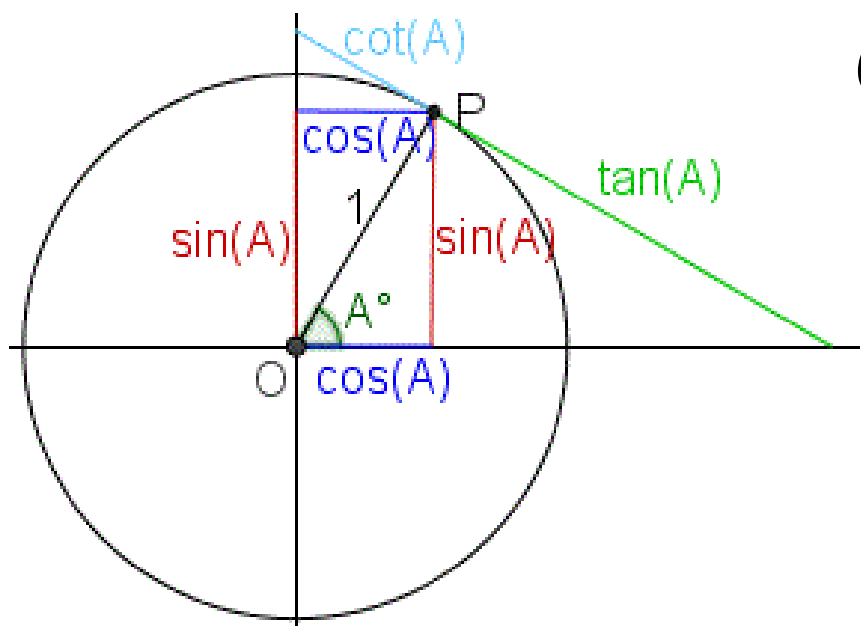




حل تشریحی سوالات کنکور داخل و خارج

مبحث مثلثات



تهیه و تنظیم: عزیز اسدی

دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $(2\sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x) \sqrt{1 + \tan^2 x}$ کدام است؟

۴ $-\cos x$

۳ $-\sin x$

۲ $\cos x$

۱ $\sin x$

$$\sqrt{1 + \tan^2 x \left(2\left(\frac{1}{4}\right) - \sin^2 x\right)} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} (1 - \sin^2 x)} = \frac{1}{|\cos x|} \cdot \cos^2 x$$

$$\frac{1}{-\cos x} \times \cos^2 x = -\cos x$$

چون $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ می باشد پس $\cos x < 0$ است و داریم:

روش دوم: با استفاده از عددگذاری نیز می توان سوال را حل کرد. فقط دقت شود باید x در بازه $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ باشد:

$$x = 240^\circ \text{ (} 60^\circ \text{ ربع سوم)} \rightarrow \sqrt{1 + 3\left(2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}\right)} = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

گزینه ای درست است که به ازای $x = 240^\circ$ (60° ربع سوم) برابر $\frac{1}{2}$ شود، که گزینه ۴ می باشد.

حاصل عبارت $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

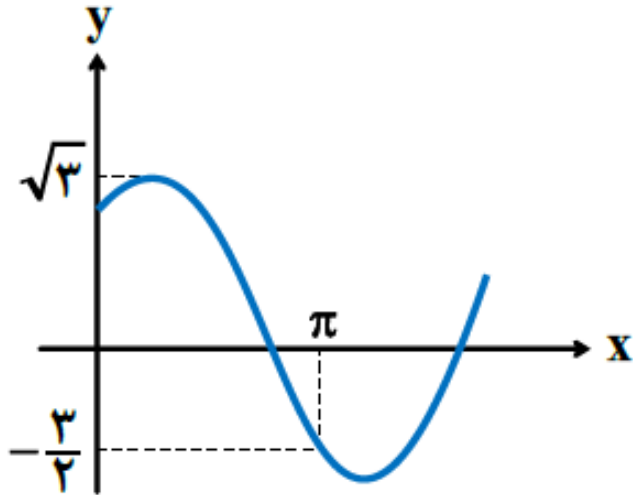
$-\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{4}$ (۱)

$$\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(\cancel{6}\pi - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(\Delta\pi - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟



(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) ۲

تجربی ۷۶۸۱

$$y_{\max} = \sqrt{3} \rightarrow |b| + a = \sqrt{3} \xrightarrow[\text{در نتیجه } b > 0]{\text{نمودار شبیه sin است}} b + a = \sqrt{3}$$

از طرفی نقطه $(\pi, -\frac{3}{2})$ در ضابطه تابع صدق می کند. پس داریم:

$$-\frac{3}{2} = a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) \rightarrow a - b \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{3}{2} \rightarrow a - \frac{b\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} \xrightarrow{\times 2} 2a - b\sqrt{3} = -3$$

$$-2 \begin{cases} a + b = \sqrt{3} \\ 2a - b\sqrt{3} = -3 \end{cases} \rightarrow -b(2 + \sqrt{3}) = -(2\sqrt{3} + 3) \rightarrow b(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) \rightarrow b = \sqrt{3}$$

مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $4\sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$ ، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) $\frac{5\pi}{2}$

(۲) 3π

(۳) 4π

(۴) 5π

$$f \sin x \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \rightarrow f \sin x (-\cos x) = 1 \rightarrow f\left(-\frac{1}{2} \sin 2x\right) = 1 \rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \rightarrow x = \frac{11\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \rightarrow x = \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها $\rightarrow \frac{60\pi}{12} = 5\pi$

اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل $(\frac{1}{\sin x} - \sin x)$ $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ کدام است؟

$\cos x$ (۴)

$\cos^2 x$ (۳)

$-\cos x$ (۲)

$-\cos^2 x$ (۱)

تجربی ۱۳۹۸ - خارج کشور

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left(\frac{1-\sin^2 x}{\sin x} \right) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{|\cos x|}} \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\sin x \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\cos^2 x$$

دقت شود، چون $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ می باشد پس $\cos x < 0$ است و $|\cos x| = -\cos x$ می باشد.

روش عددگذاری: π را کمانی در بازه $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ قرار می دهیم و حاصل عبارت را محاسبه می کنیم.

$$x = 135^\circ \text{ (} 45^\circ \text{ ربع دوم)} \rightarrow A = \frac{-1}{\sqrt{1+1}} \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

گزینه ای درست است که به ازای $x = 135^\circ$ (۴۵° ربع دوم) برابر $-\frac{1}{2}$ شود که گزینه ۱ درست است.

اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$$

(۲) -۰/۵۲

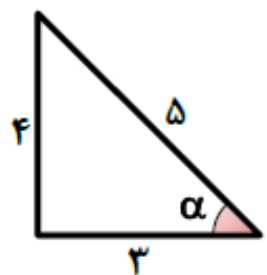
(۴) ۰/۴۸

(۱) -۱/۲۳

(۳) ۰/۲۷

$$\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(2\pi + \frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha(-\sin\alpha) + \cot\alpha$$

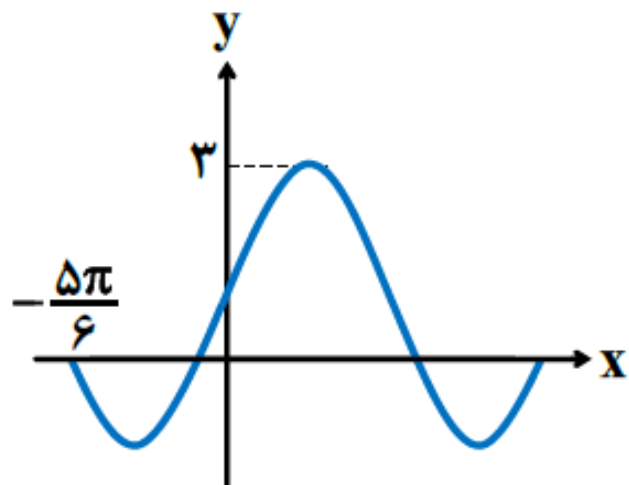
چون $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم است می توان با استفاده از مثلث قائم الزاویه سایر نسبت های مثلثاتی را تعیین نمود.



$$\rightarrow \sin\alpha = -\frac{4}{5} \text{ و } \cos\alpha = -\frac{3}{5} \text{ و } \cot\alpha = \frac{3}{4}$$

$$-\cos\alpha\sin\alpha + \cot\alpha = -\frac{12}{25} + \frac{3}{4} = \frac{-48 + 75}{100} = 0.27$$

شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos(\frac{\pi}{4} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟



(۱) ۱/۵

(۲) ۲

(۳) ۲/۵

(۴) $1 + \sqrt{3}$

$$y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a + b \sin x$$

$$y_{\max} = 3 \rightarrow |b| + a = 3 \xrightarrow[\text{و } b > 0 \text{ می باشد}]{\text{نمودار شبیه sin است}} a + b = 3 \quad (1)$$

از طرفی نقطه $(-\frac{5\pi}{6}, 0)$ در تابع صدق می کند داریم:

$$(-\frac{5\pi}{6}, 0) \rightarrow a + b \sin(-\frac{5\pi}{6}) = 0 \rightarrow a - b \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = 0 \rightarrow a - \frac{b}{2} = 0 \rightarrow a = \frac{b}{2} \rightarrow b = 2a$$

$$\xrightarrow[\text{قرار می دهیم}]{\text{در معادله (1)}} a + 2a = 3 \rightarrow a = 1, b = 2 \rightarrow y = 1 + 2 \sin x \rightarrow y(\frac{\pi}{6}) = 2$$

جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

(۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$

(۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$

(۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

$$\cos 3X + \cos X = 0 \rightarrow \cos 3X = -\cos X = \cos(\pi - X) \rightarrow 3X = 2k\pi \pm (\pi - X)$$

$$\begin{cases} 3X = 2k\pi + \pi - X \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3X = 2k\pi - \pi + X \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

دقت شود در صورت سؤال ذکر شده $\cos X \neq 0$ و این جوابها $\cos X$ را صفر می کند.

