در تدوین این جزوه از تجربیات مؤلفین کتاب های زیر نیز استفاده شده و ندرتاً برخی از سؤالات که از نظر نگارنده غیرقابل چشم پوشی بودند عیناً نقل گردیده است.

۱ـ حرف آخر (عبدالرضا منتظری)

۲ـ دیفرانسیل تخته سیاه (مهندس محمد مهربان)

۳ـ سه سطحی قلم چی

۴ـ نردبام حسابان خیلی سبز (حسین شفیع زاده)

۵ـ سیر تا پیاز گاج

۶ـ آی کیو گاج

جزء صحیح

به بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x، جزء صحیح x می گویند و به صورت $[x]$ می نویسیم. **مثال:**

$$\dots,\ 0,\ 1,\ 2 : 2/7 \Rightarrow [2/7]=2$$
$$1,\ 2,\ 3,\ 4 : 4 \Rightarrow [4]=4$$
$$\dots,\ -6,\ -5,\ -4 : -3/2 \Rightarrow [-3/2]=-4$$

جزء اعشاری اون عدد + جزء صحیح اون عدد = هر عدد

$$x = [x] + 0 \le P_x < 1$$
$$2/3 = 2 + 0/3$$
$$6 = 6 + 0$$
$$-4/3 = -5 + 0/7$$

$$\boxed{\begin{matrix} k \le x < k+1 \Leftrightarrow [x]=k \\ k \in Z \end{matrix}}$$

سؤال۱: از نامساوی های زیر جزء صحیح بگیرید.

۱) $-3 \le x < -2 \Rightarrow [x]=-3$

۲) $-1 \le x \le 2 \Rightarrow [x]=\{-1,0,1,2\}$

۳) $1/2 \le x < 3/7 \Rightarrow [x]=1,2,3$

سؤال۲: اگر $[y]=4,[x]=2$ آنگاه $[x+y]$ برابر کدام است.

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۶ یا ۷ ۴) ۸

$$\begin{cases} [x]=2 \Rightarrow 2 \le x < 3 \\ [y]=4 \Rightarrow 4 \le y < 5 \end{cases} \Rightarrow 6 \le x+y < 8 \Rightarrow [x+y]=6 \text{ یا } 7$$

سؤال۳: نزدیکترین عدد صحیح به $(1+\sqrt{2})^4$ کدام است.

۱) ۲۹
۲) ۳۰
۳) ۳۳
۴) ۳۴

$$(1+\sqrt{2})^4 + (\underbrace{\sqrt{2}-1}_{0<0/4<1})^4 = (3+2\sqrt{2})^2 + (3-2\sqrt{2})^2 = 9+8+12\sqrt{2}+9+8-12\sqrt{2}=34$$
$$\Rightarrow (1+\sqrt{2})^4 = 34-(\sqrt{2}-1)^4$$

چون $\sqrt{2}-1 \simeq 0/4$ پس $(\sqrt{2}-1)^4=0/0256$ لذا این عدد خیلی نزدیک ۳۴ است اما اگر سوال می گفت مقدار جز صحیح $(1+\sqrt{2})^4$ کدام است: $[(1+\sqrt{2})^4]=33$

زیرا: $33<(1+\sqrt{2})^4<34$

سؤال۴: اگر $x^{۲}+x<۰$ باشد حاصل $[x]+[x^{۲}]+[x^{۳}]+[x^{۴}]$ کدام است؟ (کنکور)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۱

$x^{۲}+x<۰ \Rightarrow x(x+۱)<۰$

$\begin{array}{c|c|c} & -۱ & ۰ \\ + & - & + \end{array} \Rightarrow -۱<x<۰$

پس $۱>x^{\text{زوج}}>۰$، $-۱<x^{\text{فرد}}<۰$ در نتیجه:

$[x]+[x^{۲}]+[x^{۳}]+[x^{۴}]=-۱+۰-۱+۰=-۲$

سؤال۵: اگر جز صحیح $x^{۲}+x$ برابر (۱-) باشد، آنگاه $[x^{۲۰}]$ کدام است. (کنکور تجربی)

$[x^{۲}+x]=-۱ \Rightarrow -۱\le x^{۲}+x<۰ \Rightarrow \underbrace{(x^{۲}+x+۱)}_{\text{همواره مثبت}}(x^{۲}+x)\le ۰ \Rightarrow x^{۲}+x<۰ \Rightarrow x(x+۱)<۰ \Rightarrow -۱<x<۰$

$\Rightarrow ۰<x^{۲۰}<۱ \Rightarrow [x^{۲۰}]=۰$

سؤال۶: اگر $(۱+\sqrt{۲})^{۶}+(۱-\sqrt{۲})^{۶}=۱۹۸$ جز صحیح عدد $(۱+\sqrt{۲})^{۶}$ کدام است؟

۱) ۱۹۵ ۲) ۱۹۶ ۳) ۱۹۷ ۴) ۱۹۸

$(۱+\sqrt{۲})^{۶}=۱۹۸-(۱-\sqrt{۲})^{۶} \Rightarrow [(۱+\sqrt{۲})^{۶}]=[۱۹۸-(\underbrace{۱-\sqrt{۲}}_{(-۰/۴)})^{۶}]=[۱۹۸-\underbrace{(-۰/۴)^{۶}}_{\text{عددی بین صفر و یک}}]=[۱۹۷/\text{کمی اعشار}]=۱۹۷$

سؤال۹: حاصل $[\sqrt{۱}]+[\sqrt{۲}]+...+[\sqrt{۱۷}]$ کدام است.

۱) ۳۴ ۲) ۳۸ ۳) ۴۲ ۴) ۴۶

$([\sqrt{۱}]+[\sqrt{۲}]+[\sqrt{۳}])+([\sqrt{۴}]+[\sqrt{۵}]+...+[\sqrt{۸}])+([\sqrt{۹}]+[\sqrt{۱۰}]+...+[\sqrt{۱۵}])+[\sqrt{۱۶}]+[\sqrt{۱۷}]$

$=۳\times۱+۵\times۲+۷\times۳+۲\times۴=۳+۱۰+۲۱+۸=۴۲$

سؤال۱۰: در تابع $f(x)=۲x-[x^{۲}]$ حاصل $f(-۴+f(۳-\sqrt{۲}))$ کدام است.

۱) $۴(\sqrt{۲}-۱)$ ۲) $۴(\sqrt{۲}-۲)$ ۳) $-۴(\sqrt{۲}+۲)$ ۴) $-۴(\sqrt{۲}+۱)$

$f(x)=۲x-[x^{۲}] \Rightarrow f(۳-\sqrt{۲})=۲(۳-\sqrt{۲})-[(۳-\sqrt{۲})^{۲}]=۶-۲\sqrt{۲}-۲=۴-۲\sqrt{۲}$

$\boxed{۳-\sqrt{۲}\simeq(۱/۶)^{۲}=۲/۵۶ \Rightarrow [۳-\sqrt{۲})^{۲}]=۲}$

$f(-۴+f(۳-\sqrt{۲}))=f(-۴+۴-۲\sqrt{۲})=f(-۲\sqrt{۲}) \Rightarrow f(-۲\sqrt{۲})=۲(-۲\sqrt{۲})-[(-۲\sqrt{۲})^{۲}]$

$=-۴\sqrt{۲}-[۸]=-۴(\sqrt{۲}+۲)$

سؤال۱۱: مجموعه جواب معادلهی $[x^{۲}+۴x]=-۴$ بازهی (a,b) است مقدار $b-a$ کدام است.

$[x^{۲}+۴x]=-۴ \Rightarrow -۴\le x^{۲}+۴x<-۳ \Rightarrow (x^{۲}+۴x+۴)(x^{۲}+۴x+۳)\le ۰ \Rightarrow \underbrace{(x+۲)}^{۲}(x+۱)(x+۳)\le ۰$

$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} & -۳ & -۲ & -۱ \\ + & - & - & + \end{array} \quad \Rightarrow x\in(-۳,-۱) \Rightarrow b-a=۲$

سؤال۱۲: معادله‌ی $۳[x]+|x|=۱۶$ چند جواب دارد. (آزمون گاج)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار

سمت راست معادله صحیح است در نتیجه x نیز صحیح است. $|x|=۱۶-۳[x]$

$$\Rightarrow |x|=۱۶-۳x \xrightarrow[x\le \frac{۱۶}{۳}]{۱۶-۳x\ge ۰} x=\pm(۱۶-۳x) \Rightarrow \begin{cases} x=۱۶-۳x \Rightarrow ۴x=۱۶\Rightarrow x=۴ \\ x=-۱۶+۳x\Rightarrow -۲x=-۱۶\Rightarrow x=۸\end{cases} \xrightarrow{x\le\frac{۱۶}{۳}} x=۴$$

سؤال۱۳: اگر $x+y=۲/۷$ و $[y]=۲$ باشد آنگاه $[x]$ کدام است.

۱) ۰ یا ۱- ۲) ۰ یا ۱ ۳) ۰ ۴) ۱-

$$[y]=۲\Rightarrow ۲\le y<۳ \xrightarrow{+x} ۲+x\le x+y<۳+x \xrightarrow{x+y=۲/۷} ۲+x\le ۲/۷<۳+x$$

طرفین نامساوی را با x- جمع می کنیم:

$$۲\le ۲/۷-x<۳ \xrightarrow{-۲/۷} -۰/۷\le -x<۰/۳ \xrightarrow{\times(-۱)} -۰/۳<x\le ۰/۷ \Rightarrow [x]=۰$$ یا ۱-

---

سؤال۱۴: معادله‌ی $[x]+[x^۲]=\frac{x}{۲}$ چند ریشه دارد.

