نقاط بحرانی

۱- تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ بر روی دامنه‌ی خود، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

دبیرستان دوره دوم - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۰

۲- نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-1)\left|x^2 + x - 2\right|$ سه رأس مثلثی هستند، مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۶ ۴) ۸

دبیرستان دوره دوم - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۲

۳- تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = \left|x^3 - x\right|$ روی بازه $(-1, 2)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

دبیرستان دوره دوم - سراسری - ریاضی - ۹۰

۴- مجموع طول نقاط بحرانی $y = x^2|x-3|$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۷

۵- تابع $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 17$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله ۱۱

۶- اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$، تابع f^{-1} دارای چند نقطه‌ی بحرانی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۲

۷- اگر مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{m}{2}x^2 - (m^2+1)x + 7$ برابر ۲- باشد، حاصل‌ضرب طول‌های نقاط بحرانی کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۶- ۳) ۵- ۴) ۹-

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله ۱۰

۸- تابع $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - تجربی - مرحله ۱۶

۹- حاصل ضرب عرض‌های نقاط بحرانی تابع $f(x) = 2x - |x^2 - 4|$ کدام است؟

۱) ۱۶- ۲) ۲۰ ۳) ۲۰- ۴) ۸۰

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - ریاضی - مرحله ۲۴

۱۰- تابع $f(x) = x\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} + 2$ در بازهٔ $(-1,1)$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۵

۱۱- مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع $y = x - |9 - x^2|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۵

۱۲- اگر $f(x) = [x]$ باشد، مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع $y = f(x + f(-x))$ کدام است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۱) Z ۲) R ۳) $R - Z$ ۴) $Z - \{0\}$

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - تجربی - مرحله ۱۶

اکسترمم نسبی

۱۳- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^4-6x^2+8x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

۱) می‌نیمم نسبی ۲) ماکسیمم نسبی

۳) می‌نیمم نسبی و ماکسیمم نسبی ۴) فاقد اکسترمم نسبی

دبیرستان دوره دوم - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۰

۱۴- اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=2^x$ ، آن‌گاه تابع gof از نظر اکسترمم نسبی کدام نوع را دارد؟

۱) ماکسیمم - می‌نیمم ۲) ماکسیمم - فاقد می‌نیمم

۳) فاقد ماکسیمم - می‌نیمم ۴) فاقد ماکسیمم - فاقد می‌نیمم

دبیرستان دوره دوم - سراسری - ریاضی - ۹۱

۱۵- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، طول یکی از نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 - 8x$، در بازه‌ی $(1,4)$ قرار می‌گیرد؟

۱) $-3 < a < 1/5$ ۲) $-3 < a < 2/5$ ۳) $-5 < a < 1/5$ ۴) $-5 < a < 2/5$

دبیرستان دوره دوم - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۲

۱۶- تابع $g(x) = -6x^5 + 50x^3 - 120x + 1$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۷

۱۷- طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $y = (x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

دبیرستان دوره دوم - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۵

۱۸- در تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ طول نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ۲- و ۳ می‌باشد و نمودار تابع از نقطه $(4,1)$ می‌گذرد. c کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۱۱ ۳) ۳۱ ۴) ۱۳

دبیرستان دوره دوم - آزمایشی سنجش - تجربی - سال تحصیلی ۹۵-۹۴ - مرحله ۴

۱۹- اگر نقطه‌ی $A(1\ ,\ 2)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = ax + b\sqrt{x}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $b = -2$ و نقطه‌ی A ، مینیمم نسبی است. ۲) $b = 4$ و نقطه‌ی A ، ماکسیمم نسبی است.
۳) $b = -2$ و نقطه‌ی A ، ماکسیمم نسبی است. ۴) $b = -4$ و نقطه‌ی A ، مینیمم نسبی است.

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۱۲

۲۰- مجموع مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم نسبی تابع $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$، کدام است؟

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $-\frac{14}{3}$ ۴) $-\frac{22}{3}$

دبیرستان دوره دوم - آزمایشی سنجش - تجربی - سال تحصیلی ۹۶-۹۵ - جامع ۴

۲۱- مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ در $[-1\ ,\ 4]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۲

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۱

۲۲- اگر تابع $f(x) = ax^3 + bx + 7$ در نقطه‌ی $x = 1$ دارای ماکزیمم نسبی ۱۰ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

۱) -6 ۲) -4 ۳) $-\frac{11}{2}$ ۴) $-\frac{13}{2}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۱

۲۳- اگر مقدار مینیمم نسبی تابع $f(x) = 2x^3 - 6x + 5m - 1$ برابر ۲۹ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۷ ۲) $\frac{36}{5}$ ۳) $\frac{33}{5}$ ۴) $\frac{34}{5}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۱

۲۴- طول پاره‌خط واصل بین نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{2}{9}\sqrt{85}$ ۲) $\frac{2}{27}\sqrt{85}$ ۳) $\frac{2}{9}\sqrt{185}$ ۴) $\frac{2}{81}\sqrt{175}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۲

۲۵- اگر $f(۲)$ یک مقدار اکسترمم نسبی تابع f و $f'(x) = x^۲ - \frac{a}{x} + ۱$ باشد، آن‌گاه مقدار a و نوع اکسترمم کدام است؟

۱) ۱۶- و ماکسیمم ۲) ۱۶- و مینیمم ۳) ۱۰ و ماکسیمم ۴) ۱۰ و مینیمم

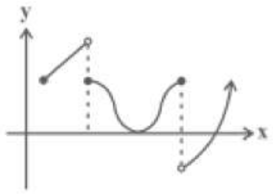
دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله ۹

۲۶- تابع $g(x) = x^{\frac{۶}{۵}} - ۱۲x^{\frac{۷}{۵}}$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله ۱۰

۲۷- نمودار تابع f به صورت مقابل است. با توجه به نمودار، تابع به ترتیب از راست به چپ چند ماکزیمم نسبی و چند می‌نیمم نسبی دارد؟



۱) یک - یک ۲) دو - یک
۳) یک - دو ۴) یک - صفر

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - تجربی - مرحله ۱۶

۲۸- تابع $f(x) = \frac{x^۳ - x^۲ + ۱}{x^۳}$ در بازه‌ی $(-۱ , ۲)$ چگونه است؟

۱) فقط یک ماکزیمم نسبی دارد. ۲) فقط یک می‌نیمم نسبی دارد.
۳) یک ماکزیمم و یک می‌نیمم نسبی دارد. ۴) ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ندارد.

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - تجربی - مرحله ۱۶

۲۹- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^۵ - \frac{۲۰}{۳}x^۳ + a$، مقدار می‌نیمم نسبی ۲۱- است. نقطه‌ی ماکزیمم نسبی در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - تجربی - مرحله ۲۲

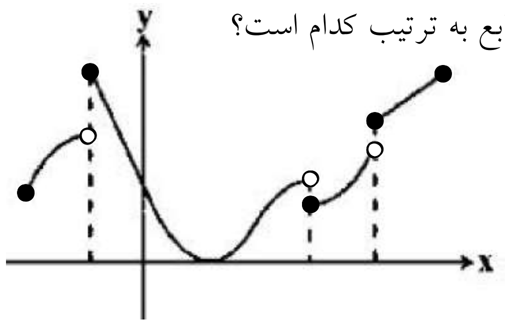
۳۰- به ازای چند مقدار صحیح m، مینیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^۳}{۳} + x^۲ + mx$ در بازه‌ی $(۰,۱)$ قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - ریاضی - مرحله ۲۵

۳۱- شکل زیر نمودار تابع f است. تعداد نقاط ماکسیمم و می‌نیمم نسبی تابع به ترتیب کدام است؟

۱) یک - یک
۲) یک - دو
۳) دو - یک
۴) دو - دو



دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - تجربی - مرحله ۱۶

۳۲- اگر $(۱,-۲)$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع درجه‌ی سوم $f(x) = ax^۳ + bx$ باشد، آن‌گاه حاصل $f(۲)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - تجربی - مرحله ۱۶

۳۳- می‌نیمم نسبی تابع $y = \frac{x^۲ - ۱}{x^۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$ ۴) $-\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$

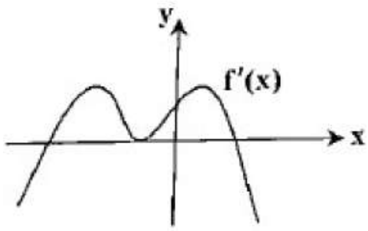
دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - تجربی - مرحله ۱۶

۳۴- اگر مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = ۲x^۳ - ۶x + ۵m$ برابر ۱۷ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۵}$ ۲) ۵ ۳) $\frac{۲۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱۷}{۵}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۶

۳۵- تابع f در R مشتق‌پذیر است. اگر نمودار مشتق تابع f به صورت مقابل باشد، تابع f چند اکسترمم نسبی دارد؟



۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۶

۳۶- طول ماکسیمم نسبی تابع $f(x) = |x - ۱| \sqrt[۳]{x^۲}$ کدام است؟

۱) $x = ۰ , ۱$ ۲) $x = ۱$ ۳) $x = ۰ , \frac{۲}{۵}$ ۴) $x = \frac{۲}{۵}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۹

اکسترمم مطلق

۳۷- بیش‌ترین مقدار تابع $y = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x + ۵$، در بازه‌ی $[-۲, ۲]$، کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۷

دبیرستان دوره دوم - سراسری - تجربی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۳۸- کم‌ترین مقدار تابع $y = \frac{۱}{۴}x^۴ - x^۳ - ۲x^۲$، کدام است؟

۱) ۳۶- ۲) ۳۲- ۳) ۲۴- ۴) ۱۸-

دبیرستان دوره دوم - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی. - ۹۲

۳۹- ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x^{4} - 8x^{2} - 1$ در بازه‌ی $[-1,3]$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۶ ۴) ۱-

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۷

۴۰- مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{3}x^{3} - x^{2} - 15x$، در بازه‌ی $[-4 , 3]$، کدام است؟

۱) ۱۸- و ۲۴ ۲) ۴۵- و ۲۷ ۳) ۳۶- و ۲۷ ۴) ۲۷- و ۳۶

دبیرستان دوره دوم - سراسری - تجربی - ۹۵

۴۱- مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{x - 2} - \sqrt{12 - 2x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۱

۴۲- مجموع مقادیر مینیمم مطلق و ماکسیمم مطلق تابع $y = x|x - 2| + k$ در بازه‌ی $[-2 , 3]$ برابر صفر است. مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۲

۴۳- ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x\left(1 - x^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{16}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۲

۴۴- مقدار می‌نیمم مطلق تابع $f(x) = x^{3} - 3x^{2} - 1$ در بازه‌ی $[1 , 4]$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۳- ۳) ۵- ۴) ۷-

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله ۱۰

۴۵- کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = \frac{x^{2} - 3x}{x^{2} + 3}$ در بازه‌ی $[-1 , 2]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{2}{7}$

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - تجربی - مرحله ۱۶

۴۶- در تابع $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8 - x}$ نسبت ماکزیمم مطلق تابع به می‌نیمم مطلق آن کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - ریاضی - مرحله ۲۳

۴۷- مقدار ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^۴ - ۸x^۲$ روی بازه‌ی $[-۱,۳]$ ، چه‌قدر از مقدار می‌نیمم مطلق آن روی این بازه بیش‌تر است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۲ ۳) ۲۱ ۴) ۱۶

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - تجربی - مرحله ۲۴

۴۸- مجموع ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع $f(x) = |x|\ (x + ۱)$ در فاصله $[-۲,۱]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۲ ۳) ۲/۲۵ ۴) صفر

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - تجربی - مرحله ۲۲

۴۹- مجموع مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۴x & ; \ -۱ \leqslant x < ۴ \\ \sqrt{x} & ; \ ۴ \leqslant x \leqslant ۱۰ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $۵ + \sqrt{۱۰}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۷

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - ریاضی - مرحله ۲۵

۵۰- کمترین مقدار تابع $f(x) = \frac{x^۴}{۴} - \frac{۵x^۳}{۳} - ۳x^۲ + ۱$ کدام است؟

۱) ۱۴۲- ۲) ۱۴۳- ۳) ۱۴۴- ۴) ۱۴۵-

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۵

۵۱- اگر دامنهٔ $f(x) = ۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱$ بازهٔ $[-۱,۲]$ و برد آن بازهٔ $[a,b]$ باشد، $b - a$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۸

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۵

۵۲- ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = -x^۳ + ۳x^۲ - ۲$ در بازه‌ی $[۱,۴]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - تجربی - مرحله ۱۶

۵۳- کدام‌یک از توابع زیر در دامنه‌ی خود، هم مینیمم نسبی و هم مینیمم مطلق دارد؟

۱) $f(x) = -\frac{۱}{x}$ ۲) $f(x) = -x^۲ + ۳x$

۳) $f(x) = ۳x^۲ + ۱۹x - ۱$ ۴) $f(x) = x^۳ + x$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۶

۵۴- مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x\sqrt{۱ - x^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۶

۵۵- ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{۴}{۳}x^{۳} - ۳x^{۲} + ۲x - ۷$ در بازه‌ی $[۰ , ۳]$ چه‌قدر است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) $\frac{۲۰}{۳}$ ۴) $\frac{۷۹}{۱۲}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۷

آزمون مشتق اول

۵۶- اگر تابع f در R مشتق‌پذیر باشد و $f'(x) = (x^{۲} - ۳x + ۲)(x^{۲} - ۱۰x + ۹)$، تابع f چند ماکزیمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۱

۵۷- تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x^{۲}}(x + ۱) + ۱$ از نظر اکسترمم نسبی، در کدام گزینه صدق می‌کند؟

۱) $x = -\frac{۲}{۵}$ طول min نسبی f است.
۲) f دارای max نسبی است، ولی min نسبی ندارد.
۳) $x = ۰$ طول min نسبی f است.
۴) f دارای min نسبی است، ولی max نسبی ندارد.

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۹

۵۸- اگر مقدار مینیمم نسبی تابع $f(x) = ۲x^{۳} - ۶x + ۵m - ۱$ برابر ۲۹ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۷ ۲) $\frac{۳۴}{۵}$ ۳) $\frac{۳۳}{۵}$ ۴) $\frac{۳۶}{۵}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۶

یکنوایی تابع

۵۹- نمودار تابع $y = \frac{(x - ۱)^{۳}}{x^{۲}}$ در کدام بازه نزولی است؟

۱) $(-۲ , ۰)$ ۲) $(۰ , ۲)$ ۳) $(۱ , ۲)$ ۴) $(۱ , +\infty)$

دبیرستان دوره دوم - آزمایشی سنجش - تجربی - سال تحصیلی ۹۵-۹۴ - جامع ۳

۶۰- تابع $y = \frac{(x - ۱)^{۳}}{x^{۴}}$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(۰ , ۴)$ ۲) $(۱ , ۴)$ ۳) $(۴ , +\infty)$ ۴) $(-\infty , ۰)$

دبیرستان دوره دوم - آزمایشی سنجش - ریاضی - سال تحصیلی ۹۵-۹۴ - جامع ۳

۶۱- تابع $f(x) = \frac{x^{۳}}{۳} - x^{۲} - ۳x + \sqrt{۲}$ در بازه‌ی $[a , b]$ نزولی است. حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۴

۶۲- بازه‌ی $(0\,,\,a)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع $y=\dfrac{3x+b}{x^2-x+2}$ در آن بازه صعودی است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۲-   ۲) ۱۰   ۳) ۲   ۴) ۱۰-

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله ۱۱

۶۳- تابع $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ در بازه $[a\,,\,b]$ صعودی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $2-\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $2+\sqrt{2}$ ۴) ۴

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۶

بهینه سازی

۶۴- بیش‌ترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟

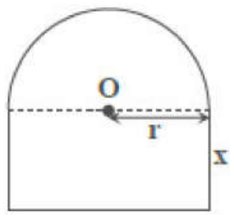
۱) ۹۵۸   ۲) ۹۶۸   ۳) ۹۷۸   ۴) ۹۸۸

دبیرستان دوره دوم - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

۶۵- اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $5\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار $3x+4y$ کدام است؟

۱) $25\sqrt{2}$ ۲) ۳۶   ۳) $28\sqrt{2}$ ۴) ۴۰

دبیرستان دوره دوم - سراسری - ریاضی - ۹۰



۶۶- محیط شکل مقابل، برابر ۱۲ متر می‌باشد. شعاع نیم‌دایره کدام باشد تا مساحت شکل بیشترین مقدار باشد؟

۱) $\dfrac{12}{\pi+4}$ ۲) $\dfrac{6}{\pi+4}$

۳) $\dfrac{12}{\pi+2}$ ۴) $\dfrac{6}{\pi+2}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۷

۶۷- در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\dfrac{\pi}{3}$، با کدام ارتفاع، کم‌ترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

۱) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) ۱   ۳) $\sqrt[3]{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

دبیرستان دوره دوم - سراسری - ریاضی - ۹۵

۶۸- استوانه‌ای با بیش‌ترین حجم ممکن در یک کره به شعاع ۶ واحد محاط شده است. ارتفاع آن کدام است؟

۱) $3\sqrt{6}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{3}$

دبیرستان دوره دوم - آزمایشی سنجش - ریاضی - سال تحصیلی ۹۵-۹۴ - مرحله ۵

۶۹- مجموع قطر قاعده و ارتفاع یک استوانه برابر ۱۵ است. بیش‌ترین مقدار ممکن برای حجم این استوانه چه‌قدر است؟

۱) ۲۵۰π ۲) $\frac{۱۲۵}{۳}\pi$ ۳) ۱۲۵π ۴) ۷۵π

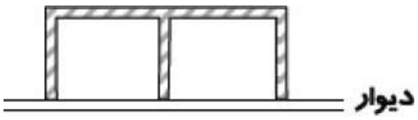
دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۸

۷۰- در یک مخروط قائم با سطح جانبی π، شعاع قاعده کدام باشد تا حجم مخروط بیش‌ترین مقدار ممکن شود؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۲

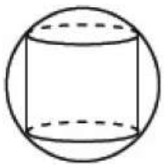
۷۱- با ۱۵۰ متر نرده می‌خواهیم در کنار دیواری یک زمین بازی که از دو قسمت تشکیل شده است، بسازیم. حداکثر مساحتی که اختیار می‌شود چقدر است؟



۱) ۱۸۰۰ ۲) ۱۸۷۵
۳) ۱۹۰۰ ۴) ۱۴۰۰

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۶

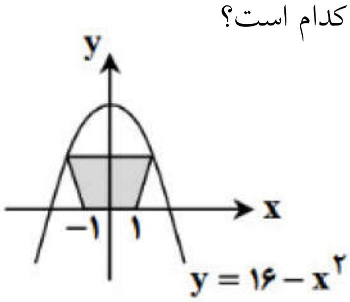
۷۲- درون کره‌ای به شعاع R، یک استوانه دوار و قائم با بیشترین حجم ممکن محاط کرده‌ایم. نسبت شعاع استوانه به ارتفاع آن، کدام است؟



۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۸

۷۳- در شکل زیر، اگر مساحت ذوزنقه بیشترین مقدار ممکن باشد، اندازهٔ قاعدهٔ بزرگ آن کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) ۶
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) ۴

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۹

۷۴- محیط مستطیلی ۳۲ واحد است. اگر مساحت مستطیل ماکسیمم مقدار باشد، عرض مستطیل کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۱۰

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۷-۹۶ - دهم - مرحله ۱۰

۷۵- اگر $x + ۲y = ۶۰$ باشد، آن‌گاه ماکسیمم حاصل‌ضرب x و y چه‌قدر است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۴۵۰

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۲ - سال تحصیلی ۹۷-۹۶ - دهم - مرحله ۱۷

نقطه ی عطف

۷۶- طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(۲-x)^۲}{x}$، کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) فاقد عطف

دبیرستان دوره دوم - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی. - ۹۰

۷۷- مجموعه طول نقاط عطف منحنی به معادله‌ی $y = x|x^۲-۴x|$، کدام است؟

۱) $\left\{\frac{۴}{۳}\right\}$ ۲) $\left\{۰, \frac{۴}{۳}, ۴\right\}$ ۳) $\left\{\frac{۴}{۳}, ۴\right\}$ ۴) $\left\{۰, \frac{۴}{۳}\right\}$

دبیرستان دوره دوم - سراسری - ریاضی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۷۸- طول نقطه عطف منحنی به معادله $y=\frac{x}{۱+|x|}$، کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) فاقد نقطه عطف