حاصل عبارت $\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4}$ ، کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{2}$

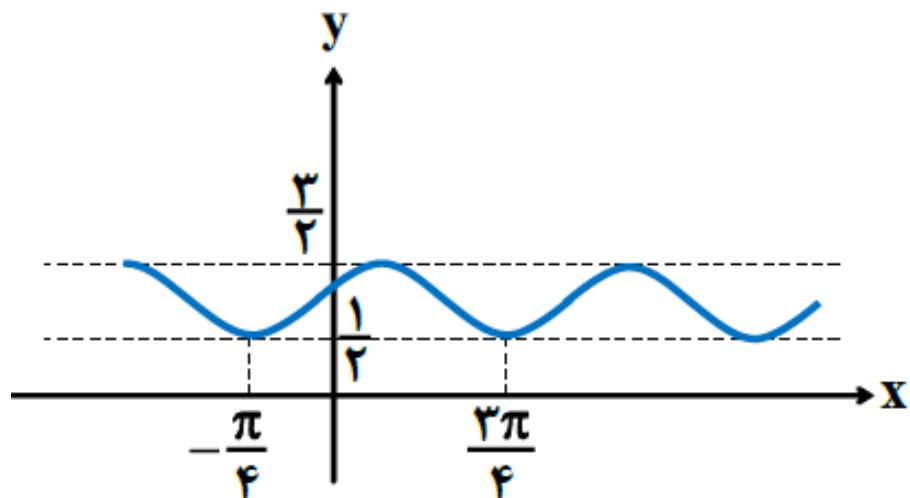
(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{3}{2}$

$$\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4} = \tan(3\pi - \frac{\pi}{4}) + \sin(4\pi - \frac{\pi}{4}) \cos(3\pi + \frac{\pi}{4}) = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

$$y = 1 + a \sin bx \cos bx \rightarrow y = 1 + \frac{a}{2} \sin(2bx)$$

می‌دانیم در نمودارهای $\sin$ و $\cos$ همواره فاصله دو ماکزیمم متوالی و یا دو مینیمم متوالی برابر یک دوره متناوب است پس داریم:

$$T = \frac{2\pi}{2b} - (-\frac{2\pi}{2b}) = \pi \rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = \pi \rightarrow b = \pm 1$$

از طرفی: $y_{\max} = \frac{3}{2} \rightarrow |\frac{a}{2}| + 1 = \frac{3}{2} \rightarrow |\frac{a}{2}| = \frac{1}{2} \rightarrow a = \pm 1$

نمودار شبیه $\sin$ است $\rightarrow ab > 0 \rightarrow a = 1, b = 1$ یا $a = -1, b = -1 \rightarrow a + b = \pm 2$

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{4}\sin 2x$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

3π (۴)

2π (۳)

$\frac{7\pi}{2}$ (۲)

$\frac{5\pi}{2}$ (۱)

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$(\sin x + \cos x)(1 - \frac{1}{2} \sin 2x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = 1 \rightarrow \sin 2x = 2 \rightarrow \text{جواب ندارد.}$$

می‌دانیم $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ و $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ پس داریم:

$$\sin x + \cos x = 1 \rightarrow \sin x = 1 - \cos x \rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \rightarrow x = 2k\pi \rightarrow x = 0, x = 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2} \rightarrow \tan \frac{x}{2} = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع جواب‌ها}} 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

توجه داشته باشید در حل معادلات مثلثاتی اگر طرفین معادله را به توان ۲ برسانید باید حتماً جواب‌ها را امتحان کنید چون ممکن است جواب‌های اضافی ایجاد شود. به همین دلیل برای حل معادله $\sin x + \cos x = 1$ طرفین را به توان ۲ نرساندیم.

حاصل عبارت $\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3}$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) $\sqrt{3}$

$$\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3} = \tan(3\pi - \frac{\pi}{6}) \sin(4\pi - \frac{\pi}{3}) + \cos(3\pi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) π

دوره تناوب توابع $\sin$ ، $\cos$ و $\tan$ در کتاب موجود است. ولی بد نیست بدانید دوره تناوب تابع $y = a \cot(bx)$ نیز مثل $y = a \tan(bx)$ از رابطه $\frac{\pi}{|b|}$ به دست می آید. از طرفی ما اجازه داریم ظاهر تابع را تغییر دهیم (تابع را ساده کنیم) و سپس دوره تناوب تعیین کنیم.

$$y = \frac{1}{2} \sin 4x \rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

مثلاً دوره تناوب تابع $y = \sin 2x \cos 2x$ برابر است با:

برای حل این تست می دانیم، $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$ پس:

$$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x) = -2 \cot(2\pi x) \rightarrow T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ ، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) $\frac{5\pi}{2}$

(۲) 3π

(۳) $\frac{7\pi}{2}$

(۴) 4π

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \rightarrow 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow 2(\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{2} \rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\sin^2 2x\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 1 \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \\ \sin 2x = -1 \rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

مجموع جوابها $\rightarrow \frac{16\pi}{4} = 4\pi$

حاصل عبارت $\tan(30^\circ)\cos(21^\circ) + \tan(48^\circ)\sin(84^\circ)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند.)

(۱) $-\frac{1}{2}$

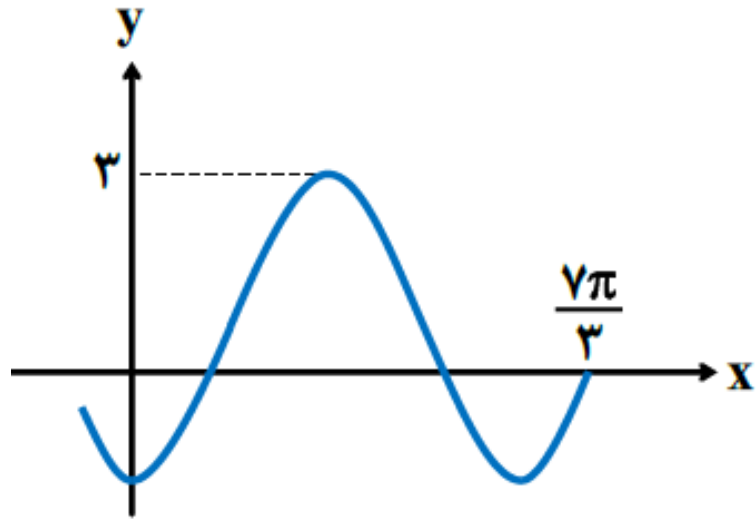
(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) ۲

$$\begin{aligned} \tan(300^\circ)\cos(210^\circ) + \tan(480^\circ)\sin(140^\circ) &= \tan(2\pi - 60^\circ)\cos(\pi + 30^\circ) + \tan(3\pi - 60^\circ)\sin(5\pi - 60^\circ) = \\ (-\tan 60^\circ)(-\cos 30^\circ) - \tan 60^\circ \sin 60^\circ &= -\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0. \end{aligned}$$

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin(\frac{\pi}{3} + x)$ است. مقدار b کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) -۲

تجربی ۱۳۹۹

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = a + b \cos x$$

$$y_{\max} = 3 \rightarrow |b| + a = 3 \xrightarrow[\text{در نتیجه } b < 0]{\text{نمودار شبیه } -\cos \text{ است}} a - b = 3 \quad (1)$$

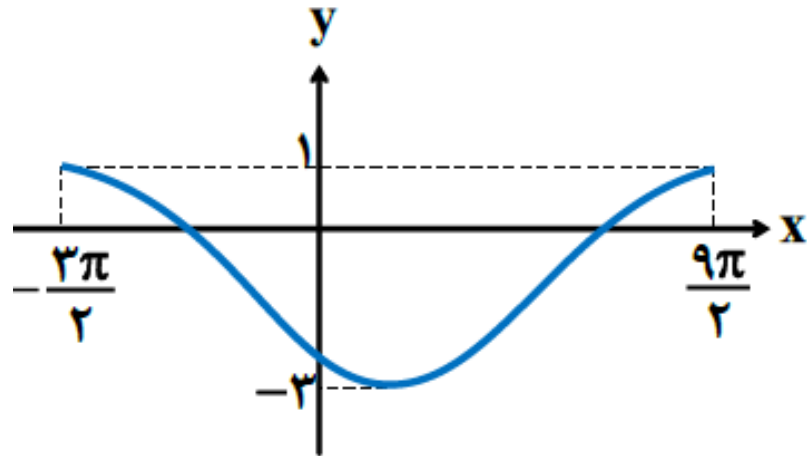
از طرفی نقطه $(\frac{7\pi}{3}, 0)$ در تابع صدق می کند. داریم:

$$a + b \cos \frac{7\pi}{3} = 0 \rightarrow a + b \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = 0 \rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \rightarrow \frac{b}{2} = -a \rightarrow b = -2a$$

در (۱) قرار می دهیم

$$\xrightarrow{\text{در (۱) قرار می دهیم}} a - (-2a) = 3 \rightarrow a = 1, b = 2$$

شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه تناوب، نشان می‌دهد. $\frac{a}{b}$ کدام است؟



(۱) -۲

(۲) -۳

(۳) -۴

(۴) -۶

تجربی ۱۳۹۹

$$c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}, |a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$$

در توابع $y = a \cos(bx) + c$ و $y = a \sin(bx) + c$ حتماً بلد باشید که:

در این سؤال c برابر است با: $c = \frac{1-3}{2} = -1$ که البته در صورت سؤال خواسته نشده است. از طرفی دوره تناوب برابر است با:

$$T = \frac{9\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 6\pi = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

$$|a| = \frac{1 - (-3)}{2} = 2 \rightarrow a = \pm 2$$

$$a = -2, b = \frac{1}{3} \text{ یا } a = 2, b = \frac{-1}{3} \rightarrow \frac{a}{b} = -6$$

چون نمودار شبیه $-\sin$ است باید $ab < 0$ باشد یعنی:

جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ ، با شرط $x \neq k\pi$ ، که در آن k یک عدد صحیح است، کدام

است؟

(۱) $\frac{k\pi}{3}$

(۲) $\frac{2k\pi}{3}$

(۳) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

(۴) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

برای حل معادله $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ می توان طرف دوم معادله را به $\sin$ تبدیل نمود. داریم:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - (x + \frac{\pi}{4})) \rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4} - x) \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - x \rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + x \rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

توجه شود در صورت سوال ذکر شده $x \neq k\pi$ پس $x = 2k\pi + \pi$ قابل قبول نیست.

حاصل عبارت $\tan(285)\tan(-165) - \sin(1095)\cos(255)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند.)