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

$$\underbrace{۲[x]+۲[x^۲]}_{\text{صحیح}}=x$$

سمت چپ معادله بالا صحیح بوده لذا سمت راست نیز باید صحیح باشد یعنی: $x\in Z$

$$\Rightarrow ۲x+۲x^۲=x\Rightarrow ۲x^۲+x=۰\Rightarrow x(۲x+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰\in Z & \text{ق ق}\\ x=-\frac{۱}{۲}\notin Z & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

سؤال۱۵: اگر $x-\sqrt{x-۱}=۱۳$ باشد حاصل $\left[\frac{x^۲}{۱۲}\right]$ کدام است. (سنجش)

۱) ۲۵ ۲) ۲۴ ۳) ۲۲ ۴) ۲۱

$$x-\sqrt{x-۱}=۱۳\Rightarrow x-۱۳=\sqrt{x-۱} \xrightarrow[x\ge ۱۳]{\begin{cases}x-۱۳\ge۰\\x-۱\ge۰\end{cases}} (x-۱۳)^۲=x-۱\Rightarrow x^۲-۲۶x+۱۶۹=x-۱$$

$$\Rightarrow x^۲-۲۷x+۱۷۰=۰\Rightarrow (x-۱۰)(x-۱۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱۰ & \text{غ ق ق}\\ x=۱۷ & \checkmark\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left[\frac{x^۲}{۱۲}\right]=\left[\frac{۱۷^۲}{۱۲}\right]=\left[\frac{۲۸۹}{۱۲}\right]=۲۴$$

سؤال۱۶: اگر $\left[\frac{۱-۲x}{۹}\right]=-۵$ آنگاه عبارت $\left[\frac{۱۱x+۱}{۳}\right]$ چند مقدار متمایز می تواند داشته باشد.

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

$$-۵\le\frac{۱-۲x}{۹}<-۴\Rightarrow -۴۵\le ۱-۲x<-۳۶\Rightarrow -۴۶\le -۲x<-۳۷$$

$$\Rightarrow \frac{۳۷}{۲}<x\le ۲۳\Rightarrow \frac{۴۰۷}{۲}<۱۱x\le ۲۵۳\Rightarrow\frac{۴۰۹}{۲}<۱۱x+۱\le ۲۵۴\Rightarrow\frac{۴۰۹}{۶}<\frac{۱۱x+۱}{۳}\le\frac{۲۵۴}{۳}\Rightarrow ۶۸\le\left[\frac{۱۱x+۱}{۳}\right]\le ۸۴$$

یعنی عبارت مورد نظر، می تواند هر یک از مقادیر ۶۸ ، ۶۹ ، ... ، ۸۴ را داشته باشد که تعداد آنها برابر است با: $(۸۴-۶۸)+۱=۱۷$

📖 سؤال۱۷: برد تابع $f(x)=[\sin x]+2[\cos x]$ با دامنه‌ی $0\le x\le \pi$ چند عضو دارد.

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$$0<x<\frac{\pi}{2}\xrightarrow[0<\cos x<1]{0<\sin x<1}f(x)=0+2(0)=0$$

$$\frac{\pi}{2}<x<\pi\xrightarrow[-1<\cos x<0]{0<\sin x<1}f(x)=0+2(-1)=-2$$

$$x=0\Rightarrow f(0)=0+2\times 1=2$$

$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+2\times 0=1$$

$$x=\pi\Rightarrow f(\pi)=0\times 2(-1)=-2$$

بنابراین برد **f** مجموعه‌ی $\{0,1,2,-2\}$ است.

📖 سؤال۱۸: با کدام ضابطه‌ی $f(x)$ همواره تساوی $(-1)^{[x]}f(x)=|f(x)|$ برقرار است. (داخل ریاضی ۹۱)

۱) $\cos 2\pi x$ ۲) $\cos \pi x$ ۳) $\sin 2\pi x$ ۴) $\sin \pi x$

با تعیین بازه های براکت داریم:

$$0\le x<1\Rightarrow [x]=0\Rightarrow f(x)=|f(x)|\Rightarrow f(x)\ge 0$$

$$1\le x<2\Rightarrow [x]=1\Rightarrow -f(x)=|f(x)|\Rightarrow f(x)\le 0$$

$$2\le x<3\Rightarrow [x]=2\Rightarrow f(x)=|f(x)|\Rightarrow f(x)\ge 0$$

پس تابع $f(x)$ دارای دوره‌ی تناوب ۲ است و در بازه‌ی $0\le x<1$ مقداری نامنفی و در بازه‌ی $1\le x<2$ مقداری نامثبت دارد. در بین گزینه ها گزینه‌ی (۲) و (۴) دارای دوره‌ی تناوب ۲ هستند، که $\sin \pi x$ در شرایط مسأله صدق می کند.

$$0\le x<1\Rightarrow 0\le \pi x<\pi\xrightarrow{\text{ناحیه‌ی اول و دوم}}\sin \pi x\ge 0$$

$$1\le x<2\Rightarrow \pi\le \pi x<2\pi\xrightarrow{\text{ناحیه‌ی سوم و چهارم}}\sin \pi x\le 0$$

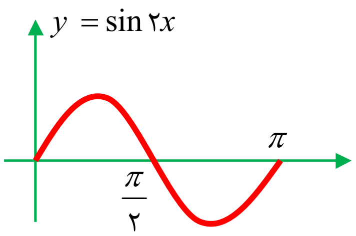
📖 سؤال۱۹: اگر $(-1)^{\left[\frac{2x}{\pi}\right]}f(x)=|f(x)|$ ضابطه‌ی **f** کدام می تواند باشد.

۱) $\sin\frac{x}{2}$ ۲) $\sin 2x$ ۳) $\cos 2x$ ۴) $\cos\frac{x}{2}$

با تعیین بازه های براکت داریم:

$$\begin{cases}0\le x<\frac{\pi}{2}\xrightarrow{\left[\frac{2x}{\pi}\right]=0}f(x)=|f(x)|\Rightarrow f(x)\ge 0\\ \frac{\pi}{2}\le x<\pi\xrightarrow{\left[\frac{2x}{\pi}\right]=1}-f(x)=|f(x)|\Rightarrow f(x)\le 0\\ \pi\le x<\frac{3\pi}{2}\xrightarrow{\left[\frac{2x}{\pi}\right]=2}f(x)=|f(x)|\Rightarrow f(x)\ge 0\end{cases}$$

همانطور که مشخص است $f(x)$ در یک دوره‌ی تناوب π ، قرار دارد و در نیمه‌ی اول دوره‌ی تناوب مثبت و در نیمه‌ی دوم دوره‌ی تناوب منفی باشد در بین گزینه ها $\sin 2x$ و $\cos 2x$ دارای دوره‌ی تناوب π می باشند و $\sin 2x$ دارای شرایط مسأله است.



📖 سؤال۲۰: معادله‌ی $[2x] = 3x$ چند جواب دارد.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

$$3x \le 2x < 3x+1 \xrightarrow{-3x} 0 \le x < 1 \Rightarrow -1 < x \le 0 \xrightarrow{\text{3x عددی صحیح است}} -3 < 3x \le 0 \xrightarrow{3x \in Z}$$

$$3x \in \{-2,-1,0\} \Rightarrow x \in \left\{-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0\right\}$$

📖 سؤال۲۱: معادله‌ی $\frac{x}{2} = \left[\frac{x}{3}\right]$ چند جواب دارد.

چون حاصل $\left[\frac{x}{3}\right]$ عدد صحیح می شود پس: $\frac{x}{2} = k \in Z \rightarrow x = 2k$ از طرفی:

$$\frac{x}{2} \le \frac{x}{3} < \frac{x}{2}+1 \xrightarrow{\times 6} 3x \le 2x < 3x+6 \Rightarrow (2x-3x)(2x-3x-6) \le 0 \Rightarrow -x(-x-6) \le 0$$

$$\Rightarrow x(x+6) \le 0 \Rightarrow -6 < x \le 0 \xrightarrow{x=2k} x = -4,-2,0$$

📖 سؤال۲۲: معادله‌ی $[x] = 4x$ چند ریشه دارد.

$$[x] = 4x = k \in Z \Rightarrow x = \frac{k}{4}$$

$$[x] = 4x \Rightarrow 4x \le x < 4x+1 \Rightarrow (x-4x)(x-4x-1) \le 0 \Rightarrow -3x(-3x-1) \le 0$$

$$\Rightarrow 3x(3x+1) \le 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x \le 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < \frac{k}{4} \le 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} < k \le 0 \xrightarrow{k \in Z} \begin{cases} k = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \\ k = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \rightarrow$$ دو ریشه دارد

📖 سؤال۲۳: معادله‌ی $x^2 - x[x] = 2$ در بازه‌ی $[1,4]$ چند ریشه دارد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

$$1 \le x < 2 \xrightarrow{[x]=1} x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2,-1$$

هیچ کدام در بازهٔ $[1,2)$ قرار ندارند.

$$2 \le x < 3 \xrightarrow{[x]=2} x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

که تنها جواب $x = 1+\sqrt{3}$ در بازهٔ $[2,3)$ قرار دارد.

$$3 \le x < 4 \xrightarrow{[x]=3} x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

که تنها جواب $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ داخل بازهٔ $[3,4)$ قرار دارد.

$$x = 4 \xrightarrow{[x]=4} x^2 - 4x = 2 \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$$

$x = 4$ در این معادله صدق نمی کند.

پس: $x = 1+\sqrt{3}$ و $x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ جواب های مسأله اند.

سؤال۲۴: با فرض $[4x]=[2x^2+2]=n\in Z$ حاصل $[(x+1)^2]$ کدام است.

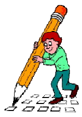
۱) n ۲) $n-1$ ۳) $2n$ ۴) $2n-1$

$$\left.\begin{array}{l}[4x]=n\Rightarrow n\le 4x<n+1\\ [2x^2+2]=n\Rightarrow n\le 2x^2+2<n+1\end{array}\right\}\oplus 2n\le 2x^2+4x+2<2n+2$$

$$\xrightarrow{\div 2} n\le x^2+2x+1<n+1\Rightarrow n\le (x+1)^2<n+1\Rightarrow[(x+1)^2]=n$$

$$\boxed{[x]=[y]=n\Rightarrow\left[\frac{x+y}{2}\right]=n}$$

$$[4x]=[2x^2+2]=n\Rightarrow\left[\frac{2x^2+2+4x}{2}\right]=[x^2+1+2x]=n\Rightarrow[(x+1)^2]=n$$



روش تستی: ابتدا براکت ها را در نظر نگرفته و معادله را حل می کنیم. **X** بدست آمده را در صورت سؤال قرار داده تا **n** مشخص شود. حال حاصل خواسته شده را به ازای این **x** محاسبه کرده و گزینه ها را به ازای **n** بدست آمده مشخص می کنیم.

$$4x=2x^2+2\Rightarrow x=1\xrightarrow{\text{در سوال}}[4]=[2+2]=n\Rightarrow n=4\Rightarrow[(x+1)^2]\xrightarrow{x=1}4\Rightarrow$$ گزینه(۱)

سؤال۲۵: با فرض $[x^2+8x]=[2x^2+2x+9]=11n$ حاصل $[7x-x^2]$ کدام است.