دبیرستان دوره دوم - سراسری - تجربی - ۹۰

۷۹- اگر تابع‌هایی به‌صورت $f(x)=x^۳-(m+۲)x^۲+۳x$، همواره صعودی باشند، آن‌گاه مجموعه‌ی طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟

۱) $[-۲, ۰]$ ۲) $[-۲, ۲]$ ۳) $[-۱, ۱]$ ۴) $[۰, ۱]$

دبیرستان دوره دوم - سراسری - تجربی - ۹۴

۸۰- اگر تابع‌هایی به‌صورت $f(x)=\frac{۲}{۳}x^۳-(m-۱)x^۲+۸x$ ، دارای ماکزیمم و می‌نیمم، با طول‌های منفی باشند. آن‌گاه مجموعه‌ی طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟

۱) $\left(-۵, -\frac{۱}{۲}\right)$ ۲) $(-۴, -۱)$ ۳) $(-\infty, -۲)$ ۳) $(-\infty, -۴)$

دبیرستان دوره دوم - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی. - ۹۴

۸۱- اگر در تابع $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ مختصات اکسترمم نسبی، $A(۱,۴)$ و $B = (-۲,۷)$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی عطف این تابع از نقطی ماکزیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۷

۸۲- اگر مختصات نقطه‌ی عطف تابع $f(x) = ax^۳ - bx^۲$ نقطه‌ی $(۱,۱)$ باشد، مجموع طول‌های نقاط اکسترمم نسبی این تابع کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۱

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۷

۸۳- اگر $A(1\,,\,-11)$ نقطه‌ی عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ باشد، آن‌گاه مقدار $f(-1)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

دبیرستان دوره دوم - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی. - ۹۵

۸۴- طول نقطه عطف نمودار تابع $y = (5 - x)\sqrt[3]{x^2}$، کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

دبیرستان دوره دوم - سراسری - ریاضی - ۹۵

۸۵- طول نقطه عطف نمودار تابع $y = x^{\frac{5}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) $-2\,,\,0$ ۴) $0\,,\,2$

دبیرستان دوره دوم - آزمایشی سنجش - تجربی - سال تحصیلی ۹۵-۹۴ - جامع ۶

۸۶- در نمودار تابع $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$، طول نقاط عطف کدام است؟

۱) ۲ ۲) $-1\,,\,0\,,\,1$ ۳) $2\,,\,0$ ۴) صفر

دبیرستان دوره دوم - آزمایشی سنجش - تجربی - سال تحصیلی ۹۵-۹۴ - جامع ۴

۸۷- مجموع قدرمطلق عرض نقاط عطف نمودار تابع $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

دبیرستان دوره دوم - آزمایشی سنجش - ریاضی - سال تحصیلی ۹۵-۹۴ - جامع ۳

۸۸- نقطه $(0,3)$ ماکزیمم یا می‌نیمم تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ است. نمودار آن در نقطه $(1,-1)$ دارای نقطه عطف است. $f(2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵- ۳) ۳- ۴) ۷

دبیرستان دوره دوم - آزمایشی سنجش - تجربی - سال تحصیلی ۹۵-۹۴ - مرحله ۴

۸۹- اگر نقطه‌ی $A(-1\,,\,2)$ نقطه‌ی عطف تابع $f(x) = ax^3 - bx^2$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۶- ۴) ۵-

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۸

۹۰- خط مماس بر منحنی $y = x(x^2 + 3x + 1)$ در نقطه‌ی عطف آن، از کدام نقطه‌ی زیر عبور می‌کند؟

۱) $(0\,,\,1)$ ۲) $(0\,,\,2)$ ۳) $(0\,,\,-1)$ ۴) $(0\,,\,-2)$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۸

۹۱- اگر $A(-1 , 1)$، نقطه‌ی عطف تابع $f(x) = x^4 + ax^3 - bx + 5$ باشد، مقدار $a^2 + b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۱۱

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۱۲

۹۲- اگر $A(1 , -3)$ نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y = ax^3 - x^2 - 3x + b$ باشد. مقدار تابع در نقطه‌ی ماکزیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

دبیرستان دوره دوم - سراسری - تجربی - ۹۶

۹۳- اگر $A(1 , -2)$ نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y = ax^3 + bx^2 - 3x - 1$ باشد. مقدار تابع در نقطه‌ی ماکزیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) فاقد ماکزیمم نسبی

دبیرستان دوره دوم - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی. - ۹۶

۹۴- تعداد نقاط عطف نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

دبیرستان دوره دوم - آزمایشی سنجش - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶-۹۵ - جامع ۴

۹۵- تعداد نقاط عطف نمودار تابع $y = \frac{x}{x^2 + 1}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

دبیرستان دوره دوم - آزمایشی سنجش - تجربی - سال تحصیلی ۹۶-۹۵ - جامع ۴

۹۶- اگر نقطه‌ی $(-1 , 4)$ نقطه‌ی عطف تابع $f(x) = ax^3 + bx^2$ باشد، a کدام است؟

۱) -2 ۲) -6 ۳) ۲ ۴) ۶

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۲

۹۷- اگر تابع‌های به صورت $g(x) = -\frac{x^3}{3} + \left(\frac{m+1}{2}\right)x^2 - x$ همواره نزولی باشند، آن‌گاه مجموعه‌ی طول نقاط عطف این توابع در کدام بازه است؟

۱) $[-1 , 1]$ ۲) $[1 , 4]$ ۳) $[-4 , 0]$ ۴) $[0 , 2]$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۲

۹۸- اگر $x = -1$ و $x = 3$ طول نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ باشند، عرض نقطه‌ی عطف این تابع کدام است؟

۱) ۷ ۲) -13 ۳) -11 ۴) ۵

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله ۱۰

۹۹- تابع $f(x) = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 - 191x + 17$ چند نقطه‌ی عطف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله ۱۰

۱۰۰- دو نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}(x+2)$، چه‌قدر از هم فاصله دارند؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{10}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{8}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله ۱۱

۱۰۱- اگر تابع $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + 4x + 1$ دارای اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه طول نقاط عطف این تابع در کدام محدوده قرار دارد؟

۱) $(-4, 4)$ ۲) $R - [-4, 4]$ ۳) $R - [-2, 2]$ ۴) $(-2, 2)$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله ۱۱

۱۰۲- نمودار تابع $f(x) = -x^3 - x + 1$ در اطراف نقطه‌ی عطفش چگونه است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - تجربی - مرحله ۱۶

۱۰۳- مجموعه‌ی نقاط عطف نمودار تابع $y = x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$، کدام است؟

۱) (-1) ۲) $(0, -1)$ ۳) (0) ۴) ϕ

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - ریاضی - مرحله ۲۲

۱۰۴- مرکز تقارن نمودار منحنی $f(x) = x^3 - 3ax^2 - 16$ روی محور xها قرار دارد، a کدام است؟

۱) -2 ۲) ۳ ۳) -4 ۴) ۱

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - تجربی - مرحله ۲۵

۱۰۵- خط مماس بر منحنی به معادله $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 1$ در نقطه عطف آن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -5 ۴) -11

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله ۱۳

۱۰۶- اگر $x = -1$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 3$ باشد، a کدام است؟

۱) -3 ۲) -6 ۳) ۳ ۴) ۶

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله ۱۵

۱۰۷- اگر $A(1, -11)$ نقطهٔ عطف تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ باشد، شیب خط مماس بر f در این نقطه کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) -12 ۳) ۶ ۴) صفر

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله ۱۴

۱۰۸- اگر $x = c$ طول نقطهٔ عطف تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \le 1 \\ -x^2 + bx & x > 1 \end{cases}$ باشد، مقدار $a + b + c$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۴

۱۰۹- اگر عرض نقطه‌ی عطف تابع $y = \dfrac{a}{x^2 + 1}$ برابر $\frac{3}{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) $\dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - تجربی - مرحله ۱۶

۱۱۰- اگر نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x) = x^2(ax - a + 1) + 7x - 8$ در ناحیه‌ی دوم یا سوم قرار گیرد، حدود تغییرات a کدام است؟

۱) $R - [0, 1]$ ۲) $(0, 1)$ ۳) $(0, +\infty)$ ۴) $(-\infty, 1)$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۷

۱۱۱- اگر $A(2,0)$ نقطهٔ عطف تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + bx$ باشد، مختصات ماکسیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $M(0,0)$ ۲) $M(-1,-3)$

۳) $M(1,5)$ ۴) تابع، فاقد ماکسیمم نسبی است.

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۹

۱۱۲- خط راستی بر نمودار تابع $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ مماس شده و در نقطه‌ی تماس از آن عبور می‌کند. شیب این خط، کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

دبیرستان دوره دوم - سراسری - ریاضی - ۹۷

تقعر

۱۱۳- منحنی نمایش تابع $y=-x^4+4x^3-3$ ، در کدام بازه صعودی و تقعر آن رو به بالا است؟

۱) $(0,2)$ ۲) $(2,3)$ ۳) $(0,3)$ ۴) $(2,+\infty)$

دبیرستان دوره دوم - سراسری - تجربی - ۹۱

۱۱۴- به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تقعّر منحنی به معادله‌ی $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2$ ، همواره رو به بالا است؟

۱) $-1 < a < 1$ ۲) $-1 < a < 2$ ۳) $-2 < a < 1$ ۴) $-2 < a < 2$

دبیرستان دوره دوم - سراسری - ریاضی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۱۱۵- تقعر منحنی به‌معادله‌ی $y = x\sqrt{x^{۲} + ۲}$ در بازه‌ی $(a, +\infty)$ رو به بالا است. کم‌ترین مقدار a ، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) $-\infty$

دبیرستان دوره دوم - سراسری - تجربی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۱۱۶- منحنی نمایش تابع $y = \frac{۱}{۳}x^{۳} - x^{۲} - ۳x$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن روبه‌بالا است؟

۱) (۱و۱-) ۲) (۳و۱-) ۳) (۳و۱) ۴) ($+\infty$ و۱)

دبیرستان دوره دوم - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی. - ۹۱

۱۱۷- تقعر نمودار تابع $y = (x + ۳)\sqrt{x}$، در باز ه‌ی (a , b) رو به پایین است. بیش‌ترین مقدار $b - a$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $+\infty$

دبیرستان دوره دوم - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی. - ۹۲

۱۱۸- مجموعه طول نقاطی که تقعر منحنی به معادله $y = \frac{-۲}{x^{۲} + ۳}$، در آن‌ها رو به بالا باشد، به کدام صورت است؟

۱) $|x| < ۱$ ۲) $|x| < ۲$ ۳) $|x| > \sqrt{۲}$ ۴) $|x| > \sqrt{۳}$

دبیرستان دوره دوم - سراسری - ریاضی - ۹۰

۱۱۹- در کدام بازه تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{۱}{۴}x^{۴} + \frac{۱}{۲}x^{۳} - ۳x^{۲}$، صعودی و تقعر نمودار آن، رو به پایین است؟

۱) $(-۲, ۰)$ ۲) $(-۲, ۱)$ ۳) $(-۱, ۲)$ ۴) $(۰, ۱)$

دبیرستان دوره دوم - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی. - ۹۳

۱۲۰- در کدام‌یک از بازه‌های زیر، نمودار تابع $g(x) = x^{۲} - \frac{x^{۳}}{۶} - \frac{x^{۴}}{۱۲}$ بالای خط مماس بر تابع در آن بازه است؟

۱) $(-۱,۲)$ ۲) $(-۲,۰)$ ۳) $(۰,۴)$ ۴) $(-۷,۱)$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۷

۱۲۱- تقعر منحنی به معادله $y = x - ۳ + \frac{۳x - ۱}{x^{۲}}$ در کدام بازه رو به پایین است؟

۱) $(۱ , +\infty)$ ۲) $(-\infty , ۱)$ ۳) $(-۱ , ۳)$ ۴) $(-۳ , ۱)$

دبیرستان دوره دوم - آزمایشی سنجش - تجربی - سال تحصیلی ۹۵-۹۴ - جامع ۳

۱۲۲- در کدام‌یک از بازه‌های زیر، تقعر تابع $f(x) = \frac{x^{۴}}{۴} - \frac{۲}{۳}x^{۳} + x$ رو به پایین است؟

۱) $\left(۰ , \frac{۴}{۳}\right)$ ۲) $(۰ , ۲)$ ۳) $\left(-۱ , \frac{۲}{۳}\right)$ ۴) $(-۳ , ۰)$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۸

۱۲۳- تقعر تابع $f(x)=x\sqrt{x-3}$ در بازه‌ی $(a\,,\,b)$ رو به پایین می‌باشد. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{5}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۲

۱۲۴- منحنی نمایش تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x^3-9x^2+12x-7$ ، در کدام بازه صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟

۱) $(2\,,\,+\infty)$ ۳) $(1\,,\,2)$ ۳) $\left(1\,,\,\frac{3}{2}\right)$ ۴) $(-\infty\,,\,1)$

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - تجربی - مرحله ۱۶

۱۲۵- تقعر تابع $f(x)=2x+\sqrt[3]{x}$ در بازه‌ی $(-3\,,\,3)$ از چپ به راست چگونه است؟

۱) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است.
۲) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا است.
۳) همواره رو به بالا است.
۴) همواره رو به پایین است.

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - تجربی - مرحله ۱۶

۱۲۶- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+4$ ، در کدام بازه صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟

۱) $[0,1)$ ۲) $[1,+\infty)$ ۳) $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ ۴) $\left(\frac{1}{3},1\right)$

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - ریاضی - مرحله ۲۲

۱۲۷- نمودار تابع $f(x)=7-x^2\left(x^2-4\right)$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر، نزولی با تقعر روبه‌بالا است؟

۱) $\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ۲) $\left(\frac{3}{2},3\right)$ ۳) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$ ۴) $\left(-\frac{3}{2},0\right)$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۵

۱۲۸- جهت تقعر تابع $y=\left(x^2+\frac{5}{3}\right)x^{\frac{1}{4}}$ در چند نقطه تغییر می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - تجربی - مرحله ۱۶

۱۲۹- در کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، تقعر نمودار تابع $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}+4x+5$ رو به پایین است؟

۱) R ۲) فقط $(0\,,\,+\infty)$ ۳) فقط $(-\infty\,,\,0)$ ۴) $\{\}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۸

۱۳۰- نمودار تابع $f(x)=\operatorname{Sin}3x+2\operatorname{Cos}3x$ در اطراف نقطهٔ $x=\frac{\pi}{12}$ به کدام صورت است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۹

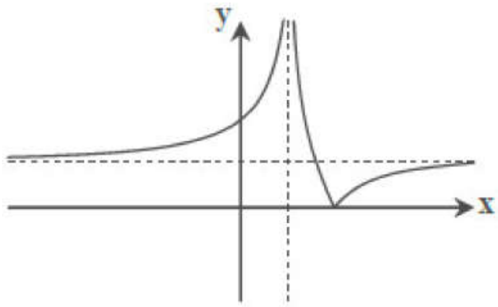
۱۳۱- نمودار تابع $y = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$، در کدام بازه نزولی و تقعّر آن رو به پایین است؟

۱) $(-2, 1)$ ۲) $(0, 1)$ ۳) $(-2, 0)$ ۴) $(-\infty, -2)$

دبیرستان دوره دوم - سراسری - تجربی - ۹۷

رسم نمودار

۱۳۲- کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند ضابطه‌ی تابع مقابل باشد؟



۱) $y = \dfrac{|x| - 4}{|x| - 1}$ ۲) $y = \left|\dfrac{x - 1}{x - 3}\right|$

۳) $y = \left|\dfrac{x - 2}{x - 1}\right|$ ۴) $y = \left|\dfrac{x - 2}{x^2 - 1}\right|$

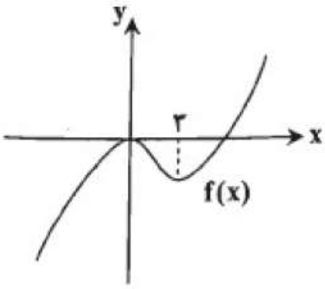
دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۷

۱۳۳- نمودار تابع $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 1}$ از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) ناحیه‌ی سوم ۲) ناحیه‌ی چهارم ۳) ناحیه‌ی اول ۴) ناحیه‌ی دوم

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۸

۱۳۴- اگر a عددی طبیعی و نمودار تابع $f(x) = (3 - 2a)x^3 + bx^2$ به شکل زیر باشد، حاصل $b - a$ کدام است؟



۱) $-\frac{17}{2}$ ۲) $-\frac{13}{4}$

۳) $-\frac{11}{2}$ ۴) $-\frac{15}{2}$

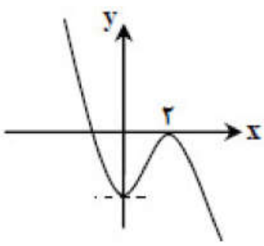
دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله۸

۱۳۵- به‌ازای کدام مقدار m، خط $y = m$، منحنی تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ را در سه نقطه قطع می‌کند؟

۱) $-32 < m < 0$ ۲) $-16 < m < 8$ ۳) $-12 < m < 12$ ۴) $0 < m < 16$

دبیرستان دوره دوم - آزمایشی سنجش - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶-۹۵ - جامع ۳

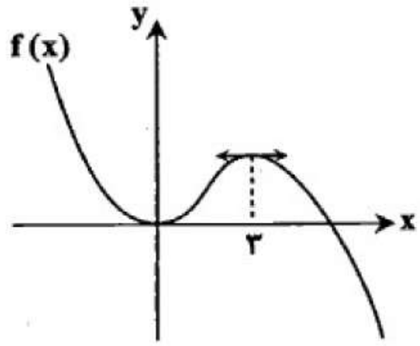
۱۳۶- شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = mx^3 - nx^2 - 8$ می‌باشد. مقدار m کدام است؟



۱) -2
۲) 2
۳) -6
۴) 6

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۲

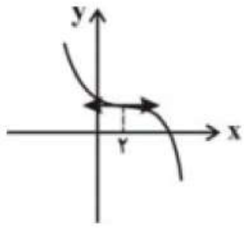
۱۳۷- اگر نمودار تابع $f(x) = -x^۳ + ax^۲ + b$ به شکل مقابل باشد، مقدار $f(۴)$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۴
۳) ۸
۴) -۲

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - مرحله ۱۰

۱۳۸- نمودار تابع $f(x) = \frac{-۱}{۳}x^۲ + ax^۲ + bx + c$ به صورت شکل روبه‌رو است. $a - b$، کدام است؟



۱) ۶
۲) -۶
۳) ۲
۴) -۲

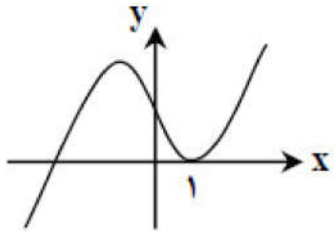
دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - تجربی - مرحله ۲۳

۱۳۹- اگر $f(x) = \frac{۳x + ۵}{x - ۳}$ و $g(x) = x^۳ - ۲۹x + ۱$ فاصله مرکز تقارن تابع f تا مرکز تقارن تابع g چقدر است؟

۱) $\sqrt{۱۲}$
۲) $\sqrt{۱۳}$
۳) $\sqrt{۱۴}$
۴) $\sqrt{۱۵}$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۳

۱۴۰- نمودار تابع $y = x^۳ + ax + b$ به‌صورت روبه‌رو است. مقدار ماکسیمم نسبی این تابع کدام است؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۹

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۳

۱۴۱- نمودار تابع $f(x) = -x^۳ + ۴x^۲ + ۳x + ۱$ کدام است؟

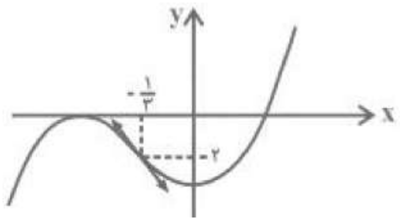
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۶



۱۴۲- اگر نمودار $f(x) = ax^3 + bx^2 - 4$ به صورت زیر باشد، $a + b$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷

۳) ۵۴ ۴) صفر

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - ریاضی - مرحله ۲۱

۱۴۳- اگر نمودار تابع $y = x^3 - ax^2 + (a-1)x$ فقط از ناحیه‌ی دوم، دستگاه مختصات عبور نکند، محدوده‌ی a کدام است؟

۱) $[1, +\infty)$ ۲) $[1, +\infty) - \{2\}$ ۳) $(1, +\infty)$ ۴) $(1, +\infty) - \{2\}$

دبیرستان دوره دوم - سوالات گردآوری شده - سری ۱ - سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ - ریاضی - مرحله ۲۱

۱۴۴- اگر $f(x) = \frac{-2}{3}x^3 + (m+1)x^2 - 8x$ تابعی نزولی باشد، آن‌گاه طول نقطه‌ی عطف آن در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $[-1, 1]$ ۲) $[0, 4]$ ۳) $[-2, 2]$ ۴) $[-4, 0]$

دبیرستان دوره دوم - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله۱۷

۱۴۵- با توجه به نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$، به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله‌ی $f(x) = m$، فقط دارای یک ریشه‌ی حقیقی است؟

۱) $m > 7$ یا $m < 2$ ۲) $m > 6$ یا $m < 3$ ۳) $m > 7$ یا $m < 3$ ۴) $m > 6$ یا $m < 2$

دبیرستان دوره دوم - سراسری - تجربی - ۹۷

۱۴۶- با توجه به نمودار تابع $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12x$، به ازای کدام مقادیر m خط به معادله‌ی $y = m$ با نمودار تابع مفروض فقط در دو نقطه مشترک است؟

۱) ۲۷ و $-\frac{44}{3}$ ۲) ۲۴ و $-\frac{44}{3}$ ۳) ۲۴ و $-\frac{16}{3}$ ۴) ۲۷ و $-\frac{16}{3}$

دبیرستان دوره دوم - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی. - ۹۷

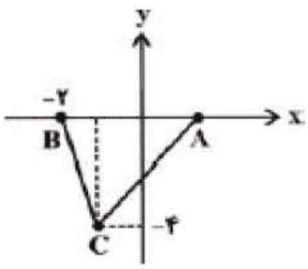
۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی C (عضو دامنه‌ی تابع) بحرانی است، هر گاه یکی از دو حالت زیر رخ دهد:
$f'(C)=۰$ یا $f'(C)$ موجود نباشد

$$f(x)=\frac{\sqrt{۱+x^۲}}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(\frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^۲}}\times x\right)-\sqrt{۱+x^۲}}{x^۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{x^۲}{\sqrt{۱+x^۲}}-\sqrt{۱+x^۲}}{x^۲}$$

$$=\frac{\frac{x^۲-(x^۲+۱)}{\sqrt{۱+x^۲}}}{x^۲}=\frac{-۱}{x^۲\sqrt{۱+x^۲}}\neq ۰$$

مخرج f' در $x=۰$ صفر می‌شود. ولی از آن‌جا که این نقطه عضو دامنه‌ی تابع نیست، بنابراین نقطه‌ی بحرانی نیست و در نتیجه تابع نقطه‌ی بحرانی ندارد.

۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. $x=-۲$ و $x=۱$ نقاط بحرانی می‌باشند، برای تعیین نقطه‌ی بحرانی دیگر از تابع مشتق می‌گیریم: (برای تعیین $f'=۰$ می‌توانیم قدرمطلق را برداریم.)



$$f(x)=(x-۱)|x-۱||x+۲|\rightarrow f(x)=(x-۱)^۲(x+۲)$$
$$\rightarrow f'(x)=۲(x-۱)(x+۲)+(x-۱)^۲$$
$$\Rightarrow (x-۱)(۳x+۳)=۰\ \Rightarrow x=-۱\ \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}(۴\times ۳)=۶$$

۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x^۳-x=۰\rightarrow x(x-۱)(x+۱)=۰\rightarrow x=۰\ ،+۱ \\ x=-۱\ (\text{غ.ق.ق}) \\ y'=۳x^۲-۱=۰\rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: نقطه‌ی درونی $c\in D_f$ را یک نقطه‌ی بحرانی نامیم، هرگاه $f'(c)=۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

در $x=۳$ مشتق وجود ندارد، پس این نقطه یک نقطه‌ی بحرانی است.

$$y'=۰\ \Rightarrow\ ۶x-۳x^۲=۰\ \Rightarrow ۳x(۲-x)=۰\Rightarrow x=۰,۲$$

بنابراین مجموع طول نقاط بحرانی برابر است با:

$$۰+۲+۳=۵$$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: تابع f با دامنه ی $[a , b]$ مفروض است. نقاطی از بازه‌ی (a , b) که مشتق f در آن نقاط صفر است یا نقاطی از این بازه که مشتق f در آن نقاط وجود ندارد؛ نقاط بحرانی این تابع هستند.

با توجه به این‌که $f(x)$ یک چندجمله‌ای است، پس مشتق آن روی R وجود دارد، بنابراین کافی است معادله‌ی $f'(x) = ۰$ را حل کنیم.

$$f'(x) = x^۳ - x = ۰ \Rightarrow x\left(x^۲ - ۱\right) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \pm ۱ \end{cases}$$

پس تابع f دارای ۳ نقطه‌ی بحرانی است.

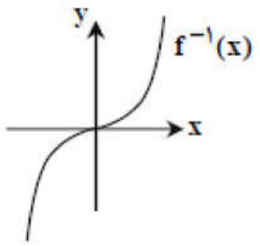
۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: نقطه‌ی درونی $c \in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

ضابطه‌ی $f^{-۱}$ را به دست می‌آوریم. برای این منظور وارون هریک از ضابطه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y_۱ = \sqrt{x} \;;\; x \geq ۰ \Rightarrow x = y_۱^۲ \;;\; y_۱ \geq ۰ \Rightarrow f^{-۱}(x) = x^۲ \;;\; x \geq ۰ \\ y_۲ = -\sqrt{-x} \;;\; x \leq ۰ \Rightarrow x = -y_۲^۲ \;;\; y_۲ \leq ۰ \Rightarrow f^{-۱}(x) = -x^۲ \;;\; x \leq ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ -x^۲ & x \leq ۰ \end{cases}$$

در نتیجه $f^{-۱}$ دارای یک نقطه‌ی بحرانی $(x = ۰)$ است.



۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} , P = \alpha . \beta = \frac{c}{a}$$

چون f یک چندجمله‌ای است، پس همه‌جا مشتق‌پذیر است. بنابراین نقاط بحرانی آن ریشه‌های معادله‌ی $f'(x) = ۰$ هستند.

$$f'(x) = x^۲ + mx - \left(m^۲ + ۱\right) = ۰$$

اکنون با توجه به این‌که مجموع طول‌های نقاط بحرانی برابر ۲- است، داریم:

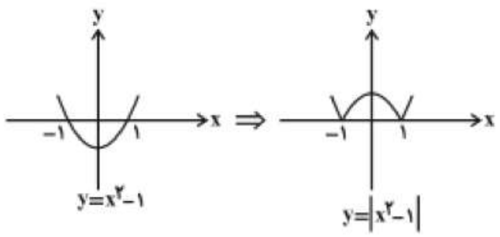
$$S = -۲ \Rightarrow \frac{-m}{۱} = -۲ \Rightarrow m = ۲$$

پس حاصل‌ضرب طول‌های نقاط بحرانی برابر است با:

$$P = -\left(m^۲ + ۱\right) = -(۴ + ۱) = -۵$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

از رسم نمودار تابع کمک می‌گیریم:



با توجه به نمودار، نقاط $x=0$ و $x=1$ و $x=-1$ نقاط بحرانی هستند.

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases}2x-x^2+4 & ;\quad x\geqslant 2 \text{ یا } x\leqslant -2\\ 2x+x^2-4 & ;\quad -2<x<2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2-2x & ;\quad x>2 \text{ یا } x<-2\\ 2+2x & ;\quad -2<x<2\end{cases}$$

در نقاط $x=2$ و $x=-2$ مشتق چپ و راست تابع برابر نیستند، پس مشتق وجود ندارد و این نقاط بحرانی‌اند.
همچنین داریم:

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}2-2x=0\Rightarrow x=1 \text{ غ ق ق}\\ 2+2x=0\Rightarrow x=-1\end{cases}$$

پس نقاط بحرانی تابع به صورت $(2,4)$ و $(-2,-4)$ و $(-1,-5)$ خواهد بود که حاصل‌ضرب عرض آن‌ها ۸۰ است.

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: تابع f با دامنهٔ $[a,b]$ مفروض است. نقاطی از بازهٔ (a,b) را که مشتق f در آن نقاط صفر یا تعریف نشده است، نقاط بحرانی تابع f می‌نامیم.

$$f(x)=x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}+2\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\left(2x^{\frac{2}{3}}-1\right)=\frac{2\left(2\sqrt[3]{x^2}-1\right)}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\begin{cases}f'(x)=0\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow x^2=\frac{1}{8}\Rightarrow x=\frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}\\ f'(x) \text{ ت ن}\Rightarrow\sqrt[3]{x}=0\Rightarrow x=0\end{cases}$$

پس تابع f در بازهٔ $(-1,1)$ دارای ۳ نقطهٔ بحرانی است.

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: نقطهٔ درونی $c\in D_f$ را نقطهٔ بحرانی تابع f می‌نامیم، هرگاه: $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

ابتدا با کمک بازه‌بندی، قدرمطلق را حذف می‌کنیم:

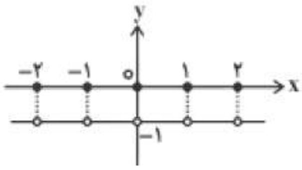
$$y=\begin{cases}x-9+x^2 & |x|\leq 3\\ x+9-x^2 & |x|>3\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}1+2x & |x|\\ 1-2x & |x|>3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y'=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\\ y' \text{ ت ن}\Rightarrow x=\pm 3\end{cases}$$

بنابراین مجموع طول‌های نقاط بحرانی این تابع برابر است با: $-\frac{1}{2}$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = [x] \Rightarrow y = f(x + [-x]) = [x + [-x]] = [x] + [-x]$$

حال نمودار آن را رسم می‌کنیم: با توجه به نمودار تابع، نقاط صحیح، نقطه‌های بحرانی از نوع مشتق‌ناپذیر هستند. در سایر نقاط نیز مشتق تابع برابر صفر است. پس $x \in R$ نقاط بحرانی تابع‌اند.



۱۳- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. از آزمون مشتق اول برای حل استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=x^4-6x^2+8x \Rightarrow f'(x)=4x^3-12x+8$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} 4x^3-12x+8=0 \Rightarrow x^3-3x+2=0 \ (*)$$

مجموع ضرایب صفر است پس یک جواب $x=1$ است و با تقسیم عبارت x^3-3x+2 بر $x-1$ بقیه‌ی جواب‌ها را می‌یابیم:

$$x^3-3x+2 \,\Big|\, \frac{x-1}{x^2+x-2} = (x-1)(x+2) \Rightarrow x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$$

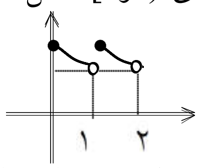
$$\xrightarrow{(*)} (x-1)^2(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{ریشه ی مضاعف} \\ x=-2 & \text{ریشه ی ساده} \end{cases}$$

پس تابع تنها یک می‌نیمم نسبی دارد. دقت کنید چون $x=1$ ریشه‌ی مضاعف f' است، f' در این نقطه تغییر علامت نمی‌دهد.

۱۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. چون دوره تناوب تابع $(gof)(x)=2^{[x]-x}$ برابر یک است. پس مسئله را برای دو برابر یک دوره تناوب بررسی می‌کنیم. مثلاً برای بازه‌ی [۰و۲) شکل تابع را رسم می‌کنیم.

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow (gof)(x)=2^{-x}$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow (gof)(x)=2^{1-x}$$



مشاهده می‌شود که اعداد با طول صحیح ماکزیمم نسبی است و تابع فاقد می‌نیمم نسبی است.

۱۵- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^3 + ax^2 - 8x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax - 8$$

جواب‌های معادله‌ی $f'(x) = 0$، طول نقاط اکسترمم است.

$$x \in (1,4) \xrightarrow{\text{بولتزانو}} f'(1).f'(4) < 0 \Rightarrow (2a-5)(8a+40) < 0 \Rightarrow -5 < a < 2/5$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته (آزمون مشتق اول): فرض کنیم تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و در بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، عدد $x_0 \in (a,b)$ به‌گونه‌ای است که $f'(x_0) = 0$ و f' در x_0 از مثبت به منفی (منفی به مثبت) تغییر علامت می‌دهد. در این‌صورت f در x_0 دارای یک ماکزیمم (مینیمم) نسبی است. ابتدا مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

$$g'(x)=-30x^4+105x^2-120=-30\left(x^4-5x^2+4\right)=-30\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=-30(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

$$g'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1 \,,\, x=\pm 2$$

x		-2		-1		1		2	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

با توجه به جدول تعیین علامت g'، تابع g دارای ۴ اکسترمم نسبی می‌باشد (۲ ماکزیمم نسبی و ۲ مینیمم نسبی).

۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y'=2(x-1)\sqrt[3]{x^2}+(x-1)^2\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{6x(x-1)+2(x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y'=\frac{8x^2-10x+2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{4} \\ x=0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$x=\frac{1}{4}$

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ریشه‌های مشتق تابع ۲- و ۳ می‌باشند.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow \left(\frac{b}{3}=-6 \,,\, \frac{-2a}{3}=1\right) \Rightarrow a=-\frac{3}{2} \,,\, b=-18$$

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-18x+c \Rightarrow 1=64-24-72+c \Rightarrow c=33$$

منحنی از نقطه $(4,1)$ می‌گذرد، پس $f(4)=1$ است.

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته (آزمون مشتق اول): اگر نقطه‌ی $x = c$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x)$ باشد و $f'(x)$ در این نقطه از مثبت به منفی (منفی به مثبت) تغییر علامت دهد، آن‌گاه $f(x)$ در $x = c$ دارای ماکسیمم (مینیمم) نسبی است.

اولاً این نقطه در تابع صدق می‌کند: $f(۱) = ۲ \Rightarrow a + b = ۲ \quad (*)$

ثانیاً $f'(۱) = ۰$ (زیرا تابع در $x = ۱$ مشتق‌پذیر است):

$$f'(x) = a + \frac{b}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow a + \frac{b}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲a + b = ۰ \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*)\,,\,(**)} \begin{cases} a + b = ۲ \\ ۲a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۴ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = -۲ + \frac{۴}{۲\sqrt{x}} = -۲ + ۲\sqrt{x} = \frac{-۲\sqrt{x} + ۲}{\sqrt{x}}$$

x		۱	
$f'(x)$	+	۰	−
	$\nearrow$	max نسبی	$\searrow$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y' = x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = -۱\,,\,۳$$

مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم چنین است.

$$y = -\frac{۱}{۳} - ۱ + ۳ = \frac{۵}{۳} \quad , \quad y = ۹ - ۹ - ۹ = -۹$$

پس مجموع آن‌ها $\frac{۵}{۳} - ۹ = -\frac{۲۲}{۳}$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: برای به دست آوردن ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق یک تابع در $[a\,,\,b]$، نقاط بحرانی تابع در این بازه را به دست می‌آوریم. سپس مقدار تابع را به ازای این نقاط و نقاط a و b به دست می‌آوریم. از بین این مقادیر، بزرگ‌ترین مقدار، ماکزیمم مطلق و کوچک‌ترین مقدار، مینیمم مطلق است.

ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که مشتق f همواره موجود است، کافی است نقاطی را که مشتق در آن‌ها صفر می‌شود به دست آوریم:

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۶x = ۳x(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases}$$

حال مقادیر تابع را به ازای نقاط بحرانی و نقاط ابتدا و انتهای بازه، محاسبه می‌کنیم:

$$f(-۱) = ۱\,,\ f(۰) = ۵\,,\ f(۲) = ۱\,,\ f(۴) = ۲۱$$

پس مقدار مینیمم مطلق تابع در بازه‌ی $[-۱\,,\,۴]$ برابر با ۱ است.

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: اگر تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ در نقطه‌ی (a , b) دارای ماکزیمم (مینیمم) نسبی باشد، داریم:

$$f(a) = b \ , \ f'(a) = ۰$$

نقطه‌ی $(۱ , ۱۰)$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع f است، پس با توجه به نکته‌ی بالا داریم:

$$\begin{cases} f(۱) = ۱۰ \Rightarrow a + b + ۷ = ۱۰ \Rightarrow a + b = ۳ \\ f'(۱) = ۰ \Rightarrow ۳a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{۳}{۲} \\ b = \frac{۹}{۲} \end{cases} \Rightarrow a - b = -۶$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته (آزمون مشتق اول): اگر تابع f در $[a , b]$ پیوسته و $x = x_۰$ طول نقطه‌ی بحرانی f باشد، به طوری‌که f' در $x_۰$ از مثبت به منفی (منفی به مثبت) تغییر علامت بدهد؛ در این صورت $x = x_۰$ طول نقاطه‌ی ماکزیمم (مینیمم) نسبی تابع f است.

ابتدا طول نقطه‌ی مینیمم نسبی را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x) = ۶x^۲ - ۶ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$

		-۱		۱	
f'	$+$ ↗	max	$-$ ↘	min	$+$ ↗

با توجه به جدول بالا، طول نقطه‌ی مینیمم نسبی برابر ۱ می‌باشد. پس نقطه‌ی $(۱ , ۲۹)$ نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع f است، بنابراین داریم:

$$f(۱) = ۲۹ \Rightarrow ۲ - ۶ + ۵m - ۱ = ۲۹ \Rightarrow m = \frac{۳۴}{۵}$$

۲۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته (آزمون مشتق اول): فرض کنیم $x = x_۰$ نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد. در این صورت اگر f' در $x_۰$ از مثبت به منفی (منفی به مثبت) تغییر علامت بدهد، آن‌گاه f در $x = x_۰$ دارای ماکزیمم نسبی (مینیمم نسبی) است.

ابتدا نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع f را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x) = ۲(x - ۱)(x - ۲) + (x - ۱)^۲ = (x - ۱)(۲x - ۴ + x - ۱)$$
$$(x - ۱)(۳x - ۵)$$

x		۱		$\frac{۵}{۳}$	
$f'(x)$	$+$ ↗	max	$-$ ↘	min	$+$ ↗

پس نقطه‌ی $A(۱ , ۰)$ ماکزیمم نسبی و نقطه‌ی $B\left(\frac{۵}{۳}, \frac{-۴}{۲۷}\right)$ مینیمم نسبی تابع f است و فاصله‌ی آن‌ها برابر است با:

$$AB = \sqrt{\left(۱ - \frac{۵}{۳}\right)^۲ + \left(۰ + \frac{۴}{۲۷}\right)^۲} = \sqrt{\frac{۴}{۹} + \left(\frac{۴}{۲۷}\right)^۲} = \sqrt{\frac{۴}{۹}\left(۱ + \frac{۴}{۸۱}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{۴ \times ۸۵}{۹ \times ۸۱}} = \frac{۲}{۲۷}\sqrt{۸۵}$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: اگر $x = c$ طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع f و f در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f'(c) = ۰$

نکته (آزمون مشتق دوم): اگر $f'(c) = ۰$ و $f''(c) > ۰$ ($f''(c) < ۰$)، آن‌گاه تابع f در نقطه‌ی $(c , f(c))$ دارای مینیمم (ماکسیمم) نسبی است.

$$f'(۲) = ۰ \Rightarrow ۴ - \frac{a}{۲} + ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۱۰$$

$$f''(x) = ۲x + \frac{a}{x^۲} \xrightarrow{a = ۱۰} f''(۲) = ۴ + \frac{۱۰}{۴} = \frac{۱۳}{۲} > ۰$$

بنابراین از آزمون مشتق دوم نتیجه می‌گیریم $f(۲)$ مقدار مینیمم تابع f است.

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته (آزمون مشتق اول): فرض کنیم $x_۰$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد و f' در $x_۰$ از مثبت به منفی (منفی به مثبت) تغییر علامت دهد، در این‌صورت f در $x_۰$ دارای ماکزیمم (می‌نیمم) نسبی است.