(۳) $-\cos^2(15)$

(۳) $-\sin^2(15)$

(۲) $\cos^2(15)$

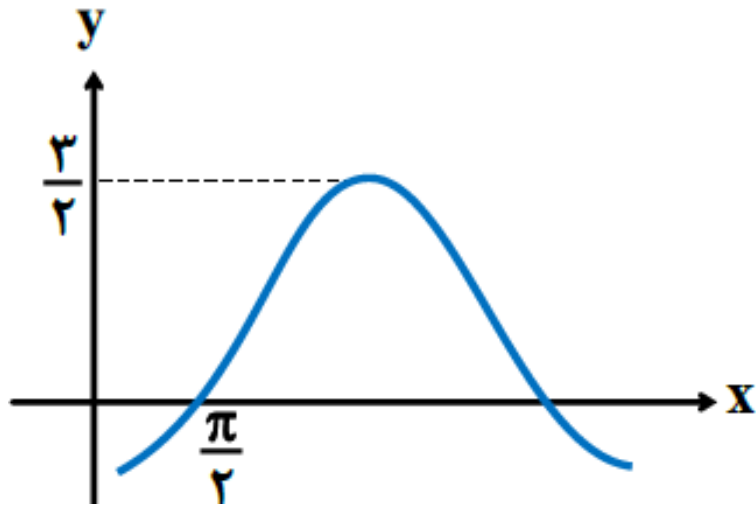
(۱) $\sin^2(15)$

می دانیم $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ پس داریم:

$$-\tan(285^\circ)\tan(165^\circ) - \sin(1095^\circ)\cos(255^\circ) = -\tan\left(\frac{3\pi}{2} + 15^\circ\right)\tan(\pi - 15^\circ) - \sin(6\pi + 15^\circ)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 15^\circ\right) =$$

$$\cot 15^\circ(-\tan 15^\circ) - \sin 15^\circ(-\sin 15^\circ) = -1 + \sin^2 15^\circ = -\cos^2 15^\circ$$

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. مقدار a کدام است؟



(۱) -۱

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ۱

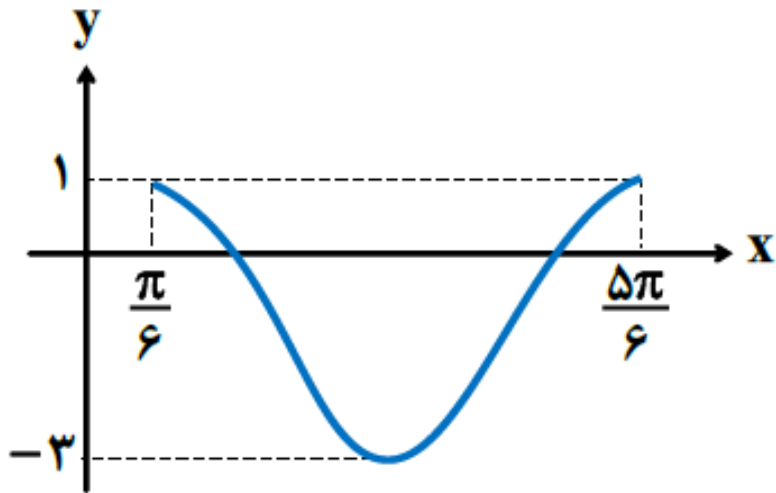
تجربی ۱۳۹۹ - خارج کشور

$$y_{\max} = \frac{3}{2} \rightarrow |b| + a = \frac{3}{2} \rightarrow a - b = \frac{3}{2} \quad (1)$$

اگر به نمودار رسم شده دقت شود، تابع ابتدا مینیمم دارد و سپس ماکزیمم و در نتیجه شبیه $-\sin$ است و $b < 0$ خواهد بود. از طرفی نقطه $(\frac{\pi}{2}, 0)$ در تابع صدق می کند. داریم:

$$a + b \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow a + b \cos \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \rightarrow b = -2a \xrightarrow{\text{در (1) قرار می دهیم}} a - (-2a) = \frac{3}{2} \rightarrow 3a = \frac{3}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ در یک بازه تناوب است. مقادیر b و c کدام اند؟



(۱) $b = 3$ و $c = -1$

(۲) $b = 3$ و $c = -2$

(۳) $b = \frac{3}{2}$ و $c = -2$

(۴) $b = \frac{3}{2}$ و $c = -1$

$$y = a \sin(bx) + c \quad c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{1 - 3}{2} = -1, \quad |a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{1 - (-3)}{2} = 2 \rightarrow a = \pm 2$$

$$T = \frac{\Delta\pi}{\frac{\pi}{6}} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow b = \pm 3$$

$$a = 2, b = 3 \text{ یا } a = -2, b = -3$$

فاصله بین دو ماکزیمم متوالی معادل یک دوره تناوب است پس داریم:

نمودار شبیه $\sin$ است و در نتیجه $ab > 0$ است پس:

البته توجه داشته باشید که در این تست a خواسته نشده است.

تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $4\sin(3x)\cos(3x)=1$ ، در بازهٔ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

می‌دانیم $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ پس داریم:

$$4 \sin 3x \cos 3x = 1 \rightarrow 4 \left(\frac{1}{2} \sin 6x \right) = 1 \rightarrow \sin 6x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \rightarrow x = \frac{\pi}{36}, \frac{13\pi}{36} \\ 6x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \rightarrow x = \frac{5\pi}{36}, \frac{17\pi}{36} \end{cases}$$

→ معادله در بازه $[0, \frac{\pi}{3}]$ چهار ریشه دارد.

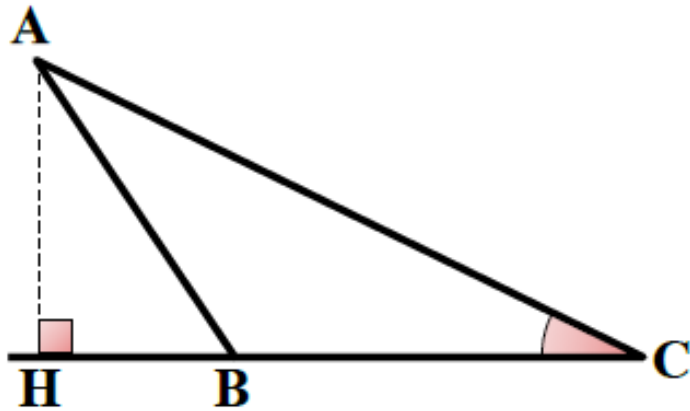
در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$ ، اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟

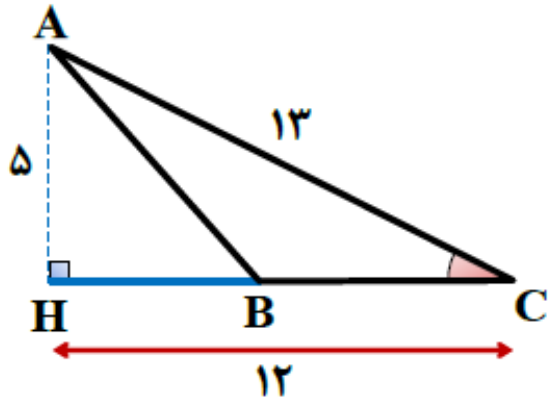
(۱) $3/25$

(۲) $3/5$

(۳) $3/6$

(۴) $3/75$





چون $\sin C = \frac{5}{13}$ است می توان $AH = 5$ و $AC = 13$ در نظر گرفت و CH را با فیثاغورس بدست

$$CH^2 = 169 - 25 = 144 \rightarrow CH = 12$$

آورد. داریم:

اما در صورت سوال گفته شده $CH = 9$ می باشد یعنی CH واقعی، $\frac{3}{4}$ برابر مقدار بدست آمده است.

$$AH = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3.75$$

پس AH واقعی هم باید $\frac{3}{4}$ برابر باشد.

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\tan(3x)\tan(x)=1$ ، در بازه $[\pi, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) 5π

(۲) 6π

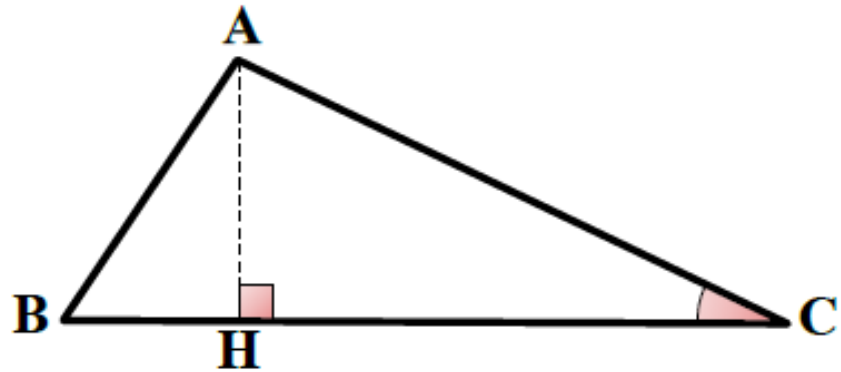
(۳) $\frac{9\pi}{2}$

(۴) $\frac{11\pi}{2}$

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \xrightarrow[k=\frac{2\pi}{8}]{k=4} x = \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8} \xrightarrow{\text{مجموع جوابها}} \frac{48\pi}{8} = 6\pi$$

در شکل زیر، $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $AC = 96$ ، اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟

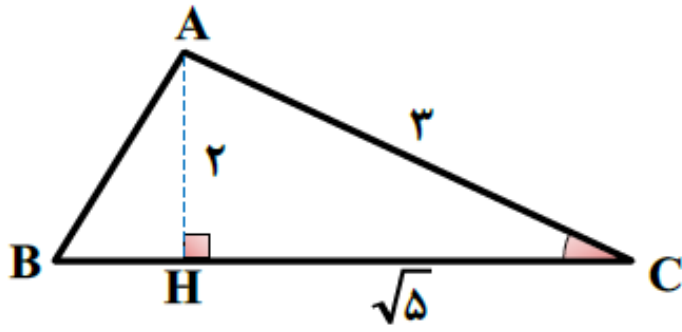


(۱) ۴۸

(۲) ۵۶

(۳) ۶۴

(۴) ۷۲



چون $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ است می‌توان $CH = \sqrt{5}$ و $AH = 2$ در نظر گرفت و AC را با فیثاغورس به دست آورد. $AC = 3$ خواهد بود ولی AC واقعاً ۹۶ است یعنی ۳۲ برابر، پس باید AH هم ۳۲ برابر شود. یعنی:

$$AH = 2 \times 32 = 64$$

اگر $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$ باشد. مقدار $f\left(\frac{\pi}{36}\right)$ کدام است؟

$$\frac{6 + 3\sqrt{3}}{16} \quad (4)$$

$$\frac{6 + \sqrt{3}}{16} \quad (3)$$

$$\frac{6 - \sqrt{3}}{16} \quad (2)$$

$$\frac{6 - 3\sqrt{3}}{16} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \rightarrow \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \cancel{16} \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

طبق روابط توان شکن داریم: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ پس می توان $\cos^2 \frac{\pi}{12}$ را به دست آورد.

اگر زاویه α در ناحیه سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$ باشد. مقدار $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟

$$-\frac{1056}{175} \quad (4)$$

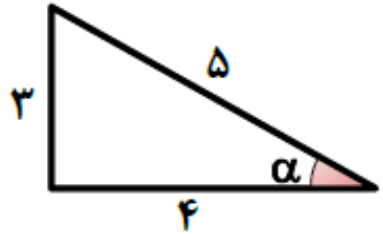
$$\frac{96}{175} \quad (3)$$

$$\frac{1056}{175} \quad (2)$$

$$-\frac{96}{175} \quad (1)$$

برای حل این سوال بهتر است فرمول‌های $\sin 2\alpha$ و $\tan 2\alpha$ را برحسب $\tan \alpha$ بلد باشیم.

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) + \cos(\pi + \alpha)}{\cot 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot 2\alpha} = \frac{\frac{24}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{44}{25}}{\frac{7}{24}} = \frac{1056}{175}$$



$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2(\frac{3}{4})}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{16}} = \frac{24}{25}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2(\frac{3}{4})}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{24}{7} \rightarrow \cot 2\alpha = \frac{7}{24}$$

تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos^2(x) - \sin^2(x)\cos(3x) = 1$ در فاصله $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱ (۱)

۳ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

تجربی ۱۴۰۰

$$\cos^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1 \rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1 \rightarrow -\sin^2 x (1 + \cos 3x) = 0 \rightarrow$$

$$-\sin^2 x = 0 \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

$$1 + \cos 3x = 0 \rightarrow \cos 3x = -1 \rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{d=\frac{2\pi}{3}} x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

دقت شود π بین دو جواب مشترک است و نباید دوبار شمرده شود، پس معادله در بازه $[0, 2\pi]$ ، ۵ جواب دارد.