۱) $4n$ ۲) $3n$ ۳) $7n$ ۴) $7x+x^2$

$$x^2+8x=2x^2+2x+9\Rightarrow x^2-6x+9=0\Rightarrow(x-3)^2=0\Rightarrow x=3$$

$$\xrightarrow{\text{در سوال قرار می دهیم}}[9+24]=[18+6+9]=33\Rightarrow 11\times 3\Rightarrow n=3$$

حال: $[7x-x^2]\xrightarrow{x=3}12\xrightarrow{n=3}4n\Rightarrow$ گزینه (۱)

سؤال۲۶: برای هر عدد طبیعی $n>2$ حاصل $[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]$ کدام است؟ (داخل تجربی ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$n>2\Rightarrow n=3:[\sqrt{4(3)^2-3(3)+1}]-2[\sqrt{(3)^2-2(3)}]=[\underbrace{\sqrt{28}}_{5/000}]-2[\underbrace{\sqrt{3}}_{1/7000}]=5-2(1)=3\Rightarrow$$ گزینه(۳)

راه حل دوم) $4n^2-4n+1<4n^2-3n+1<4n^2\Rightarrow(2n-1)^2<4n^2-3n+1<(2n)^2\Rightarrow$

$$2n-1<\sqrt{4n^2-3n+1}<2n\Rightarrow[\sqrt{4n^2-3n+1}]=2n-1\qquad(1)$$

$$n^2-4n+4<n^2-2n<n^2-2n+1\Rightarrow(n-2)^2<n^2-2n<(n-1)^2\Rightarrow n-2<\sqrt{n^2-2n}<n-1$$

$$\Rightarrow[\sqrt{n^2-2n}]=n-2\qquad(2)$$

$$\Rightarrow[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]=2n-1-2(n-2)=3$$

سؤال۲۷: اگر $n\in N$ عددی سه رقمی باشد حاصل $[\sqrt[3]{8n^3+6n^2+1}]$ کدام است؟ (سنجش ۹۴)

۱) $2n$ ۲) $2n+1$ ۳) $2n+3$ ۴) $2n+2$

$$8n^3<8n^3+6n^2+1<8n^3+6n^2+12n+1\Rightarrow(2n^3)<8n^3+6n^2+1<(2n+1)^3\Rightarrow[\sqrt[3]{8n^3+6n^2+1}]=2n$$

سؤال۲۸: اگر n عددی طبیعی بوده و داشته باشیم $[\sqrt{n^۲+۴n+۱}]=۹$ حاصل $[\sqrt{۲n^۲+n+۱}]$ کدام است.

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

$$\underbrace{n^۲+۲n+۱}_{(n+۱)^۲}<n^۲+۴n+۱<\underbrace{n^۲+۴n+۴}_{(n+۲)^۲}\Rightarrow n+۱<\sqrt{n^۲+۴n+۱}<n+۲\Rightarrow[\sqrt{n^۲+۴n+۱}]=\mathrm{n}+۱$$

$$\Rightarrow n+۱=۹\Rightarrow n=۸\Rightarrow[\sqrt{۲n^۲+n+۱}]=[\sqrt{۲(۸)^۲+۸+۱}]=[\sqrt{۱۳۷}]=۱۱\Rightarrow[۱۱/...]=۱۱$$

$$\boxed{۱۱^۲<۱۳۷<۱۲^۲\Rightarrow ۱۱<\sqrt{۱۳۷}<۱۲\Rightarrow[\sqrt{۱۳۷}]=۱۱}$$

سؤال۲۹: اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه حاصل $[\sin^۲\mathrm{n}]+[\sqrt{۴n^۲+۲n}]$ کدام است.

۱) ۲n یا ۲n+۱ ۲) ۲n ۳) ۲n+۱ ۴) ۲n+۲

$$\underbrace{۴n^۲}_{(۲n)^۲}<۴n^۲+۲n<\underbrace{۴n^۲+۴n+۱}_{(۲n+۱)^۲}\Rightarrow ۲n<\sqrt{۴n^۲+۲n}<۲n+۱\Rightarrow[\sqrt{۴n^۲+۲n}]=۲\mathrm{n}$$

می دانیم همواره $۰\le\sin^۲x\le۱$ و حالت $\sin^۲x=۱$ زمانی اتفاق می افتد که x مضرب فرد $\frac{\pi}{۲}$ باشد که اگر x عددی طبیعی باشد این حالت اتفاق نمی افتد یعنی اگر n عدد طبیعی باشد $۰\le\sin^۲n<۱$ پس به ازای همه‌ی مقادیر طبیعی n، $[\sin^۲x]=۰$ بنابراین:

$$[\sqrt{۴n^۲+۲n}]+[\sin^۲\mathrm{n}]=۲\mathrm{n}+۰=۲\mathrm{n}$$

سؤال۳۰: نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $[\mathrm{x}]>۲\Rightarrow[\mathrm{x}]=۳,۴,۵,...\Rightarrow x\ge۳$

$\boxed{[\mathrm{x}]>\mathrm{k}\Rightarrow\mathrm{x}\ge\mathrm{k}+۱\ ,\ \mathrm{k}\in\mathrm{Z}}$: تقدیم به عاشقان فرمول

۲) $[\mathrm{x}]\ge۲\Rightarrow[\mathrm{x}]=۲,۳,۴,...\Rightarrow x\ge۲$

$\boxed{[\mathrm{x}]\ge\mathrm{k}\Rightarrow\mathrm{x}\ge\mathrm{k}\ ,\ \mathrm{k}\in\mathrm{Z}}$: تقدیم به عاشقان فرمول

۳) $[\mathrm{x}]<۲\Rightarrow[\mathrm{x}]=...,-۱,۰,۱\Rightarrow x<۲$

$\boxed{[\mathrm{x}]<\mathrm{k}\Rightarrow\mathrm{x}<\mathrm{k}\ ,\ \mathrm{k}\in\mathrm{Z}}$: تقدیم به عاشقان فرمول

۴) $[\mathrm{x}]\le۲\Rightarrow[\mathrm{x}]=...,-۱,۰,۱,۲\Rightarrow x<۳$

$\boxed{[\mathrm{x}]\le\mathrm{k}\Rightarrow\mathrm{x}<\mathrm{k}+۱\ ,\ \mathrm{k}\in\mathrm{Z}}$: تقدیم به عاشقان فرمول

۵) $[\mathrm{x}]<\frac{۱}{۲}\Rightarrow[\mathrm{x}]\le۰\Rightarrow[\mathrm{x}]=...,-۱,۰\Rightarrow x<۱$

۶) $[\mathrm{x}]>-\frac{۵}{۳}\Rightarrow[\mathrm{x}]\ge-۱\Rightarrow[\mathrm{x}]=-۱,۰,۱,۲,...\Rightarrow x\ge-۱$

📖 سؤال ۳۱: دامنه‌ی تابع $\sqrt{([x]-\sqrt{۲})(۴-[x])}$ کدام است.

۱) $۲<x<۴$ ۲) $۲\le x<۵$ ۳) $۲\le x<۴$ ۴) $۲<x\le ۵$

$$[x]=a\Rightarrow (a-\sqrt{۲})(۴-a)\ge ۰\Rightarrow \sqrt{۲}\le a\le ۴\Rightarrow \sqrt{۲}\le [x]\le ۴\Rightarrow [x]=۲,۳,۴\Rightarrow ۲\le x<۵$$

📖 سؤال ۳۲: مجموعه جواب نامعادلات زیر را بدست آورید.

$$۱)\ [x]^{۲}-۵[x]+۴<۰\Rightarrow ([x]-۱)([x]-۴)<۰\Rightarrow ۱<[x]<۴\Rightarrow [x]=۲,۳\Rightarrow ۲\le x<۴$$

$$۲)\ \frac{[x]-۲}{۵-[x]}\le ۰\Rightarrow [x]=a\Rightarrow \frac{a-۲}{۵-a}\le ۰\Rightarrow \frac{a-۲}{a-۵}\ge ۰\Rightarrow a>۵ \text{ یا } a\le ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases}[x]\le ۲\Rightarrow [x]=\dots,۰,۱,۲\Rightarrow x<۳\\ [x]>۵\Rightarrow [x]=۶,۷,\dots\Rightarrow x\ge ۶\end{cases}\Rightarrow (-\infty,۳)\cup[۶,+\infty)$$

📖 سؤال ۳۳: دامنه تابع $\sqrt{۲-[x^{۲}+۲x]}$ کدام مجموعه است.

۱) $[-۲,۰]$ ۲) $(-۳,۱)$ ۳) $(-۱,۴)$ ۴) $(۰,۲)$

$$D_f=۲-[x^{۲}+۲x]\ge ۰\Rightarrow [x^{۲}+۲x]\le ۲\Rightarrow x^{۲}+۲x<۳\Rightarrow x^{۲}+۲x-۳<۰$$
$$\Rightarrow (x-۱)(x+۳)<۰\Rightarrow -۳<x<۱$$

📖 سؤال ۳۴: اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $۰\le\left[\frac{۳}{۲}[x]\right]\le ۸$ بازه‌ی $[a,b)$ باشد $b-a$ کدام است.

$$۰\le\left[\frac{۳}{۲}[x]\right]\le ۸\Rightarrow ۰\le \frac{۳}{۲}[x]<۹\Rightarrow ۰\le [x]<۶\Rightarrow ۰\le x<۶\Rightarrow x\in[۰,۶)\Rightarrow \begin{cases}a=۰\\ b=۶\end{cases}\Rightarrow b-a=۶$$

📖 سؤال ۳۵: دامنه‌ی تعریف تابع $\sqrt{(۳-[x])([x]-\sqrt{۲۰})}$ برابر $[m,n)$ است حاصل $m+۲n$ کدام است.

