114^\circ$

(۱) $\sin 171^\circ < \sin 114^\circ < \sin 57^\circ$

(۴) $\sin 171^\circ < \sin 57^\circ < \sin 114^\circ$

(۳) $\sin 114^\circ < \sin 57^\circ < \sin 171^\circ$

۹- $\sin 57^\circ$ در چه فاصله ای است.

(۴) $(0, \frac{1}{2})$

(۳) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$

(۲) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

(۱) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

۱۰- اگر $9^\circ < x < 18^\circ$ مقدار عبارت $\frac{7}{2} \cos(2x)$ در چه بازه ای قرار می گیرد.

(۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(۳) $(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$

(۲) $(-\frac{7}{2}, 0)$

(۱) $(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$

۱۱- اگر $x = 283^\circ$ آنگاه کدا گزینه درست است؟ (آزاد تجربی ۹۰)

(۴) $\cos x < \tan x$

(۳) $\tan^2 x < \sin^2 x$

(۲) $\tan x < \sin x$

(۱) $\cos x < \sin x$

۱۲- در بازه‌ی $3^\circ < x < 45^\circ$ کدام نامساوی نادرست است. (آزاد ۸۷)

(۲) $\sqrt{\sin x} < \sqrt{\cos x}$

(۱) $\sqrt{\sin x} > \sqrt{\cos x}$

(۴) $\cos x - \sin x > 0$

(۳) $\frac{1}{2} < \sin x + \cos x < \sqrt{2}$

۱۳- با فرض $135^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\tan \alpha = \frac{2}{m-1}$ حدود تغییرات m کدام است.

(۴) $-2 < m < -1$

(۳) $-1 < m < 1$

(۲) $m < 1$

(۱) $m < -1$

۱۴- اگر $45^\circ < x < 108^\circ$, $\sin x = \frac{m}{2}$ و حدود m کدام است.

(۴) $1 \leq m < \sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{2} < m \leq 2$

(۲) $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$

(۱) $m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۵- با فرض $6^\circ < x < 15^\circ$, $\sin x = \frac{3-m^2}{3+m^2}$ مقادیر m در کدام فاصله است.

(۴) $|m| < \frac{1}{2}$

(۳) $|m| < 1$

(۲) $|m| < \sqrt{2}$

(۱) $|m| < \sqrt{3}$

۱۶- اگر $۳۰^{\circ} < x < ۱۲۰^{\circ}$ آنگاه حدود تغییرات $\sin x$ کدام است.

$$(۱) \frac{1}{2} < \sin x \leq 1 \quad (۲) ۱ < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۳) -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < 1 \quad (۴) -\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$$

۱۷- حدود k برای آنکه $\sin x = k$ در فاصله‌ی $۶۰^{\circ} \leq x \leq ۱۲۰^{\circ}$ دارای جواب باشد کدام است؟

(آزاد تجربی ۸۵)

$$(۱) \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۲) -1 \leq k \leq 1 \quad (۳) \frac{\sqrt{3}}{2} \leq k \leq 1 \quad (۴) k > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۸- اگر $۱۲۰^{\circ} \leq x \leq ۲۲۵^{\circ}$ کدام گزینه درست است؟ (آزاد تجربی ۹۰)

$$(۱) -1 \leq \cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۲) -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 0 \quad (۳) -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq -\frac{1}{2} \quad (۴) -1 \leq \cos x \leq -\frac{1}{2}$$

۱۹- اگر $\sin\left(\frac{۱۸۰^{\circ} \cos x}{۶}\right) = a$ باشد کدام بازه‌ی زیر حدود تغییرات a را نشان می‌دهد.

$$(۱) \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (۲) \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (۳) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (۴) \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

۲۰- مجموع همه‌ی مقادیر θ بین ۰° و ۳۶۰° که $\cos \theta = \frac{2}{5}$ می‌باشد چقدر است؟

$$(۱) ۱۸۰^{\circ} \quad (۲) ۲۷۰^{\circ} \quad (۳) ۳۶۰^{\circ} \quad (۴) ۵۴۰^{\circ}$$

۲۱- کدام رابطه درست است.

$$(۱) \tan ۱۳۰^{\circ} > \tan ۱۶۰^{\circ} \quad (۲) \cot ۳۱^{\circ} < \cot ۴۲^{\circ} \quad (۳) \sin ۱۳۵^{\circ} < \sin ۱۴۰^{\circ} \quad (۴) \cos ۱۹۵^{\circ} < \cos ۲۳۵^{\circ}$$

۲۲- اگر $\frac{5}{3} = 1 - \cos \theta$, $\tan \theta \cos \theta > ۰$ باشد انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی است.

$$(۱) \text{اول} \quad (۲) \text{دوم} \quad (۳) \text{سوم} \quad (۴) \text{چهارم}$$

۲۳- در بازه‌ی $۱۵^{\circ} < x < ۱۳۵^{\circ}$ کدام نامساوی درست است.

$$(۱) \sin^{\circ} x > \sin x \quad (۲) \sin x < \cos x \quad (۳) \cos x > \cos^{\circ} x \quad (۴) \cos^{\circ} x > \cos x$$

۲۴- اگر $0^\circ < x < 180^\circ$ باشد، معادله‌ی $\tan \frac{x}{2} = 4m - 6$ وقتی دارای جواب است که:

(۱) $m > 2$ (۲) $m > \frac{3}{2}$ (۳) $m < 2$ (۴) $m < \frac{3}{2}$

۲۵- اگر $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ و $\cos \alpha \tan \alpha < 0$ باشد آنگاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است.

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۲۶- می‌دانیم دو خط d و d' بر هم عمود هستند و خط d با جهت مثبت محور x ها زاویه 30° می‌سازد. شیب خط d' چقدر است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $-\sqrt{3}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲۷- در محل تقاطع خط d و خط $x = 4$ در بالای محور x ها، زاویه‌ی حاده‌ی 30° ایجاد شده است. اگر خط محور طول ها را در نقطه‌ای با طول $x' < 4$ قطع نماید. شیب این خط کدام است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $-\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{3}$

۲۸- اگر $45^\circ < \theta < 60^\circ$ ، $m = 1 - \sqrt{2} \cos \theta$ باشد حدود m کدام است؟

(۱) $0 < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2} < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $0 < m < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1$

۲۹- اگر $30^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ ، $\sin \alpha = \frac{2m-1}{4}$ باشد حدود m کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$ (۳) $\frac{3}{2} < m \leq \frac{5}{2}$ (۴) $\frac{1}{2} < m \leq 1$

۳۰- اختلاف بین بیشترین مقدار تابع $y = -2 \cos x + 1$ و کمترین مقدار تابع $y = 1 - 3 \sin^2 x$ چقدر است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۳۱- بیشترین مقدار عبارت $|4 \cos x - 6|$ کدام است؟

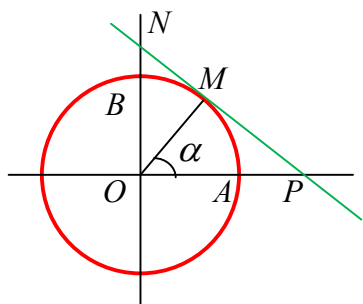
(۱) ۱۰ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۳۲- با فرض $135^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\sin \theta = \frac{1-2m}{3}$ حدود تغییرات m کدام است؟

- (۱) $|m| < \frac{1}{3}$ (۲) $|m| < \frac{1}{3}$ (۳) $|m| < 3$ (۴) $|m| > 3$

۳۳- اگر $-6^\circ < \alpha < 6^\circ$ و $\cos \alpha = 3m + 1$ حدود m کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6} < m < 0$ (۲) $0 \leq m < \frac{1}{6}$ (۳) $-\frac{1}{6} < m < \frac{1}{6}$ (۴) $-\frac{1}{6} < m \leq 0$



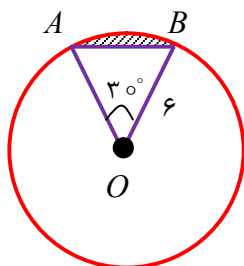
۳۴- در دایره مثلثاتی مقابل، زاویه α را جدا می کنیم و در M مماس بر

دایره رسم کرده ایم. اندازه MP کدام است؟

- (۱) $\tan \alpha$ (۲) $\sin \alpha \cos \alpha$ (۳) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۴) $\frac{1}{\sin \alpha}$

۳۵- مساحت یک دوزنقه متساوی الساقین که طول ساق آن برابر ۱۲ و زاویه حاده آن 60° است برابر $120\sqrt{3}$ می باشد محیط دوزنقه چقدر است؟

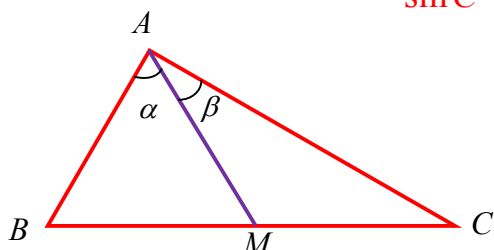
- (۱) ۵۶ (۲) ۸۴ (۳) ۴۲ (۴) ۶۴



۳۶- در دایره مقابل مساحت قطعه رنگ شده چقدر است؟

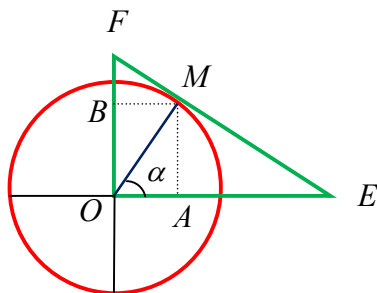
- (۱) $2\pi - 5$ (۲) $6\pi - 10$ (۳) $3\pi - 6$ (۴) $3\pi - 9$

۳۷- در مثلث ABC اگر AM میانه وارد بر ضلع BC باشد حاصل $\frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}}$ با کدام گزینه برابر است؟



- (۱) $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ (۲) $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ (۳) $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$ (۴) $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$

۳۸- در دایره مثلثاتی مقابل EF در نقطه M بر دایره مماس است. مقدار AE کدام است؟



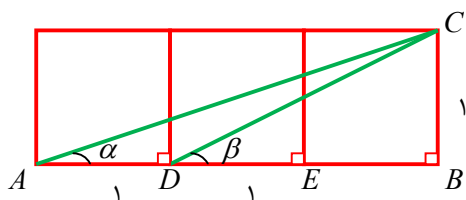
$$\frac{1}{\sin \alpha} \quad (1)$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \quad (2)$$

$$\sin \alpha \cos \alpha \quad (3)$$

$$\tan \alpha \quad (4)$$

۳۹- در شکل زیر $\tan \alpha + \tan \beta$ کدام است؟



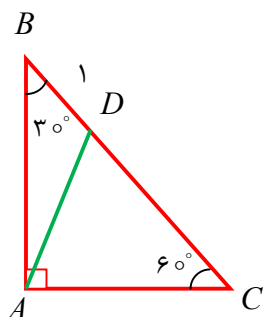
$$\frac{5}{6} \quad (1)$$

$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$\frac{6}{5} \quad (3)$$

$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

۴۰- در شکل زیر اگر مساحت مثلث قائم الزاویه ABC برابر $2\sqrt{3}$ باشد مساحت مثلث ABD کدام است؟



$$(AC=2, BD=1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{3} \quad (1)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (3)$$

۴۱- در یک لوزی به طول ضلع ۵ واحد کسینوس زاویه بزرگتر برابر $-\frac{3}{5}$ است. مساحت این لوزی چند واحد مربع

است؟

$$25 \quad (4)$$

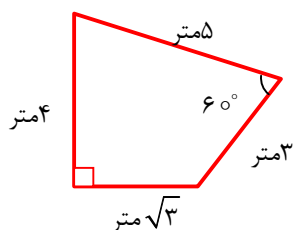
$$20 \quad (3)$$

$$10 \quad (2)$$

$$15 \quad (1)$$

۴۲- کارگری برای کوتاه کردن چمن های هر مترمربع از یک زمین چمن ۱۰۰ ریال پول دریافت می کند. این کارگر برای

کوتاه کردن چمن های زمین چمن زیر چند ریال پول دریافت می کند؟



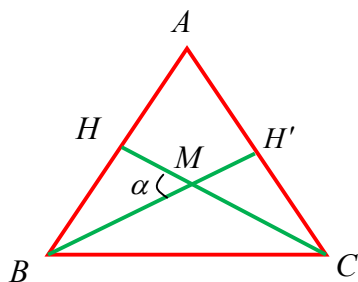
$$575\sqrt{3} \quad (2)$$

$$1150\sqrt{3} \quad (1)$$

$$577\sqrt{3} \quad (4)$$

$$755\sqrt{3} \quad (3)$$

۴۳- مثلث ABC را در نظر بگیرید در حال کلی طول ارتفاع BH' برابر کدام گزینه است؟ (M محل برخورد دو ارتفاع وارد بر اضلاع است.)