اگر $f(x) = 32 \cos^2(x) \cos^2(2x) \cos^2(4x) \cos^2(8x) \cos^2(16x)$ باشد. مقدار $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ کدام است؟

$$\frac{6 - \sqrt{27}}{32} \quad (4)$$

$$\frac{6 - \sqrt{27}}{16} \quad (3)$$

$$\frac{6 + \sqrt{27}}{16} \quad (2)$$

$$\frac{6 + \sqrt{27}}{32} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 32 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) \rightarrow \cos^2\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 32 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{32} = \frac{6 + \sqrt{27}}{32}$$

فرمول توان شکن: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

فرض کنید α در ناحیه چهارم مثلثاتی و $\cos(\alpha) = \frac{2}{3}$ باشد. حاصل عبارت $\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2(\alpha) - 1|}$ کدام است؟

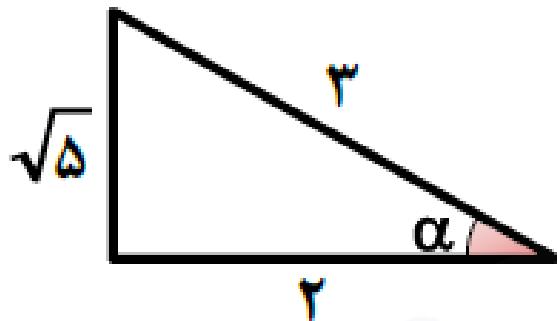
$$-\frac{4(2 + \sqrt{5})}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4(2 - \sqrt{5})}{3} \quad (3)$$

$$\frac{4(-2 + \sqrt{5})}{3} \quad (2)$$

$$\frac{4(2 + \sqrt{5})}{3} \quad (1)$$

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \sin(\pi - \alpha)}{|\tan^2 \alpha - 1|} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{|\tan^2 \alpha - 1|} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}}{|\frac{5}{4} - 1|} = \frac{2 - \sqrt{5}}{3} = \frac{4(2 - \sqrt{5})}{3}$$



$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \xrightarrow[\alpha]{\text{در ربع چهارم}} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\Delta \sin^2(x) + 2\cos(3x) = -2$ در فاصله $[-\pi, \pi]$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۵ (۳)

۷ (۴)

تجربی ۱۴۰۰ - خارج کشور

$$\Delta \sin^2 x + 2 \cos 3x + 2 = 0 \rightarrow \Delta \sin^2 x + 2(1 + \cos 3x) = 0 \xrightarrow{1 + \cos 3x = 2 \cos^2 \frac{3x}{2}} \Delta \sin^2 x + 4 \cos^2 \frac{3x}{2} = 0$$

می‌دانیم مجموع دو نامنفی هنگامی صفر می‌شود که هر دو برابر صفر باشند پس باید هر دو را صفر قرار دهیم و ریشه‌های مشترک را تعیین کنیم.

$$\Delta \sin^2 x = 0 \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \rightarrow x = [-\pi], 0, [\pi]$$

$$4 \cos^2 \frac{3x}{2} = 0 \rightarrow \cos \frac{3x}{2} = 0 \rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{d = \frac{2\pi}{3}} x = [-\pi], -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, [\pi]$$

ریشه‌های مشترک و جواب معادله خواهند بود. پس معادله در بازه $[-\pi, \pi]$ دو جواب دارد. $x = -\pi, x = \pi$

اگر $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{4}$ باشد. حاصل $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{91}{105}$

(۲) $-\frac{16}{105}$

(۳) $\frac{16}{105}$

(۴) $\frac{91}{105}$

با توجه به آنکه $\tan \frac{\alpha}{2}$ داده شده و مقادیر $\tan \alpha$ و $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ خواسته شده است از فرمول‌های نصف کمان استفاده می‌کنیم.

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \rightarrow \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \rightarrow \sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{16}} = \frac{8}{17}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{16}}{1 + \frac{1}{16}} = \frac{15}{17}$$

$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{\frac{16}{15 \times 17}}{\frac{-7}{17}} = -\frac{16}{105}$$

فرض کنید A مجموعه جواب‌های معادله مثلثاتی $(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha))(1 + \cos(8\alpha)) = \frac{1}{8}$ در بازه $[0, \pi]$ باشد. ماکزیمم عضو مجموعه A کدام است؟

$$\frac{8}{9}\pi \quad (4)$$

$$\frac{7}{9}\pi \quad (3)$$

$$\frac{6}{7}\pi \quad (2)$$

$$\frac{5}{7}\pi \quad (1)$$

با توجه به رابطه $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$ داریم:

$$\frac{2\cos^2 \alpha}{(1 + \cos 2\alpha)} \cdot \frac{2\cos^2 2\alpha}{(1 + \cos 4\alpha)} \cdot \frac{2\cos^2 4\alpha}{(1 + \cos 8\alpha)} = \frac{1}{8} \rightarrow 8\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 4\alpha = \frac{1}{8}$$

با فرض $\sin \alpha \neq 0$ صورت
و مخرج را در $\sin^2 \alpha$ ضرب می‌کنیم

$$\left(\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \frac{1}{64} \rightarrow \left(\frac{1}{8} \frac{\sin 8\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \frac{1}{64} \rightarrow \sin^2 8\alpha = \sin^2 \alpha$$

$$8\alpha = k\pi \pm \alpha \rightarrow \begin{cases} 7\alpha = k\pi \rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{7} \\ 9\alpha = k\pi \rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{9} \end{cases}$$

بزرگترین جواب
در بازه $[0, \pi]$

$$\alpha = \frac{8\pi}{9}$$

توجه شود $\alpha = \pi$ جواب معادله نیست چون $\sin \alpha$ را صفر می‌کند.

دقت شود: $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ و به همین ترتیب $\sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \sin 4\alpha$ و $\sin 4\alpha \cos 4\alpha = \frac{1}{2} \sin 8\alpha$ خواهد بود.

ساده شده عبارت $\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)} + \frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ کدام است؟

(۴) $2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

(۳) $2\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$

(۲) $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

(۱) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

می‌دانیم $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ و $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ پس داریم:

$$\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} + \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} + \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} = 2 \cot \frac{\theta}{2}$$

گزینه‌ای درست است که به‌ازای $\theta = \frac{\pi}{3}$ برابر $2\sqrt{3}$ شود. $\theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ با استفاده از عددگذاری

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $2\sin(x)\cos(2x) + \sin(x) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۴) $\frac{7\pi}{2}$

(۳) 3π

(۲) $\frac{5\pi}{2}$

(۱) 2π

$$2\sin(x)\cos(2x) + \sin(x) = 1 \rightarrow 2\sin(x)(1 - 2\sin^2(x)) + \sin(x) = 1 \rightarrow 4\sin^3(x) - 3\sin(x) + 1 = 0 \xrightarrow{\sin x = t}$$

$$4t^3 - 2t + 1 = 0 \xrightarrow{\text{با جایگذاری}} t = -1$$

$$4t^3 - 2t + 1 = (t + 1)(4t^2 - 4t + 1) = (t + 1)(2t - 1)^2$$

تجزیه

$$t = -1 \rightarrow \sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

$$t = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع جوابها}} \pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $(1 + \cos(\alpha))(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha)) = \frac{1}{8}$ در فاصله $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۷ (۱)

می‌دانیم $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$ پس داریم:

$$\underbrace{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}}_{(1+\cos \alpha)} \underbrace{2\cos^2 \alpha}_{(1+\cos 2\alpha)} \underbrace{2\cos^2 2\alpha}_{(1+\cos 4\alpha)} = \frac{1}{8} \rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha = \frac{1}{64}$$

با فرض $\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$ صورت
و مخرج را در $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ضرب می‌کنیم

$$\left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 = \frac{1}{64} \rightarrow \left(\frac{1}{8} \frac{\sin 4\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 = \frac{1}{64} \rightarrow \sin^2 4\alpha = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin 4\alpha = \pm \sin \frac{\alpha}{2} \rightarrow \begin{cases} 4\alpha = k\pi + \frac{\alpha}{2} \rightarrow \frac{7}{2}\alpha = k\pi \rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7} \rightarrow \circ, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}, 2\pi \\ 4\alpha = k\pi - \frac{\alpha}{2} \rightarrow \frac{9}{2}\alpha = k\pi \rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9} \rightarrow \circ, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{12\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}, 2\pi \end{cases}$$

دقت شود 0 و 2π غیرقابل قبول هستند چون $\sin \frac{\alpha}{2}$ را صفر می‌کنند پس معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۱۴ ریشه است.

اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1-m}{2+m}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

(۴) $(-1, 2)$

(۳) $(-1, 2]$

(۲) $(-2, 1]$

(۱) $(-2, 1)$

با توجه به $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ ابتدا محدوده $\frac{\pi}{4} - x$ را تعیین می‌کنیم.

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \rightarrow -\frac{\pi}{4} < -x < \frac{\pi}{4} \rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) < +\infty \rightarrow \frac{1-m}{2+m} > 0 \rightarrow m=1, m=-2 \rightarrow -2 < m < 1$$



اگر $2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

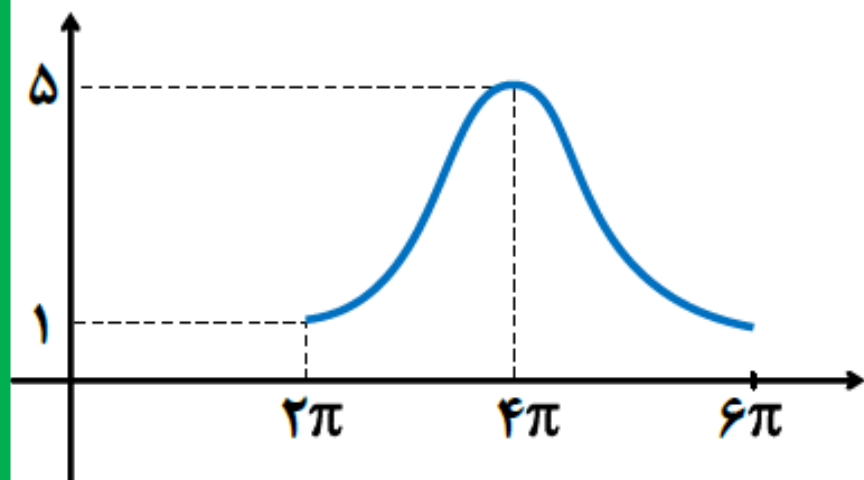
$$\frac{3}{2} \quad (۱)$$

$$2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \rightarrow 2\sin^2 x + 1 - \sin^2 x = \frac{4}{3} \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

روش دوم: طرفین عبارت $2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم. پس داریم:

$$2\tan^2 x + 1 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow 2\tan^2 x + 1 = \frac{4}{3}(1 + \tan^2 x) \rightarrow 6\tan^2 x + 3 = 4 + 4\tan^2 x \rightarrow 2\tan^2 x = 1 \rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2}$$

شکل زیر نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را در یک دوره تناوب نشان می‌دهد. مقدار c کدام است؟



۵ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۱ (۴)

تجربی ۱۴۰۱

$$c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} \rightarrow c = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\lambda \cos x - \tan^2 x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

تجربی ۱۴۰۱

$$\sec x - \tan^2 x = 1 \rightarrow \sec x = 1 + \tan^2 x \rightarrow \sec x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{8} \rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

با توجه به دایره مثلثاتی واضح است معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب دارد.