۱) ۱۳ ۲) ۱۱ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲

$$(۳-[x])([x]-\sqrt{۲۰})\ge ۰\Rightarrow ۳\le [x]\le \sqrt{۲۰}=۴/\dots\Rightarrow ۳\le [x]<۵$$
$$\Rightarrow ۳\le x<۵\Rightarrow \begin{cases}m=۳\\ n=۵\end{cases}\Rightarrow m+۲n=۳+۱۰=۱۳$$

📖 سؤال ۳۶: مجموعه جواب معادله‌ی $[x]+\left[x-\frac{۱}{۴}\right]-\left[x+\frac{۳}{۴}\right]=۲$ کدام است.

$$[x]+\left[x+\frac{۳}{۴}-۱\right]-\left[x+\frac{۳}{۴}\right]=۲\Rightarrow [x]+\left[x+\frac{۳}{۴}\right]-۱-\left[x+\frac{۳}{۴}\right]=۲\Rightarrow [x]=۳\Rightarrow ۳\le x<۴$$

📖 سؤال ۳۷: مجموعه جواب معادله‌ی $\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x-\frac{۱}{۲}\right]=۵$ کدام است. (گزینه ۲)

۱) $\frac{۵}{۲}\le x<\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}\le x<\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}<x\le\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}<x\le\frac{۵}{۲}$

$$\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x-\frac{۱}{۲}\right]=\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x+\frac{۱}{۲}-۱\right]=۵\Rightarrow \left[x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]-۱=۵\Rightarrow ۲\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=۶$$
$$\Rightarrow \left[x+\frac{۱}{۲}\right]=۳\Rightarrow ۳\le x+\frac{۱}{۲}<۴\Rightarrow \frac{۵}{۲}\le x<\frac{۷}{۲}$$

سؤال۳۸: برد تابع $y=[x-[x+۵]]$ کدام است.

۱) $\{-۴,-۵\}$ ۲) $\{-۵\}$ ۳) $\{-۳\}$ ۴) $\{-۳,-۵\}$

$$y=[x-([x]+۵)]=[x-[x]-۵]=[\underbrace{x-[x]}_{۰\le \text{عدد}<۱}]-۵=۰-۵=-۵$$

سؤال۳۹: مجموعه جواب نامعادله‌ی $[x+[x]]>۳-[x]$ کدام است.

$$[x]+[x]>۳-[x]\Rightarrow ۳[x]>۳\Rightarrow [x]>۱\Rightarrow [x]=۲,۳,\ldots\Rightarrow x\ge ۲$$

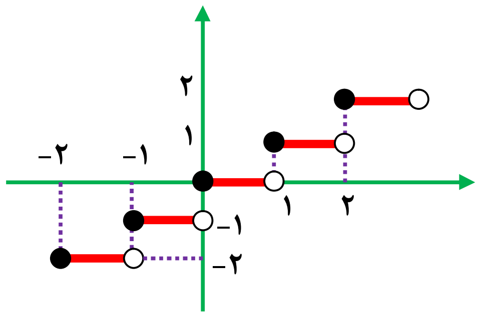
سؤال۴۰: مجموعه جواب $[x+۳[x]]=۲[x-۴]$ را بدست آورید.

چون $۳[x]$ عدد صحیح است می تواند از بارکت خارج شود.

$$[x]+۳[x]=۲[x]-۸\Rightarrow [x]=-۴\Rightarrow -۴\le x<-۳$$

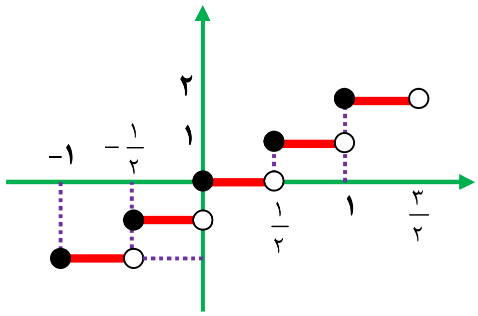
نمودارهای تابع جزء صحیح

$[x]$



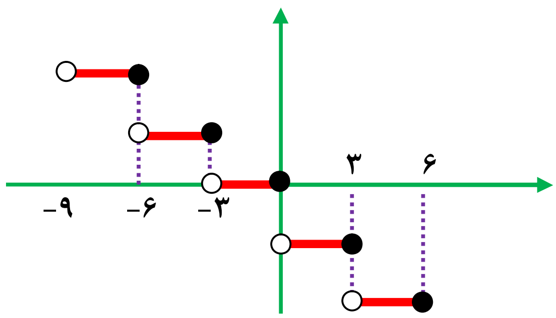
اعداد روی محور x ها را بر ۲ تقسیم می کنیم:

$[۲x]$



اعداد روی محور x ها را بر $-\frac{۱}{۳}$ تقسیم می کنیم:

$\left[-\frac{x}{۳}\right]$



سؤال۴۱: نمودار تابع $y=2\left[\frac{x}{2}\right]+1; x\in[-2,6)$ از چند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است. (کنکور)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

می دانیم برای رسم $\left[\frac{x}{2}\right]$ طول هر بازه $2=\frac{1}{\frac{1}{2}}$ است.

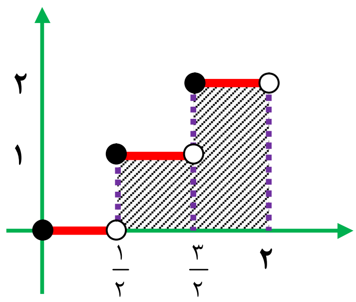
طول بازه‌ی $[-2,6)$ ، $6-(-2)=8$ است پس $y=2\left[\frac{x}{2}\right]+1$ از $\frac{8}{2}=4$ پله تشکیل شده است.

سؤال۴۲: مساحت سطح محدود به نمودار $y=[2x]-[x]$ و محور x ها در فاصله‌ی $[0,2)$ کدام است.

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

$$[2x]-[x]=\left[x+\frac{1}{2}\right]$$

در واقع نمودار $f(x)=[x]$ را باید به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ به سمت چپ انتقال دهیم:

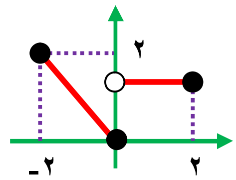


$$S=1\times1+\frac{1}{2}\times2=1+1=2$$

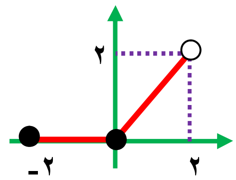
$$\boxed{[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]}$$

سؤال۴۳: نمودار تابع $y=x\left[\frac{x}{2}\right]$ در بازه‌ی $[-2,2)$ به کدام صورت است؟

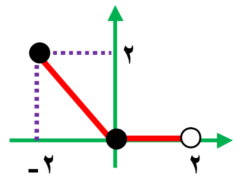
۱)



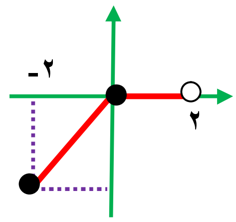
۲)



۳)



۴)



$$-2\le x<0\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]=-1\Rightarrow y=-x$$

$$0\le x<2\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]=0\Rightarrow y=0$$

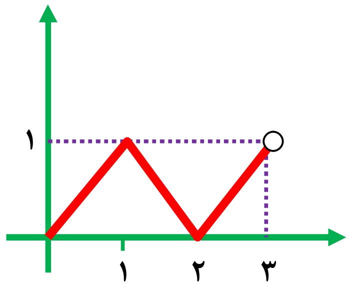
گزینه (۳) درست است.

سؤال۱۴۴: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-[x] & [x] \text{ زوج} \\ |x-[x+1]| & [x] \text{ فرد} \end{cases}$ در بازه‌ی $[0,3)$ را رسم کنید. (ویژه تیزهوشان)

$0\le x<1 \Rightarrow [x]=0:$ زوج $\Rightarrow y=x-[x]=x-0=x$

$1\le x<2 \Rightarrow [x]=1:$ فرد $\Rightarrow y=|x-[x]-1|=|x-1-1|=|\underbrace{x-2}|=-x+2$

$2\le x<3 \Rightarrow [x]=2:$ زوج $\Rightarrow y=x-[x]=x-2$

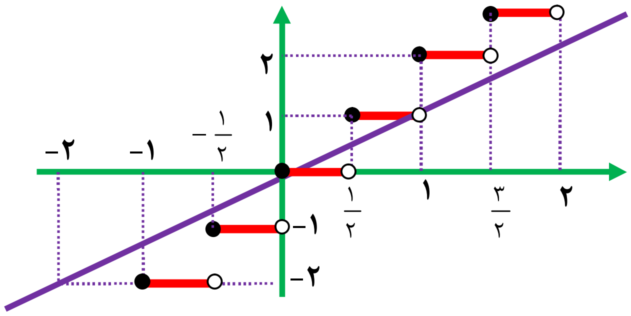


سؤال۱۴۵: مجموعه جواب نامعادله‌ی $x-[2x]>0$ به صورت $(-\infty,a)-\{b\}$ می باشد. حاصل $a+b$ کدام است.

(ویژه تیزهوشان)

$x-[2x]>0 \Rightarrow x>[2x]$

اکنون با استفاده از رسم مجموعه جواب را بدست می آوریم:



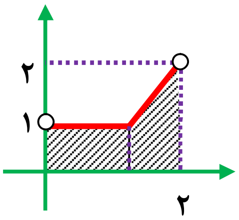
با توجه به شکل واضح است که مجموعه جواب نامعادله $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)-\{0\}$ است یعنی: $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$

سؤال۱۴۶: مساحت محدود به نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{[x]}$ در بازه‌ی $(0,2)$ و محور x ها کدام است.