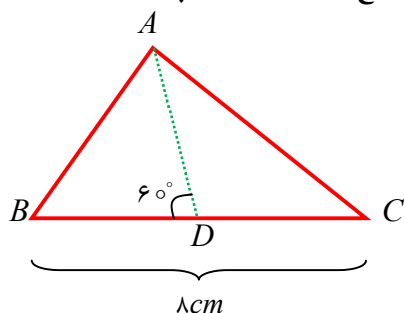
$$\frac{BH + \sin \alpha \cos \alpha MC}{\sin \alpha} \quad (2)$$

$$\frac{MC + \sin \alpha \cos \alpha BH}{\sin \alpha} \quad (4)$$

$$\frac{BH + \sin \alpha \cos \alpha MC}{\cos \alpha} \quad (1)$$

$$\frac{MC + \sin \alpha \cos \alpha BH}{\cos \alpha} \quad (3)$$

۴۴- مثلث زیر توسط خط AD به دو قسمت تقسیم شده است، اگر طول ضلع $BC = 8cm$ باشد مساحت مثلث ABC چند سانتی متر مربع است؟ ($AD = \sqrt{27}cm$)



(1) 3

(2) 18

(3) 12

(4) 24

۴۵- اگر خط $3 = my - (2m - 1)x$ با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی 60° بسازد، مقدار m کدام است؟

$$-(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \quad (4)$$

$$2 + \sqrt{3} \quad (3)$$

$$\sqrt{3} + 1 \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} + \sqrt{2} \quad (1)$$

پاسخنامه تست های دایره مثلثاتی

۱- گزینه ۲

پاسخ: می دانیم $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ پس $\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$ و $3y = x$

با توجه به قضیه فیثاغورس می توان نوشت

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (3y)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{10}$$

چون P در ناحیه سوم است، پس $y = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ و در نتیجه $x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

۲- گزینه ۴

پاسخ: اگر P(x, y) انتهای کمان روبه رو به زاویه α در دایره یمثلثاتی باشد، آن گاه $\cos \alpha = x$ بنابرین $x = \frac{2}{3}$

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه ی شکل مقابل می توان نوشت

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{4}{9} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

از طرف دیگر، می دانیم $\cot \alpha = \frac{x}{y}$ بنابرین

$$\cot \alpha = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۳- گزینه ۱

پاسخ: وقتی $45^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ مقدار $\tan \alpha$ هر عدد دلخواه بزرگ تر از یک می تواند باشد. یعنی $\tan \alpha \geq 1$

بنابرین

$$3 - 2m \geq 1 \Rightarrow 2m \leq 2 \Rightarrow m \leq 1$$

پس m فقط یک مقدار طبیعی می تواند داشته باشد.

۴- گزینه ۱

پاسخ: اگر انتهای کمان روبه رو به زاویه α در ناحیه سوم باشد، آن گاه

$$\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha < 0$$

$$\begin{cases} \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha > 0$$

اگر به دو مسأله ی قبل توجه کنید، متوجه می شوید که اگر $180^\circ < \alpha < 225^\circ$ ، آن گاه $\sin \alpha > \cos \alpha$ و $\tan \alpha < \cot \alpha$ بنابرین

$$\sin \alpha - \cos \alpha > 0, \quad \tan \alpha - \cot \alpha < 0$$

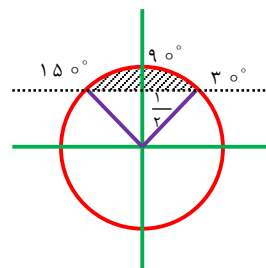
حال عبارت داده شده را با برداشتن قدرمطلق ها ساده می کنیم:

$$A = \frac{-\sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha + \cos \alpha}{-\tan \alpha + \cot \alpha + \tan \alpha + \cot \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{2 \cot \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \sin \alpha$$

۵- گزینه ۳

$$\frac{1}{2} < \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < 2m - 7 \leq 1 \Rightarrow \frac{15}{2} < 2m \leq 8 \Rightarrow \frac{15}{4} < m \leq 4$$

گزینه (۳) درست است.



$$\frac{1}{2} < \cos x \leq 1 \quad \text{گزینه ۳}$$

۷- گزینه ۲

$$\Rightarrow \cos 3x = \frac{3m-1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{3m-1}{3} \leq 1 \Rightarrow \frac{2}{3} < m \leq 1 \rightarrow \text{گزینه (۲)}$$

۸- گزینه ۴

با توجه به عمود بر محور y ها (مقدار $\sin$) داریم: $\sin 171^\circ < \sin 57^\circ < \sin 114^\circ$

گزینه (۴) درست است.

۹- گزینه ۱

$$45^\circ < 57^\circ < 60^\circ$$

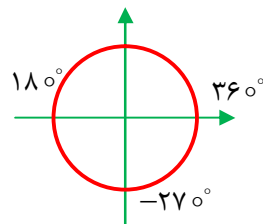
$$\Rightarrow \sin 45^\circ < \sin 57^\circ < \sin 60^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 57^\circ < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 57^\circ \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ گزینه (۱) درست است.}$$

۱۰- گزینه ۳

$$90^\circ < x < 180^\circ \rightarrow 180^\circ < 2x < 360^\circ$$

$$\begin{cases} \cos 180^\circ = -1 \\ \cos 270^\circ = 0 \Rightarrow -1 < \cos 2x < 1 \\ \cos 360^\circ = 1 \end{cases}$$

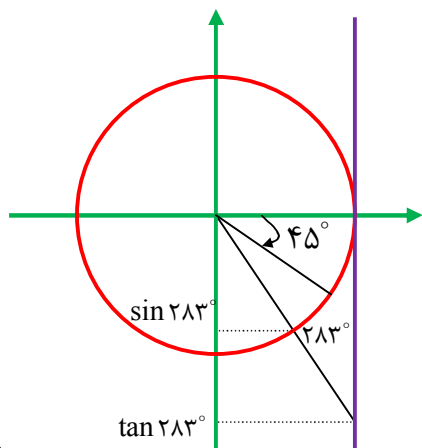
$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \cos(2x) < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cos 2x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ گزینه (۳) درست است.}$$



۱۱- گزینه ۲

 $\cos x$ مثبت اما $\sin x$ منفی است پس $\cos x > \sin x$ (گزینه ۱ نادرست است) $\tan x$ هم در ناحیه‌ی چهارم منفی است ($\cos x > \tan x$) پس گزینه ۴ هم نادرست است.گزینه (۲) درست است. $\tan 283^\circ < \sin 283^\circ$

$$\begin{cases} \tan x < -1 \\ -1 < \sin x < 0 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x < \tan^2 x \text{ گزینه (۳) نادرست است.}$$



۱۲- گزینه ۱

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

گزینه (۱) نادرست است. $\Rightarrow \sin x < \cos x \rightarrow \sqrt{\sin x} < \sqrt{\cos x}$

۱۳- گزینه ۱

$$135^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \tan 135^\circ = -1 \\ \tan 180^\circ = 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < \tan \alpha < 0 \Rightarrow -1 < \frac{2}{m-1} < 0$$

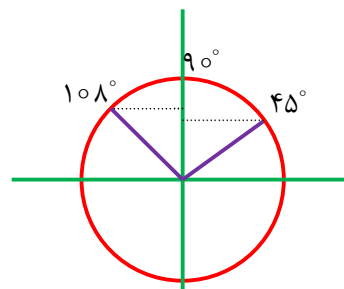
$$\begin{cases} -1 < \frac{2}{m-1} \Rightarrow 0 < \frac{2}{m-1} + 1 \Rightarrow 0 < \frac{2+m-1}{m-1} \Rightarrow 0 < \frac{m+1}{m-1} \\ \Rightarrow m > 1 \quad \text{یا} \quad m < -1 \quad (1) \end{cases} \longrightarrow m > 1 \quad \text{یا} \quad m < -1 \quad \cap \quad m < 1 \rightarrow \boxed{m < -1}$$

$$\frac{2}{m-1} < 0 \Rightarrow m-1 < 0 \Rightarrow m < 1 \quad (2)$$

۱۴- گزینه ۳

$$\sin 45^\circ < \sin x \leq \sin 90^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{2} < m \leq 2}$$



۱۵- گزینه ۳

$$\begin{cases} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 90^\circ = 1 \\ \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{3-m^2}{3+m^2} \leq 1$$

همواره درست

$$\frac{1}{2} < \frac{3-m^2}{3+m^2} \Rightarrow 3+m^2 < 2(3-m^2) \Rightarrow 3+m^2 < 6-2m^2 \Rightarrow 3m^2 < 3 \Rightarrow m^2 < 1 \Rightarrow |m| < 1$$

گزینه (۳) درست است.

$$\frac{3-m^2}{3+m^2} \leq 1 \Rightarrow 3-m^2 \leq 3+m^2 \quad \text{همواره درست}$$

۱۶- گزینه ۱

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin x \leq 1 \quad \text{گزینه (۱) درست است.} \\ \sin 90^\circ = 1 \end{cases}$$

۱۷- گزینه ۳

$$\begin{cases} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq k \leq 1 \\ \sin 90^\circ = 1 \end{cases}$$

۱۸- گزینه ۴

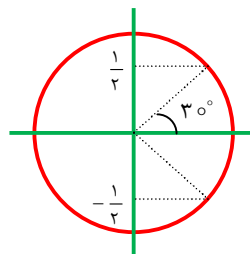
$$\begin{cases} \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \\ \cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq -\frac{1}{2} \\ \cos 180^\circ = -1 \end{cases}$$

۱۹- گزینه ۲

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x \leq 1 &\Rightarrow -\frac{1}{6} \leq \frac{\cos x}{6} \leq \frac{1}{6} \\ -30^\circ \leq \frac{180^\circ \cos x}{6} &\leq 30^\circ \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $\alpha = \frac{180^\circ \cos x}{6}$ داریم:

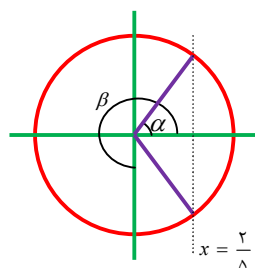
$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{1}{2}$$



گزینه (۲)

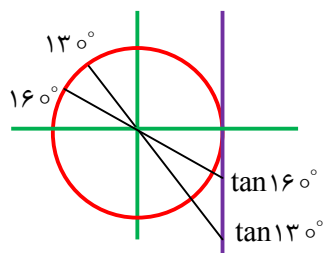
۲۰- گزینه ۳

$$\beta = 360^\circ - \alpha \rightarrow \alpha + \beta = 360^\circ$$



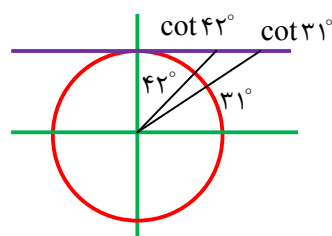
۲۱- گزینه ۴

(بررسی گزینه ۱)



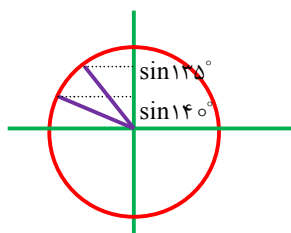
$$\tan 16^\circ > \tan 13^\circ$$

(بررسی گزینه ۲)



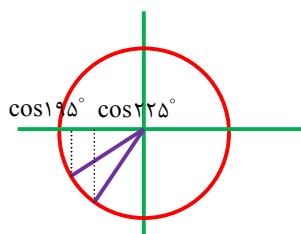
$$\cot 31^\circ > \cot 41^\circ$$

(بررسی گزینه ۳)



$$\sin 135^\circ > \sin 140^\circ$$

(بررسی گزینه ۴)



$$\cos 235^\circ > \cos 195^\circ$$

۲۲- گزینه ۲

$$1 - \cos \theta = \frac{5}{3} \rightarrow \cos \theta = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$$

یعنی انتهای کمان θ در ناحیه‌ی دوم یا سوم است.

$$\tan \theta \cos \theta > 0 \rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos \theta > 0 \Rightarrow \sin \theta > 0$$

یعنی انتهای کمان θ در ناحیه اول یا دوم است.

اشتراک دو جواب: انتهای کمان θ در ناحیه دوم است. گزینه (۲) درست است.

۲۳- گزینه ۴

$$135^\circ < x < 150^\circ \rightarrow \sin 150^\circ < \sin x < \sin 135^\circ \rightarrow \frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$135^\circ < x < 150^\circ \rightarrow \cos 150^\circ < \cos x < \cos 135^\circ \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

چون $0 < \sin x < 1$ پس $\sin^4 x$ از $\sin x$ کمتر است (رد گزینه ۱)

چون $\sin x$ مقداری مثبت است و $\cos x$ مقداری منفی است پس $\sin x > \cos x$ (رد گزینه ۲)

چون $-1 < \cos x < 0$ پس $\cos^3 x > \cos x$ (رد گزینه ۳ و درستی گزینه ۴)

۲۴-۲

$$0^\circ < x < 18^\circ \Rightarrow 0^\circ < \frac{x}{2} < 9^\circ \Rightarrow 0 < \tan \frac{x}{2} < \infty \Rightarrow \tan \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow 4m - 6 > 0 \Rightarrow m > \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow m > \frac{3}{2}$$

۲۵- گزینه ۳

$$\sin \alpha \cos \alpha > 0 \rightarrow yx > 0$$

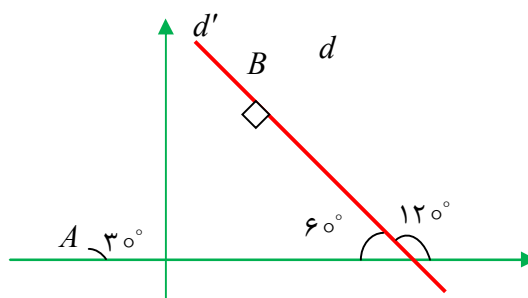
یعنی x , y هم علامت هستند پس α یا در ناحیه‌ی اول است یا در ناحیه سوم.

$$\cos \alpha \tan \alpha < 0 \rightarrow \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} < 0 \rightarrow \sin \alpha < 0$$

یعنی α در ناحیه‌ی سوم یا چهارم است.اشتراک دو جواب: α در ناحیه سوم است.

۲۶- گزینه ۲

$$d': ax + b \Rightarrow a = \tan 12^\circ = -\tan 6^\circ = -\sqrt{3}$$



گزینه (۲) درست است.

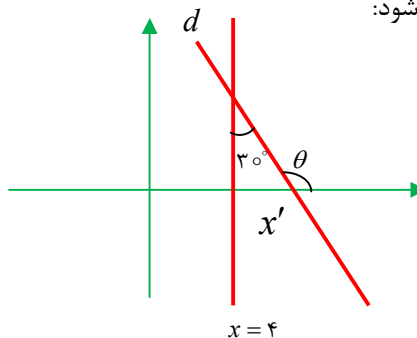
۲۷- گزینه ۴

خط d به یکی از دو حالت زیر می شود:

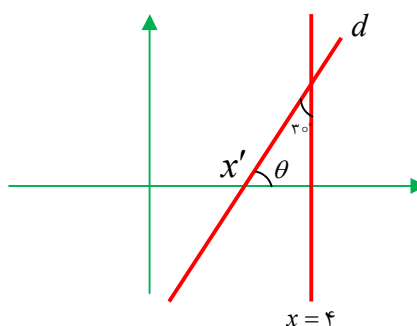
(حالت اول)

$$\theta = 9^\circ + 3^\circ = 12^\circ$$

$$\Rightarrow m = \tan(12^\circ) = -\tan 6^\circ = -\sqrt{3}$$



(حالت دوم)

اما چون گفته $x' < 4$ پس $\theta = 6^\circ$ یعنی: $m = \tan 6^\circ = \sqrt{3}$ پس گزینه (۴) درست است.