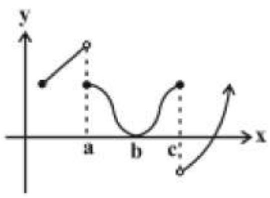
با توجه به نکته‌ی بالا باید مشتق تابع g را تعیین علامت کنیم:

$$g'(x) = \frac{۶}{۵}x^{\frac{۱}{۵}} - \frac{۸۴}{۵}x^{\frac{۲}{۵}} = \frac{۶}{۵}x^{\frac{۱}{۵}}\left(۱ - ۱۴x^{\frac{۱}{۵}}\right) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \left(\frac{۱}{۱۴}\right)^۵ \end{cases}$$

x		۰		$(\frac{۱}{۱۴})^۵$	
g'	$-$	۰	$+$	۰	$-$
	↘	min	↗	max	↘

پس $x = ۰$ طول می‌نیمم نسبی و $x = \left(\frac{۱}{۱۴}\right)^۵$ طول ماکزیمم نسبی تابع g است، بنابراین تابع g دارای ۲ اکسترمم نسبی است.

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل، تابع در $x = b$ می‌نیمم نسبی و در $x = c$ ماکزیمم نسبی دارد.



۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x^۳ - x^۲ + ۱}{x^۳} = ۱ - \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x^۳}$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۰ + \frac{۱}{x^۲} - \frac{۳}{x^۴} = \frac{x^۲ - ۳}{x^۴} = ۰ \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳}$$

هم‌چنین $x = ۰$ ریشه‌ی مخرج مشتق است با تعیین علامت مشتق داریم:

x		$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$	
f'	$+$		$-$	‖	$-$		$+$
f	↗	max	↘		↘	min	↗

بنابراین تابع در بازه‌ی $(-۱ , ۲)$ فقط یک می‌نیمم دارد.

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا نقاط بحرانی را از طریق $f'(x)=0$ می‌یابیم.

$$f'(x)=5x^4-20x^2=0 \Rightarrow 5x^2\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{ریشه ی مضاعف} \\ x=2 & \text{ریشه ی ساده} \\ x=-2 & \text{ریشه ی ساده} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{min}=2 \Rightarrow y_{min}=f(2)$$

$$\Rightarrow f(2)=32-\frac{160}{3}+a=-21 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

از طرفی $x_{Max}=-2$ است. پس: $\left(-2\,,\,\frac{65}{3}\right)$: مختصات نقطه‌ی Max

$$y_{Max}=(-2)^5-\frac{20}{3}(-2)^3+\frac{1}{3}=\frac{65}{3}\Rightarrow$$

نقطه‌ی ماکزیمم نسبی در ناحیه‌ی دوم قرار دارد.

۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2+mx \Rightarrow f'(x)=x^2+2x+m$$

برای این که تابع درجه‌ی سوم f دارای اکسترمم نسبی باشد، لازم است که f' دو ریشه‌ی متمایز داشته باشد، پس باید دلتای f' مثبت باشد:

$$\Delta_{f'}=4-4m>0 \Rightarrow m<1 \qquad (1)$$

از طرفی چون ضریب x^3 مثبت است پس شکل نمودار به صورت  است و در نتیجه ریشه‌ی بزرگ‌تر f' یعنی $-1+\sqrt{1-m}$ طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع است. پس:

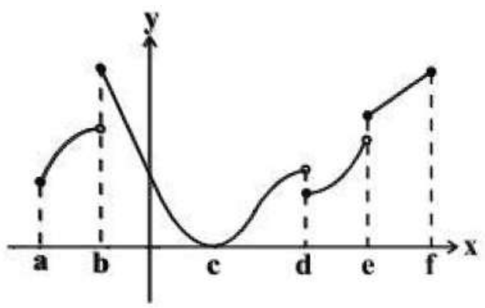
$$0<-1+\sqrt{1-m}<1 \Rightarrow 1<\sqrt{1-m}<2 \Rightarrow 1<1-m<4$$

$$\Rightarrow 0<-m<3 \Rightarrow -3<m<0 \qquad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) به ازای دو مقدار صحیح m، مینیمم نسبی تابع f در بازه‌ی $(0,1)$ قرار می‌گیرد.

۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

با توجه به شکل، نقطه‌ی b ماکسیمم نسبی و نقاط c و d می‌نیمم نسبی هستند. دقت کنید که نقطه‌ی e ماکسیمم یا می‌نیمم نسبی نیست.
پس تابع در مجموع یک ماکسیمم و دو می‌نیمم نسبی دارد.



۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون $(۱,-۲)$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع است، پس اولاً در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند و ثانیاً مشتق تابع به ازای $x = ۱$، صفر می‌شود. داریم:

$$(۱,-۲)\in f \Rightarrow -۲ = a + b \quad (۱)$$

$$f'(x) = ۳ax^۲ + b \xrightarrow{x = ۱} ۳a + b = ۰ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱) \text{ و } (۲)} \begin{cases} a = ۱ \\ b = -۳ \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^۳ - ۳x$$

بنابراین داریم:

$$f(۲) = ۲^۳ - ۳(۲) = ۲$$

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

x		$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$	
y'	−	۰	+	‖	+	۰	−
	↘		↗	‖	↗		↘
		می‌نیمم					

$$y = \frac{x^۲ - ۱}{x^۳} = \frac{۱}{x} - \frac{۱}{x^۳} \Rightarrow y' = -\frac{۱}{x^۲} + \frac{۳}{x^۴} = \frac{-x^۲ + ۳}{x^۴} = ۰$$

پس طول می‌نیمم تابع، $x = -\sqrt{۳}$ است. بنابراین:

$$y = \frac{\left(-\sqrt{۳}\right)^۲ - ۱}{\left(-\sqrt{۳}\right)^۳} = \frac{۲}{-۳\sqrt{۳}} = \frac{-۲\sqrt{۳}}{۹}$$

۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته (آزمون مشتق اول): فرض کنیم تابع f در $[a , b]$ پیوسته و در (a , b) مشتق‌پذیر باشد، عدد $x_۰ \in (a , b)$ به‌گونه‌ای است که $f'(x_۰) = ۰$ و f' در $x_۰$ از مثبت به منفی (از منفی به مثبت) تغییر علامت می‌دهد. در این صورت f در $x_۰$ دارای ماکزیمم (مینیمم) نسبی است.

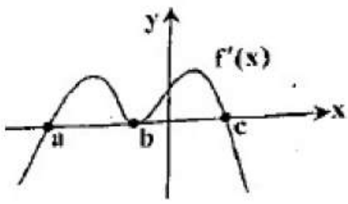
$$f'(x) = ۶x^۲ - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱ , x = -۱$$

x		−۱		۱	
f'	+	۰	−	۰	+
	↗		↘		↗
		max		min	

پس طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع f ، برابر $x = -۱$ است. اکنون با توجه به فرض می‌توان فهمید مختصات نقطه‌ی ماکزیمم نسبی $(-۱ , ۱۷)$ است، پس داریم:

$$f(-۱) = ۱۷ \Rightarrow -۲ + ۶ + ۵m = ۱۷ \Rightarrow m = \frac{۱۳}{۵}$$

۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به مشتق تابع f ، جدول زیر را می‌توان رسم کرد:



x		a		b		c	
f'(x)	−	۰	+	۰	+	۰	−
	↘		↗		↗		↘
		min				max	

پس تابع f در نقطه‌ی $x = a$ دارای مینیمم نسبی و در نقطه‌ی $x = c$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین تابع f دارای ۲ اکسترمم نسبی است.

۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته (آزمون مشتق اول): اگر $x = c$ یک نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ باشد و $f'(x)$ در این نقطه از مثبت به منفی (منفی به مثبت) تغییر علامت بدهد، آنگاه این نقطه، نقطهٔ ماکسیمم نسبی (مینیمم نسبی) تابع $f(x)$ است.

$$D_f = R \ , \ \ f(x) = \begin{cases} (x - ۱)\sqrt[۳]{x^۲} = x^{\frac{۵}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}} & x \geq ۱ \\ -(x - ۱)\sqrt[۳]{x^۲} = x^{\frac{۲}{۳}} - x^{\frac{۵}{۳}} & x \leq ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} & x > ۱ \\ \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} - \frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} & x < ۱ \end{cases}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}(۵x - ۲) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲}{۵}$$

x		۰		$\frac{۲}{۵}$		۱	
f'(x)	−	‖	+	o	−	‖	+
f(x)	↘		↗		↘		↗
				Max نسبی			

بنابراین طول ماکسیمم نسبی، $x = \frac{۲}{۵}$ است.

۳۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$y' = ۳x^۲ - ۶x - ۹ = ۰ \rightarrow x = -۱ \ , \ x = ۳ \ \text{غ ق ق}$$
$$f(-۲) = -۸ - ۱۲ + ۱۸ + ۵ = ۳ \ ; \ f(-۱) = -۱ - ۳ + ۹ + ۵ = ۱۰ \ ; \ f(۲) = ۸ - ۱۲ - ۱۸ + ۵ = -۱۷$$

۳۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{۱}{۴}x^۴ - x^۳ - ۲x^۲ \rightarrow y' = x^۳ - ۳x^۲ - ۴x = ۰$$

$$x\left(x^۲ - ۳x - ۴\right) = ۰ \ \begin{cases} x = ۰ \rightarrow f(۰) = ۰ \\ x = -۱ \rightarrow f(-۱) = -\frac{۳}{۴} \\ x = ۴ \rightarrow f(۴) = -۳۲ \rightarrow \min \end{cases}$$

باید توجه داشت که تابع در دو سر دامنه $(\pm\infty)$ به سمت $+\infty$ می‌رود.

۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: تابع f با دامنه‌ی $[a,b]$ مفروض است. نقاطی از بازه‌ی (a,b) که مشتق f در آن نقاط صفر است یا نقاطی از این بازه که مشتق f در آن نقاط وجود ندارد را نقاط بحرانی تابع f می‌نامیم.

نکته: برای محاسبه‌ی ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را در این بازه به‌دست می‌آوریم، سپس مقدار تابع را در این نقاط و نقاط a و b محاسبه می‌کنیم. از بین این مقادیر، بزرگ‌ترین مقدار، ماکزیمم و کوچک‌ترین مقدار، مینیمم است. ابتدا نقاط بحرانی تابع f را تعیین می‌کنیم. چون $f'(x)$ به‌ازای همه‌ی اعداد حقیقی وجود دارد، پس کافی است معادله‌ی $f'(x) = ۰$ را حل کنیم:

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۴x^۳ - ۱۶x = ۴x\left(x^۲ - ۴\right) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \\ x = -۲ \text{ غ ق ق (عضو دامنه نیست)} \end{cases}$$

اکنون مقدار تابع را به‌ازای نقاط بحرانی و نقاط ابتدا و انتهای بازه محاسبه می‌کنیم:

$$f(۰) = -,\ \ f(۲) = -۱۷\ ,\ f(-۱) = -۸\ ,\ f(۳) = ۸$$

با توجه به مقادیر بالا، ماکزیمم مطلق تابع برابر ۸ است.

۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$[-۴\ ,\ ۳]$

$$x = -۴ \Rightarrow y = -\frac{۶۴}{۳} - ۱۶ + ۶۰$$

$$x = ۳ \Rightarrow y = \cancel{۹} \cancel{-۹} - ۴۵ = -۴۵ \ \ \text{min}$$

$$f'(x) = x^۲ - ۲x - ۱۵ = (x - ۵)\ (x + ۳)$$

$$x = -۵ \quad x = -۳$$

$$y = \underbrace{\cancel{-۹ - ۹}}_{-۱۸} + ۴۵ = ۲۷ \quad \text{max}$$

۴۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{x - ۲} - \sqrt{۱۲ - ۲x} : \begin{cases} x - ۲ \geq \Rightarrow x \geq ۲ \\ ۱۲ - ۲x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [۲\ ,\ ۶]$$

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x - ۲}} + \frac{۲}{۲\sqrt{۱۲ - ۲x}}$$

$f'(x)$ در بازه‌ی $(۲\ ,\ ۶)$ تعریف شده و مخالف صفر است، پس f فاقد نقطه‌ی بحرانی است. بنابراین برای تعیین ماکزیمم مطلق تابع f ، کافی است مقادیر تابع را به ازای $x = ۲$ و $x = ۶$ محاسبه می‌کنیم:

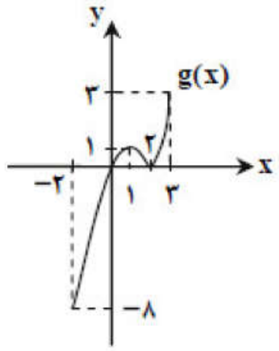
$$f(۲) = -۲\sqrt{۲} \ \ ,\ \ f(۶) = ۲$$

در نتیجه ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۲ است.

۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار $g(x) = x|x - ۲|$ را رسم می‌کنیم.

$$g(x) = \begin{cases} x(x - ۲) & x \geq ۲ \\ -x(x - ۲) & x < ۲ \end{cases} = \begin{cases} (x - ۱)^۲ - ۱ & x \geq ۲ \\ -(x - ۱)^۲ + ۱ & x < ۲ \end{cases}$$

چون $f(x) = g(x) + k$، پس نقاط بحرانی f و g یکسان هستند.
با توجه به نقاط بحرانی g روی نمودار داریم:



$$\begin{cases} f(-۲) = g(-۲) + k = -۸ + k \\ f(۱) = g(۱) + k = ۱ k \\ f(۲) = g(۲) + k = k \\ f(۳) = g(۳) + k = ۳ + k \end{cases}$$

بنابراین مقدار مینیمم مطلق f برابر $-۸ + k$ و مقدار ماکسیمم مطلق f برابر $۳ + k$ است.
طبق فرض داریم:

$$-۸ + k + ۳ + k = ۰ \Rightarrow ۲k = ۵ \Rightarrow k = \frac{۵}{۲}$$

۴۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: برای محاسبه‌ی ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازه‌ی $[a , b]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع f در این بازه را به دست می‌آوریم، سپس مقدار تابع را به ازای این نقاط و نقاط a و b (نقاط ابتدا و انتهای بازه) محاسبه می‌کنیم. از بین این مقادیر، بزرگ‌ترین مقدار، ماکزیمم مطلق و کوچک‌ترین مقدار، مینیمم مطلق است.

ابتدا توجه کنید که در تابع $f(x) = x\sqrt{۱ - x^۲}$ داریم $D_f = [-۱ , ۱]$. اکنون نقاط بحرانی این تابع را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x) = \sqrt{۱ - x^۲} + \frac{-x^۲}{\sqrt{۱ - x^۲}} = \frac{۱ - ۲x^۲}{\sqrt{۱ - x^۲}} = ۰ \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$f(۱) = f(-۱) = ۰ \ , \ f\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \frac{۱}{۲} \ , \ f\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = -\frac{۱}{۲}$$

پس ماکزیمم مطلق تابع f در $[-۱ , ۱]$ برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: تابع f با دامنه‌ی $[a\,,\,b]$ مفروض است. نقاطی از $(a\,,\,b)$ را که مشتق f در آن نقاط صفر است یا نقاطی از این بازه که مشتق f در آن نقاط وجود ندارد، نقاط بحرانی f می‌نامیم.
نکته: برای به دست آوردن اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a\,,\,b]$، ابتدا نقاط بحرانی f را در این بازه به دست می‌آوریم. سپس مقدار f را در این نقاط و نقاط a و b محاسبه می‌کنیم. از بین این مقادیر، بزرگ‌ترین مقدار، ماکزیمم مطلق و کوچک‌ترین مقدار، می‌نیمم مطلق است. چون f یک چندجمله‌ای است؛ پس همه‌جا مشتق‌پذیر است، بنابراین برای به دست آوردن نقاط بحرانی f کافی است معادله‌ی $f'(x)=۰$ را حل کنیم.

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۳x^{۲}-۶x=۰\Rightarrow ۳x(x-۲)=۰\Rightarrow x=۰\,,\,۲\xrightarrow[[۱\,,\,۴],\,۰\notin D_f]{D_f=[۱]} x=۲$$

حال مقدار تابع را به‌ازای $x=۲\,,\,۱\,,\,۴$ به دست می‌آوریم:

$$f(۲)=-۵\,,\;f(۱)=-۳\,,\;f(۴)=۱۵$$

بنابراین می‌نیمم مطلق تابع f در بازه‌ی $[۱\,,\,۴]$ برابر است با: ۵-

۴۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از تابع مشتق می‌گیریم و نقاط بحرانی را در بازه‌ی داده شده محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{(۲x-۳)\left(x^{۲}+۳\right)-(۲x)\left(x^{۲}-۳x\right)}{\left(x^{۲}+۳\right)^{۲}}=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^{۳}+۶x-۳x^{۲}-۹-۲x^{۳}+۶x^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow ۳x^{۲}+۶x-۹=۰\Rightarrow x^{۲}+۲x-۳=۰\Rightarrow (x+۳)(x-۱)=۰\qquad\Rightarrow x=۱\,,\,x=-۳$$

اما $x=-۳$ در بازه‌ی داده شده قرار ندارد. بنابراین تنها نقطه‌ی بحرانی در بازه‌ی داده شده، $x=۱$ است
حال عرض تابع را در نقاط ابتدا، انتهای بازه و نقطه‌ی بحرانی می‌یابیم:

$$\begin{cases} x=-۱\Rightarrow f(-۱)=۱ \\ x=۱\Rightarrow f(۱)=-\frac{۱}{۲}\ (\text{مطلق min}) \\ x=۲\Rightarrow f(۲)=-\frac{۲}{۷} \end{cases}$$

۴۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دامنه‌ی تابع برابر $[۰,۸]$ است. مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم تا نقاط بحرانی را بیابیم.

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-\frac{۱}{۲\sqrt{۸-x}}=۰\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{۸-x}\Rightarrow x=۸-x\Rightarrow x=۴$$

مقادیر $f(۰)$ و $f(۸)$ و $f(۴)$ را مقایسه می‌کنیم:

$$f(۰)=f(۸)=\sqrt{۸}\,,\;f(۴)=۴$$

پس داریم:

$$\frac{f_{max}}{f_{min}}=\frac{۴}{\sqrt{۸}}=\sqrt{۲}$$

۴۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^{۴} - ۸x^{۲} \Rightarrow f'(x) = ۴x^{۳} - ۱۶x = ۴x\left(x^{۲} - ۴\right)$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow f(۰) = ۰ \\ x = -۲ \notin [-۱ \text{ و } ۳] \\ x = ۲ \Rightarrow f(۲) = -۱۶ \end{cases}$$

$$\text{نقاط ابتدا و انتهای بازه}: \begin{cases} x = -۱ \Rightarrow f(-۱) = -۷ \\ x = ۳ \Rightarrow f(۳) = ۹ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x \in [-۱ \text{ و } ۳]} \max(f(x)) = ۹ \ , \quad \min(f(x)) = -۱۶ \quad \Rightarrow \max(f(x)) - \min(f(x)) = ۲۵$$

۴۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} + x & x > ۰ \\ -x^{۲} - x & x \leqslant ۰ \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x + ۱ & x > ۰ \Rightarrow ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲} \ \text{غ.ق.ق} \\ \text{موجود نیست} & x = ۰ \\ -۲x - ۱ & x < ۰ \Rightarrow -۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲} \ \text{ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} & f(۰) = ۰ \\ & f\left(-\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۴} \\ & f(-۲) = -۲ \ \text{می نیمم مطلق} \\ & f(۱) = ۲ \ \text{ماکزیمم مطلق} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ماکزیمم مطلق} + \text{می نیمم مطلق} = -۲ + ۲ = ۰$$

۴۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x - ۴ & ; \ -۱ < x < ۴ \\ \dfrac{۱}{۲\sqrt{x}} & ; \ ۴ < x < ۱۰ \end{cases}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow f(۲) = -۴$$
$$f(-۱) = ۱ + ۴ = ۵$$
$$f(۴) = ۲$$
$$f(۱۰) = \sqrt{۱۰}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Max}(f) = ۵ \\ \text{Min}(f) = -۴ \end{cases} \Rightarrow ۵ - ۴ = ۱$$

۵۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: برای محاسبهٔ مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[a,b]$، ابتدا نقاط بحرانی f را در این بازه به‌دست می‌آوریم. سپس مقدار تابع را به ازای نقاط بحرانی و نقاط a و b، محاسبه می‌کنیم. از بین این مقادیر، بیشترین مقدار، ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار، مینیمم مطلق است.