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

$0<x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow f(x)=x^0=1$

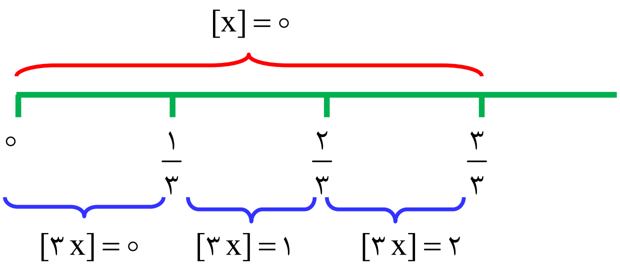
$1\le x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow f(x)=x^1=x$



مساحت ناحیهٔ رنگی $=1\times1+\frac{(1+2)\times1}{2}=2/5$

سؤال۱۴۷: مجموعه جواب معادله‌ی $[x]+[3x]=0$ بازه‌ی $[a,b)$ است مقدار $b-a$ کدام است.

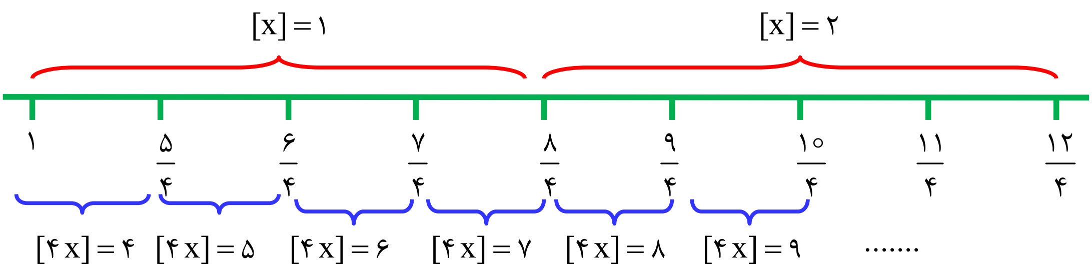
۱) ۳ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{2}{3}$



$[x]+[3x]=0 \Rightarrow 0\le x<\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=\frac{1}{3} \end{cases}$

سؤال۱۴۸: مجموعه جواب معادله‌ی $[x]+[۴x]=۶$ به صورت $[a,b)$ است. مقدار $b-a$ کدام است.

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۵



$$[x]+[۴x]=۶ \Rightarrow \frac{۵}{۴} \le x < \frac{۶}{۴} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{۵}{۴} \\ b=\frac{۶}{۴} \end{cases}$$

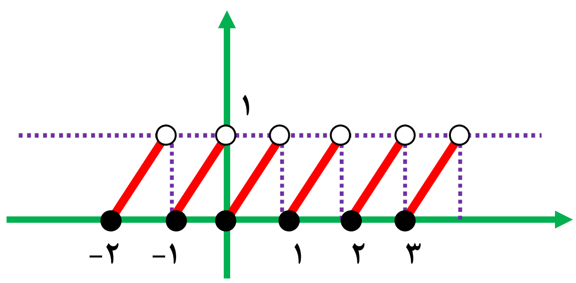
$$b-a=\frac{۶}{۴}-\frac{۵}{۴}=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$$

ویژگی های جزء صحیح

$$x=[x]+P_x \Rightarrow x-[x]=P_x \xrightarrow{۰\le P_x<۱} ۰\le x-[x]<۱$$

$$\boxed{۰\le x-[x]<۱}$$

رسم نمودار $x-[x]$



سؤال۱۴۹: در توابع زیر محدوده‌ی y را بیابید. (برد تابع را بیابید.)

۱) $۳x-[۳x]+۲$

$$۰\le ۳x-[۳x]<۱ \xrightarrow{+۲} ۲\le ۳x-[۳x]+۲<۳ \Rightarrow ۲\le y<۳$$

۲) $۳x-۳[x]+۲$

$$۰\le x-[x]<۱ \xrightarrow{\times ۳} ۰\le ۳x-۳[x]<۳ \xrightarrow{+۲} ۲\le ۳x-۳[x]+۲<۵ \Rightarrow ۲\le y<۵$$

۳) $\sqrt{۵x-۵[x]-۱}$

$$۰\le x-[x]<۱ \Rightarrow ۰\le ۵x-۵[x]<۵ \Rightarrow -۱\le ۵x-۵[x]-۱<۴ \Rightarrow ۰\le \sqrt{۵x-۵[x]-۱}<۲ \Rightarrow ۰\le y<۲$$

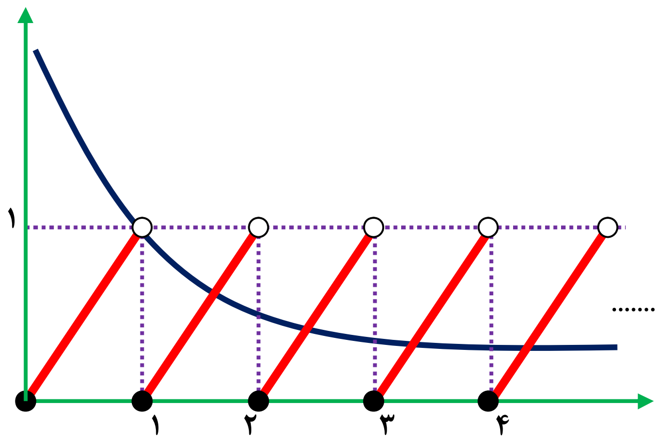
۴) $\sqrt{x-4\left[\frac{x}{4}\right]}$

$$x-4\left[\frac{x}{4}\right]=4\underbrace{\left(\frac{x}{4}-\left[\frac{x}{4}\right]\right)}_{0\le\ \text{عددی}\ <1}\Rightarrow 0\le 4\left(\frac{x}{4}-\left[\frac{x}{4}\right]\right)<4\Rightarrow 0\le\sqrt{4\left(\frac{x}{4}-\left[\frac{x}{4}\right]\right)}<2$$

سؤال۵۰: معادله‌ی $x^2-1=x[x]$ در بازه‌ی $[0,100]$ چند ریشه دارد.

۱) ۹۹ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰۱ ۳) ۱۰۲

$$x^2-x[x]=1\Rightarrow x(x-[x])=1\Rightarrow x-[x]=\frac{1}{x}$$



در این بازه $x-[x]$ از ۱۰۰ شاخه تشکیل شده است که $\frac{1}{x}$ همه‌ی آنها به جز شاخه‌ی اول را قطع می کند پس معادله ۹۹ ریشه دارد.

سؤال۵۱: معادله‌ی $2x-[2x]=x^2-2x+2$ چند جواب در مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارد.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار

$$\underbrace{2x-[2x]}_{0\le\ \text{عددی}\ <1}=\underbrace{(x-1)^2+1}_{\text{عددی}\ \ge 1}$$

تساوی هرگز رخ نمی دهد پس معادله جواب ندارد.

سؤال۵۲: برد تابع $f(x)=\sqrt{4+x-4\left[\frac{x}{4}\right]}$ کدام است.

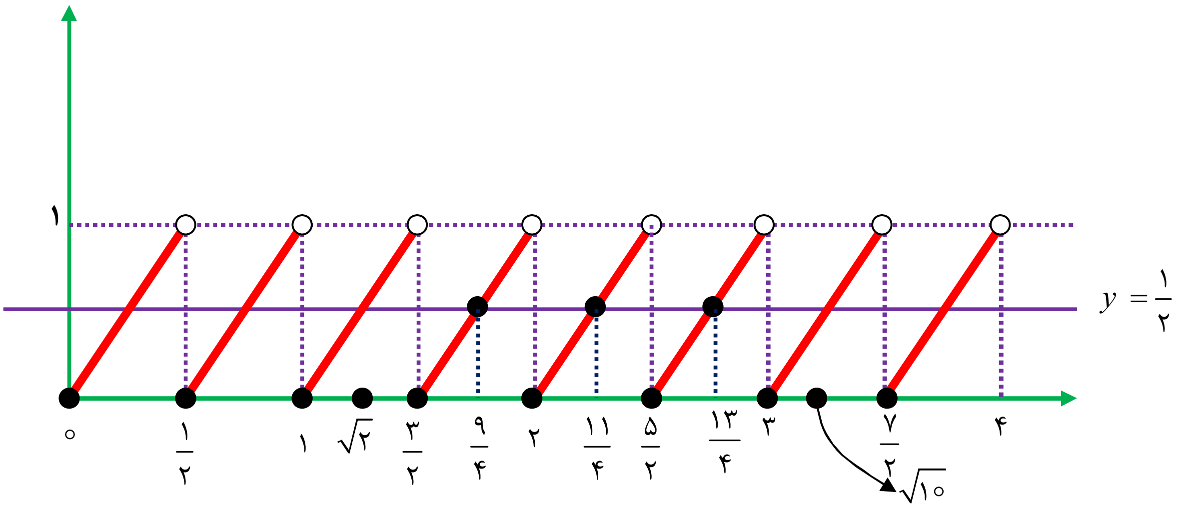
۱) $[1,4]$ ۲) $[\sqrt{6},3]$ ۳) $[2,2\sqrt{2}]$ ۴) $[1,\sqrt{2})$

$$A=4+x-4\left[\frac{x}{4}\right]=4+4\underbrace{\left(\frac{x}{4}-\left[\frac{x}{4}\right]\right)}_{0\le\ \text{عددی}\ <1}\Rightarrow 4\le A<8\Rightarrow 2\le\sqrt{A}<2\sqrt{2}\Rightarrow R_f=[2,2\sqrt{2})$$

سؤال ۵۳: معادله‌ی $۲x-[۲x]=\frac{۱}{۲}$ در بازه‌ی $[\sqrt{۲},\sqrt{۱۰}]$ چند جواب دارد؟ (آزاد ۹۱)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱

$\sqrt{۲}\cong ۱/۴ \quad , \quad \sqrt{۱۰}\cong ۳/۱۶$



معادله ۳ جواب $x=\frac{۹}{۴},\frac{۱۱}{۴},\frac{۱۳}{۴}$ در بازه‌ی $[\sqrt{۲},\sqrt{۱۰}]$ دارد.