۲۸- پاسخ: گزینه ۳

با استفاده از دایره مثلثاتی و با توجه به هر دو $\cos \theta$ را تعیین می‌کنیم. برای این کار روی دایره مثلثاتی در محدوده مشخص شده برای θ حرکت می‌کنیم. تصویر نقاط روی محور x ها برابر با $\cos \theta$ است.

$$\cos 60^\circ < \cos \theta < \cos 45^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} < \cos \theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow{\times -\sqrt{2}} -\frac{\sqrt{2}}{2} > -\sqrt{2} \cos \theta > -1 \xrightarrow{+1} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 1 - \sqrt{2} \cos \theta > 0$$

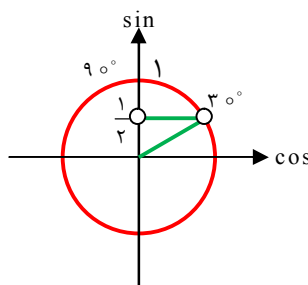
$$\Rightarrow \theta < m < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۹- پاسخ: گزینه ۳

$$30^\circ < \alpha \leq 90^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin \alpha \leq 1$$

$$\frac{1}{2} < \frac{2m-1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} 2 < 2m-1 \leq 4$$

$$\xrightarrow{+1} 3 < 2m \leq 5 \xrightarrow{\div 2} \frac{3}{2} < m \leq \frac{5}{2}$$



۳۰- پاسخ: گزینه ۳

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{\times (-2)} -2 \leq -2 \cos x \leq 2 \xrightarrow{+1} -1 \leq -2 \cos x + 1 \leq 3$$

پسیندر: بنابر این بیشترین مقدار تابع $y = -2 \cos x + 1$ برابر ۳ است. از طرفی:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times (-3)} -3 \leq -3 \sin^2 x \leq 0$$

$$\xrightarrow{+1} -2 \leq 1 - 3 \sin^2 x \leq 1$$

در نتیجه کمترین مقدار تابع $y = 1 - 3 \sin^2 x$ برابر -۲ است، پس اختلاف بین دو مقدار به دست آمده برابر ۵ می‌باشد.

۳۱- پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم $-1 \leq \cos x \leq 1$ بنابر این:

$$-4 \leq 4 \cos x \leq 4 \xrightarrow{-6} -10 \leq 4 \cos x - 6 \leq -2 \Rightarrow |4 \cos x - 6| \leq 10$$

در نتیجه بیشترین مقدار $|4 \cos x - 6|$ برابر ۱۰ است.

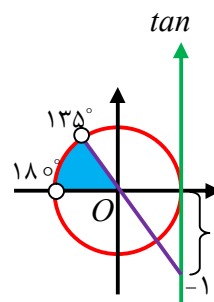
۳۲- پاسخ: گزینه ۲

شکل مقابل را ببینید:

$$135^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow -1 < \tan \alpha < 0 \Rightarrow -1 < \frac{3m-1}{2} < 0$$

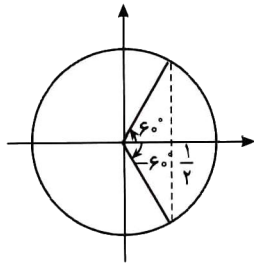
$$\xrightarrow{\times 2} -2 < 3m-1 < 0 \xrightarrow{+1} -1 < 3m < 1$$

$$\xrightarrow{\div 3} -\frac{1}{3} < m < \frac{1}{3} \Rightarrow |m| < \frac{1}{3}$$



۳۳-

پاسخ: مطابق شکل، $\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.



وقتی α از -60° تا 60° تغییر می‌کند، ابتدا تا 0° مقدار $\cos \alpha$ افزایش می‌یابد و سپس از 0° تا 60° کاهش می‌یابد. بنابراین $\cos \alpha$ در 0° به بیش‌ترین مقدار خود، یعنی ۱ می‌رسد. پس

$$\frac{1}{2} < \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < 3m + 1 \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < 3m \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} < m \leq 0.$$

۳۴- پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم در هر مثلث قائم الزاویه تانژانت زاویه α ($\alpha \neq 90^\circ$) برابر طول ضلع مقابل به

زاویه α تقسیم بر طول ضلع مجاور به زاویه α است. در شکل زیر با توجه به آنکه OM

برابر شعاع دایره مثلثاتی است و می‌دانیم خط مماس بر دایره بر شعاع دایره عمود است داریم:

$$\tan \alpha = \frac{MP}{OM} \xrightarrow{OM=1} \tan \alpha = MP$$

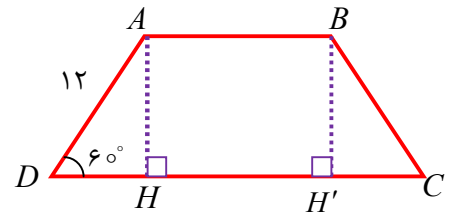
۳۵- پاسخ: گزینه ۴

از نقاط A, B ارتفاع‌های AH, BH' را رسم می‌کنیم:

$$\sin \hat{D} = \sin 60^\circ = \frac{AH}{AD} \Rightarrow AH = AD \cdot \sin 60^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\cos \hat{D} = \cos 60^\circ = \frac{DH}{AD} \Rightarrow DH = AD \cdot \cos 60^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = HH' = x \\ DH = CH' = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AB = x \\ CD = 12 + x \end{array} \right.$$



$$S = \frac{1}{2}(AB + CD) \times AH \Rightarrow 120\sqrt{3} = \frac{1}{2}(12 + 2x)6\sqrt{3} \Rightarrow 120\sqrt{3} = (12 + 2x)3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 12 + 2x = 40 \Rightarrow 2x = 28$$

$$\Rightarrow x = 14 \Rightarrow \text{محیط} = AB + BC + CD + DA = 14 + 12 + 26 + 12 = 64$$

۳۶- پاسخ: گزینه ۴

به قسمتی از دایره که بین دو شعاع قرار می‌گیرد قطاع گفته می‌شود. زاویه مرکزی O برابر 30° است و چون $\frac{1}{12}$ زاویه 360°

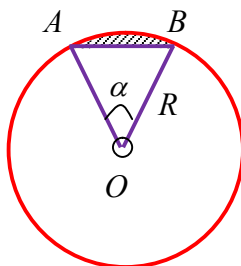
است پس مساحت قطاع OAB نیز $\frac{1}{12}$ مساحت دایره است.

$$S_{OAB \text{ قطاع}} = \frac{1}{12} \pi R^2 \Rightarrow \frac{\pi}{12} (6)^2 = 3\pi$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin \hat{O} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \sin 30^\circ = 9 \Rightarrow S_{\text{مجموعه}} = 3\pi - 9$$

به قسمتی از دایره که بین یک وتر و محیط دایره قرار دارد قطعه می‌گویند که مساحت آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_{\text{قطعه}} = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha)$$



در رابطه فوق α بر حسب رادیان می باشد.

۳۷- پاسخ: گزینه ۱

نسبت مساحت مثلث های ABM و ACM را به دو روش مناسبه می کنیم:

$$(I): \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ACM}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AM \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} AC \cdot AM \cdot \sin \beta} = \frac{AB \cdot \sin \alpha}{AC \cdot \sin \beta}$$

$$(II): \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ACM}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot BM \cdot \sin \hat{B}}{\frac{1}{2} AC \cdot CM \cdot \sin \hat{C}} = \frac{AB \cdot \sin \hat{B}}{AC \cdot \sin \hat{C}} \quad (BM = CM)$$

$$(I), (II) \Rightarrow \frac{AB \cdot \sin \alpha}{AC \cdot \sin \beta} = \frac{AB \cdot \sin \hat{B}}{AC \cdot \sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

۳۸- پاسخ: گزینه ۲

$$\triangle OME: \tan \alpha = \frac{ME}{OM} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{ME}{1} \Rightarrow ME = \tan \alpha$$

$$\begin{cases} \alpha + \hat{AMO} = \frac{\pi}{2} \\ \hat{AMD} + \hat{AMO} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \hat{AME} = \alpha$$

$$\triangle OME: \sin(\hat{AME}) = \frac{AE}{ME} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{AE}{\tan \alpha} \Rightarrow AE = \sin \alpha \cdot \tan \alpha = \sin \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

۳۹- پاسخ: گزینه ۱

$$\text{در مثلث } ABC, \tan \alpha = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}, \text{ در مثلث } DCB, \tan \beta = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ است پس:}$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

۴۰- پاسخ: گزینه ۲

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \times AB \times 2 = 2\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$$

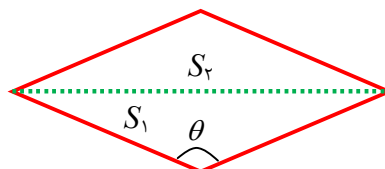
$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times AB \times BD \times \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 \times \sin 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۱- پاسخ: گزینه ۳

$$\cos \theta = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 25 \times \frac{4}{5} = 10$$

$$S_{\text{لوزی}} = S_1 + S_2 \xrightarrow{S_2=S_1} 10 + 10 = 20$$



۴۲- پاسخ: گزینه ۲

با توجه به شکل مساحت کل زمین برابر مجموع مساحت های S_1 و S_2 می باشد داریم:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{3} \times \sin 90^\circ + \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} + \frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{23\sqrt{3}}{4} m^2$$

$$\text{دست مزد کارگر} = \frac{23\sqrt{3}}{4} \times 100 = 575\sqrt{3} \text{ ریال}$$

۴۳- پاسخ: گزینه ۲

$$\sin \alpha = \frac{BH}{MB} \Rightarrow MB = \frac{BH}{\sin \alpha}$$

$$H'MC = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{MH'}{MC} \Rightarrow MH' = MC \cos \alpha$$

$$BH' = MB + MH' = \frac{BH}{\sin \alpha} + MC \cos \alpha = \frac{BH + \sin \alpha \cos \alpha MC}{\sin \alpha}$$

۴۴- پاسخ: گزینه ۲

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC} \Rightarrow \frac{1}{2} AD \times BD \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} AD \times DC \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} AD \sin 60^\circ + (BD + DC) = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 18 cm^2$$

۴۵- پاسخ: گزینه ۳

$$my - (2m-1)x = 3 \Rightarrow my = (2m-1)x + 3 \Rightarrow y = \frac{2m-1}{m}x + \frac{3}{m} \Rightarrow \frac{2m-1}{m} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2m-1}{m} = \sqrt{3} \Rightarrow 2m-1 = \sqrt{3}m \Rightarrow (2-\sqrt{3})m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

تست روابط بین نسبت های مثلثاتی زاویه α (روابط پایه)

سؤال ۱: مقدار $\frac{\tan^2 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ} + \frac{\cot^2 15^\circ}{1 + \cot^2 15^\circ}$ چه عددی است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

سؤال ۲: اگر $2\cos\alpha + 3\cos^2\alpha = 5$ باشد حاصل $\sin\alpha + \tan^2\alpha$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) صفر

سؤال ۳: اگر $\sin^2 x + \sin^2 60^\circ = \tan^2 x$ چه عددی است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۲

سؤال ۴: حاصل عبارت مثلثاتی $A = \cot\alpha + \cot\alpha \tan^2\alpha$ همواره کدام است؟ (عبارت ها تعریف شده هستند.)

- (۱) $\sin\alpha \cos\alpha$ (۲) $\frac{1}{\sin\alpha \cos\alpha}$ (۳) $\frac{1}{\tan\alpha - \cot\alpha}$ (۴) $\cot\alpha - \tan\alpha$

سؤال ۵: حاصل عبارت $A = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + (\sqrt{2}\sin\alpha \cos\alpha)^2$ همواره کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) $1 + \tan^2\alpha$

سؤال ۶: اگر $\tan x = \frac{5}{6}$ باشد آنگاه حاصل عبارت $A = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ برابر با کدام گزینه زیر است؟

- (۱) $\frac{1}{7}$ (۲) $-\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{1}{11}$ (۴) $-\frac{1}{11}$

سؤال ۷: حاصل عبارت A کدام است؟ ($\cos\theta \neq 0$)

$$A = (1 + \sin\theta) \left(\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta \right) (1 - \sin\theta)^2$$

- (۱) $\tan\theta \sin\theta$ (۲) $\cos^2\theta$ (۳) $\frac{1 + \sin^2\theta}{\cos\theta}$ (۴) $\cos^3\theta$

سؤال ۸: حاصل عبارت $B = \frac{\sin^2 \alpha \left(\tan \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right)}{\sin \alpha \cos \alpha (1 + \tan \alpha + \tan^2 \alpha)}$ کدام گزینه است؟ $\left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$

- (۱) $1 + \tan \alpha$ (۲) $1 + \tan^2 \alpha$ (۳) $\tan \alpha$ (۴) $\tan^2 \alpha$

سؤال ۹: خلاصه شده عبارت $A = 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)$ کدام است؟

- (۱) $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$ (۲) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$ (۳) ۱ (۴) -۱

سؤال ۱۰: اگر $2(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + 3(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = -\frac{37}{16}$ باشد مقدار $\tan \alpha + \cot \alpha$ چقدر است؟

- (۱) $\pm \frac{3}{4}$ (۲) $\pm \frac{4}{3}$ (۳) $\pm \frac{2}{3}$ (۴) $\pm \frac{3}{2}$

سؤال ۱۱: اگر $\frac{3 \sin x}{1 + \cos x} = 4$ باشد حاصل $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$ کدام است؟ $(x \neq 2k\pi + \pi)$

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{16}{9}$ (۴) $\frac{9}{16}$

سؤال ۱۲: اگر در مثلث قائم الزاویه ABC ، تساوی $\sin \hat{B} + \sin \hat{C} = \cos \hat{B}$ برقرار باشد، مجموع تانژانت و کتانژانت زاویه B چقدر است؟

- (۱) $-\frac{25}{12}$ (۲) -۲ (۳) $\frac{25}{12}$ (۴) ۲

سؤال ۱۳: اگر $\frac{2 \sin x - \cos x}{\sin x + 4 \cos x} = 3$ باشد حاصل $\cot x - \tan x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{120}{11}$ (۲) $-\frac{170}{13}$ (۳) $\frac{168}{13}$ (۴) $\frac{169}{13}$

سؤال ۱۴: اگر $x^2 + y^2 = 2, x + y = 2 \cos \theta$ باشد حاصل $|x - y|$ کدام است؟ $(\theta$ در ناحیه اول مثلثاتی است)

- (۱) $\sin \theta$ (۲) $2 \cos^2 \theta$ (۳) $2 \sin \theta$ (۴) $\cos x - 1$

سؤال ۱۵: اگر $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$ باشد حاصل $\sin x - \cos x$ چقدر می تواند باشد؟

- (۱) $\frac{7}{16}$ (۲) $\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{7}}{4}$

سؤال ۱۶: اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2m-1}$, $\cot \alpha = m+2$ مقدار $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{65}{16}$ (۲) $\frac{626}{25}$ (۳) $\frac{26}{9}$ (۴) $\frac{16}{5}$

سؤال ۱۷: اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $9^\circ < \alpha < 18^\circ$ مقدار $\tan \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{31}{20}$ (۲) $-\frac{1}{20}$ (۳) $-\frac{31}{20}$ (۴) $\frac{1}{20}$

سؤال ۱۸: اگر $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$, $27^\circ < \alpha < 36^\circ$ مقدار $\sin \alpha - \cos \alpha$ را بیابید.

- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

سؤال ۱۹: اگر $\frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ مقدار $\frac{2 \tan \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \tan \alpha - 4 \cot \alpha}$ عبارت را حساب کنید.

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{7}{8}$

سؤال ۲۰: حاصل $\left(\frac{1}{\cos \theta} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos \theta} + 1\right)$ برابر کدام است؟ (کنکور)

- (۱) $\tan^2 \theta$ (۲) $\cot^2 \theta$ (۳) $\frac{1}{\sin^2 \theta}$ (۴) $\frac{1}{\cos^2 \theta}$

سؤال ۲۱: حاصل عبارت $\cos^2 \theta (1 + 2 \tan^2 \theta) + (\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$ کدام است؟ (کنکور)

- (۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) 2

سؤال ۲۲: عبارت $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ با کدام برابر نیست؟ (کنکور)

- (۱) $2 \sin \theta \cos \theta - 1$ (۲) $1 - 2 \sin^2 \theta$ (۳) $2 \cos^2 \theta - 1$ (۴) $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

سؤال ۲۳: حاصل $\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} - (1 + \tan \theta)(1 + \tan \theta)$ برابر با کدام است.

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) -۱

سؤال ۲۴: حاصل عبارت $\cos \theta (\cos \theta + \sin \theta \tan \theta)$ برابر است با: (کنکور)

- (۱) $\cos^2 \theta$ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) $\sin^2 \theta$

سؤال ۲۵: ساده شده عبارت $(1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta)$ کدام است؟ (کنکور)

- (۱) $2 \cot^2 \theta$ (۲) $2 \tan^2 \theta$ (۳) $1 - 2 \cos^2 \theta$ (۴) $1 - 2 \sin^2 \theta$

سؤال ۲۶: حاصل عبارت $\frac{\sin \theta}{(\sin \theta)^{-1} + 1} + \frac{\sin \theta}{(\sin \theta)^{-1} - 1}$ کدام است.

- (۱) $2 \sin^2 \theta$ (۲) $2 \tan^2 \theta$ (۳) $2 \cos^2 \theta$ (۴) $2 \cot^2 \theta$

سؤال ۲۷: حاصل عبارت $\tan^2 \theta \cos^2 \theta + \cot^2 \theta \sin^2 \theta$ برابر است با: (کنکور)

- (۱) ۱ (۲) $\cos^2 \theta$ (۳) $\sin^2 \theta$ (۴) $\tan^2 \theta$

سؤال ۲۸: اگر θ زاویه حاده و $x = \frac{1}{3} \cos \theta, y = 2 \sin \theta$ باشد آنگاه کدام درست است.

- (۱) $y^2 + 36x^2 = 4$ (۲) $y^2 + 36x^2 = 9$ (۳) $36y^2 + x^2 = 4$ (۴) $36y^2 + x^2 = 9$

سؤال ۲۹: ساده شده عبارت $\frac{1 - (3 \sin^2 x \cos^2 x)^2}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ کدام است.

- (۱) $1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$ (۲) $1 - 9 \sin^2 x \cos^2 x$ (۳) $1 + 3 \sin^2 x \cos^2 x$ (۴) $1 + 9 \sin^2 x \cos^2 x$

سؤال ۳۰: حاصل عبارت $\frac{(1 - 2 \sin x \cos x)(1 + 2 \sin x \cos x) + 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) $1 - \sin^2 x \cos^2 x$ (۴) ۱

سؤال ۳۱: اگر $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$ باشد مقدار $\sin^2 x \cos^2 x$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

سؤال ۳۲: اگر $\tan x = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$ که در آن $0 < x < 90^\circ, a > b > 0$ آنگاه $\sin x$ برابر است با:

- (۱) $\frac{b}{a}$ (۲) $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2a}$ (۳) $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab}$ (۴) $\frac{2ab}{a^2 + b^2}$

سؤال ۳۳: اگر $\cot x = a + 2$ و $\sin x = \frac{1}{b}$ آنگاه کدام رابطه درست است.

- (۱) $a^2 + b^2 = 2ab$ (۲) $b^2 = 1 + (a + 2)^2$ (۳) $(a + 1)^2 + b^2 = 1$ (۴) $(a + 2)^2 + b^2 = 1$

سؤال ۳۴: اگر θ زاویه‌ی حاده باشد و $\cot \theta = \frac{a - b}{a + b}$ آنگاه کدام است. ($a > b > 0$)

- (۱) $\frac{a + b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ (۲) $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a - b}$ (۳) $\frac{a + b}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}$ (۴) $\frac{a - b}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}$

سؤال ۳۵: به ازای کدام مقدار A تساوی $\tan^4 x - 1 = \frac{A}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^4 x}$ یک اتحاد است؟ (کنکور)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

سؤال ۳۶: با فرض $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ حاصل عبارت $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$ کدام است؟ (کنکور)

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

سؤال ۳۷: اگر $x = \frac{2}{\sin \alpha}, y = 3 \cot \alpha$ مقدار $9x^2$ کدام است؟ (کنکور)

- (۱) $4 + 9y^2$ (۲) $9 + 4y^2$ (۳) $36 - 4y^2$ (۴) $36 + 4y^2$

سؤال ۳۸: اگر $\frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x - \cos x} = 2$ حاصل $\frac{1}{\sin x \cos x}$ کدام است.

- (۱) $\frac{25}{12}$ (۲) $-\frac{25}{12}$ (۳) $\frac{12}{25}$ (۴) $-\frac{12}{25}$

سؤال ۳۹: اگر $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ، θ زاویه‌ی منفرجه باشد ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) حاصل $\tan \theta + \frac{1}{\cos \theta}$ کدام است.

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۱ (۴) ۲

سؤال ۴۰: مثلث ABC در زاویه C قائمه است و در آن $\sin A = \frac{2}{3}$ مقدار $\tan B$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۳) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

سؤال ۴۱: اگر $\tan x = -\frac{1}{2}$, $\cos x < 0$ و مقدار $\sin x$ کدام است؟ (کنکور)

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

سؤال ۴۲: اگر $\cot x = -2$, $\sin x > 0$ باشد مقدار $\cos x$ چقدر است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

سؤال ۴۳: حاصل $(1 + \tan^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta)$ کدام است؟ (کنکور)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\cos^2 \theta$ (۴) $\cot^2 \theta$

سؤال ۴۴: حاصل $\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ کدام است؟ (کنکور)

- (۱) $\sin \theta$ (۲) $\cos \theta$ (۳) $\sin \theta + \cos \theta$ (۴) $\sin \theta \cos \theta$

سؤال ۴۵: با فرض اینکه $\tan 76^\circ = 4$ باشد مقدار عددی $\sin^2 14^\circ$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{14}$ (۲) $\frac{1}{15}$ (۳) $\frac{1}{16}$ (۴) $\frac{1}{17}$

سؤال ۴۶: اگر $\tan x = \frac{3}{4}$ باشد حاصل $A = \frac{4}{\cos x} - \frac{3}{\sin x}$ کدام است؟ (کنکور)

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) ۱

سؤال ۴۷: اگر $\cot \theta = \sqrt{x} + 2$, $\tan \theta = \sqrt{x} - 2$ در این صورت مقدار x کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

سؤال ۴۸: مقدار عبارت $y = (\tan x + \cot x)^2 - \tan^2 x - \cot^2 x$ کدام است؟ (کنکور)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

سؤال ۴۹: حاصل عبارت $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2$ کدام است؟ (کنکور)

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) صفر

سؤال ۵۰: ساده شده‌ی عبارت $(1 - \cos \theta)^2 \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) - (1 - \sin^2 \theta)$ کدام است؟ (کنکور)

- (۱) $\sin^2 \theta$ (۲) $\cos^2 \theta$ (۳) $-\cos^2 \theta$ (۴) $2 \cos \theta$

سؤال ۵۱: مقدار کسر $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$ با کدام عبارت است؟

- (۱) $1 + \tan \theta$ (۲) $1 + \cot \theta$ (۳) $\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$ (۴) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}$

سؤال ۵۲: حاصل $2 \tan^2 \theta \left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta}\right) - 2$ کدام است؟ (کنکور)

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

سؤال ۵۳: حاصل $\sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2 \tan \theta (\sin \theta + \cos \theta)$ برابر کدام است؟ (کنکور)

- (۱) ۱ (۲) $\tan \theta$ (۳) $1 + \cot \theta$ (۴) صفر

سؤال ۵۴: اگر $\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$, $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$ باشد انتهای کمان α در کدام ناحیه قرار می‌گیرد.

- (۱) اول یا دوم (۲) دوم یا سوم (۳) سوم یا چهارم (۴) اول یا چهارم

سؤال ۵۵: اگر x زاویه‌ای در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی با شرط $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ باشد آنگاه حاصل $|2 \tan x + 5 \cot x|$

کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{5}$

سؤال ۵۶: اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد آنگاه حاصل $A = (1 - \sin x)(1 - \cos x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{7}{9}$ (۴) $\frac{1}{9}$

سؤال ۵۷: حاصل عبارت $A = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \cos x} + \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟

- (۱) $-2(\sin x + \cos x)$ (۲) $2(\sin x + \cos x)$ (۳) ۲ (۴) -۲

سؤال ۵۸: اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد آنگاه حاصل عبارت $(\tan^2 x - \sin^2 x)(\cot^2 x - \cos^2 x)$ کدام است.

- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{64}{81}$ (۳) $\frac{16}{81}$ (۴) $\frac{25}{9}$

سؤال ۵۹: اگر $\sin x - 2\cos x = \sqrt{5}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $A = \frac{\cos x}{5\cos + 12\sin x}$ کدام است؟

- (۱) $2\sin^2 x$ (۲) $2\cos^2 x$ (۳) $\frac{1}{2}\sin^2 x$ (۴) $\frac{1}{2}\cos^2 x$

سؤال ۶۰: اگر $\cot x = \sqrt{5}$ حاصل عبارت $A = \frac{\frac{2}{\cos x} - 1}{\cos x} + \frac{\frac{3}{\cos x} + 1}{\cos x}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

سؤال ۶۱: اگر $\sin^2 x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ باشد آنگاه حاصل $|\tan x|$ چیست؟

- (۱) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ (۲) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ (۳) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}}$ (۴) $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

سؤال ۶۲: اگر $\cos x$ نصف $\tan x$ باشد، مقدار $\sin x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{-1 \pm \sqrt{15}}{4}$ (۲) $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{15}-1}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$

سؤال ۶۳: اگر $\tan^2 x = 3$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\tan^2 x - \sin^2 x}$ چیست؟

- (۱) ۹ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\sqrt[3]{9}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

سؤال ۶۴: اگر $\tan x + \cot x = 3$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $A = \frac{\tan^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin x \cos x}$ چیست؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۲ (۳) ۲۱ (۴) ۱۵

سؤال ۶۵: اگر $\tan x = \frac{3}{4}$ و انتهای کمان x در ناحیه سوم دایرهی مثلثاتی باشد حاصل عبارت

$$A = \frac{3 \sin x + 4 \cos x}{17 - 25 \sin x \cos x} \text{ چیست؟}$$

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) -۱

سؤال ۶۶: اگر $\tan x - \sin x = q$, $\tan x + \sin x = p$ باشد آنگاه $p^2 - q^2$ کدام است (x در ناحیهی اول است)

- (۱) $4pq$ (۲) $\sqrt{4pq}$ (۳) $4\sqrt{pq}$ (۴) $2pq$

سؤال ۶۷: اگر $\frac{\sin^4 x}{p} + \frac{\cos^4 x}{q} = \frac{1}{2}$ باشد آنگاه حاصل $A = \frac{\sin^4 x}{p^2} + \frac{\cos^4 x}{q^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{(p+q)^2}$ (۲) $\frac{1}{(p+q)^2}$ (۳) $\frac{1}{(pq)^2}$ (۴) $\frac{1}{(pq)^2}$

سؤال ۶۸: در هر مثلث قائم الزاویه، حاصل ضرب تانژانت های دو زاویهی غیر قائمه چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