اگر $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$ ، $\sin 2x = \frac{m-1}{4}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

(۴) $(-1, 1]$

(۳) $(-1, 1)$

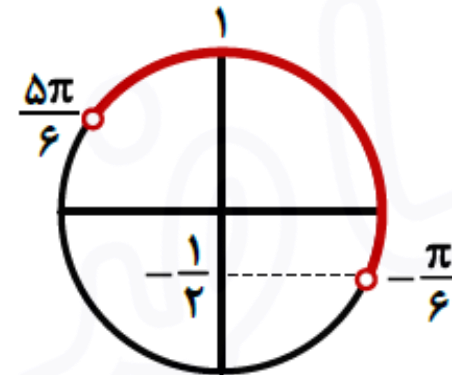
(۲) $(-1, 5]$

(۱) $(-1, 5)$

با توجه به بازه $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$ ابتدا محدوده $2x$ را تعیین می‌کنیم و این محدوده را در دایره مثلثاتی نشان می‌دهیم. داریم:

$$-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \rightarrow -\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6} \rightarrow -\frac{1}{2} < \sin 2x \leq 1$$

$$-\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} -2 < m-1 \leq 4 \rightarrow -1 < m \leq 5$$



اگر $10(\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام عدد می تواند باشد؟

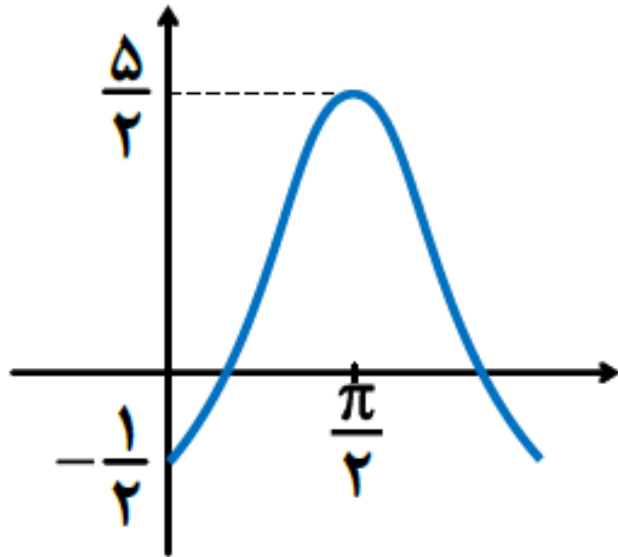
- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) -2 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 3

$$1 \cdot (\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5} \rightarrow \sin x + \cos x = \frac{3\sqrt{5}}{5} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 1 + \sin 2x = \frac{45}{25} \rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{4}{5} \rightarrow 2 + 2 \tan^2 x = 5 \tan x \rightarrow 2 \tan^2 x - 5 \tan x + 2 = 0$$

$$\tan x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \rightarrow \tan x = 2, \tan x = \frac{1}{2}$$

شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را نشان می‌دهد. مقدار ac کدام است؟



(۱) -۵

(۲) -۳

(۳) $-\frac{5}{2}$

(۴) $-\frac{3}{2}$

$$c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}}{2} = 1$$

$$|a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow a = \pm \frac{3}{2}$$

چون نمودار شبیه $-\cos$ است پس $a = -\frac{3}{2}$ درست است. و مقدار ac برابر است با $ac = -\frac{3}{2}$.

تعداد جواب‌های معادله $\sin(x + \frac{\pi}{6})\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$$

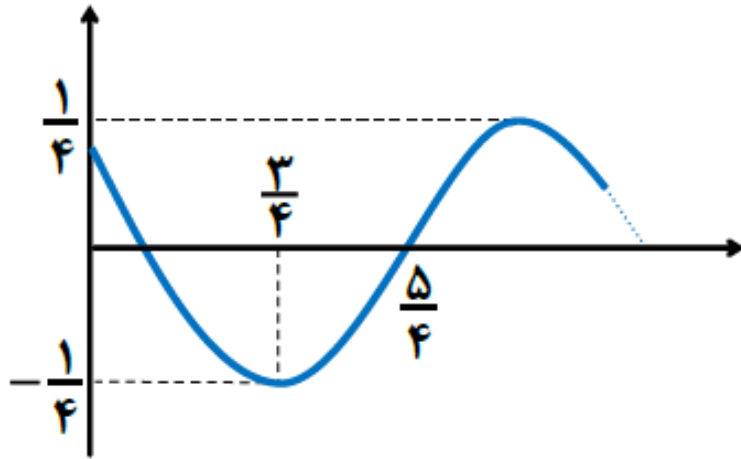
ابتدا کمان $\cos$ را در منفی ضرب می‌کنیم. داریم:

دقت شود کمان‌های $x + \frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3} - x$ متمم یکدیگرند. پس می‌توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \rightarrow \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \rightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \rightarrow x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \rightarrow x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب دارد.

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(bx + c)$ را نشان می‌دهد. اگر $b > 0$ و $0 < c < \pi$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$ کدام است؟



(۱) $\frac{1}{16}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{1}{4\pi}$

(۴) π

$$\frac{T}{2} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1 \rightarrow T = 2 = \frac{2\pi}{|b|} \xrightarrow{b > 0} b = \pi$$

$$y_{\min} = -\frac{1}{4} \rightarrow -|a| = -\frac{1}{4} \rightarrow a = \pm \frac{1}{4}$$

نمودار شبیه $\cos$ است پس $a = \frac{1}{4}$ درست است.

$$f(x) = \frac{1}{4} \cos(\pi x + c) \xrightarrow[\text{در تابع صدق}]{(\frac{5}{4}, 0)} \frac{1}{4} \cos(\frac{5\pi}{4} + c) = 0 \rightarrow \cos(\frac{5\pi}{4} + c) = 0 \rightarrow \frac{5\pi}{4} + c = \frac{3\pi}{2} \rightarrow c = \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{ac}{b} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{16}$$

تذکره: برای حل معادله $\cos(\frac{5\pi}{4} + c) = 0$ دقت کردیم که $(\frac{5}{4}, 0)$ دومین نقطه تلاقی منحنی با محور x هاست و دومین جایی که تابع $\cos x$ برابر صفر می شود $\frac{3\pi}{2}$ است به همین دلیل $\frac{5\pi}{4} + c$ را برابر $\frac{3\pi}{2}$ در نظر گرفتیم.

اگر انتهای کمان x در ربع سوم و $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4$ باشد، مقدار صحیح $\tan \frac{x}{2}$ کدام است؟

(۴) -۳

(۳) ۳

(۲) -۲

(۱) ۲

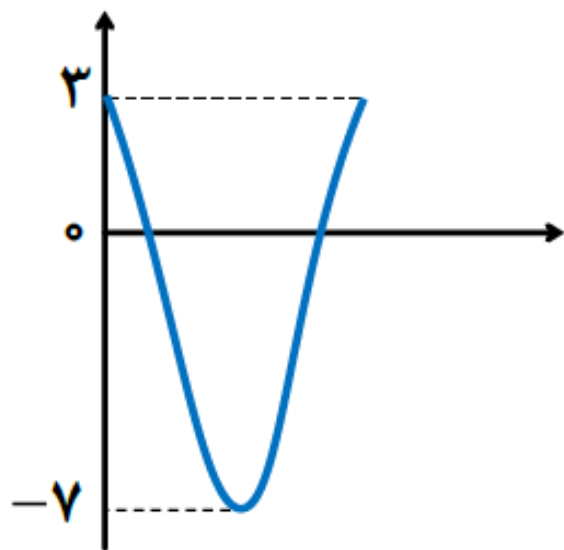
$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4 \rightarrow 4 + 4 \sin x = 1 - \sin x \rightarrow 5 \sin x = -3 \rightarrow \sin x = -\frac{3}{5}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \rightarrow \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = -\frac{3}{5} \rightarrow -1 \cdot \tan \frac{x}{2} = 3 + 3 \tan^2 \frac{x}{2} \rightarrow 3 \tan^2 \frac{x}{2} + 1 \cdot \tan \frac{x}{2} + 3 = 0$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 9}}{3} = \frac{-5 \pm 4}{3} \rightarrow \tan \frac{x}{2} = -3 \checkmark, \quad \tan \frac{x}{2} = -\frac{1}{3} \text{ غلط}$$

توجه شود در صورت سوال ذکر شده بود که $\tan \frac{x}{2}$ صحیح است.

شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos x + b$ را نشان می‌دهد. مقدار $f(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{11}{2}$
(۳) $-\frac{1}{2}$
(۴) $-\frac{11}{2}$

$$f(x) = a \cos x + b$$

$$b = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{3 - 7}{2} = -2$$

$$f(x) = a \cos x - 2 \rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

$$|a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5 \rightarrow |a| = 5 \rightarrow a = \pm 5$$

نمودار شبیه $\cos$ است و $a = 5$ درست است.

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$\frac{5\pi}{4}$ (۴)

$\frac{\pi}{4}$ (۳)

$\frac{3\pi}{2}$ (۲)

$\frac{\pi}{2}$ (۱)

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$$

ابتدا کمان $\cos$ را در منفی ضرب می کنیم. داریم:

دقت شود کمان های $x + \frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4} - x$ متمم یکدیگرند. پس می توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \rightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

مجموع جواب ها $\rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$

در شکل زیر مساحت مثلث ABC برابر $7/2\sqrt{3}$ است. فاصله D از C کدام است؟

(۱) $6\sqrt{6}$

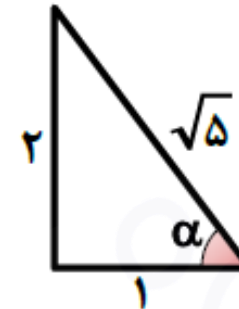
(۲) $3\sqrt{6}$

(۳) $2\sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{2}$

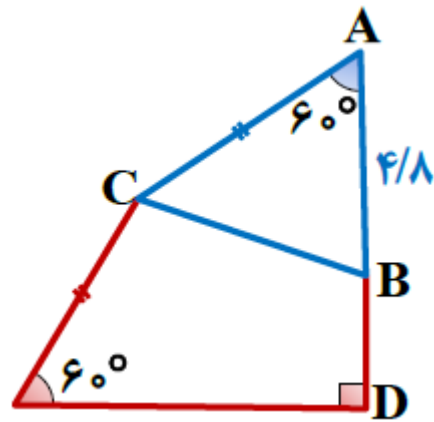
تجربی ۱۴۰۲ - نوبت اول

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha \xrightarrow{\text{طرفین بر } \cos \alpha \text{ تقسیم}} \tan \alpha = 2$$



$$\xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

در شکل زیر مساحت مثلث ABC برابر $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ است. فاصله D از C کدام است؟



(۱) $6\sqrt{6}$

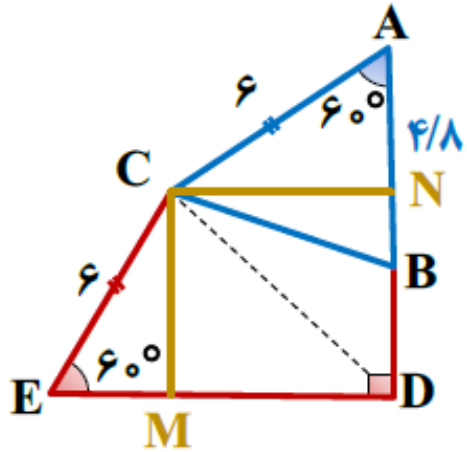
(۲) $3\sqrt{6}$

(۳) $2\sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{2}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{8} \times AC \sin 60^\circ = \frac{7}{2} \sqrt{3} \rightarrow \frac{1}{2} \times AC \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{2} \sqrt{3} \rightarrow AC = 6 \rightarrow CH = 6$$

از نقطه C خطوط CN و CM را عمود بر اضلاع مقابلشان رسم می کنیم.