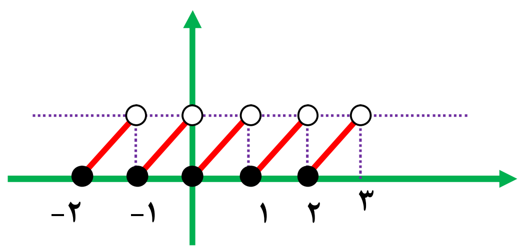
سؤال ۵۴: اگر $f(x)=[x]$ مجموعه مقادیر $f(x-f(x))$ کدام است. (کنکور)

۱) $\{۰\}$ ۲) $\{۱\}$ ۳) $\{۰,۱\}$ ۴) $\{-۱,۰,۱\}$

$$f(x-f(x))\xrightarrow{f(x)=[x]}f(x-[x])=[\underbrace{x-[x]}_{۰\le \text{عددی} <۱}]=۰$$

سؤال ۵۵: نمودار تابع $y=x-[x]$ ؛ $x\in[-۲,۳]$ از n پاره خط مساوی به اندازهٔ L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n,L) کدام است؟ (کنکور)

۱) $(۴,۱)$ ۲) $(۴,\sqrt{۲})$ ۳) $(۵,۱)$ ۴) $(۵,\sqrt{۲})$



نمودار تابع $y=x-[x]$ در بازه‌ی $[-۲,۳)$ دارای ۵ پاره خط است که طول هر یک $\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$ است.

گزینه (۴) درست است.

سؤال۵۶: اگر $f(x)=-x+[x]$ و $g(x)=۲^x$ آنگاه برد تابع gof کدام است؟ (داخل ریاضی ۹۰)

۱) $\left(\frac{۱}{۲},۱\right]$ ۲) $(۱,۲]$ ۳) $\left[\frac{۱}{۲},۱\right)$ ۴) $[۱,۲)$

$$۰\le x-[x]<۱\Rightarrow -۱<-x+[x]\le ۰$$

$$gof(x)=۲^{[x]-x}\Rightarrow ۲^{-۱}<gof(x)\le ۲^{۰}\Rightarrow \frac{۱}{۲}<gof(x)\le ۱\Rightarrow R_{gof}=\left(\frac{۱}{۲},۱\right]$$

سؤال۵۷: اگر $f(x)=x-[x]$، $g(x)=\frac{۱-x}{x}$ برد تابع gof کدام بازه است. (کنکور)

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $[۱,+\infty)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x-[x] \\ g(x)=\frac{۱}{x}-۱ \end{array}\right\}\Rightarrow gof(x)=g(x-[x])=\frac{۱}{x-[x]}-۱$$

می دانیم همواره $۰\le x-[x]<۱$ و از طرفی نباید $x-[x]=۰$ باشد چون تابع gof تعریف نشده می شود بنابراین:

$$۰<x-[x]<۱\Rightarrow \frac{۱}{x-[x]}>۱\xrightarrow{-۱}\frac{۱}{x-[x]}-۱>۰$$

$$\Rightarrow gof(x)>۰\Rightarrow R_{gof}=(۰,+\infty)$$

سؤال۵۸: حاصل $\left[۲x-۴\left[\frac{x}{۲}\right]\right]$ به ازای مقادیر مختلف x چند مقدار مختلف را می پذیرد.

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) بی شمار

$$۲x-۴\left[\frac{x}{۲}\right]=۴\left(\frac{x}{۲}-\left[\frac{x}{۲}\right]\right)$$

چون $۰\le \frac{x}{۲}-\left[\frac{x}{۲}\right]<۱$ است لذا:

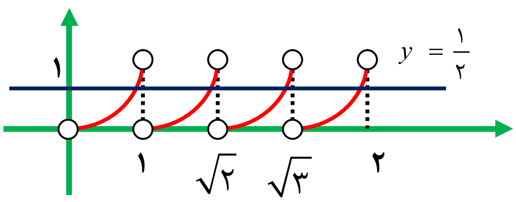
$$۰\le ۴\left(\frac{x}{۲}-\left[\frac{x}{۲}\right]\right)<۴\Rightarrow \left[۴\left(\frac{x}{۲}-\left[\frac{x}{۲}\right]\right)\right]=۰$$ یا ۱ یا ۲ یا ۳

سؤال۵۹: معادله $x^۲-[x^۲]=\frac{۱}{۲}$ در بازه‌ی $(۰,۲)$ چند ریشه دارد.

طبق معادله داریم: $x^۲=[x^۲]+\frac{۱}{۲}$ و از آنجا که داریم: $x^۲=[x^۲]+\{x^۲\}$ پس $\{x^۲\}=\frac{۱}{۲}$ ($\{A\}$: جز اعشاری A می باشد) پس داریم:

$$۰<x<۲\Rightarrow ۰<x^۲<۴$$

چون $\{x^۲\}=\frac{۱}{۲}$ پس در بازه‌ی $۰<x^۲<۴$ اعداد $\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲},\frac{۷}{۲}$ در معادله به جای $x^۲$ صدق می کنند، لذا ۴ جواب داریم.



سؤال۶۰: معادله‌ی $x^{2}+1=[2x]$ چند جواب دارد.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) بی شمار

$$x^{2}+1=[2x]\Rightarrow x^{2}+1-2x=[2x]-2x\Rightarrow (x-1)^{2}=[2x]-2x$$

در حالت کلی می دانیم $0\le u-[u]<1$ پس $-1<[u]-u\le 0$ است چون $(x-1)^{2}\ge 0$ است پس:

$$\underbrace{(x-1)^{2}}_{\ge 0}=\underbrace{[2x]-2x}_{-1<\quad\le 0}$$

لذا وجه اشتراک دو عبارت هنگامی است که هر دو برابر صفر باشند.

$$\begin{cases}(x-1)^{2}=0\Rightarrow x=1\\ [2x]-2x=0\Rightarrow [2x]=2x\end{cases}$$

که $x=1$ در معادله‌ی دوم نیز صدق می کند از تنها جواب معادله $x=1$ است.

سؤال۶۱: دامنه‌ی $f(x)=\sqrt{-\sin^{2}\pi[x]}$ کدام است.

۱) R ۲) ϕ ۳) Z ۴) N

$$-\sin^{2}\pi[x]\ge 0\Rightarrow \sin^{2}\pi[x]\le 0\Rightarrow \sin\pi[x]=0\Rightarrow \pi[x]=k\pi\Rightarrow [x]=k\in Z\Rightarrow x\in R$$

سؤال۶۲: برد $y=x-\sqrt{([x]-x)^{2}}$ کدام است.

۱) R^{+} ۲) R ۳) Z ۴) R-Z

گزینه (۳) درست است. $y=x-|\underbrace{[x]-x}_{-}|\xrightarrow{\text{زیرا } [x]\le x} y=x+[x]-x=[x]\in Z$

سؤال۶۳: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{[\cos\pi x]}$ در کدام بازه قابل تعریف است. (سراسری تجربی ۸۹)

۱) $[0,1)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ ۴) $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

$$[\cos\pi x]\ne 0\Rightarrow (\cos\pi x)\notin[0,1)\Rightarrow \cos\pi x\in[-1,0)\Rightarrow \frac{\pi}{2}<\pi x<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$$

ویژگی:

$$\begin{cases}[2]+[-2]=2+(-2)=0\\ [2/1]+[-2/1]=2+(-3)=-1\end{cases}\Rightarrow \boxed{[x]+[-x]\to\begin{cases}\xrightarrow{x\in Z}0\\ \xrightarrow{x\notin Z}-1\end{cases}}$$

سؤال۶۴: دامنه‌ی تابع $y=\frac{1}{[x]+[-x]}$ کدام است.

$$\begin{cases}x\in Z:\xrightarrow{[x]+[-x]=0} y=\frac{1}{0}\ \text{غ ق ق}\\ x\notin Z:\xrightarrow{[x]+[-x]=-1} y=\frac{1}{-1}=-1\end{cases}\Rightarrow D_f=R-Z$$

سؤال۶۵: دامنه‌ی تابع $y=\dfrac{1}{[x]+[-x]+1}$ کدام است.

$$\begin{cases} x\in Z:\xrightarrow{[x]+[-x]=0} y=\dfrac{1}{0+1}=1 \\ x\notin Z:\xrightarrow{[x]+[-x]=-1} y=\dfrac{1}{-1+1}= \text{تعریف نشده} \end{cases}$$

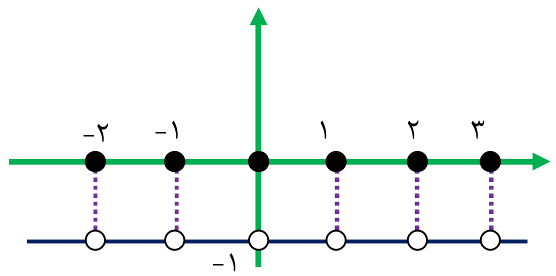
سؤال۶۶: معادله‌ی $2x^2-5x+2=\dfrac{1}{[x]+[-x]}$ چند ریشه دارد.

$$2x^2-5x+2=\dfrac{1}{[x]+[-x]}\rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x\in Z} 2x^2-5x+2=\dfrac{1}{0} \quad \text{غ ق ق} \\ \xrightarrow{x\notin Z} 2x^2-5x+2=\dfrac{1}{-1}\Rightarrow 2x^2-5x+2=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2-5x+3=0\Rightarrow (x-1)(2x-3)=0\Rightarrow \begin{cases} x=1\in Z \quad \text{غ ق ق} \\ x=\dfrac{3}{2}\notin Z \quad \checkmark \end{cases}$$

رسم نمودار $y=[x]+[-x]$

$$[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x\in Z \\ -1 & x\notin Z \end{cases}$$



$$\begin{cases} \xrightarrow{x\in Z} [x]+[-x]=0 \\ \xrightarrow{x\notin Z} [x]+[-x]=-1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \xrightarrow{x\in Z} [-x]=-[x] \\ \xrightarrow{x\notin Z} [-x]=-[x]-1 \end{cases}}$$

سؤال۶۷: مجموعه جواب معادله‌ی $3[x]+[-x]+5=0$ کدام است.

$$x\in Z\Rightarrow 3x-x+5=0\Rightarrow 2x+5=0\Rightarrow x=-\dfrac{5}{2}\notin Z$$

$$x\notin Z\Rightarrow 3[x]+(-[x]-1)+5\Rightarrow 2[x]-1+5\Rightarrow 2[x]=-4$$

$$\Rightarrow [x]=-2\Rightarrow -2\le x<-1\xrightarrow{x\notin Z} -2<x<-1$$

سؤال۶۸: معادله‌ی $2=\left[\dfrac{x-1}{x}\right]+\left[\dfrac{x+1}{x}\right]$ چند ریشه در بازه‌ی $(0/1, 0/2)$ دارد.