سؤال ۶۹: اگر $\frac{2}{x} = \sin \alpha$, $y = 4 \cot \alpha$ مقدار $4x^2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{y^2}$ (۲) $y^2 + 16$ (۳) $\frac{y^2}{16} + 1$ (۴) $16y^2 + 1$

سؤال ۷۰: اگر دو ضلع قائمه در مثلث قائم الزاویه $\sin x \tan x, \sin x$ باشند اندازه وتر مثلث کدام است؟

- (۱) $\tan x$ (۲) $\cot x \cos x$ (۳) $\sin x + \cos x$ (۴) $\tan x + \cot x$

سؤال ۷۱: ساده شده $A = \frac{3 \tan^2 x + 5}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}$ برابر کدام است؟

- (۱) $1 - \cot^2 x$ (۲) $1 + \cot^2 x$ (۳) $1 - \tan^2 x$ (۴) $1 + \tan^2 x$

سؤال ۷۲: هرگاه $\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + \frac{\sin x - 1}{1 + \sin x} = \frac{k \tan x}{\cos x}$ برقرار باشد k کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

سؤال ۷۳: اگر $\tan^2 x + \cot^2 x = 7, 18^\circ < x < 225^\circ$ مقدار $\sin x + \cos x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{5}$ (۲) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۳) $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ (۴) $-\frac{\sqrt{5}}{9}$

سؤال ۷۴: اگر $(3 + \sqrt{2})\sin^2 x + (3 - \sqrt{2})\cos^2 x = \frac{7}{3}$ باشد مقدار $\sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{18}$ (۲) $\frac{64}{81}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{5}{9}$

سؤال ۷۵: اگر $\cos x = \sqrt{n^2 - 3mn + 8}$, $\sin x = \sqrt{2m^2 - 8m + 9}$ باشد مقدار $n \sin x + m \cos x$ کدام است؟

- (۱) ۳ یا ۵ (۲) ۱ یا ۲ (۳) ۲ یا ۴ (۴) ۱ یا ۴

سؤال ۷۶: با فرض $\cot \theta = \frac{3}{4}$ حاصل $\frac{\cos \theta - \sin \theta}{2 \sin \theta + \cos \theta}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{11}$ (۲) $\frac{1}{11}$ (۳) $-\frac{1}{11}$ (۴) $-\frac{7}{11}$

سؤال ۷۷: اگر $\sin x + \cos x = b$, $\tan x + \cot x = a$ کدام رابطه صحیح است؟

- (۱) $a(b^2 - 1) = 2$ (۲) $b^2(a - 1) = 1$ (۳) $b^2(1 - a) = 1$ (۴) $a^2(1 - b^2) = 1$

سؤال ۷۸: اگر $\tan^3 x = 4$ باشد حاصل $\frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x}$ برابر چه عددی است؟

- (۱) -۱۶ (۲) ۱۶ (۳) ۶۴ (۴) -۶۴

سؤال ۷۹: اگر $\frac{3 \cos^2 x - 2 \sin^2 x + 1}{2 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + 4} = \frac{1}{3}$ باشد مقدار $\tan^2 x$ کدام است؟

- (۱) ۰/۵ (۲) ۳/۵ (۳) ۲/۵ (۴) ۱/۵

سؤال ۸۰: اگر $\tan x = 2$ باشد حاصل عبارت $A = \frac{3 \sin^5 x + 4 \cos^3 x - \cos x}{5 \cos^5 x - 3 \sin^3 x + \sin x}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{5}$ (۲) $-\frac{13}{9}$ (۳) $\frac{11}{3}$ (۴) $\frac{10}{7}$

سؤال ۸۱: ساده شده عبارت $\frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$ در کدام گزینه آمده است؟

- (۱) $\cos \alpha - \sin \alpha$ (۲) $\sin \alpha - \cos \alpha$ (۳) ۱ (۴) $\sin \alpha \cos \alpha$

سؤال ۸۲: حاصل عبارت $\frac{\sin^3 \theta}{1 + \cos \theta} + \sin \theta \cos \theta$ کدام است؟ ($\cos \theta \neq -1$)

- (۱) $\sin \theta$ (۲) $\cos \theta$ (۳) $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$ (۴) $\frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta}$

سؤال ۸۳: اگر $\cos x = \frac{1}{3}$ باشد مقدار عبارت $A = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1}{\cot x}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{14}{3}$

سؤال ۸۴: اگر $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x + 3 \cos x} = \frac{3}{4}$ باشد مقدار $\sin x \cos x$ کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{5}{26}$ (۲) $\frac{26}{5}$ (۳) $\frac{13}{5}$ (۴) $\frac{5}{13}$

سؤال ۸۵: اگر $\tan \alpha + \cot \alpha = 3$ و $18^\circ < \alpha < 27^\circ$ مقدار $\sin \alpha + \cos \alpha$ را بیابید.

- (۱) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (۲) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ (۳) $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ (۴) $-\sqrt{\frac{5}{2}}$

سؤال ۸۶: اگر $\sin x + \tan x > 0$ و $\frac{1}{\cos x} - \sin x \cdot \tan x < 0$ باشد انتهای کمان x در کدام ناحیه است؟ (کنکور)

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

سؤال ۸۷: اگر $A = \frac{1}{1 + \tan 1^\circ} + \frac{1}{1 + \tan 2^\circ} + \dots + \frac{1}{1 + \tan 45^\circ}$, $B = \frac{1}{1 + \cot 1^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 2^\circ} + \dots + \frac{1}{1 + \cot 45^\circ}$ باشد

آنگاه $A + B$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱ (۳) ۰/۱ (۴) ۲

سؤال ۸۸: اگر $\cot x = 0/4$ باشد آنگاه حاصل عبارت $A = \left(\frac{3}{\sin x} + \frac{0/8}{\cos x} \right)^2$ کدام است.

- (۱) ۴۹ (۲) ۲۹ (۳) ۳۵ (۴) $\frac{725}{4}$

سؤال ۸۹: در دستگاه $\begin{cases} a \sin x + b \cos x = \sqrt{2} \\ b \sin x - a \cos x = \sqrt{2} \end{cases}$ اگر $a + b = 3$ باشد آنگاه حاصل ab کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -۱۰ (۴) ۱۰

سؤال ۹۰: اگر $\cot \theta + \cos \theta < 0$, $\sqrt{1 + \cot^2 \theta} + \frac{1}{\sin \theta} = 0$ باشد آنگاه θ در کدام ناحیه ی دایره ی مثلثاتی است. 

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

سؤال ۹۱: اگر $0^\circ < x < 45^\circ$ باشد آنگاه حاصل عبارت $A = \tan x + \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}} - 4$ کدام است؟ 

- (۱) $\cot x$ (۲) $\tan x$ (۳) $2 \tan x - \cot x$ (۴) $2 \cot x - \tan x$

سؤال ۹۲: اگر $2 \cot \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ باشد آنگاه α در کدام ناحیه ی دایره ی مثلثاتی است. 

- (۱) اول یا دوم (۲) دوم یا سوم (۳) سوم یا چهارم (۴) اول یا چهارم

سؤال ۹۳: اگر k عددی حقیقی و مثبت باشد و داشته باشیم $\sin x + \frac{\tan x}{\sqrt{\tan x - 1 - k}} = 0$ ، آنگاه انتهای کمان x در کدام ناحیه ی مثلثاتی است. 

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) به k بستگی دارد.

باسخنامه تست روابط بین نسبت های مثلثاتی زاویه α (روابط پایه)

۱- پاسخ: گزینه ۲

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \sin^2 x \\ \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \cos^2 x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\tan^2 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ} + \frac{\cot^2 15^\circ}{1 + \cot^2 15^\circ} = \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1$$

۲- پاسخ: گزینه ۴

می دانیم حداکثر مقدار $\cos \alpha$ برابر ۱ است. در تساوی $2\cos \alpha + 3\cos^2 \alpha = 5$ اگر $\cos \alpha$ مقدار کمتری از ۱ باشند، تساوی برقرار نخواهد بود و جمع $2\cos \alpha, 3\cos^2 \alpha$ کمتر از ۵ خواهد شد پس لازم است هر دو برابر ۱ باشند. اگر $\alpha = 0$ (یا هر مضرب زوج π) باشد مقدار عبارت $P = 2\cos \alpha + 3\cos^2 \alpha$ برابر ۵ خواهد شد. پس امکان ایجاد ۵ نیز وجود دارد. در نتیجه می توان گفت چون $\cos \alpha = 1, \cos^2 \alpha = 1$ باید باشد پس $\sin^2 \alpha = 0, \tan^2 \alpha = 0$ است پس:

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = 0 \\ \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \tan^2 \alpha = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin \alpha + \tan^2 \alpha = 0$$

۳- پاسخ: گزینه ۳

می دانیم $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در نتیجه:

$$\sin^2 60^\circ + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \underbrace{1 - \sin^2 x}_{\cos^2 x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4}$$

از طرفی بنا بر اتحاد $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\frac{3}{4}} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3}$$

۴- پاسخ: گزینه ۴

❖ راه اول

$$\begin{aligned} A &= \cot \alpha + \cot \alpha \tan^2 \alpha = \cot \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = \cot \alpha \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) \\ &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \end{aligned}$$

❖ راه دوم

$$A = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \cot \alpha \tan^2 \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \cot \alpha \tan \alpha \tan \alpha$$

$$\xrightarrow{\tan \alpha \cot \alpha = 1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \xrightarrow{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} A = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

۵- پاسف: گزینه ۳

$$A = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + (\sqrt{2} \sin \alpha \cos \alpha)^2$$

$$\Rightarrow A = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow A = 1^2 = 1$$

۶- پاسف: گزینه ۴

$$A = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\frac{\sin x}{\cos x} + 1} = \frac{\frac{5}{6} - 1}{\frac{5}{6} + 1} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{11}{6}} = -\frac{1}{11}$$

۷- پاسف: گزینه ۴

این سوال برگرفته از مثال کتاب درسی است و تنها یک عبارت $(1 - \sin \theta)^2$ در آن اضافه شده اکنون به باز کردن و ضرب کردن پرانتزها می پردازیم:

$$(1 + \sin \theta) \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) (1 - \sin \theta)^2 = (1 + \sin \theta) (1 - \sin \theta) \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) (1 - \sin \theta)$$

$$= (1 - \sin^2 \theta) \left(\frac{1 + \cos \theta}{\cos \theta} \right) (1 - \sin \theta) = \frac{(1 - \sin^2 \theta)(1 - \sin \theta)}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta \times \cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos^3 \theta$$

۸- پاسف: گزینه ۳

$$B = \frac{\sin^2 \alpha (\tan \alpha + 1 + \tan^2 \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha (1 + \tan \alpha + \tan^2 \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

۹- پاسف: گزینه ۴

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$= (1^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = ((\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$$

$$= (1^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$$

$$\Rightarrow A = 2(1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) - 2(1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$$

$$= 2 - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 2 + 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 0$$

۱۰- پاسف: گزینه ۲

در ابتدا از دو اتحاد زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \end{cases}$$

حالا این عبارات را در فرض مسئله جای گذاری می کنیم:

$$\Rightarrow 2(1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) + 3(1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) = -\frac{37}{16}$$

$$5 - 13 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = -\frac{37}{16} \Rightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \pm \frac{3}{4}$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \pm \frac{4}{3}$$

۱۱- پاسخ: گزینه ۲

می دانیم $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ بنابراین:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x) \Rightarrow \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad (I)$$

$$\text{فرض مسئله: } \frac{3 \sin x}{1 + \cos x} = 4 \xrightarrow{(I)} 3 \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) = 4 \Rightarrow \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{4}{3}$$

۱۲- پاسخ: گزینه ۱

می توان نوشت:

$$\sin \hat{B} + \frac{3}{4} \cos \hat{B} = 0 \Rightarrow \sin \hat{B} = -\frac{3}{4} \cos \hat{B} \Rightarrow \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \tan \hat{B} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \cot \hat{B} = -\frac{4}{3}$$

بنابراین داریم:

$$\tan \hat{B} + \cot \hat{B} \Rightarrow -\frac{3}{4} - \frac{4}{3} = \frac{-9 - 16}{12} = -\frac{25}{12}$$

۱۳- پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{2 \sin x - \cos x}{\sin x + 4 \cos x} = 3 \Rightarrow 2 \sin x + 12 \cos x = 2 \sin x - \cos x \Rightarrow \sin x = -13 \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -13 \Rightarrow \tan x = -13 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{13} \Rightarrow \cot x - \tan x = -\frac{1}{13} + 13 = \frac{168}{13}$$

۱۴- پاسخ: گزینه ۳

ابتدا طرفین تساوی $x + y = 2 \cos \theta$ را به توان ۲ می رسانیم:

$$(x + y)^2 = (2 \cos \theta)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 4 \cos^2 \theta \xrightarrow{x^2 + y^2 = 2} \rightarrow$$

$$2 + 2xy = 4 \cos^2 \theta \Rightarrow 2xy = 4 \cos^2 \theta - 2$$

$$\text{از طرفی: } (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 2 - (4 \cos^2 \theta - 2) = 4 - 4 \cos^2 \theta = 4(1 - \cos^2 \theta) = 4 \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow |x - y| = \sqrt{4 \sin^2 \theta} = 2 |\sin \theta| \xrightarrow[\sin \theta > 0]{\theta \text{ در ناحیه اول}} |x - y| = 2 \sin \theta$$

۱۵- پاسخ: گزینه ۴

$$\sin x + \cos x = \frac{5}{4} \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{دو طرف}} (\sin x + \cos x)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{25}{16} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{9}{16}$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x \Rightarrow \sin x - \cos x = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

۱۶- گزینه ۲

پاسخ: با توجه به رابطه $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ می توان نوشت

$$\left(\frac{1}{2m-1}\right)(m+2) = 1 \Rightarrow 2m-1 = m+2 \Rightarrow m = 3$$

بنابراین $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ و $\cot \alpha = 5$ و در نتیجه

$$\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \frac{1}{25} + 25 = \frac{626}{25}$$

۱۷- گزینه ۴

پاسخ: با توجه به رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ می توان نوشت

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

با توجه به این که $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ، مقدار $\cos \alpha$ باید منفی باشد؛ پس $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. با توجه به رابطه‌ی

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{، به دست می آید}$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

بنابراین

$$\tan \alpha - \cos \alpha = -\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{1}{20}$$

۱۸- گزینه ۳

$$\boxed{(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)}$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$$

$$\Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha) = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

چون α در ناحیه‌ی چهارم است:

$$\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases}$$

یعنی $\sin \alpha$ منفی است و $\cos \alpha$ مثبت است پس $\sin \alpha - \cos \alpha$ مقداری منفی دارد پس:

گزینه (۳) درست است. $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{2}$

۱۹- گزینه ۳

طرفین وسطین می کنیم:

$$\frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha} = \frac{1}{2}$$

$$4 \sin \alpha - 6 \cos \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha \Rightarrow 4 \sin \alpha - 3 \sin \alpha = 6 \cos \alpha - 4 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = 2 \cos \alpha = \tan \alpha = 2 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2 \tan \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \tan \alpha - 4 \cot \alpha} = \frac{2(2) - 3\left(\frac{1}{2}\right)}{3(2) - 4\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{4 - \frac{3}{2}}{6 - \frac{4}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{8}{2}} = \frac{5}{8} \Rightarrow \text{گزینه (۳) درست است.}$$

۲۰- گزینه ۱

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} - 1\right) \left(\frac{1}{\cos \theta} + 1\right) = \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1\right) = 1 + \tan^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$$

۲۱- گزینه ۳

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta (1 + 2 \tan^2 \theta) + (\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) &= \cos^2 \theta + 2 \tan^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^2 \theta - 1 \\ &= \cos^2 \theta + 2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cos^2 \theta + \cos^2 \theta - 1 = \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 1 \\ &= 2 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta - 1 = 2(\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1) - 1 = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

گزینه (۳) درست است.