ابتدا توجه کنید که دامنهٔ تابع R است و $f(\pm\infty) = +\infty$، پس تابع ماکزیمم مطلق ندارد. برای تعیین مینیمم مطلق تابع f، باید مقدار تابع را به‌ازای نقاط بحرانی محاسبه کنیم:

$$f'(x) = x^۳ - ۵x^۲ - ۶x = x\left(x^۲ - ۵x - ۶\right) = ۰ \Rightarrow x(x-۶)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۱ \\ x = ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(۰) = ۱ \\ f(-۱) = \frac{۱}{۴} + \frac{۵}{۳} - ۳ + ۱ = \frac{۲۳}{۱۲} - ۲ - \frac{۱}{۱۲} \\ f(۶) = ۳۲۴ - ۳۶۰ - ۱۰۸ + ۱ = ۳۲۵ - ۴۶۸ = -۱۴۳ \end{cases}$$

پس کمترین مقدار تابع f برابر ۱۴۳- است.

۵۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: برای محاسبهٔ ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$، ابتدا نقاط بحرانی f در این بازه را به‌دست می‌آوریم، سپس مقدار تابع را به ازای این نقاط a و b به‌دست می‌آوریم. از بین مقادیر به‌دست آمده، بزرگ‌ترین مقدار، ماکسیمم مطلق و کوچک‌ترین مقدار، مینیمم مطلق است.

$$f(x) = ۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱ \Rightarrow f'(x) = ۱۲x^۲ - ۱۲x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۰ \end{cases}$$

$$f(-۱) = -۴ - ۶ + ۱ = -۹ \quad , \quad f(۰) = ۱ \quad , \quad f(۱) = ۴ - ۶ + ۱ = -۱ \quad , \quad f(۲) = ۳۲ - ۲۴ + ۱ = ۹$$

بنابراین در بازهٔ $[-۱,۲]$ داریم:

$$\begin{cases} \text{Max } f = f(۲) = ۹ \\ \text{Min } f = f(-۱) = -۹ \end{cases} \Rightarrow R_f = [-۹,۹] \Rightarrow a = -۹ \quad , \quad b = ۹ \Rightarrow b - a = ۱۸$$

۵۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاط بحرانی تابع را می‌یابیم:

$$f'(x) = -۳x۲ + ۶x = ۰ \Rightarrow -۳x(x-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases} \xrightarrow{x \in |۱ و ۴|} x = ۲$$

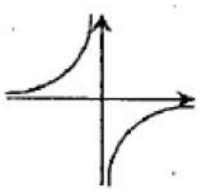
بنابراین برای محاسبه‌ی ماکزیمم مطلق، مقادیر تابع را در نقاط $x = ۱$، $x = ۲$ و $x = ۴$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(۱) = ۰ \\ f(۲) = ۲ \ (\text{ماکزیمم مطلق}) \\ f(۴) = -۱۸ \ (\text{مینیمم مطلق}) \end{cases}$$

۵۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ با شرط $a>۰$ $(a<۰)$ دارای $\min\,(\max)$ است و نقطه‌ی $\min\,(\max)$ آن همان رأس سهمی یعنی نقطه‌ی $\left(-\frac{b}{۲a}, f\left(\frac{-b}{۲a}\right)\right)$ است.

هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی ۱: تابع $f(x)=-\frac{۱}{x}$ مینیمم نسبی و مطلق ندارد، زیرا نمودار این تابع به صورت مقابل است:



گزینه‌ی ۲: تابع $f(x)=-x^{۲}+۳x$، سهمی رو به پایین است، پس با توجه به نکته‌ی بالا ماکزیمم نسبی و مطلق دارد.

گزینه‌ی ۳: تابع $f(x)=۳x^{۲}+۱۹x-۱$، سهمی رو به بالا است، پس با توجه به نکته‌ی بالا مینیمم نسبی و مطلق دارد.

گزینه‌ی ۴: تابع $f(x)=x^{۳}+x$، تابعی اکیداً صعودی با دامنه‌ی R است (زیرا $f'(x)=۳x^{۲}+۱>۰$) ، پس مینیمم نسبی و مطلق ندارد.

۵۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: تابع f با دامنه‌ی $[a\,,\,b]$ مفروض است. نقاطی از بازه ی $(a\,,\,b)$ که مشتق f در آن نقاط صفر است یا نقاطی از این بازه که مشتق f در آن نقاط وجود ندارد را نقاط بحرانی تابع f می‌نامیم.

نکته: برای محاسبه‌ی ماکزیمم یا مینیمم مطلق تابع f در بازه‌ی $[a\,,\,b]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را در این بازه به دست می‌آوریم. سپس مقدار تابع را در این نقاط محاسبه می‌کنیم. از بین مقادیر به دست آمده، بزرگ‌ترین مقدار، max مطلق و کوچک‌ترین مقدار، min مطلق است.

ابتدا توجه کنید که $D_f=[-۱\,,\,۱]$. اکنون نقاط بحرانی این تابع را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x)=\sqrt{۱-x^{۲}}+x\left(\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^{۲}}}\right)=\frac{۱-x^{۲}-x^{۲}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}=\frac{۱-۲x^{۲}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

$$\begin{cases} f'(x)=۰\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ f'(x)=\text{ت ن}\Rightarrow x=\pm ۱ \end{cases}$$

$$f(۱)=۰\,,\ f(-۱)=۰\,,\ f\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=\frac{۱}{۲},\ f\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق f برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۵۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: برای به دست آوردن اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته‌ی $f(x)$ در بازه‌ی $[a\,,\,b]$، ابتدا نقاط بحرانی f را در این بازه به دست می‌آوریم، سپس مقدار f را در این نقاط a و b ، محاسبه می‌کنیم. در بین این مقادیر، بزرگ‌ترین مقدار ماکزیمم مطلق و کوچک‌ترین مقدار، مینیمم مطلق است.
ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم. چون $f(x)$ روی R مشتق‌پذیر می‌باشد، کافی است معادله‌ی $f'(x)=۰$ را حل کنیم:

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۴x^۲-۶x+۲=۰ \Rightarrow ۲x^۲-۳x+۱=۰ \Rightarrow (۲x-۱)(x-۱)=۰$$
$$\Rightarrow x=۱\ ,\ x=\frac{۱}{۲}$$

اکنون مقادیر تابع را به ازای $x=۰$، $x=\frac{۱}{۲}$، $x=۱$ و $x=۳$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(۰)=-۷\quad,\quad f\left(\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{۷۹}{۱۲}\quad,\quad f(۱)=-\frac{۲۰}{۳}\quad,\quad f(۳)=۸$$

پس ماکزیمم مطلق تابع f برابر با ۸ است.

۵۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای تعیین تعداد ماکزیمم‌های نسبی تابع f ، از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم.

$$f'(x)=\left(x^۲-۳x+۲\right)\left(x^۲-۱۰x+۹\right)$$
$$=(x-۱)(x-۲)(x-۱)(x-۹)$$
$$=(x-۱)^۲(x-۲)(x-۹)$$

		۱		۲		۹	
f'	+	۰	+	۰	−	۰	+
	↗		↗	max	↘	min	↗

همان‌طور که در جدول بالا ملاحظه می‌کنید، تابع f در $x=۲$ دارای ماکزیمم نسبی و در $x=۹$ دارای مینیمم نسبی می‌باشد، بنابراین این تابع دارای ۱ ماکزیمم نسبی است.

۵۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: نقاط بحرانی تابع f ، نقاطی درونی از دامنه‌ی آن هستند که f' در آن‌ها تعریف نشده یا صفر است.
نکته (آزمون مشتق اول): اگر مشتق تابع مشتق‌پذیر f در نقطه‌ی $x=c$، از مثبت به منفی (منفی به مثبت) تغییر علامت دهد، آن‌گاه f در این نقطه ماکسیمم (مینیمم) نسبی دارد.
ابتدا نقاط بحرانی f را تعیین می‌کنیم. سپس از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم:

x		$-\frac{۲}{۵}$		۰	
f'	+	۰	−	‖	+
f	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

$$D_f=R\quad f(x)=x^{\frac{۵}{۳}}+x^{\frac{۲}{۳}}+۱ \Rightarrow f'(x)=\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}+\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$$
$$f'(x)=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۵x+۲}{\sqrt[۳]{x}}\right)$$

۵۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته (آزمون مشتق اول): اگر $x = c$ طول نقطه بحرانی تابع f باشد و f' در $x = c$ از منفی به مثبت (مثبت به منفی) تغییر علامت بدهد، آنگاه $x = c$ طول نقطه مینیمم نسبی (ماکسیمم نسبی) تابع f است.

ابتدا طول نقطه مینیمم را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

x		-1		1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
	↗	Max	↘	min	↗

با توجه به جدول بالا، طول نقطه مینیمم نسبی برابر $x = 1$ می‌باشد، پس نقطه $(1 , 29)$ نقطه مینیمم نسبی تابع f است، بنابراین:

$$f(1) = 29 \Rightarrow 2 - 6 + 5m - 1 = 29 \Rightarrow m = \frac{34}{5}$$

۵۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مشتق تابع $y = \frac{(x-1)^3}{x^2}$ منفی است.

$$y' = \frac{3(x-1)^2x^2 - 2x(x-1)^3}{x^4} < 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x^4}\left(3x^2 - 2x^2 + 2x\right) < 0 \Rightarrow x^2 + 2x < 0$$

پس $-2 < x < 0$ یا بازه $(-2 , 0)$ می‌باشد.

۶۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مشتق تابع مثبت است.

$$y' = \frac{3(x-1)^2x^4 - 4x^3(x-1)^3}{x^8} = \frac{x^2(x-1)^2}{x^4}\left[3x^2 - 4x^2 + 4x\right]$$

$$y' > 0 \Rightarrow 4x - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < 4$$

تابع درباره $(0 , 4)$ صعودی است.

۶۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: تابع $f(x)$ در بازه‌ای که $f(x) \le 0$ باشد، نزولی و در بازه‌ای که $f'(x) \ge 0$ باشد، صعودی است.

ابتدا مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

x		-1		3	
f'	+	0	-	0	+
	صعودی		نزولی		صعودی

با توجه به جدول بالا، تابع f در $[-1 , 3]$ نزولی است، بنابراین حداکثر مقدار $b - a$ برابر است با: $3 - (-1) = 4$

۶۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: تابع $f(x)$ در بازه‌ی (a , b) صعودی (نزولی) است، هرگاه به‌ازای هر x در این بازه داشته باشیم $f'(x) \ge ۰$ $(f'(x) \le x)$

$$\text{نکته}: \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^{۲}}$$

$$D_f = R , \ y' = \frac{۳\left(x^{۲} - x + ۲\right) - (۲x - ۱)(۳x + b)}{\left(x^{۲} - x + ۲\right)^{۲}} \Rightarrow y' = \frac{-۳x^{۲} - ۲bx + ۶ + b}{\left(x^{۲} - x + ۲\right)^{۲}} > ۰$$

چون بزرگ‌ترین بازه‌ی جواب نامعادله‌ی بالا، $(۰ , a)$ است، پس $x = a$ و $x = ۰$ ریشه‌های معادله‌ی $y' = ۰$ هستند.
بنابراین $۶ + b = ۰$ در نتیجه $b = -۶$. با جای‌گذاری $b = -۶$ در معادله‌ی $y' = ۰$، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$-۳x^{۲} + ۱۲x = ۰ \Rightarrow -۳x(x - ۴) = ۰ \Rightarrow x = ۰ , \ x = ۴ \Rightarrow a = ۴$$

بنابراین: $a + b = ۴ - ۶ = -۲$

۶۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
نکته: تابع مشتق‌پذیر f در بازه $[a , b]$ صعودی (نزولی) است، هرگاه به ازای هر x در این بازه داشته باشیم:
$(f'(x) \le ۰) \quad f'(x) \ge ۰$

$$f(x) = x + \sqrt{۴ - x^{۲}} \Rightarrow f'(x) = ۱ - \frac{x}{\sqrt{۴ - x^{۲}}} \quad , \quad D_f = [-۲ , ۲]$$

$$f'(x) \ge ۱ - \frac{x}{\sqrt{۴ - x^{۲}}} \ge ۰ \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{۴ - x^{۲}}} \le ۱ \Rightarrow x \le \sqrt{۴ - x^{۲}}$$

حال دو حالت در نظر می‌گیریم:

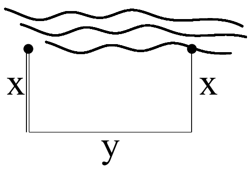
$-۲ \le x \le ۰ : x \ge \sqrt{۴ - x^{۲}}$ ✓ همواره برقرار است $\Rightarrow$ جواب: $[-۲ , ۰]$ (*)

$$۰ \le x \le ۲ \ \ x \le \sqrt{۴ - x^{۲}} \Rightarrow x^{۲} \le ۴ - x^{۲} \Rightarrow x^{۲} \le ۲ \Rightarrow |x| \le \sqrt{۲}$$

$\xrightarrow{x \ge ۰} ۰ \le x \le \sqrt{۲} \Rightarrow$ جواب: $\left[۰ , \sqrt{۲}\right]$ (**)

از (*) و (**) نتیجه می‌گیریم بزرگ‌ترین بازه‌ای که $f(x)$ در آن صعودی است، بازه $\left[-۲ , \sqrt{۲}\right]$ می‌باشد، پس بیشترین مقدار $b - a$ برابر $۲ + \sqrt{۲}$ است.

۶۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\left.\begin{array}{l} S = xy \\ ۲x + y = ۸۸ \Rightarrow y = ۸۸ - ۲x \end{array}\right\} S = x(۸۸ - ۲x) \Rightarrow S = -۲x^{۲} + ۸۸x$$

$$x_{\text{راس}} = \frac{-۸۸}{-۴} = ۲۲ \Rightarrow y = ۴۴ \Rightarrow S = ۲۲ \times ۴۴ = ۸ \times ۱۲۱ = ۹۶۸$$

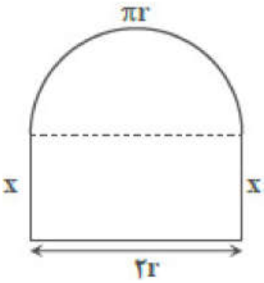
۶۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. با فرض $y=\sqrt{۵۰}\,\mathrm{Sin}\,\theta$ و $x=\sqrt{۵۰}\,\mathrm{Cos}\,\theta$ داریم:

$$P=۳x+۴y=۳\left(۵\sqrt{۲}\,\mathrm{Cos}\,\theta\right)+۴\left(۵\sqrt{۲}\,\mathrm{Sin}\,\theta\right)$$

$$\mathrm{Max}\,P=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}=\sqrt{۹\times۵۰+۱۶\times۵۰}=\sqrt{۱۲۵۰}=\sqrt{۳۲۵\times۲}=۲۵\sqrt{۲}$$

یادآوری: $-\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}\leqslant a\,\mathrm{Sin}\,x\pm b\,\mathrm{Cos}\,x\leqslant\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$

۶۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



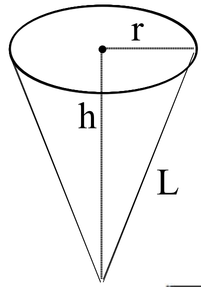
$$۲x+۲r+\pi r=۱۲\Rightarrow x=\frac{۱۲-۲r-\pi r}{۲}\qquad(*)$$

$$S=۲xr+\frac{۱}{۲}\pi r^{۲}\overset{(*)}{=\!=}۱۲r-۲r^{۲}-\pi r^{۲}+\frac{۱}{۲}r+r^{۲}\left(\frac{\pi}{۲}-\pi-۲\right)=۱۲r-\left(\frac{\pi}{+}۲\right)r^{۲}$$

$$S'=\cdot\Rightarrow۱۲-۲\left(\frac{\pi}{۲}+۲\right)r=\cdot\Rightarrow r=\frac{۱۲}{۲\left(\frac{\pi}{۲}+۲\right)}=\frac{۱۲}{\pi+۴}$$

۶۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$L^{۲}=h^{۲}+r^{۲}$$
$$L^{۲}=h^{۲}+\frac{۱}{h}$$
$$L=\sqrt{h^{۲}+\frac{۱}{h}}$$

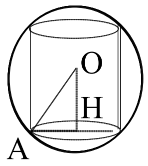


$$V=\frac{۱}{۳}h\pi r^{۲}$$
$$\cancel{\frac{\pi}{۳}}=\cancel{\frac{\pi}{۳}}hr^{۲}\Rightarrow r^{۲}=\frac{۱}{h}$$

مساحت جانبی مخروط $S=\pi rL=\pi\frac{۱}{\sqrt{h}}\sqrt{h^{۲}+\frac{۱}{h}}=\pi\sqrt{h+\frac{۱}{h^{۲}}}$

$$S'=\pi\left(\frac{۱-\frac{۲}{h^{۳}}}{۲\sqrt{h+\frac{۱}{h^{۲}}}}\right)=\cdot\Rightarrow۱-\frac{۲}{h^{۳}}=\cdot\Rightarrow h^{۳}=۲\Rightarrow h=\sqrt[۳]{۲}$$

۶۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شعاع قاعده r و ارتفاع استوانه را h می‌نامیم در مثلث OAH داریم:

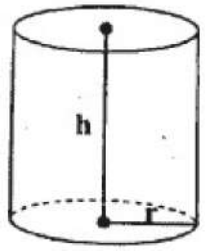


$$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 36 \Rightarrow r^2 = 36 - \frac{h^2}{4}$$

حجم استوانه $V = \pi r^2 h$ پس $V = \pi\left(36h - \frac{h^3}{4}\right)$ شرط ماکزیمم حجم، مشتق V نسبت به h صفر است،

$36 - \frac{3h^2}{4} = 0 \Rightarrow h^2 = 48$ پس $h = 4\sqrt{3}$.

۶۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با: $V = \pi r^2 h$



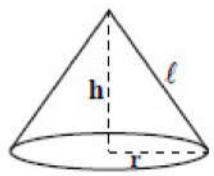
$$2r + h = 15 \Rightarrow V = \pi r^2 h = \pi r^2 (15 - 2r) \Rightarrow V = \pi\left(15r^2 - 2r^3\right)$$

$$V' = 0 \Rightarrow 30r - 6r^2 = 0 \Rightarrow 6r(5 - r) = 0 \Rightarrow r = 5$$

بنابراین بیش‌تر مقدار ممکن برای حجم استوانه برابر است با:

$$V_{max} = \pi \times 25 \times 5 = 125\pi$$

۷۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: مساحت جانبی مخروطی با مولد L برابر است با: $S = \pi r L$



$$S = \pi r L \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \pi \Rightarrow rL = 1 \Rightarrow L = \frac{1}{r}$$

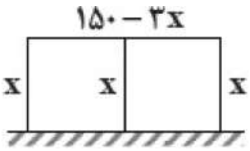
$$r^2 + h^2 = L^2 \Rightarrow r^2 + h^2 = \frac{1}{r^2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{1}{r^2} - r^2} = \frac{\sqrt{1 - r^4}}{r}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r\sqrt{1 - r^4}$$

$$V' = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{1 - r^4} - \frac{4r^3 \times r}{2\sqrt{1 - r^4}}\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - r^4} - \frac{2r^4}{\sqrt{1 - r^4}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 - r^4 - 2r^4}{\sqrt{1 - r^4}} = 0 \Rightarrow 1 - 3r^4 = 0 \Rightarrow r^4 = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

بنابراین به‌ازای $r = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$، حجم مخروط ماکسیمم می‌شود.



۷۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

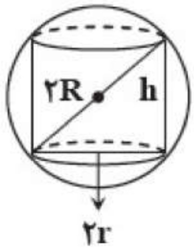
$$S = x(۱۵۰ - ۳x) = -۳x^۲ + ۱۵۰x$$

برای ماکسیمم شدن مساحت، باید داشته باشیم:

$$x = -\frac{b}{۲a} = \frac{۱۵۰}{-۶} = \frac{۱۵۰}{۶} = ۲۵$$

بنابراین ماکسیمم مساحت برابر است با: $S_{max} = ۲۵(۱۵۰ - ۷۵) = ۱۸۷۵$

۷۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



نکته: حجم استوانه‌ای با شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با: $V = \pi r^۲ h$

$$h^۲ + ۴r^۲ = ۴R^۲ \Rightarrow r^۲ = \frac{۴R^۲ - h^۲}{۴}$$

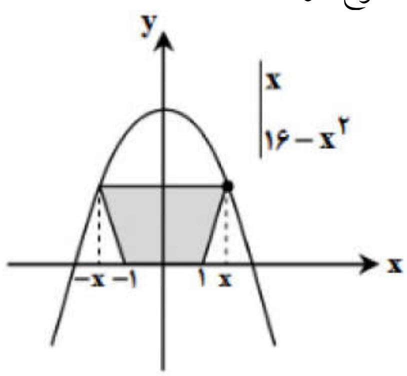
$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^۲ h = \pi h\left(\frac{۴R^۲ - h^۲}{۴}\right) = \frac{\pi}{۴}\left(۴R^۲h - h^۳\right)$$

$$v'_h = ۰ \Rightarrow ۴R^۲ - ۳h^۲ = ۰ \Rightarrow ۴R^۲ = ۳h^۲ \quad (*)$$

$$h^۲ + ۴r^۲ = ۴R^۲ \xrightarrow{(*)} h^۲ + ۴r^۲ = ۳h^۲ \Rightarrow ۴r^۲ = ۲h^۲ \Rightarrow \left(\frac{r}{h}\right)^۲ = \frac{۱}{۲} \xrightarrow[h > ۰]{r}$$

$$\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۷۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: مساحت ذوزنقه، نصف حاصلضرب ارتفاع در مجموع دو قاعده است.