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

$$\left[\frac{x+1}{x}\right]+\left[\frac{x-1}{x}\right]=\left[1+\frac{1}{x}\right]+\left[1-\frac{1}{x}\right]=2$$

$$\Rightarrow 1+\left[\frac{1}{x}\right]+1+\left[-\frac{1}{x}\right]=2\Rightarrow\left[\frac{1}{x}\right]+\left[-\frac{1}{x}\right]=0$$

$$\boxed{[u]+[-u]=\begin{cases}0 & u\in Z\\ -1 & u\notin Z\end{cases}}$$

پس اگر $\left[\frac{1}{x}\right]+\left[-\frac{1}{x}\right]=0$ است یعنی: $\frac{1}{x}=k\in Z$ بنابراین $x=\frac{1}{k}$ لذا:

$$0/1<\frac{1}{k}<0/2\Rightarrow 5<k<10\xrightarrow{k\in Z}k=6,7,8,9\Rightarrow x=\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9}$$

📖 سؤال۶۹: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]+[-x]+\sqrt{\sin\pi x-1}$ مقدار $f\left(-\frac{1}{2}f(x)\right)$ کدام است.

(خارج ریاضی ـ ۸۹)

دامنه تابع: $\sin\pi x-1\geq 0\Rightarrow\sin\pi x\geq 1\xrightarrow{\sin\pi x\leq 1}\sin\pi x=1\Rightarrow\pi x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow x=2k+\frac{1}{2}\Rightarrow D_f:\left\{x\,|\,x=2k+\frac{1}{2},k\in Z\right\}$$

یعنی مقادیر x ، غیرصحیح هستند.

$$\Rightarrow f(x)=[x]+[-x]+0\ \underline{\underline{x\notin Z}}\ -1\Rightarrow f(x)=-1,x\notin Z\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}f(x)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$$

📖 سؤال۷۰: تابع با ضابطه های $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=x^2+x-2$ مفروض اند. اگر $g(f(x))=-2$ باشد، مجموعه مقادیر x کدام است. (داخل ریاضی ۸۹)

۱) $R-Z$ ۲) Z ۳) R ۴) ϕ

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\in R-Z\\ 0 & x\in Z\end{cases}\Rightarrow g(f(x))=\begin{cases}g(-1) & x\in R-Z\\ g(0) & x\in Z\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(f(x))=\begin{cases}-2 & x\in R-Z\\ -2 & x\in Z\end{cases}\Rightarrow g(f(x))=-2$$

بنابراین برای $g(f(x))=-2,x\in R$ هر است.

📖 سؤال۷۱: اگر $f(x)=\frac{3^{[-x]}}{3^{-[x]}}$ باشد حاصل $f(\sqrt{1})+f(\sqrt{2})+f(\sqrt{3})+\ldots+f(\sqrt{10})$ کدام است.

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) ۲۴ ۳) ۲۱ ۴) $\frac{7}{3}$

$$f(x)=3^{[-x]+[x]}=\begin{cases}3^0 & x\in Z\\ 3^{-1} & x\notin Z\end{cases}=\begin{cases}1 & x\in Z\\ \frac{1}{3} & x\notin Z\end{cases}$$

اعداد $\sqrt{1},\sqrt{4},\sqrt{9}$ صحیح هستند یعنی حاصل عبارت به ازای ۳ مقدار برابر یک و به ازای هفت مقدار برابر $\frac{1}{3}$ می شود.

$$f(\sqrt{1})+f(\sqrt{2})+\ldots+f(\sqrt{10})=3\times 1+7\times\frac{1}{3}=3+\frac{7}{3}=\frac{16}{3}$$

📖 سؤال۷۲: معادله $2x-[-x]=[x]+[2x]$ در بازه‌ی $\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$ چند جواب دارد.

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$$\underbrace{2x-[2x]}_{0\le \text{عددی} <1}=\underbrace{[x]+[-x]}_{-1\ \text{یا}\ 0}$$

تساوی عبارت سمت چپ و راست زمانی رخ می دهد که هر دو عبارت صفر شوند یعنی $x\in Z$ باشد.

$$x\in\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)\xrightarrow{x\in Z}x=2,3$$

📖 سؤال۷۳: معادله‌ی $2x^2+3x=[x]+[-x]$ چند جواب دارد.

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$x\in Z: 2x^2+3x=0\Rightarrow x(2x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \in Z\ \checkmark\\ x=-\frac{3}{2} & \notin Z\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$x\notin Z: 2x^2+3x=-1\Rightarrow 2x^2+3x+1=0\Rightarrow (x+1)(2x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1 & \in Z\ \text{غ ق ق}\\ x=-\frac{1}{2} & \notin Z\ \checkmark\end{cases}$$

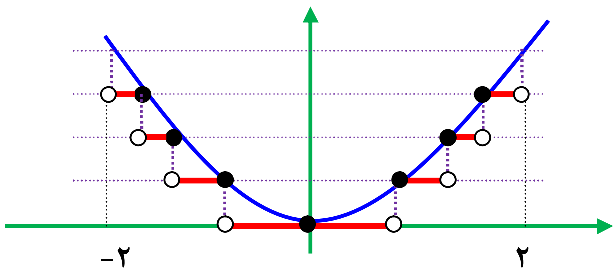
$\Rightarrow x\in\left\{0,-\frac{1}{2}\right\}$ معادله دو جواب دارد.

رسم نمودار $[f(x)]$

۱. خطوط افقی $y=k\in Z$ را رسم می کنیم که نمودار $y=k\in Z$ را قطع کند. این نقاط را توپر می کنیم.
۲. آنگاه این نقاط را نیز روی خط افقی پایین تصویر کرده و تصویر نقاط را توخالی می کنیم.
۳. نقاط توپر و توخالی ای که روی خطوط افقی بدست آمده است را به هم وصل می کنیم.
۴. پاره خط های افقی حاصل شده نمودار $[f(x)]$ است.

📖 سؤال۷۴: نمودار تابع $y=[x^2]$ روی بازه‌ی $x\in(-2,2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است. (خارج تجربی ۹۱)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

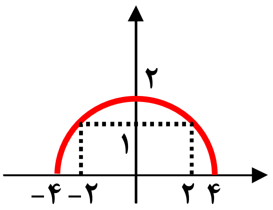


مشخص است که دو نمودار از ۷ پاره خط تشکیل شده است.

سؤال۷۵: شکل مقابل نمودار تابع f را نشان می دهد مجموعه‌ی جواب معادله‌ی $f([f(x)])=۲$ کدام است.

۱) $[-۴,۴]$ ۲) $[-۴,-۲)\cup(۲,۴]$

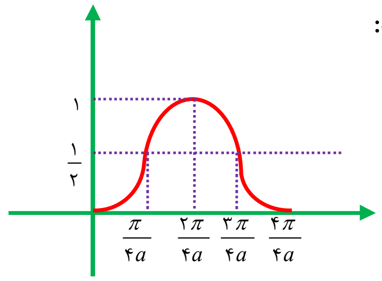
۳) $(-۲,۲)$ ۴) $\{۰\}$



با توجه به شکل واضح است که $f(۰)=۲$ پس:

$[f(x)]=۰\Rightarrow ۰\le f(x)<۱\Rightarrow x\in[-۴,-۲)\cup(۲,۴]$

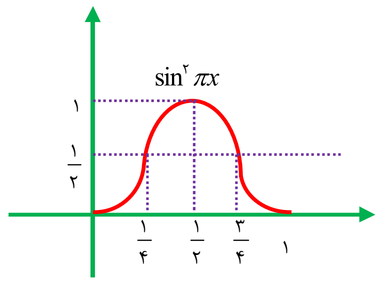
مهم: نمودار $\sin^۲ ax$ به صورت زیر است:

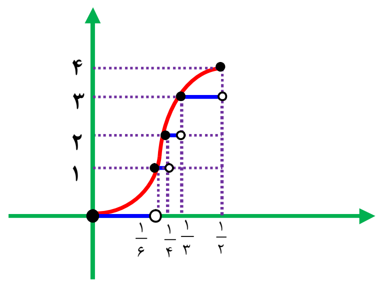


سؤال۷۶: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[۴\sin^۲\pi x]$ روی بازه‌ی $\left(۰,\frac{۱}{۲}\right)$ از چند پاره خط ساخته شده است.

(خارج ۸۹)

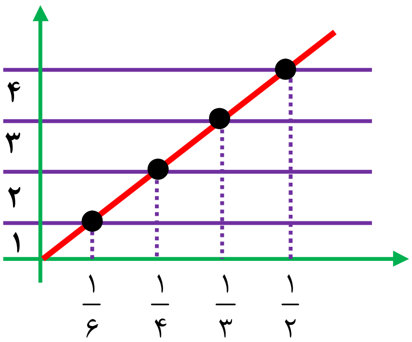
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴





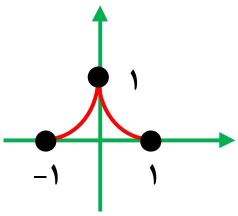
روش دوم: نمودار $f(x)=4\sin^2 \pi x$ را با چند نقطه می کشیم:

x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
y	0	$4\sin^2\frac{\pi}{6}=1$	$4\sin^2\frac{\pi}{4}=2$	$4\sin^2\frac{\pi}{3}=3$	$4\sin^2\frac{\pi}{2}=4$



پس با تصویر نمودار روی خطوط افقی $y=0, y=1, y=2, y=3$ چهار پاره خط داریم.

سؤال ۷۷: اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $f([x])$ کدام است.

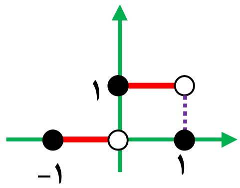


دامنه‌ی $f(x)$، $[-1,1]$ است.