۲۲- گزینه ۱

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1. \text{ گزینه (۳) درست است.}$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta. \text{ گزینه (۲) درست است.}$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_1. \text{ گزینه (۴) درست است.}$$

پس جواب تست گزینه (۱) است.

۲۳- گزینه ۱

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \tan \theta + \cot \theta$$

$$(1 + \tan \theta)(1 + \cot \theta) - (\tan \theta + \cot \theta) = 1 + \tan \theta + \cot \theta + \underbrace{\tan \theta \cot \theta}_1 - \tan \theta - \cot \theta$$

گزینه (۱) درست است. $1+1=2$

۲۴- گزینه ۳

$$\cos \theta (\cos \theta + \sin \theta \tan \theta) = \cos^2 \theta + \sin \theta \tan \theta \cos \theta$$

$$= \cos^2 \theta + \sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \cos \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ گزینه (۳) درست است.}$$

۲۵- گزینه ۴

$$(1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta) = \cos^2 \theta \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta - \sin^2 \theta$$

گزینه (۴) درست است. $1 - 2\sin^2 \theta$

۲۶- گزینه ۲

$$= \frac{\sin \theta}{\frac{1}{\sin \theta} + 1} + \frac{\sin \theta}{\frac{1}{\sin \theta} - 1}$$

$$= \frac{\sin \theta}{\frac{1 + \sin \theta}{\sin \theta}} + \frac{\sin \theta}{\frac{1 - \sin \theta}{\sin \theta}} = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin \theta} = \sin^2 \theta \left(\frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 - \sin \theta} \right)$$

$$= \sin^2 \theta \left(\frac{1 - \sin \theta + 1 + \sin \theta}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \right) = \sin^2 \theta \left(\frac{2}{1 - \sin^2 \theta} \right) = \sin^2 \theta \left(\frac{2}{\cos^2 \theta} \right)$$

$$= 2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 2 \tan^2 \theta \text{ گزینه (۲) درست است.}$$

۲۷- گزینه ۱

$$\tan^2 \theta \cos^2 \theta + \cot^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \times \cos^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \times \sin^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ گزینه (۱) درست است.}$$

۲۸- گزینه ۱

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos \theta = 3x \\ \sin \theta = \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \left(\frac{y}{2}\right)^2 + (3x)^2 = 1 \rightarrow \frac{y^2}{4} + 9x^2 = 1 \rightarrow y^2 + 36x^2 = 4$$

گزینه (۱) درست است.

۲۹- گزینه ۳

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$$

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x} \text{ یادآوری:}$$

$$\frac{1 - (3 \sin^2 x \cos^2 x)^2}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{(1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x)(1 + 3 \sin^2 x \cos^2 x)}{(1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x)} = 1 + 3 \sin^2 x \cos^2 x \text{ گزینه (۳) درست است.}$$

۳۰- گزینه ۴

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= \frac{1 - 4\sin^2 x \cos^2 x + 2\sin^2 x \cos^2 x}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} = 1 \quad \text{گزینه (۴) درست است.}$$

۳۱- گزینه ۴

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8} \quad \text{گزینه (۴) درست است.}$$

۳۲- گزینه ۴

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\frac{4a^2 b^2}{(a^2 - b^2)^2}}{1 + \frac{4a^2 b^2}{(a^2 - b^2)^2}} = \frac{\frac{4a^2 b^2}{(a^2 - b^2)^2}}{\frac{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2}{(a^2 - b^2)^2}} = \frac{4a^2 b^2}{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2}$$

$$= \frac{4a^2 b^2}{a^4 + b^4 - 2a^2 b^2 + 4a^2 b^2} = \frac{4a^2 b^2}{a^4 + b^4 + 2a^2 b^2} = \frac{4a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} \Rightarrow \sin x = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \quad \text{گزینه (۴) درست است.}$$

۳۳- گزینه ۲

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow 1 + (a+2)^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^2} = \frac{1}{b^2} = b^2 \Rightarrow 1 + (a+2)^2 = b^2 \quad \text{گزینه (۲) درست است.}$$

۳۴- گزینه ۳

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{1 + \cot^2 \theta}$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{1 + \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}} = \frac{1}{\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{(a+b)^2}} = \frac{1}{\frac{2(a^2 + b^2)}{(a+b)^2}} = \frac{(a+b)^2}{2(a^2 + b^2)}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{a+b}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} \quad \text{گزینه (۳) درست است}$$

۳۵- گزینه ۴

یک اتحاد به ازای هر مقداری از x برقرار است:

$$x = 0^\circ \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 0^\circ} + \frac{A}{\cos^2 0^\circ} = \tan^2 0^\circ - 1 \Rightarrow 1 + A = 0 - 1 \Rightarrow 1 + A = -1 \Rightarrow \boxed{A = -2} \quad \text{گزینه (۴) درست است.}$$

۳۶- گزینه ۴

$$A = \sin^4 \theta - \cos^4 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1 + \cos^2 \theta$$

$$= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow A = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ گزینه (۴) درست است.}$$

۳۷- گزینه ۲

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sin \alpha} \\ y = 3 \cot \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{2}{x} \\ \cot \alpha = \frac{y}{3} \end{cases}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} \Rightarrow \left(\frac{2}{x}\right)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2} \Rightarrow \frac{4}{x^2} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{9}} = \frac{1}{\frac{9 + y^2}{9}} = \frac{9}{9 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{x^2} = \frac{9}{9 + y^2} \Rightarrow 9x^2 = 36 + 4y^2 \text{ گزینه (۲) درست است.}$$

۳۸- گزینه ۱

$$\frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x - \cos x} = 2 \rightarrow \text{طرفین وسطین} \rightarrow \sin x + 2 \cos x = 4 \sin x - 2 \cos x$$

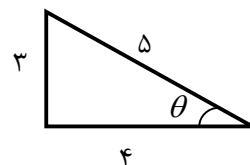
$$\Rightarrow -3 \sin x = -4 \cos x \Rightarrow \tan x = \frac{4}{3} \Rightarrow \cot x = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = \tan x + \cot x = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12}$$

گزینه (۱) درست است.

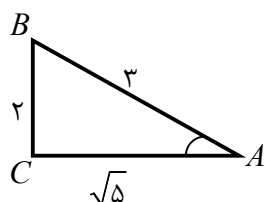
۳۹- گزینه ۱

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{-3}{4} \\ \cos \theta = \frac{-4}{5} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \tan \theta \text{ در ناحیه دوم منفی است.} \\ \cos \theta \text{ در ناحیه دوم منفی است.} \end{array}$$

$$\tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{\left(\frac{-4}{5}\right)} = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{8}{4} = -2 \text{ گزینه (۱) درست است.}$$



۴۰- گزینه ۴

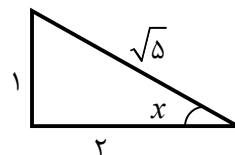


$$AC = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\tan B = \frac{CA}{CB} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ گزینه (۴) درست است.}$$

۴۱- گزینه ۴

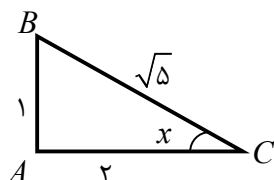
$$\left\{ \begin{array}{l} \tan x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ (در ناحیه دوم یا چهارم است)} \\ \cos x < 0 \text{ (در ناحیه دوم یا سوم است)} \end{array} \right\} \Rightarrow x \text{ در ناحیه دوم است.}$$



$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ در ناحیه دوم علامت مثبت است.}$$

گزینه (۴) درست است.

۴۲- گزینه ۴



$$\left\{ \begin{array}{l} \cot x = -2 \text{ (منفی) (در ناحیه دوم یا چهارم است)} \\ \sin x > 0 \text{ (در ناحیه اول یا دوم است)} \end{array} \right\} \Rightarrow x \text{ در ناحیه دوم}$$

$$\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5} \text{ در ناحیه دوم منفی است.}$$

۴۳- گزینه ۲

$$(1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = \cos^2 \theta \times \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 \text{ گزینه (۲) درست است}$$

۴۴- گزینه ۴

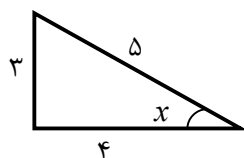
$$\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \tan \theta \cdot \cos^2 \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos^2 \theta = \sin \theta \cos \theta \text{ گزینه (۴) درست است}$$

۴۵- گزینه ۴

$$\tan 76^\circ = \frac{\text{زاویه های متمم}}{\cot 14^\circ} = 4$$

$$\sin^2 14^\circ = \frac{1}{1 + \cot^2 14^\circ} = \frac{1}{1 + 4^2} = \frac{1}{17} \rightarrow \text{گزینه (۴) درست است}$$

۴۶- گزینه ۱



$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = \frac{3}{5} \\ \cos x = \frac{4}{5} \end{array} \right.$$

$$A = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = 5 - 5 = 0 \text{ گزینه (۱) درست است.}$$

۴۷- گزینه ۱

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) = (\sqrt{x})^2 - 4 \Rightarrow 1 = x - 4 \Rightarrow x = 5 \text{ گزینه (۱) درست است.}$$

۴۸- گزینه ۲

$$y = (\tan x + \cot x)^2 - \tan^2 x - \cot^2 x = \tan^2 x + \cot^2 x + \underbrace{2 \tan x \cot x}_{=2} - \tan^2 x - \cot^2 x = 2$$

۴۹- گزینه ۱

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ \tan x + \cot x &= \frac{1}{\sin x \cos x} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right)^2 = \frac{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - 1}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \frac{-2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2. \text{ گزینه (۱) درست است.} \end{aligned}$$

۵۰- گزینه ۴

$$\begin{aligned} (1 - \sin^2 \theta) \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) - (1 - \cos^2 \theta)^2 &= \cos^2 \theta \left(\frac{\cos^2 \theta + 1}{\cos^2 \theta} \right) - (1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta) \\ &= (\cos^2 \theta + 1) - (1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta) = 2 \cos \theta. \text{ گزینه (۴) درست است.} \end{aligned}$$

۵۱- گزینه ۳

$$\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \times \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}. \text{ گزینه (۳) درست است.}$$

۵۲- گزینه ۴

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) - 2 \tan^2 \theta &= \frac{1 + \sin \theta + 1 - \sin \theta}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} - 2 \tan^2 \theta = \frac{2}{1 - \sin^2 \theta} - 2 \tan^2 \theta \\ &= \frac{2}{\cos^2 \theta} - 2 \tan^2 \theta = 2(1 + \tan^2 \theta) - 2 \tan^2 \theta = 2 + 2 \tan^2 \theta - 2 \tan^2 \theta = 2. \text{ گزینه (۴) درست است.} \end{aligned}$$

۵۳- گزینه ۱

$$= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = 1. \text{ گزینه (۱) درست است.}$$

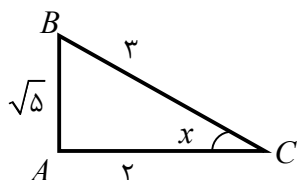
۵۴- گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{3}{4} \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \begin{cases} \text{ناحیه اول} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \\ \text{ناحیه دوم} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \quad \checkmark \\ \text{ناحیه سوم} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \quad \checkmark \\ \text{ناحیه چهارم} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases}$$

پس در ناحیه دوم یا سوم است.

۵۵- گزینه ۱



$$AC^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4 \rightarrow AC = 2$$

$$\Rightarrow \tan x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

(هم $\tan x$ و هم $\cot x$ منفی هستند.)

$$\cot x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$|2 \tan x + 5 \cot x| = \left| 2 \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \right) + 5 \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} \right) \right| = |-\sqrt{5} - 2\sqrt{5}| = |-3\sqrt{5}| = 3\sqrt{5}.$$

گزینه (۱) درست است.

۵۶- گزینه ۱

$$A = (1 - \sin x)(1 - \cos x)$$

$$= 1 - \cos x - \sin x + \sin x \cos x = 1 - (\cos x + \sin x) + \sin x \cos x = 1 - \frac{1}{3} + \sin x \cos x$$

$$= \frac{2}{3} + \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9} \\ 1 + 2 \sin x \cos x &= \frac{1}{9} \rightarrow 2 \sin x \cos x = -\frac{8}{9} \rightarrow \sin x \cos x = -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{3} + \sin x \cos x = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

گزینه (۱) درست است.