در مثلث $\triangle ACN$ ضلع روبه‌رو به زاویه 60° در مثلث $\triangle ACN$ است

$$\rightarrow CN = CM = \text{وتر} \times \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

در مثلث $\triangle CEM$ ضلع روبه‌رو به زاویه 60° در مثلث $\triangle CEM$ است

چهارضلعی $CNDM$ مربع است $\rightarrow$ قطر مربع $CD = a\sqrt{2} = 3\sqrt{3} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{6}$

کمترین فاصله بین دو مقدار از جوابهای معادله $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ کدام است؟

$\frac{\pi}{3}$ (۴)

$\frac{\pi}{2}$ (۳)

π (۲)

2π (۱)

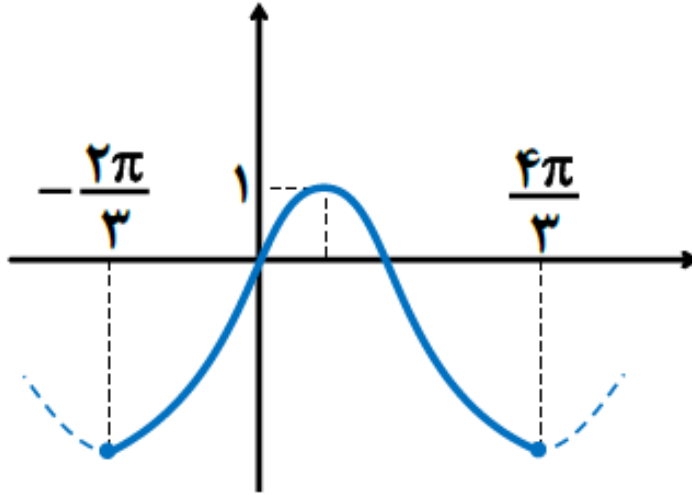
تجربی ۱۴۰۲ - نوبت اول

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (1 + \sin x)^2 = \cos^2 x \rightarrow (1 + \sin x)^2 = 1 - \sin^2 x \rightarrow (1 + \sin x)^2 = (1 + \sin x)(1 - \sin x)$$

$$1 + \sin x = 1 - \sin x \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \rightarrow x = 0, x = \pi \quad \pi = \text{کمترین فاصله بین دو مقدار از جوابها}$$

چون $1 + \sin x$ ، مخرج کسر است با حذف از طرفین معادله آن را مساوی صفر قرار ندادیم. (یعنی $1 + \sin x$ نمی تواند صفر شود)

شکل زیر قسمتی از نمودار $y = a + b \cos(cx - \frac{\pi}{3})$ را نشان می‌دهد. مقدار $b(c-a)$ کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۶

ریاضی ۱۴۰۲ - نوبت اول

می‌دانیم فاصله دو ماکزیمم یا دو مینیمم متوالی یک دوره متناوب است پس:

$$T = \frac{4\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{|c|} = 2\pi \rightarrow c = \pm 1$$

در صورت سؤال نمودار $\cos$ به سمت راست منتقل شده است پس $c = 1$ درست است.

از طرفی تابع از مبدأ مختصات عبور کرده یعنی $(0, 0)$ در تابع صدق می‌کند و ضمناً مقدار ماکزیمم تابع برابر ۱ است.

$$f(0) = 0 \rightarrow a + b \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0 \rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \rightarrow b = -2a$$

$$y_{\max} = 1 \rightarrow |b| + a = 1 \xrightarrow[\text{چون نمودار شبیه } \cos \text{ است}]{b > 0 \text{ می‌باشد}} b + a = 1 \xrightarrow{b = -2a} a = -1, b = 2 \rightarrow b(c - a) = 2(1 + 1) = 4$$

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos(\frac{17\pi}{8} + x)\cos(\frac{3\pi}{8} - x) = \cos^2(\frac{\pi}{3})$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$

(۲) $\frac{\pi}{3}$

(۳) $\frac{2\pi}{3}$

(۴) $\frac{\pi}{4}$

$$\cos\left(\frac{2\pi + \frac{\pi}{2} + x}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4}$$

اگر دقت شود کمانهای $\frac{3\pi}{2} - x$ و $\frac{\pi}{2} + x$ متمم یکدیگرند. پس می توان معادله را به صورت زیر نوشت.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{4} \xrightarrow{\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x} \frac{1}{2} \sin 2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{24} \rightarrow x = -\frac{\pi}{24} \\ \frac{\pi}{2} + 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12} \rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{24} \rightarrow x = \frac{5\pi}{24} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع جوابها}} -\frac{\pi}{24} + \frac{5\pi}{24} = \frac{4\pi}{24} = \frac{\pi}{6}$$

اگر $\tan x + \cot x = -3$ و $3\pi < 4x < 4\pi$ باشد، حاصل $\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x}$ کدام است؟

- (۱) $-0.5\sqrt{6}$ (۲) $0.75\sqrt{3}$ (۳) $-0.75\sqrt{3}$ (۴) $0.5\sqrt{6}$

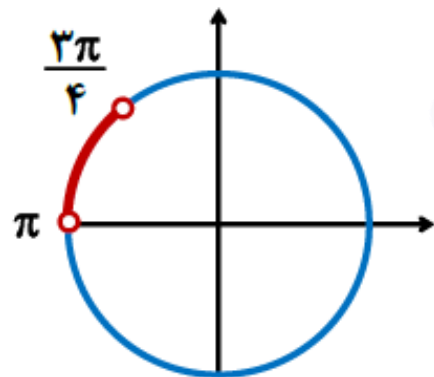
تجربی ۱۴۰۲ - نوبت دوم

$$\tan x + \cot x = -3 \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = -3 \rightarrow \sin x \cos x = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x} = \frac{1}{(\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x)} = \frac{1}{(\cos x + \sin x)(1 + \frac{1}{3})} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{\cos x + \sin x}$$

برای بدست آوردن حاصل $\sin x + \cos x$ داریم:

$$A = \sin x + \cos x \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} A^2 = 1 + 2\sin x \cos x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow A = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

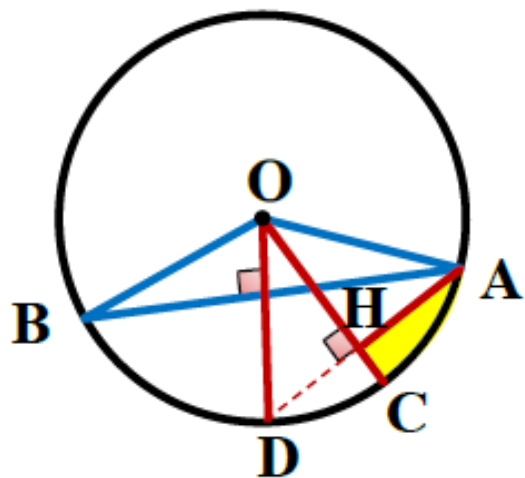


چون $3\pi < 4x < 4\pi$ نتیجه می گیریم: $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ که در این بازه $\sin x > 0$ و $\cos x < 0$ است.

ولی اندازه $\cos x$ از $\sin x$ بیش تر است. پس $\sin x + \cos x < 0$ می باشد. یعنی $A = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ است.

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{\cos x + \sin x} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -0.75\sqrt{3}$$

مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت π ، $\angle AOB = 120^\circ$ و OH عمود منصف AB است. اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه زده شده کدام است؟



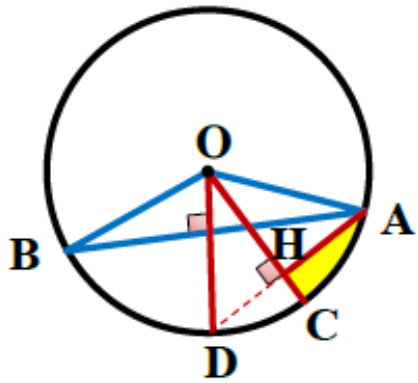
$$\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

$$\sqrt{2} - \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$\pi - \sqrt{3} \quad (3)$$

$$\pi - \sqrt{2} \quad (f)$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \rightarrow r = 1$$



$$\widehat{AOB} = 120^\circ, OA = OB \xrightarrow[\text{متساوی الساقین است.}]{\text{مثلث OAB}} \widehat{AOD} = 60^\circ, OA = OD \xrightarrow[\text{متساوی الساقین است.}]{\text{مثلث OAD}}$$

$$\widehat{AOH} = 30^\circ, OA = 1 \rightarrow OH = 1 \times \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, AH = 1 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

از طرفی می‌دانیم در دایره‌ای به شعاع r طول کمان مقابل به زاویه θ بر حسب رادیان از رابطه زیر

$$\widehat{AC} = r\theta = 1 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

به دست می‌آید:

$$\text{محیط مثلث AOH} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\text{محیط قسمت هاشور خورده} = AH + CH + \widehat{AC} = \frac{1}{2} + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{محیط قسمت هاشور خورده} - \text{محیط مثلث AOH} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} - (\frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$$

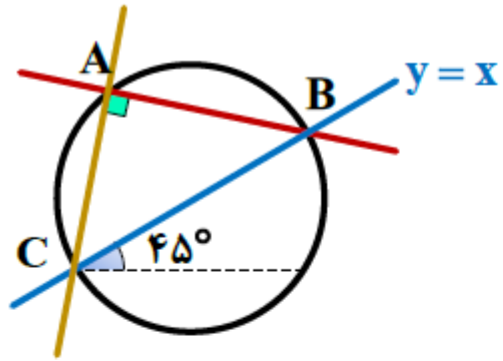
خطوط $3y + x = -9$ و $ax - y = 3$ یکدیگر را در نقطه A و خط $y - x = 0$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می کنند. اگر مرکز دایره ای که از این سه نقطه می گذرد بر روی نیمساز ناحیه اول و سوم واقع باشد، در مثلث ABC ، مقدار $\tan(B - C)$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)