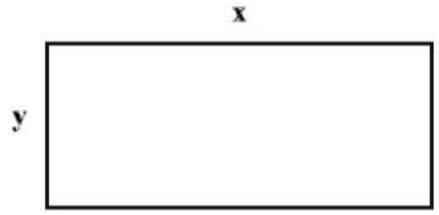


$$S = \frac{۲ + ۲x}{۲}\left(۱۶ - x^۲\right) = (۱ + x)\left(۱۶ - x^۲\right) \Rightarrow S(x) = -x^۳ - x^۲ + ۱۶x + ۱۶ \Rightarrow S'(x) = ۰$$

$$\Rightarrow -۳x^۲ - ۲x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۲x - ۱۶ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + ۴۸}}{۳} \xrightarrow{x > ۰} x = ۲$$

بنابراین اندازهٔ قاعدهٔ بزرگ برابر $۲x = ۴$ است.

۷۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر x طول مستطیل و y عرض مستطیل باشند:



محیط مستطیل : $P = ۲\times(x+y)$

$$\Rightarrow ۳۲ = ۲\times(x+y) \Rightarrow x+y = ۱۶ \Rightarrow y = ۱۶ - x \qquad (۱)$$

مساحت : $S = x\times y = x\times(۱۶-x) \Rightarrow S = -x^۲ + ۱۶x$

برای آن‌که S ماکسیمم شود، $x = \frac{-b}{۲a}$ باید باشد:

$$x = \frac{-۱۶}{-۲} = ۸ \xrightarrow{(۱)} y = ۸$$

۷۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. وقتی مجموع دو عدد برابر یک مقدار ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی ماکسیمم است که آن دو با هم برابر باشند:

$$۶۰ \div ۲ = ۳۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳۰ \\ ۲y = ۳۰ \Rightarrow y = \frac{۳۰}{۲} = ۱۵ \end{cases} \Rightarrow \max(xy) = ۳\times ۱۵ = ۴۵۰$$

۷۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{(۲-x)^۲}{x}$$
$$D_f = R - \{۰\}$$

برای تعیین طول نقطه‌ی عطف مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x^۲ - ۴x + ۴}{x} = x - ۴ + \frac{۴}{x} \Rightarrow f'(x) = ۱ - \frac{۴}{x^۲} \Rightarrow f''(x) = \frac{۸}{x^۳}$$

در نقطه‌ی $x = ۰$ (ریشه‌ی مخرج "f) تعقر منحنی عوض می‌شود ولی چون تابع در این نقطه پیوسته نیست $x = ۰$ نقطه‌ی عطف تابع محسوب نمی‌شود. ($x = ۰$ عضو دامنه ی تعریف تابع نمی‌باشد.)

۷۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = x|x^۲ - ۴x| = \begin{cases} x^۳ - ۴x^۲ & ; \ x<۰ ، x>۴ \\ -x^۳ + ۴x^۲ & ; \ ۰\leq x\leq ۴ \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} ۳x^۲ - ۸x & ; \ x<۰ ، x>۴ \\ -۳x^۲ + ۸x & ; \ ۰\leq x<۴ \end{cases}$$

$$\rightarrow y' = \begin{cases} ۶x - ۸ & ; \ x<۰ ، x>۴ \\ -۶x + ۸ & ; \ ۰<x<۴ \end{cases}$$

مشتق دوم به‌ازای $۶x - ۸ = ۰ \rightarrow x = \frac{۴}{۳}$ صفر است و حول آن تغییر علامت می‌دهد. هم‌چنین مشتق دوم در $x = ۰$ تعریف نشده ولی مماس در آن وجود دارد و مشتق دوم حول آن تغییر علامت می‌دهد.

۷۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+۱} & x\geq ۰ \\ \frac{x}{۱-x} & x<۰ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{۱}{(۱+x)^۲} & x\geq ۰ \\ \frac{۱}{(۱-x)^۲} & x<۰ \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} \frac{-۲}{(x+۱)^۳} & x\geq ۰ \\ \frac{۲}{(۱-x)^۳} & x<۰ \end{cases}$$

چون $f''_+(۰) = -۲ , f''_-(۰) = ۲$ پس "f در $x = ۰$ تغییر علامت می‌دهد در نتیجه $x = ۰$ طول نقطه‌ی عطف f خواهد بود، ضمناً مماس نیز در صفر وجود دارد. چون $f'(۰) = ۱$.

۷۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. چون تابع همواره صعودی است بنابراین به‌ازای هر $x \in R$ ، $f'(x) \geqslant ۰$ با توجه به ضابطه‌ی f:

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۲(m+۲)x + ۳ \geqslant ۰$$

برای این‌که تابع درجه دوم نامنفی باشد باید:

$$\begin{cases} \Delta \leqslant ۰ \Rightarrow ۴(m+۲)^۲ - ۴(۳)(۳) \leqslant ۰ \\ \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۴}} (m+۲)^۲ - ۹ \leqslant ۰ \Rightarrow (m+۲)^۲ \leqslant ۹ \\ \Rightarrow -۳ \leqslant m+۲ \leqslant ۳ \quad (*) \\ x^۲ \text{ ضریب} > ۰ \Rightarrow ۳ > ۰ \end{cases}$$

از طرفی طول نقطه‌ی عطف در توابع درجه‌ی سوم برابر است با:

$$x_I = -\frac{b}{۳a} = -\frac{-(m+۲)}{۳(۱)} = \frac{m+۲}{۳}$$

با توجه به حدود $(m+۲)$ یعنی رابطه‌ی $(*)$ مجموعه‌ی طول نقاط عطف برابر است با:

$$-۳ \leqslant m+۲ \leqslant ۳ \Rightarrow -۱ \leqslant \frac{m+۲}{۳} \leqslant ۱ \Rightarrow -۱ \leqslant x_I \leqslant ۱$$

۸۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$y' = ۲x^۲ - ۲(m-۱)x + ۸$$

باید ریشه‌های مشتق (ریشه‌های مشتق طول‌های ماکزیمم و می‌نیمم است.) منفی و متمایز باشند بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \Rightarrow ۴(m-۱)^۲ - ۶۴ > ۰ \Rightarrow (m-۱)^۲ > ۱۶ \Rightarrow m-۱ > ۴ \text{ یا } m-۱ < -۴ \Rightarrow m > ۵ \text{ یا } m < -۳ \quad (I) \\ S < ۰ \Rightarrow \frac{-b}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{۲(m-۱)}{۲} < ۰ \Rightarrow m < ۱ \quad (II) \\ P > ۰ \Rightarrow \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{۸}{۲} > ۰ \Rightarrow ۴ > ۰ \end{cases}$$

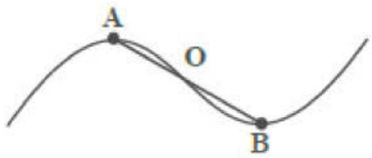
$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} m < -۳$$

$$y'' = ۴x - ۲(m-۱) = ۰ \Rightarrow x_c = \frac{m-۱}{۲} \quad (\text{طول نقطه‌ای عطف})$$

$$m < -۳ \xrightarrow{-۱} m-۱ < -۴ \xrightarrow{\div ۲} \frac{m-۱}{۲} < -۲ \Rightarrow x_c < -۲ \Rightarrow x_c \in (-\infty, -۲)$$

۸۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: در تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و نقطه‌ی عطف در یک راستا هستند و نقطه‌ی عطف وسط پاره‌خط واصل بین نقاط ماکزیم و مینی نسبی است. یعنی فاصله‌ی نقطه‌ی عطف از نقطه‌ی ماکزیمم (مینیمم) نسبی، نصف فاصله‌ی نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی است.

$\left(|OA| = |OB| = \frac{|AB|}{2}\right)$ نکته: فاصله‌ی نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:



$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (7 - 4)^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$$

بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی عطف این تابع از نقطه‌ی ماکزیمم آن برابر است با:

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

۸۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه‌حل اول:

نکته: اگر A و B نقاط اکسترمم نسبی و O نقطه‌ی عطف یک تابع درجه‌ی سوم باشند، آن‌گاه $O = \frac{A + B}{2}$ یعنی:

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2}\ ,\ y_O = \frac{y_A + y_B}{2}$$

با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} \xrightarrow{x_O = 1} x_A + x_B = 2$$

یعنی مجموع طول‌های نقاط اکسترمم نسبی این تابع برابر ۲ است.

راه‌حل دوم:

نکته: مختصات نقطه‌ی عطف یک تابع در ضابطه‌ی آن صدق می‌کند.

نکته: اگر $x = x_0$ طول نقطه‌ی عطف تابع $f(x)$ باشد و $f''(x)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $f''(x_0) = 0$.

ابتدا با استفاده از نکات بالا مقادیر a و b را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(1) = 1 \Rightarrow a - b = 1 \\ f''(1) = 0 \Rightarrow (6ax - 2b)_{x=1} = 0 \Rightarrow 6a - 2b = 0 \Rightarrow b = 3a \end{cases}$$

حال از حل دستگاه $\begin{cases} a - b = 1 \\ b = 3a \end{cases}$ داریم:

$$a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$$

بنابراین:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}x^2 + 3x = 0 \Rightarrow -\frac{3x}{2}(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

در نتیجه مجموع طول‌های نقاط اکسترمم نسبی این تابع برابر است با:

$$0 + 2 = 2$$

۸۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f''(۱) = ۰ \rightarrow ۶(۱) + ۲a = ۰ \rightarrow a = -۳$$
$$f(۱) = -۱۱ \rightarrow a + b = -۱۲ \rightarrow b = -۹$$
$$f(x) = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x \rightarrow f(-۱) = -۱ - ۳ + ۹ = ۵$$

۸۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = (۵ - x)\sqrt[۳]{x^۲} \Rightarrow y = ۵x^{\frac{۲}{۳}} - x^{\frac{۵}{۳}}$$

$$y' = \frac{۱۰}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} - \frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow y'' = -\frac{۱۰}{۹}x^{-\frac{۴}{۳}} - \frac{۱۰}{۹}x^{-\frac{۱}{۳}}$$

$$y'' = -\frac{۱۰}{۹}\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۴}} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}\right) = -\frac{۱۰}{۹}\left(\frac{۱ + x}{x\sqrt[۳]{x}}\right) = ۰ \Rightarrow x = -۱$$ طول نقطه عطف

* $x = ۰$ طول نقطه‌ی عطف نیست زیرا علامت y'' در دو طرف آن تغییر نمی‌کند.

۸۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طول نقطه عطف ریشه مشتق دوم است.

$$y' = \frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} - \frac{۲۰}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$$

$$y'' = \frac{۱۰}{۹}x^{-\frac{۱}{۳}} + \frac{۲۰}{۹}x^{-\frac{۴}{۳}} = \frac{۱۰}{۹}x^{-\frac{۴}{۳}}(x + ۲) = \frac{۱۰(x + ۲)}{۹\sqrt[۳]{x^۴}}$$

علامت مشتق دوم در ۲- تغییر می‌کند پس طول نقطه عطف ۲- می‌باشد.

۸۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در نقطه عطف $y'' = ۰$ است.

$$y' = \frac{x^۲ - ۱ - ۲x^۲}{(x^۲ - ۱)^۲} = -\frac{x^۲ + ۱}{(x^۲ - ۱)^۲} < ۰$$

$$y'' = \frac{۲x(x^۲ - ۱)^۲ - ۴x(x^۲ - ۱)(x^۲ + ۱)}{(x^۲ - ۱)^۴} = \frac{۲x(-x^۲ + ۱ + ۲x^۲ + ۲)}{(x^۲ - ۱)^۳}$$

مشتق دوم تابع فقط در $x = ۰$ برابر صفر است پس طول نقطه عطف صفر می‌باشد.

۸۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{x^۳}{x^۲ + ۱} = \frac{x^۳ + x - x}{x^۲ + ۱} = x - \frac{x}{x^۲ + ۱}$$

$$y' = ۱ - \frac{۱ - x^۲}{\left(x^۲ + ۱\right)^۲}$$

$$y'' = \frac{۲x\left(x^۲ + ۱ + ۲ - ۲x^۲\right)}{\left(x^۲ + ۱\right)^۳} = ۰$$

$$\begin{cases} x = ۰ & \to y = ۰ \\ ۳ - x^۲ = ۰ \Rightarrow x = \sqrt{۳} & \to y = \dfrac{۳\sqrt{۳}}{۳ + ۱} = \dfrac{۳\sqrt{۳}}{۴} \\ x = -\sqrt{۳} & \to y = \dfrac{-۳\sqrt{۳}}{۴} \end{cases}$$

مجموع قدرمطلق عرض نقاط عطف $= ۰ + \dfrac{۳\sqrt{۳}}{۴} + \dfrac{۳\sqrt{۳}}{۴} = \dfrac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۸۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در نقاط ماکسیمم یا می‌نیمم، مشتق تابع صفر است و در نقطه عطف، مشتق دوم آن صفر است.

$$f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d \Rightarrow f(۰) = d = ۳$$

$$f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx + c \Rightarrow f'(۰) = c = ۰$$

$$f''(x) = ۶ax + ۲b \Rightarrow f''(۱) = ۶a + ۲b = ۰$$

$$f(۱) = a + b + ۳ = -۱$$

از دو معادله $b = -۳a$ ، $a + b = -۴$، خواهیم داشت: $a = ۲$ ، $b = -۶$، لذا $f(x) = ۲x^۳ - ۶x^۲ + ۳$، در نتیجه: $f(۲) = -۵$.

۸۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون $A(-۱, ۲)$ نقطه‌ی عطف تابع $f(x)$ می‌باشد، پس $f''(-۱) = ۰$. داریم:

$$f'(x) = ۳ax^۲ - ۲bx \Rightarrow f''(x) = ۶ax - ۲b \Rightarrow f''(-۱) = ۶a(-۱) - ۲b = ۰ \Rightarrow b = -۳a$$

از طرفی نقطه‌ی $A(-۱, ۲)$ روی تابع $f(x)$ قرار دارد، بنابراین:

$$f(-۱) = ۲ \Rightarrow -a - b = ۲$$

اکنون از حل دستگاه $\begin{cases} b = -۳a \\ a + b = -۲ \end{cases}$ خواهیم داشت $a = ۱$ و $b = -۳$، بنابراین $ab = -۳$.

۹۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: معادله‌ی خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطه‌ی $(a\,,\,f(a))$ عبارتست از: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

نکته: نقطه‌ی $x = c$ نقطه‌ی عطف تابع f است، هرگاه:

۱) تابع f در نقطه‌ی $x = c$ پیوسته باشد.

۲) نمودار f در $x = c$ دارای خط مماس باشد (حتی مماس قائم).

۳) مشتق دوم تابع f در نقطه‌ی $x = c$ تغییر علامت دهد.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 6$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \text{نقطه ی عطف} : A\Big|_{1}^{-1}$$

$$f'(-1) = -2$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطه‌ی $A\Big|_{1}^{-1}$ عبارتست از:

$$y - 1 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x - 1$$

با توجه به گزینه‌ها، این خط از نقطه‌ی $(-1\,,\,0)$ می‌گذرد.

۹۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: اگر نقطه‌ی $(x_0\,,\,y_0)$ نقطه‌ی عطف تابع $f(x)$ باشد و $f''(x_0)$ موجود باشد، آن‌گاه:

$$f(x_0) = y_0 \text{ و } f''(x_0) = 0$$

نقطه‌ی $A(-1\,,\,1)$، نقطه‌ی عطف تابع f است، پس با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$\begin{cases} f''(-1) = 0 \Rightarrow 12 - 6a = 0 \Rightarrow a = 2 \\ f(-1) = 1 \Rightarrow 1 - a + b + 5 = 1 \Rightarrow a - b = 5 \xrightarrow{a = 2} b = -3 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b = 1$$

۹۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = ax^3 - x^2 - 3x + b \xrightarrow{A\big|_{-3}^{1}} -3 = a - 1 - 3 + b \Rightarrow a + b = 1 \xrightarrow{a = \frac{1}{3}} b = \frac{2}{3}$$

$$y' = 3ax^2 - 2x - 3$$

$$y'' = 6ax - 2 \xrightarrow{x = 1} 6a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{a = \frac{1}{3}} y' = x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y		↗	$\frac{7}{3}$ max	↘	min	↗	

$$\xrightarrow{\text{با توجه به جدول}} f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

۹۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: در تابع درجه سوم، ریشه‌ی مضاعف مشتق اول، همان طول نقطه‌ی عطف تابع می‌باشد.

$$y = ax^{۳} + bx^{۲} - ۳x - ۱ \Rightarrow y' = ۳ax^{۲} + ۲bx - ۳ \Rightarrow y'' = ۶ax + ۲b$$

$$A(۱\,,\,-۲) \Rightarrow \begin{cases} ۱)\ -۲ = a(۱)^{۳} + b(۱)^{۲} - ۳(۱) - ۱ \Rightarrow a + b = ۲ \\ ۲)\ ۶a(۱) + ۲b = ۰ \Rightarrow ۳a + b = ۰ \Rightarrow b = -۳a \end{cases} \quad a = -۱\,,\ b = ۳$$

$$y' = ۳(-۱)x^{۲} - ۲(۳)x - ۳ \Rightarrow y' = ۰ \Rightarrow x^{۲} - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^{۲} = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$x = ۱$ ریشه مضاعف مشتق اول تابع می‌باشد و تابع همواره صعودی است لذا تابع فاقد ماکزیمم نسبی است.

۹۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ریشه‌های مشتق مرتبه دوم، می‌تواند طول نقاط عطف باشند.

$$f(x) = \frac{x^{۳} + ۳x}{x^{۲} + ۱} = x + \frac{۲x}{x^{۲} + ۱}$$

$$y' = ۱ + ۲\frac{۱ - x^{۲}}{\left(x^{۲} + ۱\right)^{۲}} \Rightarrow y'' = ۲\frac{-۲x\left(x^{۲} + ۱\right) - ۴x\left(۱ - x^{۲}\right)}{\left(x^{۲} + ۱\right)^{۳}}$$

$$y'' = ۰ \Rightarrow -۲x\left(x^{۲} + ۱ + ۲ - ۲x^{۲}\right) = ۰ \Rightarrow x\left(۳ - x^{۲}\right) = ۰$$

معادله حاصل دارای ۳ ریشه است.

۹۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در نقطه عطف $y'' = ۰$ است.

$$y' = \frac{x^{۲} + ۱ - ۲x^{۲}}{\left(x^{۲} + ۱\right)} = \frac{۱ - x^{۲}}{\left(x^{۲} + ۱\right)^{۲}}$$

$$y'' = \frac{-۲x\left(x^{۲} + ۱\right) - ۴x\left(۱ - x^{۲}\right)}{\left(x^{۲} + ۱\right)^{۳}} = \frac{-۲x\left(x^{۲} + ۱ + ۲ - ۲x^{۲}\right)}{\left(x^{۲} + ۱\right)^{۳}} = \frac{-۲x\left(۳ - x^{۲}\right)}{\left(x^{۲} + ۱\right)^{۳}}$$

تابع $y'' = ۰$ سه ریشه متمایز دارد، پس تعداد نقاط عطف ۳ می‌باشد.