فعالاً یاد بگیرین:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

۵۷- گزینه ۳

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \cos x} + \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x} \\
 &= \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)}{\sin x + \cos x} + \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x)}{\sin x - \cos x} \\
 &= \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - \sin x \cos x + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + \sin x \cos x = 1 + 1 = 2.
 \end{aligned}$$

گزینه (۳) درست است.

۵۸- گزینه ۳

$$\begin{aligned}
 \tan^2 x - \sin^2 x &= \tan^2 x \cdot \sin^2 x \\
 \cot^2 x - \cos^2 x &= \cot^2 x \cdot \cos^2 x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= (\tan^2 x - \sin^2 x)(\cot^2 x - \cos^2 x) = (\tan^2 x \sin^2 x)(\cot^2 x \cos^2 x) \\
 &= \underbrace{\tan^2 x \cot^2 x}_{1} (\sin^2 x \cos^2 x) = (\sin x \cos x)^2
 \end{aligned}$$

حالا بریم سراغ فرض مسئله و طرفین معادله را به توان ۲ برسانیم:

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{3} \rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$$\rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9} \rightarrow 2 \sin x \cos x = -\frac{8}{9} \rightarrow \sin x \cos x = -\frac{4}{9}$$

$$A = (\sin x \cos x)^2 = \left(-\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81} \quad \text{گزینه (۳) درست است}$$

۵۹- گزینه ۴

$$3 \sin x - 2 \cos x = \sqrt{7} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 9 \sin^2 x - 12 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 7$$

$$9(1 - \cos^2 x) - 12 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 7 \Rightarrow 9 - 9 \cos^2 x - 12 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 7$$

$$\Rightarrow -5 \cos^2 x - 12 \sin x \cos x = -2 \xrightarrow{\times(-1)} 5 \cos^2 x + 12 \sin x \cos x = 2 \Rightarrow \cos x (5 \cos x + 12 \sin x) = 2$$

$$\Rightarrow 5 \cos x + 12 \sin x = \frac{2}{\cos x}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\cos x}{\frac{2}{\cos x}} = \frac{\cos^2 x}{2} \quad \text{گزینه (۴) درست است}$$

۶۰- گزینه ۳

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\frac{2}{\cos x} - 1}{\cos x} + \frac{\frac{3}{\cos x} + 1}{\cos x} = \frac{2 - \cos x}{\cos x} + \frac{3 + \cos x}{\cos x} = \frac{2 - \cos x}{\cos^2 x} + \frac{3 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2 - \cos x + 3 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{5}{\cos^2 x}
 \end{aligned}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{5}{1 + 5} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow A = \frac{5}{\left(\frac{5}{6}\right)} = 6$$

۶۱- گزینه ۲

$$\sin^r x = \frac{\tan^r x}{1 + \tan^r x} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\tan^r x}{1 + \tan^r x} \Rightarrow \sqrt{5} + \sqrt{5} \tan^r x - 1 - \tan^r x = 2 \tan^r x$$

$$\Rightarrow (3 - \sqrt{5}) \tan^r x = \sqrt{5} - 1 \Rightarrow \tan^r x = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \tan^r x = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}}{9-5} = \frac{2\sqrt{5}+2}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\Rightarrow |\tan x| = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است.}$$

۶۲- گزینه ۴

$$\cos x = \frac{1}{2} \tan x \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \times \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 2 \cos^r x = \sin x \Rightarrow 2(1 - \sin^r x) = \sin x$$

$$\Rightarrow 2 - 2 \sin^r x = \sin x \Rightarrow 2 \sin^r x + \sin x - 2 = 0 \xrightarrow{\sin x=a} 2a^r + a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\xrightarrow{-1 \leq a \leq 1} a = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$$

توجه کنید که $-1 \leq \sin x = a \leq 1$

گزینه (۴) درست است.

۶۳- گزینه ۲

$$\begin{aligned} \tan^r x - \sin^r x &= \tan^r x \cdot \sin^r x \\ \cot^r x - \cos^r x &= \cot^r x \cdot \cos^r x \end{aligned}$$

$$A = \frac{\cot^r x \cdot \cos^r x}{\tan^r x \cdot \sin^r x} = \left(\frac{\cot x}{\tan x} \right)^r \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^r = \left(\frac{\cot x}{1} \right)^r (\cot x)^r =$$

$$(\cot^r x)^r \cdot \cot^r x = \cot^r x \cdot \cot^r x = \cot^r x = \left(\frac{1}{\tan x} \right)^r = \left(\frac{1}{\tan^r x} \right)^r = \left(\frac{1}{3} \right)^r = \frac{1}{9} \text{ گزینه (۲) درست است.}$$

۶۴- گزینه ۱

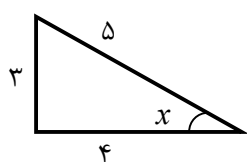
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^r x} &= 1 + \cot^r x \\ \frac{1}{\cos^r x} &= 1 + \tan^r x \\ \tan x + \cot x &= \frac{1}{\sin x \cos x} \end{aligned}$$

یادآوری

$$a^r + b^r = (a+b)^r - r ab(a+b)$$

$$\begin{aligned}
 A &= \tan^r x \frac{1}{\sin^r x} + \cot^r x \frac{1}{\cos^r x} - \frac{1}{\sin x \cos x} = \\
 &= \tan^r x (1 + \cot^r x) + \cot^r x (1 + \tan^r x) - (\tan x + \cot x) = \\
 &= \tan^r x + \tan^r x \cot^r x + \cot^r x + \cot^r x \tan^r x - (3) \\
 &= \tan^r x + \tan x \underbrace{(\tan^r x \cot^r x)}_1 + \cot^r x + \cot x \underbrace{(\cot^r x \tan^r x)}_1 - 3 \\
 &= \tan^r x + \tan x + \cot^r x + \cot x - 3 = \tan^r x + \cot^r x + (\tan x + \cot x) - 3 \\
 &= (\tan x + \cot x)^r - 3 \underbrace{\tan x \cot x}_1 (\tan x + \cot x) + (\tan x + \cot x) - 3 \\
 &= 3^r - 3(3) + 3 - 3 = 27 - 9 = 18. \text{ گزینه (۱) درست است.}
 \end{aligned}$$

۶۵- گزینه ۴



$$\Rightarrow \tan x = \frac{3}{4} \longrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{3}{5} \\ \cos x = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

در ناحیه سوم است.

$$\Rightarrow A = \frac{3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right)}{17 - 25\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{-\frac{9}{5} - \frac{16}{5}}{17 - 12} = \frac{-\frac{25}{5}}{5} = -1 \Rightarrow \text{گزینه (۴) درست است.}$$

۶۶- گزینه ۳

$$\boxed{(a+b)^r - (a-b)^r = 4ab} \quad \boxed{(a+b)(a-b) = a^r - b^r}$$

$$\Rightarrow (\tan x + \sin x)^r - (\tan x - \sin x)^r = 4 \tan x \sin x = 4 \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x = 4 \frac{\sin^r x}{\cos x} \quad (۱)$$

حالا با توجه به گزینه ها باید pq را تشکیل دهیم بنابراین:

$$pq = (\tan x + \sin x)(\tan x - \sin x) = \tan^r x - \sin^r x = \tan^r x \cdot \sin^r x \quad (۲)$$

$$\boxed{\tan^r x - \sin^r x = \tan^r x \cdot \sin^r x}$$

$$\Rightarrow pq = \tan^r x \cdot \sin^r x = \frac{\sin^r x}{\cos^r x} \sin^r x = \frac{\sin^r x}{\cos^r x} \Rightarrow \sqrt{pq} = \frac{\sin^r x}{|\cos x|} \xrightarrow[\cos x > 0]{0^\circ < x < 90^\circ} \frac{\sin^r x}{\cos x} \Rightarrow p^r - q^r = 4\sqrt{pq}$$

گزینه (۳) درست است.

۶۷- گزینه ۲

راه حل تستی: اگر $p = q = 1$ آنگاه $\sin^r x + \cos^r x = \frac{1}{2}$ و می دانیم:

$$\begin{aligned}
 \sin^r x + \cos^r x &= 1 - 2 \sin^r x \cos^r x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^r x \cos^r x = \frac{1}{4} \\
 p = q = 1 &\rightarrow A = \sin^r x + \cos^r x = \boxed{a^r + b^r = (a+b)^r - 2ab}
 \end{aligned}$$

$$= \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2(\sin^2 x \cos^2 x)$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}}{\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

با توجه گزینه ها و اینکه $p = q = 1$ فقط در گزینه ی (۲) به ازای $p = q = 1$ عدد $\frac{1}{8}$ بدست می آید.

۶۸- گزینه ۲

راه حل تستی: اگر $p = q = 1$ آنگاه $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$ و می دانیم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$p = q = 1 \rightarrow A = \sin^4 x + \cos^4 x = \boxed{a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab}$$

$$= \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2(\sin^2 x \cos^2 x)$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}}{\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

با توجه گزینه ها و اینکه $p = q = 1$ فقط در گزینه ی (۲) به ازای $p = q = 1$ عدد $\frac{1}{8}$ بدست می آید.

۶۹- پاسخ: گزینه ۲

مطابق یکی از اتحادهای مثلثاتی می دانیم: $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$ پس:

$$\frac{2}{x} = \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{x^2}{4}$$

$$\cot \alpha = \frac{y}{4} \Rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{y^2}{16} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 + \frac{y^2}{16} \Rightarrow 4x^2 = 16 + y^2$$

۷۰- پاسخ: گزینه ۱

اگر a, b, c سه ضلع مثلث قائم الزاویه باشند (c وتر) داریم $a^2 + b^2 = c^2$ پس اگر $a = \sin x, b = \sin x \tan x$ باشد داریم:

$$c^2 = \sin^2 x + (\sin x \tan x)^2 = \sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x = \sin^2 x \underbrace{(1 + \tan^2 x)}_{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \sin^2 x \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x \Rightarrow c^2 = \tan^2 x \Rightarrow c = \tan x$$

۷۱- پاسخ: گزینه ۴

$$A = \frac{3 \tan^2 x + \Delta}{3 \sin^2 x + \Delta \cos^2 x} = \frac{3 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \Delta}{3 \sin^2 x + \Delta \cos^2 x} = \frac{3 \sin^2 x + \Delta \cos^2 x}{\cos^2 x (3 \sin^2 x + \Delta \cos^2 x)} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$A = 1 + \tan^2 x \text{ پس: } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ می دانیم}$$

۷۲- پاسف: گزینه ۴

قرار است تساوی فوق یک اتحاد مثلثاتی باشد به این معنا که برای تمام مقادیری که عبارت تعریف شده است به یک تساوی صحیح برسیم. پس عبارت سمت چپ را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + \frac{\sin x - 1}{1 + \sin x} &= \frac{(1 + \sin x)^2 - (1 - \sin x)^2}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{1 + \sin^2 x + 2\sin x - 1 - \sin^2 x + 2\sin x}{\cos^2 x} = \frac{4\sin x}{\cos^2 x} = 4 \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x} = \frac{4 \tan x}{\cos x} \Rightarrow k = 4 \end{aligned}$$

۷۳- پاسف: گزینه ۳ می دانیم:

$$(\tan x + \cot x)^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \tan x \cot x \Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 = 7 + 2 = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x + \cot x = 3 \\ \tan x + \cot x = -3 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

در ربع سوم $\tan x > 0, \cot x > 0$ پس $\tan x + \cot x > 0$ در نتیجه غیر قابل قبول است.

$$\tan x + \cot x = 3 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 3 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 3 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{3}$$

از طرفی:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2$$

$$= 1 + \frac{2}{3} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{5}{3}$$

$$\sin x + \cos x = -\sqrt{\frac{5}{3}} \text{ در ربع سوم } \sin x < 0, \cos x < 0 \text{ پس } \sin x + \cos x < 0 \text{ پس:}$$

۷۴- پاسف: گزینه ۱

می دانیم $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ بنابراین:

$$(3 + \sqrt{2}) \sin^2 x + (3 - \sqrt{2})(1 - \sin^2 x) = \frac{7}{3} \Rightarrow (3 + \sqrt{2}) \sin^2 x + 3 - \sqrt{2} - (3 - \sqrt{2}) \sin^2 x = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2} \sin^2 x = \frac{3\sqrt{2} - 2}{3} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3\sqrt{2} - 2}{6\sqrt{2}} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{12} = \frac{3 - \sqrt{2}}{6}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{3 + \sqrt{2}}{6} \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = \left(\frac{3 - \sqrt{2}}{6}\right)^2 + \left(\frac{3 + \sqrt{2}}{6}\right)^2$$

$$= \frac{9 + 2 - 6\sqrt{2}}{36} + \frac{9 + 2 + 6\sqrt{2}}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$$

۷۵- پاسف: گزینه ۳

$$\sin x = \sqrt{2m^2 - 8m + 9} = \sqrt{2m^2 - 8m + 8 + 1} = \sqrt{2(m^2 - 4m + 4) + 1} = \sqrt{2(m-2)^2 + 1}$$

می دانیم هرکثر مقدار $\sin x$ برابر یک است و چون $2(m-2)^2 + 1 \geq 1$ می باشد پس فقط m می تواند ۲ باشد بنابراین:

$$m = 2 \Rightarrow \sin x = \sqrt{1} = 1 \xrightarrow{\sinh 2} x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{n^2 - 3(2)n + 8} = 0 \Rightarrow n^2 - 6n + 8 = 0 \Rightarrow (n-2)(n-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 2 \Rightarrow n \sin x + m \cos x = 2 \times 1 + 2 \times 0 = 2 \\ n = 4 \Rightarrow n \sin x + m \cos x = 4 \times 1 + 2 \times 0 = 4 \end{cases}$$

۷۶- پاسف: گزینه ۳

❖ راه دوم) صورت و مخرج کسر زیر را بر $\sin \theta$ تقسیم می کنیم تا عبارت بر حسب $\cot \theta$ نوشته شود:

$$\frac{\cos \theta - \sin \theta}{2 \sin \theta + \cos \theta} = \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\sin \theta}}{2 \frac{\sin \theta}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{\cot \theta - 1}{2 + \cot \theta} = \frac{\frac{3}{4} - 1}{2 + \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{11}{4}} = -\frac{1}{11}$$