این تست بسیار دشوار است و واقعاً لازم نیست همه دانش آموزان بتوانند این تست را حل کنند. ابتدا یک شکل فرضی از سؤال ببینید:

با توجه به آن که مرکز دایره روی خط $y = x$ است پس BC قطر دایره است و زاویه A که مقابل به قطر واقع شده است، برابر 90° است. در این صورت اضلاع AB و AC برهم عمودند و می توان a را به دست آورد.

$$AC: 3y + x = -9 \rightarrow m = -\frac{1}{3}, \quad AB: ax - y = 3 \rightarrow a = 3$$

حال اگر به شکل دقت کنید شیب خط AC (تانژانت زاویه ای که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد) برابر است با: $\tan(45 + C)$

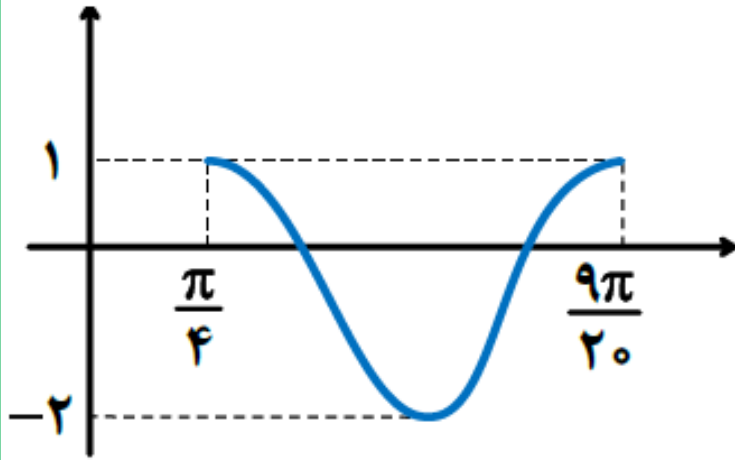
از طرفی شیب خط AC برابر ۳ است پس می توان نوشت:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \text{پس داریم:}$$

$$\tan 2(45 + C) = \frac{2 \tan(45 + C)}{1 - \tan^2(45 + C)} = \frac{6}{1 - 9} = -\frac{3}{4} \rightarrow \tan(90 + 2C) = -\frac{3}{4} \rightarrow -\cot 2C = -\frac{3}{4} \rightarrow \cot 2C = \frac{3}{4}$$

$$\text{صورت سؤال: } \tan(B - C) = \tan(90^\circ - C - C) = \tan(90 - 2C) = \cot 2C = \frac{3}{4}$$

شکل زیر نمودار تابع $y = a \cos^2(bx - \frac{\pi}{4}) + c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



- (۱) ۱۵
(۲) -۱۵
(۳) ۷/۵
(۴) -۷/۵

تجربی ۱۴۰۲ - نوبت دوم

با توجه به آن که نمودار توابع $y = \sin^2 x$ و $y = \cos^2 x$ در کتاب درسی وجود ندارد باید در برخورد با این توابع ابتدا با فرمول‌های توان‌شکن تابع را تغییر دهیم:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \rightarrow \cos^2 \left(bx - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \cos(2bx - \frac{\pi}{2})}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{\pi}{2} - 2bx)) = \frac{1}{2}(1 + \sin(2bx))$$

$$y = a \cos^2 \left(bx - \frac{\pi}{4}\right) + c = \frac{a}{2}(1 + \sin(2bx)) + c = \frac{a}{2} \sin(2bx) + \frac{a}{2} + c$$

$$\text{دوره تناوب: } T = \frac{2\pi}{2b} = \frac{\pi}{b} \rightarrow \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{|2b|} \rightarrow b = \pm 5 \quad \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow a = \pm 3$$

متأسفانه نمودار تابع غلط ترسیم شده است. (فاصله $\frac{\pi}{5}$ که یک دوره تناوب است را با $\frac{\pi}{4}$ که فاصله با محور y ها است مقایسه کنید)

در واقع تابع باید قبل از رسیدن به محور y ها یک دوره تناوب دیگر را طی کند. یعنی از $\frac{\pi}{4}$ به اندازه $\frac{\pi}{5}$ دیگر به عقب برود تا به نقطه ماکزیمم قبلی که مختصات آن $(\frac{\pi}{5}, 1)$ است برسد که در این جا متوجه می‌شویم نمودار شبیه $\sin$ است و باید b و a هم علامت باشند. پس:

$$a = 3, b = 5 \quad \text{یا} \quad a = -3, b = -5 \rightarrow ab = 15$$

اگر اختلاف جواب‌های معادله $\frac{1}{\sin(\frac{\pi+4X}{2})} + \frac{1}{\cos(\frac{\pi+8X}{2})} = 0$ در بازه $[0, \pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan(2\alpha)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $-\sqrt{3}$

$$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} + 2x)} + \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} + 2x)} = 0 \rightarrow \frac{1}{\cos 2x} + \frac{1}{-\sin 2x} = 0 \rightarrow \frac{1}{\cos 2x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\frac{1}{\cancel{\cos 2x}} = \frac{1}{2 \sin 2x \cancel{\cos 2x}} \rightarrow 2 \sin 2x = 1 \rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \rightarrow x = \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \rightarrow x = \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اختلاف ریشه‌ها}} \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3} = \alpha \rightarrow \tan(2\alpha) = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

اگر $\tan x + \cot x = 4$ و $5\pi < 4x < 6\pi$ باشد، حاصل $\frac{1}{\sin^3 x - \cos^3 x}$ کدام است؟

$$\frac{1/6}{\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$-\frac{1/6}{\sqrt{3}} \quad (3)$$

$$0/8\sqrt{2} \quad (2)$$

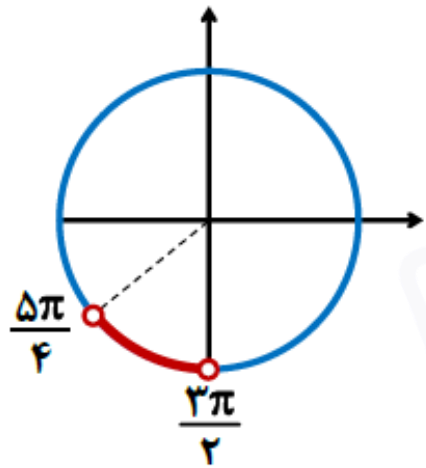
$$-0/8\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\tan x + \cot x = 4 \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4 \rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 4 \rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\sin^3 x - \cos^3 x} = \frac{1}{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)} = \frac{1}{(\sin x - \cos x)(1 + \frac{1}{4})} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{\sin x - \cos x}$$

برای بدست آوردن حاصل $\sin x - \cos x$ داریم:

$$A = \sin x - \cos x \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} A^2 = 1 - 2\sin x \cos x = 1 - 2(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \rightarrow A = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$



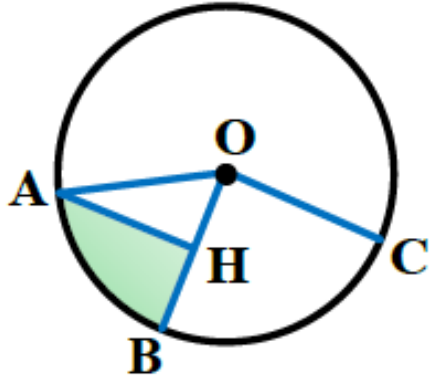
چون $5\pi < 4x < 6\pi$ است پس نتیجه می گیریم $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$ می باشد که در این بازه $\sin x < 0$ و

$\cos x < 0$ می باشند ولی اندازه $\sin x$ از $\cos x$ بیشتر است پس $\sin x - \cos x$ منفی خواهد بود و

$$\frac{4}{5} \times \frac{1}{\sin x - \cos x} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{5}(-\sqrt{2}) = -\frac{4\sqrt{2}}{5}$$

$A = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ درست است.

مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به محیط 2π ، AH عمود منصف OB است. محیط قسمت هاشور خورده چقدر از محیط مثلث OAH بزرگتر است؟



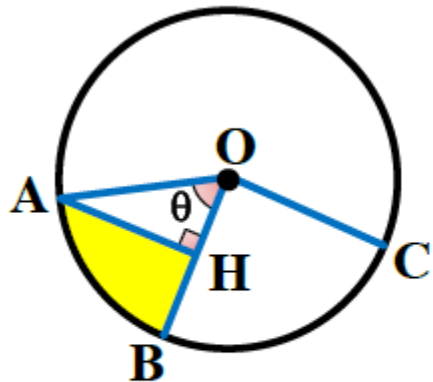
$$\frac{2\pi - 3}{6} \quad (2)$$

$$\frac{\pi - 3}{3} \quad (4)$$

$$\frac{2\pi - 1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{\pi - 1}{6} \quad (3)$$

محیط دایره : $2\pi r = 2\pi \rightarrow r = 1$



$$OB = 1, \text{ } OB \text{ عمود منصف } AH \rightarrow OH = \frac{OB}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \angle OAH = 30^\circ \rightarrow \theta = \angle AOB = 60^\circ$$

از طرفی می‌دانیم طول کمان مقابل به زاویه θ بر حسب رادیان در دایره‌ای به شعاع r از رابطه $r\theta$ به دست می‌آید. پس داریم:

$$\widehat{AB} = r\theta = 1 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{محیط قسمت هاشورخورده} = AH + BH + \widehat{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{محیط مثلث } OAH = AH + OH + OA = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 1 \rightarrow \text{اختلاف دو محیط} = \frac{\pi}{3} - 1 = \frac{\pi - 3}{3}$$

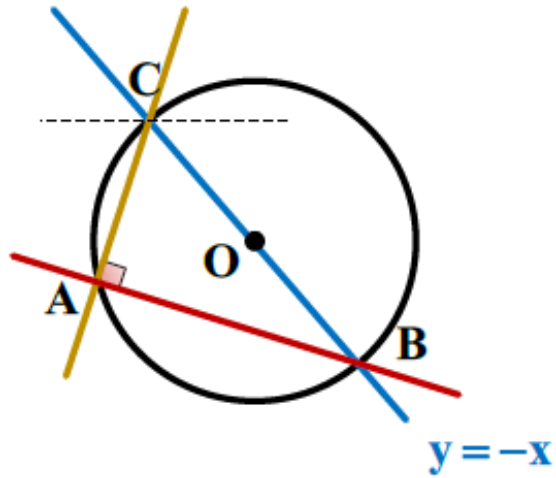
خطوط $x+2y=3$ و $2x+ay=6$ یکدیگر را در نقطه A و خط $x+y=0$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می کنند. اگر مرکز دایره ای که از این سه نقطه می گذرد، بر نیمساز ناحیه دوم واقع باشد، مقدار $\cot(B-C)$ در مثلث ABC کدام است؟

$$(1) -\frac{5}{3}$$

$$(2) -\frac{3}{4}$$

$$(3) -\frac{3}{5}$$

$$(4) -\frac{4}{3}$$



ابتدا یک شکل فرضی از سؤال ببینید:
چون مرکز دایره بر نیمساز ناحیه دوم یعنی خط $y + x = 0$ واقع است پس BC قطر دایره است و زاویه A که مقابل قطر واقع شده است برابر 90° است. در این صورت دو ضلع AB و AC برهم عمودند و می توان a را به دست آورد.