۹۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر نقطه‌ی $(a\,,\,b)$ نقطه‌ی عطف تابع دو بار مشتق‌پذیر f باشد، داریم: $\begin{cases} f(a) = b \\ f''(a) = ۰ \end{cases}$

$$f(x) = ax^{۳} + bx^{۲} \Rightarrow f'(x) = ۳ax^{۲} + ۲bx \Rightarrow f''(x) = ۶ax + ۲b$$

حال با توجه به نکته‌ی بالا داریم:

$$\begin{cases} f(-۱) = ۴ \Rightarrow -a + b = ۴ \xrightarrow{(*)} -a + ۳a = ۴ \Rightarrow a = ۲ \\ f''(-۱) = ۰ \Rightarrow -۶a + ۲b = ۰ \Rightarrow b = ۳a \quad (*) \end{cases}$$

۹۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: برای تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ داریم:

$$\begin{cases}\Delta \le ۰ \\ a < ۰\end{cases} \Rightarrow y \le ۰ \quad , \quad \begin{cases}\Delta \le ۰ \\ a > ۰\end{cases} \Rightarrow y \ge ۰$$

نکته: طول نقطه‌ی عطف تابع درجه سوم $y = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ عبارت است از: $x = \frac{-b}{۳a}$

با توجه به این‌که تابع g همواره نزولی است، باید همواره داشته باشیم $g'(x) \le ۰$، بنابراین:

$$g'(x) = -x^۲ + (m+۱)x - ۱ \le ۰ \xrightarrow{\text{نکته}} \Delta \le ۰ \Rightarrow (m+۱)^۲ - ۴ \le ۰$$
$$\Rightarrow -۲ \le m + ۱ \le ۲ \quad (*)$$

اکنون توجه کنید که طول نقطه‌ی عطف تابع g به صورت $x = \frac{-b}{۳a} = \frac{-\frac{m+۱}{۲}}{-۱} = \frac{m+۱}{۲}$ می‌باشد که حدود آن طبق (*) عبارت است از:

$$-۱ \le \frac{m+۱}{۲} \le ۱$$

پس مجموعه‌ی طول نقاط عطف این تابع در بازه‌ی [۱ , ۱-] قرار دارد.

۹۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: نقطه‌ی $(c , f(c))$ را نقطه‌ی عطف نمودار تابع f می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

الف) تابع f در $x = c$ پیوسته باشد.

ب) نمودار f در نقطه‌ی $(c , f(c))$ خط مماس داشته باشد. (هر چند خط مماس قائم باشد.)

پ) تقعر f در نقطه‌ی $(c , f(c))$ تغییر کند.

نکته: اگر نقاطه A و B نقاط اکسترمم تابع $y = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ باشند، آن‌گاه نقطه‌ی عطف این تابع نقطه‌ی $\frac{A + B}{۲}$ است.

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، داریم: $S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}\ ,\ P = \alpha . \beta = \frac{c}{a}$

چون $f(x)$ یک چند جمله‌ای است، پس مشتق آن همواره وجود دارد. بنابراین نقاط بحرانی آن نقاطی است که در آن‌ها $f(x) = ۰$ می‌شود؛ در نتیجه $x = -۱$ و $x = ۳$ ریشه‌های مشتق هستند.

$$f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b \xrightarrow[P = (-۱)(۳) = -۳]{S = -۱ + ۳ = ۲}$$

$$\begin{cases} S = -\frac{۲a}{۳} = ۲ \Rightarrow a = -۳ \\ P = \frac{b}{۳} = -۳ \Rightarrow b = -۹ \end{cases}$$

بنابراین:

$$f(x) = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x$$

با توجه به نکته‌ی بالا طول نقطه‌ی عطف این تابع برابر با $x = \frac{-۱ + ۳}{۲} = ۱$ است. بنابراین عرض آن برابر است با:

$$f(۱) = ۱ - ۳ - ۹ = -۱۱$$

دقت کنید طول نقطه‌ی عطف را از رابطه‌ی $f''(x) = ۰$ هم می‌توان به دست آورد.

۹۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: نقطه‌ی $(c , f(c))$ را نقطه‌ی عطف تابع f نامیم، هرگاه:

الف) تابع f در $x = c$ پیوسته باشد.

ب) نمودار f در $x = c$ دارای خط مماس باشد. (هر چند خط مماس قائم)

ج) تقعر نمودار f در $x = c$ تغییر کند.

با توجه به این‌که تابع f روی R پیوسته و مشتق‌پذیر است، کافی است مشتق دوم آن‌را تعیین علامت کنیم:

$$f'(x) = ۶۴x^۳ + ۹۶x^۲ + ۴۸x - ۱۹۱ \Rightarrow f''(x) = ۱۹۲x^۲ + ۱۹۲x + ۴۸ = ۴۸\left(۴x^۲ + ۴x + ۱\right)$$
$$= ۴۸(۲x + ۱)^۲$$

x		$-\frac{۱}{۲}$	
f"	+ ∪	۰	+ ∪

با توجه به جدول بالا، تقعر تابع f همواره رو به بالاست، پس این تابع نقطه‌ی عطف ندارد.

۱۰۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: نقطه‌ی $(c\ ,\ f(c))$ را نقطه‌ی عطف نمودار تابع f می‌نامیم، هرگاه:

I) تابع f در $x = c$ پیوسته باشد.

II) نمودار f در نقطه‌ی $(c\ ,\ f(c))$ خط مماس داشته باشد. (هر چند خط مماس قائم باشد.)

III) تقعر f در نقطه‌ی $(c\ ,\ f(c))$ تغییر کند.

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}(x - 1)$$

$$= \frac{4}{9}.\frac{x - 1}{x.\sqrt[3]{x^2}}$$

$x = 1$ ریشه‌ی ساده‌ی $f'' = 0$ می‌باشد، پس طول نقطه‌ی عطف تابع است.

در $x = 0$ تابع f'' تغییر علامت دارد و f دارای خط مماس قائم است، پس $x = 0$ هم‌عطف تابع است.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y''		+	∣	−	0	+	

بنابراین نقاط عطف، نقاط $A\Big|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$ و $B\Big|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}$ هستند که فاصله‌ی آن‌ها برابر است با: $AB = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

۱۰۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: نمودار تابع درجه سوم $f(x)$، صعودی (نزولی) اکید است.

الف) اگر $f'(x) = 0$ فاقد ریشه باشد، نمودار $f(x)$ صعودی (نزولی) اکید است.

ب) اگر $f'(x) = 0$ یک ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، نمودار $f(x)$ صعودی (نزولی) اکید است. تفاوت این حالت با حالت قبل، این است که در این حالت خط مماس بر نمودار در نقطه‌ی عطف، افقی است.

ج) اگر $f'(x) = 0$ دو ریشه‌ی متمایز داشته باشد. نمودار $f(x)$ دارای یک ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی است.

با توجه به نکته‌ی بالا، برای آن‌که تابع درجه سوم f دارای اکسترمم باشد، باید معادله‌ی $f'(x) = 0$ دارای دو ریشه باشد. پس داریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - mx + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} m^2 - 16 > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -4 \end{cases} (*)$$

اکنون برای به دست آوردن نقطه‌ی عطف تابع داریم:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2x - m = 0 \Rightarrow x = \frac{m}{2}\ (**)$$

از (*) و (**) می‌توان فهمید:

$$|m| > 4 \Rightarrow \left|\frac{m}{2}\right| > 2$$

بنابراین طول نقاط عطف این تابع در محدوده‌ی $R - [-2\ ,\ 2]$ قرار خواهد داشت.

۱۰۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = -x^3 - x + 1 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -3x^2 - 1 \\ f''(x) = -6x \end{cases}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ طول نقطه‌ی عطف

شیب خط مماس بر تابع در نقطه‌ی عطف:

$f'(0) = -1$

x		0	
f''	+	0	−
f	∪		∩

۱۰۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+1)$$

$$y'' = \frac{10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 : \text{ریشه ی مخرج} \\ x = -1 : \text{ریشه ی صورت} \end{cases}$$

x		−1		0	
y''	−	0	+	ت	+
y	∩		∪		∪

$\Rightarrow$ طول نقطه‌ی عطف تابع $x = -1$

۱۰۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مرکز تقارن تابع درجه سوم همان نقطه‌ی عطف آن است. برای پیدا کردن نقطه‌ی عطف مشتق دوم را برابر صفر می‌گذاریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax \Rightarrow f''(x) = 6x - 6a = 0 \Rightarrow x = a$$

سوال گفته نقطه‌ی عطف روی محور x هاست، یعنی عرض آن برابر صفر است:

$$f(a) = 0 \Rightarrow a^3 - 3a^3 - 16 = 0 \Rightarrow -2a^3 - 16 = 0 \Rightarrow a^3 = -8 \Rightarrow a = -2$$

۱۰۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه $(\alpha , f(\alpha))$ عبارت است از: $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$

ابتدا نقطه عطف تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 12x - 12 \xrightarrow{f''(x) = 0} x = 1$$

پس نقطه عطف این تابع نقطه $(1, -5)$ است. شیب خط مماس در این نقطه برابر است با: $f'(1) = -6$

بنابراین معادله خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه عبارت است از:

$$y + 5 = -6(x - 1) \xrightarrow[x = 0]{\text{تقاطع با محور } y \text{ ها}} y = 1$$

۱۰۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. راه حل اول:

نکته: طول نقطهٔ عطف تابع درجه سوم $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ برابر $x = -\frac{b}{۳a}$ است.

با توجه به نکتهٔ بالا، طول نقطهٔ عطف تابع $f(x) = x^۳ - ax^۲ - bx + ۳$ برابر $x = \frac{a}{۳}$ است. طبق فرض طول نقطهٔ عطف این تابع برابر $x = -۱$ است. بنابراین: $\frac{a}{۳} = -۱ \Rightarrow a = -۳$

راه حل دوم:
نکته: اگر $x = c$ طول نقطهٔ عطف تابع دو بار مشتق‌پذیر $f(x)$ باشد، آنگاه: $f''(c) = ۰$.
با توجه به نکتهٔ بالا، باید داشته باشیم: $f''(-۱) = ۰$

$$f(x) = x^۳ - ax^۲ - bx + ۳ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۲ax - b \Rightarrow f''(x) = ۶x - ۲a$$
$$f''(-۱) = ۰ \Rightarrow -۶ - ۲a = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

۱۰۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: اگر (α , β) نقطهٔ عطف تابع دو بار مشتق‌پذیر f باشد، آنگاه داریم: $\begin{cases} f''(\alpha) = ۰ \\ f(\alpha) = \beta \end{cases}$

$$f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow f''(x) = ۶x + ۲a$$

چون $A(a , -۱۱)$ نقطهٔ عطف تابع $f(x)$ است، داریم:

$$\begin{cases} f''(۱) = ۰ \Rightarrow ۶ + ۲a = ۰ \Rightarrow a = -۳ \quad (*) \\ f(۱) = -۱۱ \Rightarrow ۱ + a + b = -۱۱ \xrightarrow{(*)} b = -۹ \end{cases}$$
$$f'(x) = ۳x^۲ - ۶x - ۹ \Rightarrow f'(۱) = ۳ - ۶ - ۹ = -۱۲$$

۱۰۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: نقطهٔ $(c , f(c))$ را نقطهٔ عطف نمودار تابع f می‌نامیم، هرگاه:
الف) تابع f در این نقطه پیوسته باشد.
ب) نمودار f در این نقطه دارای خط مماس باشد. (هر چند این خط قائم باشد.)
پ) جهت تقعر تابع f در این نقطه تغییر کند.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + a & x \leq ۱ \\ -x^۲ + bx & x > ۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x & x \leq ۱ \\ -۲x + b & x > ۱ \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} ۲ & x < ۱ \\ -۲ & x > ۱ \end{cases}$$

با توجه به اینکه تقعر ضابطهٔ اول همواره رو به بالا و تقعر ضابطهٔ دوم همواره رو به پایین است، نتیجه می‌گیریم که طول نقطهٔ عطف $x = ۱$ است.
پس $c = ۱$. چون f در این نقطه پیوسته است، داریم:

$$f'(۱^+) = f'(۱^-) \Rightarrow ۱ + a = -۱ + b \Rightarrow a - b = -۲ \quad (*)$$

همچنین چون مقدار مشتق چپ و راست برابر است، داریم: $f'(۱^+) = f'(۱^-) \Rightarrow ۲ = -۲ + b \Rightarrow b = ۴$
با جاگذاری در (*) داریم: $a = ۲$
بنابراین: $a + b + c = ۲ + ۴ + ۱ = ۷$

۱۰۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y' = \frac{۰(x^۲+۱) - ۲xa}{(x^۲+۱)^۲} = \frac{-۲ax}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$y'' = \frac{-۲a(x^۲+۱)^۲ - ۴x(x^۲+۱)(-۲ax)}{(x^۲+۱)^۴} = \frac{-۲a(x^۲+۱) - ۴x(-۲ax)}{(x^۲+۱)^۳}$$

$$= \frac{-۲a(x^۲+۱-۴x^۲)}{(x^۲+۱)^۳} = ۰ \Rightarrow ۱ - ۳x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۳}$$

حال در ضابطه‌ی تابع، مقدار $x^۲$ را برابر $\frac{۱}{۳}$ و عرض نقطه ی عطف را طبق صورت سؤال برابر $\frac{۳}{۲}$ قرار می‌دهیم تا مقدار a به دست آید:

$$y\left(x^۲ = \frac{۱}{۳}\right) = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{a}{\frac{۱}{۳}+۱} = \frac{۳a}{۴} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = ۲$$

۱۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: طول نقطه‌ی عطف تابع درجه سوم $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ برابر است با: $x = -\frac{b}{۳a}$

برای آن‌که نقطه‌ی عطف تابع $f(x) = ax^۳ + (۱-a)x^۲ + ۷x - ۸$ در ناحیه‌ی دوم یا سوم قرار گیرد، باید طول نقطه‌ی عطف منفی باشد. با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$f(x) = ax^۳ + (۱-a)x^۲ + ۷x - ۸ = x_{\text{عطف}}$$

$$\frac{-(۱-a)}{۳a} < ۰ \Rightarrow \frac{a-۱}{۳a} < ۰ \Rightarrow ۰ < a < ۱$$

a		۰		۱	
$\frac{a-۱}{۳a}$	+	ت	-	۰	+

پس حدود تغییرات a عبارت است از: $(۰ , ۱)$

۱۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: اگر (a,b) نقطهٔ عطف تابع دوبار مشتق‌پذیر $f(x)$ باشد، آنگاه: $\begin{cases} f(a)=b \\ f''(a)=0 \end{cases}$

$$f(x)=x^4+ax^3+bx \Rightarrow f'(x)=4x^3+3ax^2+b \Rightarrow f''(x)=12x^2+6ax$$

چون $A(2,0)$ نقطهٔ عطف تابع دوبار مشتق‌پذیر $f(x)$ است، پس:

$$\begin{cases} f''(2)=0 \Rightarrow 48+12a=0 \Rightarrow a=-4 \\ f(2)=0 \Rightarrow 16+8a+2b=0 \xrightarrow{a=-4} b=8 \end{cases}$$

$$f'(x)=4x^3-12x^2+8=0 \Rightarrow 4\left(x^3-3x^2+2\right)=0$$

$$\Rightarrow 4\left(x^3-x^2-2x^2+2\right)=4\left(x^2(x-1)-2(x+1)(x-1)\right)$$

$$=4(x-1)\left(x^2-2x-2\right)=0 \Rightarrow x=1 \quad 1,\ \pm\sqrt{3}$$

x		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	5 Max	$\searrow$		$\nearrow$

بنابراین مختصات نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع $f(x)$ به‌صورت $(1,5)$ است.

۱۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مماس در نقطه‌ی عطف منحنی، از منحنی عبور می‌کند.

طول نقطه عطف تابع $\Rightarrow x_2=-\frac{b}{3a}=\frac{2}{3}$

$$y'=3x^2-4x+3 \Rightarrow m=3\left(\frac{4}{3}\right)-4\left(\frac{2}{3}\right)+3=\frac{5}{3}$$

۱۱۳- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$y=-x^4+4x^3-3 \Rightarrow y'=-4x^3+12x^2\geq 0 \Rightarrow 4x^2(-x+3)\geq 0 \Rightarrow x\leq 3 \quad (1)$$

$$y''=-12x^2+24x>0 \Rightarrow 12x(-x+2)>0 \Rightarrow 0<x<2 \quad (2) \qquad (1)\cap(2) \Rightarrow 0<x<2$$

۱۱۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$y=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2 \to y'=4x^3+3ax^2+3x \to y''=12x^2+6ax+3=3\left(4x^2+2ax+1\right)$$

$$\Delta<0 \to 4a^2-16<0 \Rightarrow a^2<4 \Rightarrow -2<a<2$$

۱۱۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. دامنه‌ی تابع R و برد آن نیز R است و $\xrightarrow{x>0} y=x\sqrt{x^2+2}\cong x^2$ که بنابراین در $(0,+\infty)$ تقعری رو به بالا دارد.

راه دوم: (تذکر: جزییات مشتق‌گیری نوشته نشده است.) $f''(x)>0 \Rightarrow x\left(2x^2+3\right)>0 \Rightarrow x>0$

۱۱۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} y' = x^{۲} - ۲x - ۳ < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۳ \\ y'' = ۲x - ۲ > ۰ \Rightarrow x > ۱ \end{array}\right\} ۱ < x < ۳$$

۱۱۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = (x+۳)\sqrt{x} \xrightarrow{x \geqslant ۰} y = x^{\frac{۳}{۲}} + ۳x^{\frac{۱}{۲}} \rightarrow y' = \frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}} + \frac{۳}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$\rightarrow y'' = \frac{۳}{۴}x^{-\frac{۱}{۲}} - \frac{۳}{۴}x^{\frac{-۳}{۲}} = \frac{۳}{۴}\left(\frac{۱}{\sqrt{x}} - \frac{۱}{x\sqrt{x}}\right) \Rightarrow y'' = \frac{۳}{۴}\left(\frac{x-۱}{x\sqrt{x}}\right) < ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۱$$

۱۱۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$y' = \frac{+۴x}{(x^{۲}+۳)^{۲}} \rightarrow y'' = \frac{۴(x^{۲}+۳)^{۲} - ۲(۲x)(x^{۲}+۳)(۴x)}{(x^{۲}+۳)^{۴}} = \frac{-۱۲x^{۲}+۱۲}{(x^{۲}+۳)^{۳}}$$

$$y'' > ۰ \rightarrow -۱۲x^{۲}+۱۲ > ۰ \Rightarrow x^{۲} < ۱ \Rightarrow -۱ < x < ۱ \Rightarrow |x| < ۱$$

۱۱۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. برای آن‌که تابع صعودی باشد، باید $f'(x) > ۰$ و برای آن‌که تقعر آن رو به پایین باشد، باید $f''(x) < ۰$ باشد. $f(x) = \frac{۱}{۴}x^{۴} + \frac{۱}{۲}x^{۳} - ۳x^{۲} \Rightarrow f'(x) = x^{۳} + ۳۲x^{۲} - ۶x > ۰ \Rightarrow ۲x^{۳} + ۳x^{۲} - ۱۲ = ۰$

$$\Rightarrow x(۲x^{۲}+۳x-۱۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰,\ x = \frac{-۳ \pm \sqrt{۹+۹۶}}{۴} = \begin{cases} x' \cong \frac{۷}{۴} \\ x'' \cong -\frac{۱۳}{۴} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccccccc} x & -\infty & & -\frac{۱۳}{۴} & & ۰ & & \frac{۷}{۴} & & +\infty \\ \hline y' & & - & ۰ & + & ۰ & - & ۰ & + & \end{array}$$

تابع در بازه‌ی $\left(-\frac{۱۳}{۴}, ۰\right)$ و $\left(\frac{۷}{۴}, +\infty\right)$ صعودی است.

$$f''(x) = ۳x^{۲} + ۳x - ۶ < ۰ \Rightarrow x^{۲} + x - ۲ < ۰ \Rightarrow -۲ < x < ۱$$

در بازه‌ی $(-۲, ۱)$ تقعر تابع به طرف پایین است. اشتراک $f' > ۰$ و $f'' < ۰$ بازه‌ی $(-۲, ۰)$ می‌باشد.

۱۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: در بازه‌ای که نمودار تابع بالای (پایین) خط مماس بر آن قرار می‌گیرد، تقعر تابع رو به بالا (پایین) است. با استفاده از نکته‌ی بالا، کافی است بازه‌ای را بیابیم که در آن تقعر تابع رو به بالاست. $(f''(x) > ۰)$

$$g(x) = x^{۲} - \frac{x^{۳}}{۶} - \frac{x^{۴}}{۱۲} \Rightarrow g'(x) = ۲x - \frac{x^{۲}}{۲} - \frac{x^{۳}}{۳} \Rightarrow g''(x) = ۲ - x - x^{۲} = -(x+۲)(x-۱)$$

x		−۲		۱	
g''(x)	−	۰	+	۰	−

بنابراین نمودار تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(-۲,۱)$ بالای خط مماس بر آن قرار دارد. با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌ی ۲ درست است.

۱۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. علامت مشتق دوم تابع منفی است.

$$y = x - ۳ + \frac{۳}{x} - \frac{۱}{x^{۲}}$$

$$y' = ۱ - \frac{۳}{x^{۲}} + \frac{۲}{x^{۳}} \Rightarrow y'' = \frac{۶}{x^{۳}} - \frac{۶}{x^{۴}} = \frac{۶(x-۱)}{x^{۴}} \Rightarrow x - ۱ < ۰$$

پس $x < ۱$ یا به صورت بازه $(-\infty\ ,\ ۱)$ می‌باشد.

۱۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا مشتق دوم تابع را محاسبه و آنرا تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^{۴}}{۴} - \frac{۲}{۳}x^{۳} + x \Rightarrow f'(x) = x^{۳} - ۲x^{۲} + ۱ \Rightarrow f''(x) = ۳x^{۲} - ۴x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \frac{۴}{۳} \end{cases}$$

		۰		$\frac{۴}{۳}$	
f''	+	۰	−	۰	+
	∪		∩		∪

پس تقعر تابع f در $\left(۰\ ,\ \frac{۴}{۳}\right)$ رو به پایین است.

۱۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید مجموعه نقاطی از بازه‌ی $[3 , +\infty]$ را تعیین کنیم که $f''(x) < 0$

$$f(x) = x(x-3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = (x-3)^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{1}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}} - \frac{x}{4}(x-3)^{-\frac{3}{2}} = (x-3)^{-\frac{1}{2}} - \frac{x}{4}(x-3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= (x-3)^{-\frac{3}{2}}\left(x - 3 - \frac{x}{4}\right) = \frac{\frac{3x}{4} - 3}{(x-3)\sqrt{x-3}}$$

x	3	4	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
	$\cap$		$\cup$

با توجه به جدول تعیین علامت، تقعر این تابع در بازه‌ی $(3 , 4)$ رو به پایین است، پس حداکثر مقدار $b - a$ برابر ۱ است.

۱۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. صعودی یعنی $f' \geq 0$ و تقعر رو به پایین یعنی $f'' < 0$.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

$$(x-1)(x-2) \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \text{ یا } x \geq 2 \qquad (I)$$

$$f''(x) = 12x - 18 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2} (II) \xrightarrow{(I) \cap (II)} x \leq 1$$

۱۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^4}}\right) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$+$	ت ن	$-$
f	$\cup$		$\cap$

تقعر تابع f در $(-\infty , 0)$ رو به بالا و در $(0 , +\infty)$ رو به پایین است.

۱۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. صعودی یعنی $f' \geq 0$ و تقعر رو به پایین یعنی $f'' < 0$.

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x \geq 0 \Rightarrow 12x\left(x^2 - 2x + 1\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow 12x(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \qquad (*)$$

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 < 0 \Rightarrow 12\left(3x^2 - 4x + 1\right) < 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(3x-1) < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 1 \ (**)$$

$$\xrightarrow{(*) \cap (**)} \frac{1}{3} < x < 1$$

۱۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ نزولی (صعودی) است، هرگاه به‌ازای هر x در این بازه داشته باشیم: $(f'(x) \ge ۰)f'(x) \le ۰$

نکته: تقعر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ رو به بالا (پایین) است، هرگاه به ازای هر $\le x$ در این بازه داشته باشیم: $(f''(x) < ۰)f''(x) > ۰$

باید مقادیری از x را بیابیم که $f'(x) \le ۰$

$$f(x) = ۷ - x^۴ + ۴x^۲ \Rightarrow f'(x) = -۴x^۳ + ۸x \Rightarrow f''(x) = -۱۲x^۲ + ۸$$

$$f'(x) \le ۰ \Rightarrow -۴x\left(x^۲ - ۲\right) \le ۰$$

x		$-\sqrt{۲}$		۰		$\sqrt{۲}$	
$f'(x)$	+	۰	−	۰	+	۰	−

بنابراین تابع $f(x)$ در مجموعهٔ $[\sqrt{۲}, +\infty) \cup [-\sqrt{۲},۰]$ نزولی است. (*)

$$f''(x) > ۰ \Rightarrow -۴\left(۳x^۲ - ۲\right) > ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۲ < ۰ \Rightarrow x^۲ < \frac{۲}{۳} \Rightarrow -\sqrt{\frac{۲}{۳}} < x < \sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

بنابراین تقعر تابع f در بازهٔ $\left[-\sqrt{\frac{۲}{۳}}, \sqrt{\frac{۲}{۳}}\right]$ رو به بالا است. (**)

از (*) و (**) نتیجه می‌گیریم تابع f در مجموعهٔ $\left[-\sqrt{\frac{۲}{۳}}, \sqrt{\frac{۲}{۳}}\right] \cap \left(\left[-\sqrt{۲},۰\right] \cup \left[\sqrt{۲},+\infty\right)\right) = \left[-\sqrt{\frac{۲}{۳}},۰\right] = \left[-\frac{\sqrt{۶}}{۳},۰\right]$، نزولی با تقعر رو به بالا است.

۱۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا دامنه‌ی تابع را می‌یابیم:

$$y = \left(x^۲ + \frac{۵}{۳}\right)\sqrt[۴]{x} \Rightarrow D_y : x \geqslant ۰ \Rightarrow D_y = [۰,+\infty)$$

$$y = \left(x^۲ + \frac{۵}{۳}\right)x^{\frac{۱}{۴}} = x^{\frac{۱}{۴}} \Rightarrow y' = \frac{۹}{۴}x^{\frac{۵}{۴}} + \frac{۵}{۱۲}x^{-\frac{۳}{۴}}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{۴۵}{۱۶}x^{\frac{۱}{۴}} - \frac{۵}{۱۶}x^{-\frac{۷}{۴}} = \frac{x^{-\frac{۷}{۴}}}{۱۶}\left(۴۵x^۲ - ۵\right)$$

$$= \frac{۴۵x^۲ - ۵}{۱۶\left(\sqrt[۴]{x^۷}\right)} \Rightarrow \begin{cases} \text{صورت} = ۰ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۹} \Rightarrow x = \pm\frac{۱}{۳} \\ \text{مخرج} = ۰ \Rightarrow x = ۰ \end{cases}$$

x		۰		$\frac{۱}{۳}$	
y''			−	۰	+
y			∩		∪

با توجه به دامنه‌ی تابع، جدول تعیین علامت مشتق دوم به صورت زیر است:

بنابراین جهت تقعر تابع تنها در یک نقطه تغییر می‌کند.

۱۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: تقعر نمودار تابع $f(x)$ در بازه $[a\ ,\ b]$ رو به بالا (پایین) است، هرگاه به‌ازای هر x در این بازه داشته باشیم:
$(f''(x) < 0)\ f''(x) > 0$

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}} + 4x + 5 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + 4$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}\left(2x^{\frac{2}{3}} + 1\right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2\frac{\left(2\sqrt[3]{x^2} + 1\right)}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید همواره $f''(x) > 0$ پس تقعر نمودار تابع f همواره رو به بالا می‌باشد. بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۱۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید علامت مشتق اول و مشتق دوم تابع را در $x = \frac{\pi}{12}$ تعیین کنیم:

$$f'(x) = 3\cos 3x - 6\sin 3x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3\frac{\sqrt{2}}{2} - 6\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} < 0 \Rightarrow$$

نمودار f در $x = \frac{\pi}{12}$ نزولی است.

$$f''(x) = -9\sin 3x - 18\cos 3x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{12}\right) = -9\frac{\sqrt{2}}{2} - 18\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-27\sqrt{2}}{2} < 0 \Rightarrow$$

تقعر f در $x = \frac{\pi}{12}$ رو به پایین است.

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۱۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در نزولی باید مشتق اول منفی $(y' < 0)$ و برای تقعر رو به پایین باید مشتق دوم منفی $(y'' < 0)$ باشد.

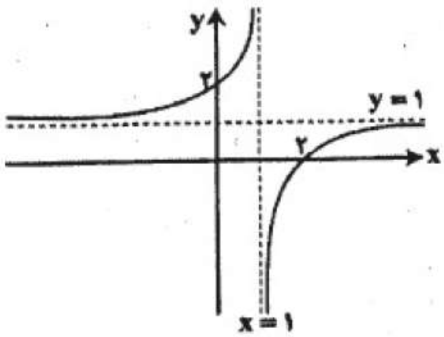
$$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x - 1) = \frac{4(x - 1)}{3\sqrt[3]{x^2}} < 0 \Rightarrow x < 1$$

$$y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}(x + 2)$$

$$\frac{4(x + 2)}{9\sqrt[5]{x^3}} < 0 \Rightarrow -2 < x < 0$$

۱۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا توجه کنید که نمودار دارای یک مجانب قائم است، بنابراین گزینه‌های ۱ و ۴ رد می‌شوند، زیرا دارای دو مجانب قائم هستند. ($x = \pm ۱$) حال توجه کنید که مجانب قائم نمودار، سمت چپ محل برخورد نمودار با محور xها قرار گرفته است، بنابراین گزینه‌ی ۲ هم رد می‌شود، زیرا تقاطع آن با محور xها نقطه‌ی $x = ۱$ و مجانب قائم آن خط $x = ۳$ است. بنابراین گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

۱۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به کمک مجانب‌های تابع هموگرافیک و چند نقطه روی تابع، نمودار آن‌را رسم می‌کنیم.
توجه کنید که خط های $x = ۱$ و $y = ۱$ مجانب‌های تابع، $f(۰) = ۲$ و $f(۲) = ۰$ است، پس نمودار تابع به صورت مقابل است. بنابراین نمودار تابع از ناحیه‌ی سوم عبور نمی‌کند.



۱۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا چون $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ می‌شود پس می‌توان نتیجه گرفت که ضریب $x^۳$ مثبت می‌باشد. پس داریم:

$$۳ - ۲a > ۰ \Rightarrow a < \frac{۳}{۲} \xrightarrow{a \in N} a = ۱$$

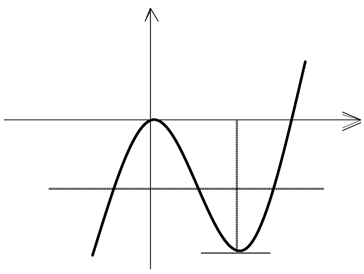
اکنون با جای‌گذاری مقدار $a = ۱$ داریم: $f(x) = x^۳ + bx^۲$. از طرفی $f'(۳) = ۰$ پس:

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲bx \Rightarrow f'(۳) = ۰ \Rightarrow ۲۷ + ۶b = ۰ \Rightarrow b = -\frac{۹}{۲}$$

بنابراین:

$$b - a = -\frac{۹}{۲} - ۱ = -\frac{۱۱}{۲}$$

۱۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با رسم نمودار تابع $y = x^۳ - ۶x^۲$ به سهولت جواب حاصل می‌شود.



$$y' = ۳x^۲ - ۱۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰\ ,\ ۴ \Rightarrow y = ۰\ ,\ -۳۲$$

خط افقی $y = m$ باید بین ماکزیمم و می‌نیمم منحنی قرار گیرد $-۳۲ < m < ۰$

۱۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون نمودار در نقطه‌ی $x = ۲$ بر محور x ها مماس است، پس: $f(۲) = f'(۲) = ۰$

$$f(x) = mx^۳ - nx^۲ - ۸ \Rightarrow f'(x) = ۳mx^۲ - ۲nx$$

$$\begin{cases} f(۲) = ۰ \Rightarrow ۸m - ۴n - ۸ = ۰ \Rightarrow ۲m - n = ۲ \\ f'(۲) = ۱۲m - ۴n = ۰ \Rightarrow n = ۳m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -۲ \\ n = -۶ \end{cases}$$

۱۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

چون نمودار از مبدأ می‌گذرد، پس $f(۰) = ۰$، بنابراین $b = ۰$ در نتیجه $f(x) = -x^۳ + ax^۲$

خط مماس بر منحنی در $x = ۳$ افقی است، پس $f'(۳) = ۰$

$$f'(x) = -۳x^۲ + ۲ax \xrightarrow{x = ۳} -۲۷ + ۶a = ۰ \Rightarrow a = \frac{۹}{۲} \Rightarrow f(x) = -x^۳ + \frac{۹}{۲}x^۲$$

$$\Rightarrow f(۴) = -۶۴ + \frac{۹}{۲}(۱۶) = -۶۴ + ۷۲ = ۸$$

۱۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در نقطه‌ی $x = ۲$، شیب خط مماس، برابر صفر است و تقعر منحنی نیز عوض می‌شود، پس: $y' = y'' = ۰$

$$\begin{cases} y' = -x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow -۴ + ۴a + b = ۰ \Rightarrow ۴a + b = ۴ \\ y'' = -۲x + ۲a \Rightarrow -۴ + ۲a = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -۴ \\ a = ۲ \end{cases} \Rightarrow a - b = ۲ - (-۴) = ۶$$

۱۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: در تابع هموگرافیک $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$، مرکز تقارن تابع محل تقاطع مجانب‌ها، یعنی نقطه $\left(\dfrac{-d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ است.

نکته: در تابع درجه سوم $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$، مرکز تقارن نقطه عطف تابع، یعنی نقطه $\left(-\dfrac{b}{۳a}, f\left(\dfrac{-b}{۳a}\right)\right)$ است.

با توجه به نکات بالا، مرکز تقارن تابع f، نقطه $A(۳, ۳)$ و مرکز تقاط تابع g، نقطه $B(۰, ۱)$ می‌باشد که فاصله این دو نقطه برابر است با:

$$AB = \sqrt{(۳ - ۰)^۲ + (۳ - ۱)^۲} = \sqrt{۱۳}$$

۱۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر $x = a$ ریشه مضاعف معادله $f(x) = ۰$ باشد، داریم: $\begin{cases} f(a) = ۰ \\ f'(a) = ۰ \end{cases}$

با توجه به نمودار، $x = ۱$ ریشه مضاعف $f(x) = ۰$ است، پس بااستفاده از نکته بالا داریم:

$$\begin{cases} f(۱) = ۰ \\ a'(۱) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱ + a + b = ۰ \\ ۳ + a = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۳ \\ b = (۲) \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^۳ - ۳x + ۲$$

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \pm \Rightarrow \begin{cases} \text{min: } (۱, ۰) \text{ نسبی} \\ \text{max: } (-۱, ۴) \text{ نسبی} \end{cases}$$

بنابراین مقدار ماکسیمم نسبی این تابع برابر است با: $f(-۱) = ۴$

۱۴۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

ابتدا توجه کنید که ضریب x^3 منفی است، یعنی وقتی $x \to +\infty$ خواهیم داشت $y \to -\infty$، پس گزینه «۴» نادرست است. حال داریم:

$y' = -3x^2 + 8x + 3 \Rightarrow \Delta_{y'} = 64 + 36 = 100 > 0 \Rightarrow$ مشتق دو ریشه متمایز دارد

پس مشتق تابع f در دو نقطه صفر خواهد بود، بنابراین گزینه «۱» پاسخ است.

۱۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 4$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -2$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{a}{27} + \frac{b}{9} - 4 = -2 \Rightarrow \frac{-a + 3b}{27} = 2 \Rightarrow -a + 3b = 54 \quad (1)$$

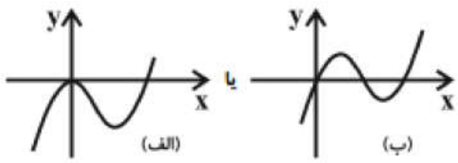
$$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''\left(-\frac{1}{3}\right) = -2a + 2b = 0 \Rightarrow a = b \quad (2)$$

$$(2), (1) \Rightarrow a = b = 27 \Rightarrow a + b = 54$$

۱۴۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون ضریب x^3 مثبت است، پس نمودار قطعاً از نواحی اول و سوم  دستگاه مختصات عبور می‌کند.

$x = 0$ یکی از ریشه‌های تابع است. برای اینکه نمودار فقط از ناحیه‌ی دوم عبور نکند، شکل آن باید به مانند یکی از حالت‌های زیر باشد:

$$y = 0 \Rightarrow x\underbrace{\left(x^2 - ax + (a-1)\right)}_{y_1} = 0$$



در حالت (الف) $x = 0$ باید ریشه‌ی مضاعف تابع باشد، یعنی باید $x = 0$ ریشه‌ی y_1 نیز باشد. پس:

$$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \quad (1)$$

$$y = x\left(x^2 - x\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

در حالت (ب)، y_1 دو ریشه‌ی مثبت دارد. پس:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a-1) > 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 > 0 \Rightarrow (a-2)^2 > 0 \\ \quad \Rightarrow a \neq 2 \quad (2) \\ \text{ضرب ریشه ها}: a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1 \quad (3) \\ \text{مجموع ریشه ها}: a > 0 \Rightarrow a > 0 \quad (4) \end{cases}$$

اجتماع (۱)، (۲)، (۳) و (۴) نتیجه می‌شود. $[1, +\infty) - \{2\}$

۱۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: در تابع درجه سوم $y = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$، طول نقطه‌ی عطف برابر $x = \frac{-b}{۳a}$ است.

نکته: تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a , b]$ صعودی (نزولی) است، هرگاه به ازای هر x در این بازه، داشته باشیم $f'(x) \geq ۰$ $(f'(x) \leq ۰)$

نکته: در تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ داریم:

$$\begin{cases}\Delta \leq ۰ \\ a < ۰\end{cases} \Rightarrow y \leq ۰ \ , \begin{cases}\Delta \leq ۰ \\ a > ۰\end{cases} \Rightarrow y \geq ۰$$

$$f(x) = -\frac{۲}{۳}x^۳ + (m + ۱)x^۲ - ۸x \Rightarrow f'(x) = -۲x^۲ + ۲(m + ۱)x - ۸$$

برای این‌که $f(x)$ نزولی باشد، باید $f'(x) \leq ۰$. برای این منظور باید داشته باشیم:

$$\Delta \leq ۰ \Rightarrow ۴(m + ۱)^۲ - ۴(۱۶) \leq ۰ \Rightarrow (m + ۱)^۲ \leq ۱۶ \Rightarrow -۴ \leq m + ۱ \leq ۴ \qquad (*)$$

طول نقطه‌ی عطف این تابع برابر است با:

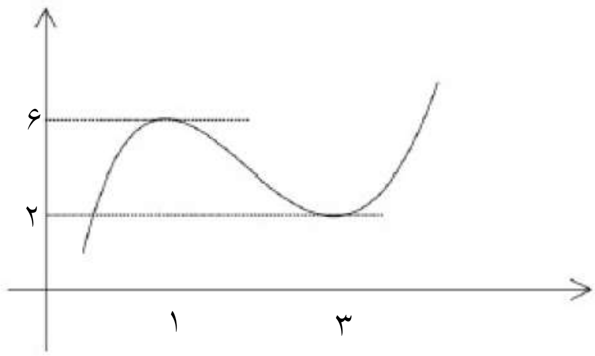
$$x_I = -\frac{m + ۱}{-۲} \xrightarrow{(*)} -۲ \leq x_I \leq ۲$$

۱۴۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید m بزرگتر از y ماکزیمم یا کوچکتر از y می‌نیمم باشد تا فقط در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند. بنابراین باید عرض ماکزیمم و می‌نیمم تابع را حساب کنیم.

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲x + ۹ = ۳\left(x^۲ - ۴x + ۳\right) = ۳(x - ۳)(x - ۱) = ۰ \begin{cases}x = ۱ \\ x = ۳\end{cases}$$

x		۱		۳	
f'	+	•	-	•	+
	↗		↘		↗

$$f(۱) = ۱ - ۶ + ۹ + ۲ = ۶$$
$$f(۳) = ۲۷ - ۵۴ + ۲۷ + ۲ = ۲$$



$m > ۶$ یا $m < ۲$

۱۴۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y' = -۲x^۲ + ۲x + ۱۲ = -۲\left(x^۲ - x - ۶\right) = -۲(x - ۳)(x + ۲) = ۰ \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۲ \end{cases}$$

$$x = ۳ \Rightarrow y = ۲۷$$
$$x = -۲ \Rightarrow y = -\frac{۴۴}{۳}$$