❖ راه دوم)

$$\cot \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{4} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \theta - \sin \theta}{2 \sin \theta + \cos \theta} = \frac{\frac{3}{4} \sin \theta - \sin \theta}{2 \sin \theta + \frac{3}{4} \sin \theta} = \frac{-\frac{1}{4} \sin \theta}{\frac{11}{4} \sin \theta} = -\frac{1}{11}$$

۷۷- پاسف: گزینه ۱

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = a$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{a}$$

دو طرف تساوی $\sin x + \cos x = 5$ را به توان ۲ می رسانیم:

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2 \underbrace{\sin x \cos x}_{\frac{1}{a}} = b^2 \Rightarrow 1 + \frac{2}{a} = b^2 \Rightarrow \frac{2}{a} = b^2 - 1 \xrightarrow{\times a} 2 = a(b^2 - 1)$$

۷۸- پاسف: گزینه ۱

ابتدا عبارت داده شده را ساده می کنیم:

$$\frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} = \frac{\tan^2 x (\cos^2 x - 1)}{\cot^2 x (1 - \sin^2 x)} = \frac{\tan^2 x (-\sin^2 x)}{\cot^2 x (\cos^2 x)} = \frac{\tan^2 x}{1} \left(-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right)$$

$$= -\tan^2 x = -(\tan^2 x)^2 = -4^2 = -16$$

۷۹- پاسخ: گزینه ۴

کافی است صورت و مخرج کسر $\frac{3\cos^2 x - 2\sin^2 x + 1}{2\cos^2 x - 3\sin^2 x + 4}$ را بر $\cos^2 x$ تقسیم کنیم در این صورت داریم:

$$\frac{3 - 2\tan^2 x + (1 + \tan^2 x)}{2 - 3\tan^2 x + 4(1 + \tan^2 x)} = \frac{4 - \tan^2 x}{6 + \tan^2 x} = \frac{1}{3} \Rightarrow 12 - 3\tan^2 x = 6 + \tan^2 x$$

$$\Rightarrow 4\tan^2 x = 6 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

۸۰- پاسخ: گزینه ۱

برای مناسبه عبارت A ، مخرج و صورت آن را بر $\cos^5 x$ تقسیم کرده و سپس از اتحاد $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{3\sin^5 x + 4\cos^3 x - \cos x}{\cos^5 x}}{\frac{5\cos^5 x - 3\sin^3 x + \sin x}{\cos^5 x}} = \frac{3\tan^5 x + \frac{4}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^4 x}}{5 - \frac{3\tan^3 x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{\cos^4 x}} \\ &= \frac{3\tan^5 x + 4(1 + \tan^2 x) - (1 + \tan^2 x)^2}{5 - 3\tan^3 x(1 + \tan^2 x) + \tan x(1 + \tan^2 x)^2} = \frac{3 \times 32 + 4 \times 5 - 25}{5 - 3 \times 8 \times 5 + 2 \times 25} = -\frac{7}{5} \end{aligned}$$

۸۱- پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ و $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ پس به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$\cos^2 \alpha = (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$$

$$\sin^2 \alpha = (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} &= \frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{(1 + \sin \alpha)} - \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)} \\ &= 1 - \sin \alpha - 1 + \cos \alpha = \cos \alpha - \sin \alpha \end{aligned}$$

۸۲- پاسخ: گزینه ۱

مخرج مشترک می‌گیریم و سپس ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^3 \theta}{1 + \cos \theta} + \sin \theta \cos \theta &= \frac{\sin^3 \theta + \sin \theta \cos \theta (1 + \cos \theta)}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta (\sin^2 \theta + \cos \theta + \cos^2 \theta)}{1 + \cos \theta} = \frac{\sin \theta (1 + \cos \theta)}{1 + \cos \theta} = \sin \theta \end{aligned}$$

توجه کنید که از رابطه $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ استفاده کردیم.

۸۳- پاسخ: گزینه ۲

❖ **راه اول)** می‌توانیم با داشتن $\cos x$ سایر نسبت‌های مثلثاتی x را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی مناسبه کرده و در عبارت A جای‌گذاری کنیم. اما چون x می‌تواند در نواحی اول یا چهارم دایره مثلثاتی باشد برای سایر نسبت‌ها دو جواب به دست می‌آید که باید هر دو حالت را مناسبه کنید و کمی وقت گیر است.

❖ **راه دوم)** عبارت A را ساده کرده و سپس حاصل A را به دست می‌آوریم:

$$A = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)}$$

$$= \frac{1 + \sin x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

۸۴- پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x + 3\cos x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3\sin x + 9\cos x = 4\sin x + 4\cos x \Rightarrow 5\cos x = \sin x$$

$$\Rightarrow \tan x = 5 \Rightarrow \tan x + \cot x = 5 + \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{26}{5} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{5}{26}$$

۸۵- گزینه ۳

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = 3 = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$A = \sin \alpha + \cos \alpha \Rightarrow A^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Rightarrow A^2 = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow A = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$$

چون α در ناحیه سوم هست هم $\sin \alpha$ و هم $\cos \alpha$ مقادیری منفی دارند پس $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$

$$\Rightarrow A = -\sqrt{\frac{5}{3}} \quad \text{گزینه (۳) درست است}$$

۸۶- گزینه ۳

$$\sin x + \tan x > 0 \rightarrow \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} > 0 \rightarrow \sin x \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) > 0 \rightarrow \sin x \left(\frac{\cos x + 1}{\cos x}\right) > 0$$

$$\rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}(\cos x + 1) > 0 \rightarrow \tan x(1 + \cos x) > 0 \rightarrow 1 + \cos x \rightarrow \tan x > 0 \quad \text{است } x \text{ در ناحیه اول یا سوم است}$$

$$\frac{1}{\cos x} - \sin x \tan x < 0 \rightarrow \frac{1}{\cos x} - \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} < 0 \rightarrow \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} < 0 \rightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos x} < 0 \rightarrow \cos x < 0 \rightarrow$$

(۲) x در ناحیه دوم یا سوم است.

$$(1) \cap (2) \rightarrow x \text{ در ناحیه سوم است.}$$

۸۷- گزینه ۱

عجب سؤالی، به به!!! فکر می‌کنی خیلی سخته، مگه نه؟! اما نگاه کن چقدر راحت حل می‌شه. ابتدا حاصل عبارت زیر را بدست می‌آرم:

$$\frac{1}{1+\tan \alpha} + \frac{1}{1+\cot \alpha} = \frac{(1+\cot \alpha) + (1+\tan \alpha)}{(1+\tan \alpha)(1+\cot \alpha)} = \frac{2+\tan \alpha + \cot \alpha}{1+\cot \alpha + \tan \alpha + \underbrace{\tan \alpha \cot \alpha}_1} = \frac{2+\tan \alpha + \cot \alpha}{2+\tan \alpha + \cot \alpha} = 1$$

$$A+B = \left(\frac{1}{1+\tan 1^\circ} + \frac{1}{1+\cot 1^\circ} \right) + \left(\frac{1}{1+\tan 2^\circ} + \frac{1}{1+\cot 2^\circ} \right) + \dots + \left(\frac{1}{1+\tan 10^\circ} + \frac{1}{1+\cot 10^\circ} \right) = \underbrace{1+1+\dots+1}_{10 \text{ تا}} = 10$$

۸۸ - گزینه ۲

$$\cot x = 0/4 \rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \rightarrow \boxed{\cos x = \frac{2}{5} \sin x}$$

$$A = \left(\frac{3}{\sin x} + \frac{0/4}{\cos x} \right)^2 = \left(\frac{3 \cos x + 0/4 \sin x}{\sin x \cos x} \right)^2 \xrightarrow{\cos x = \frac{2}{5} \sin x} \left(\frac{\frac{6}{5} \sin x + \frac{0}{10} \sin x}{\sin x \left(\frac{2}{5} \sin x \right)} \right)^2$$

$$= \left(\frac{\frac{6}{5} \sin x + \frac{0}{5} \sin x}{\frac{2}{5} \sin^2 x} \right)^2 = \left(\frac{6 \sin x}{2 \sin^2 x} \right)^2 = \left(\frac{3}{\sin x} \right)^2 = \frac{9}{\sin^2 x} = 9(1 + \cot^2 x)$$

$$= 9 \left(1 + \left(\frac{2}{5} \right)^2 \right) = 9 \left(1 + \frac{4}{25} \right) = 9 \left(\frac{29}{25} \right) = \frac{261}{25} \text{ گزینه (۲) درست است.}$$

۸۹ - گزینه ۲

هر دو معادله رو به توان ۲ می رسونم:

$$\begin{cases} a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x + 2ab \sin x \cos x = 4 \\ b^2 \sin^2 x + a^2 \cos^2 x - 2ab \sin x \cos x = 2 \end{cases}$$

حالا دو تا معادله رو با هم جمع می کنیم:

$$a^2 (\sin^2 x + \cos^2 x) + b^2 (\cos^2 x + \sin^2 x) = 6 \Rightarrow a^2 + b^2 = 6$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \Rightarrow 6 = 3^2 - 2ab = 9 - 2ab \Rightarrow 1 = -2ab \Rightarrow ab = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است.}$$

۹۰ - گزینه ۴

یادآوری: $1 \pm \cos x \geq 0, 1 \pm \sin x \geq 0$

$$\cot \theta + \cos \theta < 0 \rightarrow \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \cos \theta < 0 \rightarrow \cos \theta \left(\frac{1}{\sin \theta} + 1 \right) < 0 \rightarrow \cos \theta \left(\frac{1 + \sin \theta}{\sin \theta} \right) < 0$$

چون $1 + \sin \theta$ نامنفی است ($1 + \sin \theta \geq 0$) پس باید $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} < 0$ باشد یعنی $\cos \theta, \sin \theta$ هم علامت نیستند یعنی θ در ربع

دوم یا چهارم است حالا بریم سراغ ادامه‌ی حل:

$$\sqrt{1 + \cot^2 \theta} + \frac{1}{\sin \theta} = 0 \rightarrow \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta}} + \frac{1}{\sin \theta} = 0 \rightarrow \left| \frac{1}{\sin \theta} \right| + \frac{1}{\sin \theta} = 0 \rightarrow \left| \frac{1}{\sin \theta} \right| = -\frac{1}{\sin \theta}$$

$$\boxed{||0| = -0 \Leftrightarrow 0 \leq 0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \theta} \leq 0 \rightarrow \sin \theta < 0 \rightarrow \theta \text{ باید در ربع سوم یا چهارم باشد}$$

گزینه (۴) درست است. θ باید در ربع چهارم است $\xrightarrow{\text{اشتراک}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \theta \text{ در ربع دوم یا چهارم است: از قسمت اول} \\ \theta \text{ در ربع سوم یا چهارم است: از قسمت دوم} \end{array} \right\}$

۹۱- گزینه ۱

یادآوری:
$$\begin{cases} \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \\ \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \end{cases}$$

$$A = \tan x + \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - 4} = \tan x + \sqrt{(1 + \cot^2 x) + (1 + \tan^2 x) - 4}$$

$$\tan x + \sqrt{\cot^2 x + \tan^2 x - 2} \xrightarrow{\tan x \cdot \cot x = 1} \tan x + \sqrt{\cot^2 x + \tan^2 x - 2 \tan x \cot x} =$$

$$\boxed{a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2} \quad \boxed{\sqrt{0^2} = |0|}$$

$$\tan x + \sqrt{(\cot x - \tan x)^2} = \tan x + |\cot x - \tan x|$$

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cot x > \tan x \Rightarrow \cot x - \tan x > 0$$

$$\tan x + \underbrace{|\cot x - \tan x|}_{\text{مثبت}} = \tan x + (\cot x - \tan x) = \cot x \quad \text{گزینه ۱}$$

۹۲- گزینه ۱

$$\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sqrt{1 + \cos \alpha}}{\sqrt{1 - \cos \alpha}} - \frac{\sqrt{1 - \cos \alpha}}{\sqrt{1 + \cos \alpha}}$$

حالا مثل بچه های خوب مخرج مشترک بگیر:

$$\frac{(\sqrt{1 + \cos \alpha})^2 - (\sqrt{1 - \cos \alpha})^2}{\sqrt{1 - \cos \alpha} \cdot \sqrt{1 + \cos \alpha}} = \frac{(1 + \cos \alpha) - (1 - \cos \alpha)}{\sqrt{1 - \cos \alpha} \cdot \sqrt{1 + \cos \alpha}} = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos \alpha} \cdot \sqrt{1 + \cos \alpha}}$$

$$= \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}} = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha}} = \frac{2 \cos \alpha}{|\sin \alpha|}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cos \alpha}{|\sin \alpha|} = 2 \cot \alpha \Rightarrow \frac{2 \cos \alpha}{|\sin \alpha|} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow |\sin \alpha| = \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha \text{ همواره مثبت است}$$

α در ناحیه اول و دوم گزینه (۱) درست است.

۹۳- گزینه ۳

$$\sin x + \frac{\tan x}{\sqrt{\tan x - 1 - k}} = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{\tan x}{\sqrt{\tan x - 1 - k}}$$

بچه می دونیم که به دلیل رادیکال با فرجه‌ی زوج باید $\tan x - 1 - k > 0$ باشد یعنی $\tan x > 1 + k$ و چون خود مسئله به ما گفته که k مثبت است پس $\tan x$ همواره مثبت است. در ضمن گلای من مخرج کسر به دلیل رادیکال با فرجه‌ی زوج همواره مثبت است. پس سمت راست تساوی همواره منفی است پس سمت چپ تساوی هم همواره منفی است یعنی: $\sin x < 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan x > 0 \longrightarrow \text{ناحیه اول و سوم} \\ \sin x < 0 \longrightarrow \text{ناحیه سوم و چهارم} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{ناحیه سوم}$$

گزینه (۳) درست است.