$$AB: x + 2y = 3 \rightarrow m = -\frac{1}{2}, \quad AC: 2x + ay = 6 \rightarrow \frac{-2}{a} = 2 \rightarrow a = -1$$

اگر به شکل دقت کنیم شیب خط AC برابر است با: $\tan(135^\circ - C)$

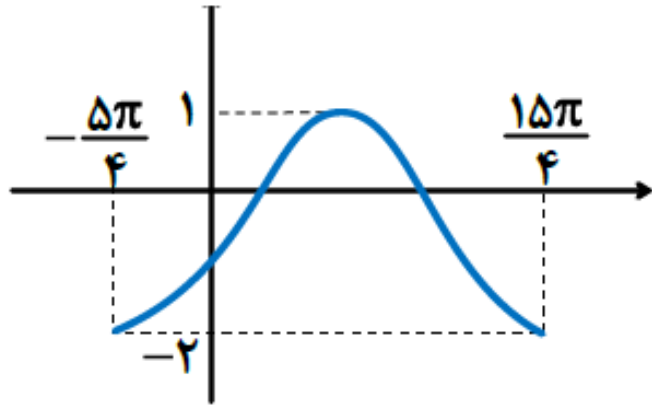
$$\tan(135^\circ - C) = 2$$

از طرفی شیب خط AC برابر ۲ است پس می توان نوشت:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \rightarrow \tan 2(135^\circ - C) = \frac{2(2)}{1 - 4} = -\frac{4}{3} \rightarrow \tan(270^\circ - 2C) = -\frac{4}{3} \rightarrow \cot 2C = -\frac{4}{3}$$

$$\text{سؤال صورت سؤال: } \cot(B - C) = \cot(90^\circ - C - C) = \cot(90^\circ - 2C) = \tan 2C = -\frac{3}{4}$$

شکل زیر نمودار تابع $y = a \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - bx\right) + c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



- (۱) $-\frac{3}{5}$
- (۲) $\frac{3}{5}$
- (۳) $-\frac{6}{5}$
- (۴) $\frac{6}{5}$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - bx\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\frac{\pi}{2} - 2bx)) = \frac{1}{2}(1 - \sin(2bx))$$

$$y = a \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - bx\right) + c = \frac{a}{2}(1 - \sin(2bx)) + c = -\frac{a}{2}\sin(2bx) + \frac{a}{2} + c$$

$$T = \frac{15\pi}{4} - \left(-\frac{5\pi}{4}\right) = 5\pi \rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = 5\pi \rightarrow b = \pm \frac{1}{5}$$

$$\left|-\frac{a}{2}\right| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{1 - (-2)}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{3}{2} \rightarrow a = \pm 3$$

$$-\frac{a}{2}(2b) > 0 \rightarrow ab < 0$$

نمودار شبیه $\sin$ است پس باید ضریب پشت $\sin$ و کمان هم علامت باشند. یعنی:

$$a = -3, b = \frac{1}{5} \quad \text{یا} \quad a = 3, b = -\frac{1}{5} \rightarrow ab = -\frac{3}{5}$$

اگر اختلاف جواب‌های غیرصفر معادله $\cot\left(\frac{\pi+4X}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi+8X}{2}\right)$ در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ برابر α باشد، مقدار $\cos(3\alpha)$ کدام است؟

(۴) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(۲) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) \rightarrow -\tan 2x = -\sin 4x \rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 2 \sin 2x \cos 2x \rightarrow$$

$$\sin 2x = 0 \rightarrow 2x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \rightarrow x = 0$$

به ازای $x = 0$ مقدار $\cot$ تعریف نشده است پس $x = 0$ غیر قابل قبول است.

$$2 \cos^2 2x = 1 \rightarrow \cos^2 2x = \frac{1}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{4} \rightarrow 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{8} - \left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

جواب‌های معادله در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ و $\frac{\pi}{8}$ و $-\frac{\pi}{8}$ می‌باشد و اختلاف این دو جواب برابر است با:

$$\cos 3\alpha = \cos \frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

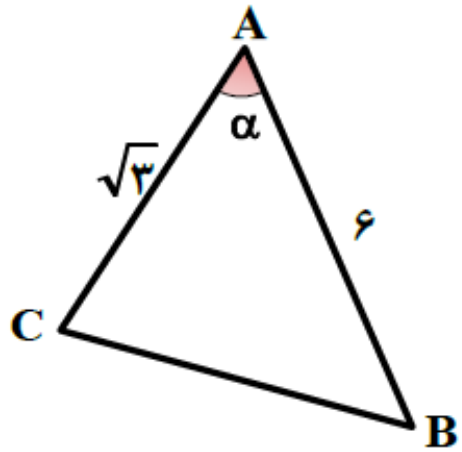
مثلث ABC با اضلاع $\sqrt{3}$, ۶, α (زاویه بین آن‌ها) قابل رسم است. اگر مساحت این مثلث $\frac{4}{5}$ باشد. بیشترین مقدار α چند برابر کمترین مقدار α است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 6 \sin \alpha = \frac{9}{2} \rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

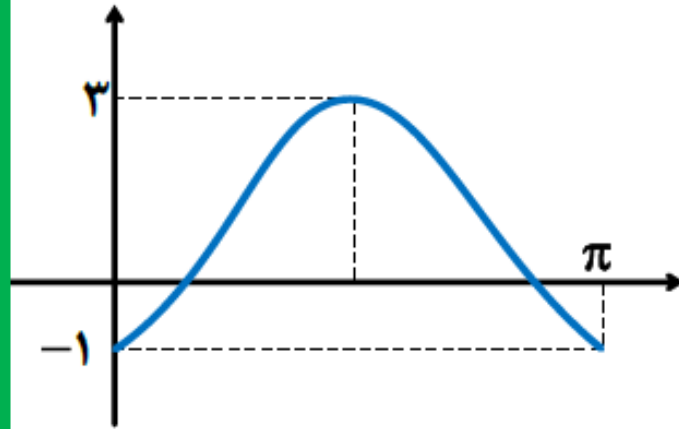
چون α زاویه بین دو ضلع مثلث است لازم نیست جواب کلی معادله فوق را به دست آوریم.
در واقع α دو جواب خواهد داشت یا α زاویه حاده است و یا منفرجه است.

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ یا } \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

در نتیجه بیشترین مقدار α ، ۲ برابر کمترین مقدار آن است.

اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b\sin(cx - \frac{3\pi}{4})\cos(cx - \frac{3\pi}{4})$ باشد. اختلاف صفرهای تابع f در بازه

$[0, \pi]$ کدام است؟



- (۱) $\frac{\pi}{6}$
- (۲) $\frac{\pi}{4}$
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) $\frac{2\pi}{3}$

ابتدا تابع را با رابطه: $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ساده می‌کنیم.

$$f(x) = a + b \cdot \frac{1}{2} \sin(2cx - \frac{3\pi}{2}) = a - \frac{b}{2} \sin(\frac{3\pi}{2} - 2cx) = a + \frac{b}{2} \cos(2cx)$$

$$T = \pi \rightarrow \frac{2\pi}{|2c|} = \pi \rightarrow c = \pm 1$$

$$a = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$|\frac{b}{2}| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow b = \pm 4$$

با توجه به نمودار که شبیه $-\cos$ است $b = -4$ درست است.

$$f(x) = 1 - 2 \cos(2x) \xrightarrow{f(x)=0} 2 \cos(2x) = 1 \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

صفرهای تابع در بازه $[0, \pi]$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ می‌باشد که اختلاف آنها برابر است با:

در یک مثلث زاویه بین دو ضلع با اندازه‌های ۵ و ۱۲ برابر α است. اگر مساحت این مثلث ۱۵ باشد، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار α کدام است؟

(۱) $\frac{2\pi}{3}$

(۲) $\frac{\pi}{3}$

(۳) $\frac{\pi}{2}$

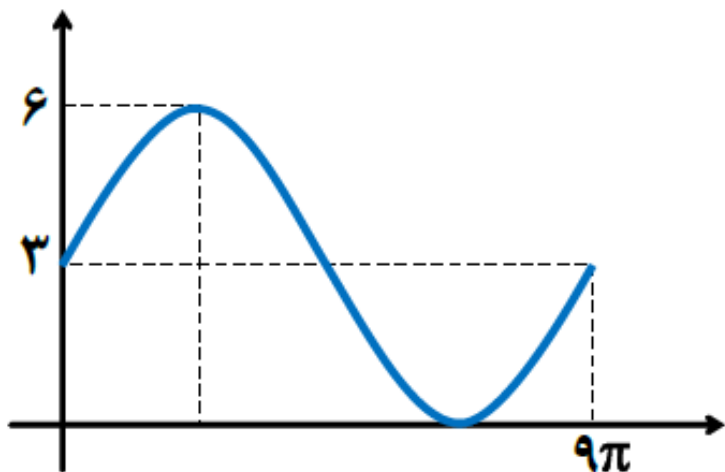
(۴) $\frac{\pi}{4}$



$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 \sin \alpha = 15 \rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ یا } \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\alpha \text{ اختلاف بیشترین و کمترین مقدار } = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

اگر شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2(cx - \frac{3\pi}{4})}$ باشد، مقدار $f(\frac{3\pi}{4})$ کدام است؟



(۱) ۴

(۲) ۴/۵

(۳) ۴/۷۵

(۴) ۵

ابتدا تابع را با رابطه $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و سپس $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ تغییر می دهیم.

$$f(x) = \frac{2}{a} - b \cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{2}{a} - \frac{b}{2} (1 + \cos(\frac{3\pi}{2} - 2cx)) = \frac{2}{a} - \frac{b}{2} (1 - \sin(2cx)) = \frac{b}{2} \sin(2cx) + \frac{2}{a} - \frac{b}{2}$$

$$T = 9\pi \rightarrow \frac{2\pi}{|2c|} = 9\pi \rightarrow c = \pm \frac{1}{9}, \quad \left|\frac{b}{2}\right| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow b = \pm 6$$

چون نمودار شبیه $\sin$ است b و c باید هم علامت باشند. پس داریم: $b = 6, c = \frac{1}{9}$

عدد ثابت تابع هم وسط ماکزیمم و مینیمم است که ۳ می باشد و نیازی به بدست آوردن a نیست.

$$f(x) = 3 \sin\left(\frac{2}{9}x\right) + 3 \rightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3 = 1/2 + 3 = 7/2$$

کلاس های آنلاین ریاضی سرا

متوسطه اول

متوسطه دوم

کنکور



مدرس:

عزیز اسدی

هماهنگی: ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