$-1\le x<0 \Rightarrow y=f([x])=f(-1)=0$

$0\le x<1 \Rightarrow y=f([x])=f(0)=1$

$x=1 \Rightarrow y=f([x])=f(1)=0$



$$۱۴)\ [x+y]=\begin{cases}[x]+[y] & 0\le P_x+P_y<1\\ [x]+[y]+1 & 1\le P_x+P_y<2\end{cases}$$

این تساوی را به صورت $[x]+[y]\le[x+y]\le[x]+[y]+1$ نیز نشان می دهند.

اثبات:

$$\begin{cases}x=[x]+P_x\\ 0\le P_x<1\end{cases}\quad,\quad\begin{cases}y=[y]+P_y\\ 0\le P_y<1\end{cases}$$

$$\Rightarrow [x+y]=[([x]+P_x)+([y]+P_y)]=[x]+[y]+[P_x+P_y]$$

$0\le P_x+P_y<2$ است. حال اگر $0\le P_x+P_y<1$ ، آنگاه $[P_x+P_y]=0$ و $[x+y]=[x]+[y]$ و اگر $1\le P_x+P_y<2$، آنگاه $[P_x+P_y]=1$ و $[x+y]=[x]+[y]+1$.

سؤال۷۸: با توجه به معادله $[x]+[y]+۳=۰$ حدود $x+y$ را به دست آورید.

پاسخ: با توجه به ویژگی مطرح شده:

$$[x]+[y]+۳=۰=\begin{cases}[x+y]\\[x+y]-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[x+y]+۳=۰\Rightarrow[x+y]=-۳\Rightarrow-۳\le x+y<-۲\\[x+y]+۲=۰\Rightarrow[x+y]=-۲\Rightarrow-۲\le x+y<-۱\end{cases}\Rightarrow-۳\le x+y<-۱$$

پس حدود $x+y$ عبارت است از $[-۳,-۱)$.

سؤال۷۹: مجموعه‌ی جواب معادله $Max\{k\mid k\le ۲x, k\in Z\}=۱$ کدام است؟

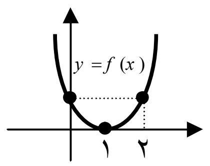
$$[۲x]=۱\Rightarrow ۱\le ۲x<۲\Rightarrow \boxed{\frac{۱}{۲}\le x<۱}$$

سؤال۸۰: مجموعه‌ی جواب معادله $Max\{k\mid k\le|x|, k\in Z\}>۲$ کدام است؟

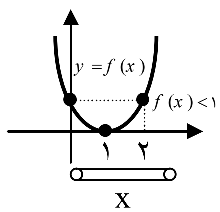
$$[|x|]>۲\Rightarrow[|x|]=۳,۴,۵,\ldots\Rightarrow|x|\ge ۳\Rightarrow\boxed{x\le -۳ \text{ یا } x\ge ۳}$$

سؤال۸۱: نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل مفروض است.

مجموعه جواب نامعادله‌ی $Max\{n\mid n\le f(x), n\in Z\}$ کدام است؟



$$Max\{n\mid n\le f(x), n\in Z\}\le ۰\Rightarrow[f(x)]\le ۰\Rightarrow[f(x)]=\ldots,-۲,-۱,۰\Rightarrow\boxed{f(x)<۱}$$

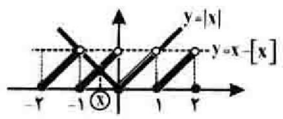


بچه ها! نمودار بالا داره نشون میده که در محدوده‌ی $۲>x>۰$ رابطه $f(x)<۱$ برقراره.

پس مجموعه‌ی جواب این نامعادله $۲>x>۰$ هست.

سؤال۸۲: مجموعه جواب معادله‌ی $[x]-x+[x]=۰$ به صورت $[۰,۱)\cup\{a\}$ می باشد. a چیست؟

معادله‌ی بالا رو به صورت $|x|=x-[x]$ می نویسم و از روش هندسی مجموعه جواب رو به دست می آرم. همون طور که در شکل زیر می بینید دو تابع $|x|=x-[x]$ و $y=|x|$ علاوه بر این که در بازه‌ی $[۰,۱)$ با هم برخورد دارن در یک نقطه به طول منفی هم، یکدیگر رو قطع می کنن. با توجه به شکل، این نقطه در محدوده‌ی $۰>x>-۱$ قرار داره. پس:

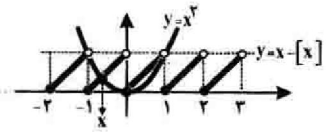


$$(-۱<x<۰)\ |x|-x+[x]=۰ \xrightarrow[\text{را بازنویسی می کنیم}]{\text{معادله}} -x-x-۱=۰\rightarrow-۲x=۱\rightarrow x=\frac{-۱}{۲}$$

بنابراین مجموعه جواب این معادله $[۰,۱)\cup\left\{\frac{-۱}{۲}\right\}$ هست. پس: $\boxed{a=\frac{-۱}{۲}}$

سؤال۸۳: معادله‌ی $x^۲+[x]-x=۰$ چند ریشه دارد و ریشه‌ی منفی آن کدام است؟

بچه ها! کافیه معادله‌ی بالا رو به صورت $x^۲=x-[x]$ بنویسید و تعداد جواب های معادله رو از روش هندسی به دست بیارید. همون طور که در شکل روبرو می بینید دو تابع $y=x^۲$ و $y=x-[x]$ فقط در دو نقطه برخورد دارن. پس معادله فقط دو ریشه داره. یه ریشه‌ی صفر و



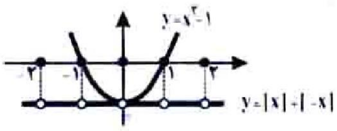
یه ریشه‌ی منفی. کمی به شکل دقت کنید، می بینید که ریشه‌ی منفی این معادله در محدوده‌ی $-1<x<0$ قرار داره پس:

$$-1<x<0 \xrightarrow[\text{را بازنویسی می کنیم.}]{\text{معادله } x^2+[x]-x=0} x^2+(-1)-x=0 \to x^2-x-1=0 \xrightarrow{\Delta=5} x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \to$$

$$\text{ریشه‌ی منفی} \to x=\boxed{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

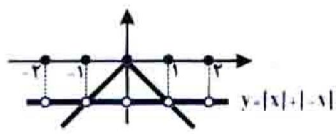
سؤال ۸۴: معادله‌ی $[x]+1-x^2+[-x]=0$ چند ریشه داره؟

کافیه معادله‌ی بالا رو به صورت $[x]+[-x]=x^2-1$ بنویسیم و از روش هندسی، تعداد ریشه های معادله رو به دست بیاریم. همون طور که می بینید دو تابع $y=x^2-1$ و $y=[x]+[-x]$ فقط در دو نقطه به طول های ۱ و ۱- برخورد دارن. پس معادله‌ی بالا دارای دو ریشه‌ی $x=1$ و $x=-1$ داره.



سؤال ۸۵: معادله‌ی $[x]+|x|+[-x]=0$ چند ریشه داره؟

$$[x]+[-x]=-|x| \quad \text{روش هندسی}\to$$



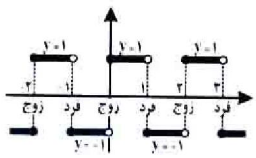
تنها نقطه‌ی برخورد ($x=0$) هست. بنابراین معادله فقط یک ریشه داره.

رسم نمودار تابع $y=(-1)^{[x]}$

بچه ها! همون طور که می دونید: $(-1)^{\text{زوج}}=1$ و $(-1)^{\text{فرد}}=-1$

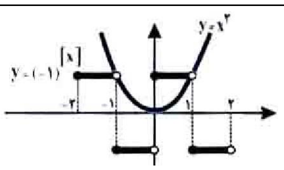
با توجه به این تساوی ها می خوام نمودار تابع $y=(-1)^{[x]}$ رو رسم کنم. از اون جایی که $[x]$ ، عدد صحیح هست، از دو حالت نمی تونه خارج باشه. یعنی (زوج $=[x]$ یا فرد $=[x]$) بنابراین می تونم تابع $y=(-1)^{[x]}$ رو به صورت دو ضابطه ای بنویسم و بعدش هر ضابطه رو در دامنه‌ی خودش رسم کنم.

$$y=(-1)^{[x]} \to \begin{cases} \xrightarrow{[x]=\text{زوج}} y=1 \\ \xrightarrow{[x]=\text{فرد}} y=-1 \end{cases} \to \begin{cases} \xrightarrow{\overbrace{\text{زوج} \le x < \text{فرد}}^{\text{۱ واحد فاصله}}} y=1 \\ \xrightarrow{\overbrace{\text{زوج} \le x < \text{فرد}}^{\text{۱ واحد فاصله}}} y=-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{رسم نمودار}}$$



سؤال ۸۶: معادله‌ی $(-1)^{[x]}-x^2=0$ چند جواب داره؟

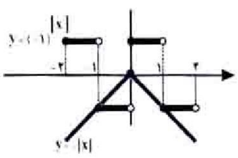
$$(-1)^{[x]}=x^2 \to$$



$\to$ دو تابع برخوردی با هم ندارن $\to$ معادله‌ی بالا جواب نداره

سؤال ۸۷: معادله‌ی $(-1)^{[x]}+|x|=0$ چند جواب داره؟

$$(-1)^{[x]}=-|x| \to$$



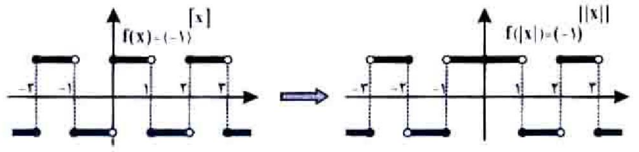
معادله دو جواب داره. $\to$ $x=-1, x=1$ طول نقاط برخورد دو تابع هستن. $\to$

سؤال۸۸: بزرگترین بازه ای که تابع $y=(-1)^{[|x|]}$ در آن پیوسته می باشد چیست؟

۱) رسم نمودار $f(|x|)$: ۱) نمودار $f(x)$ رو رسم می کنیم.

۲) قسمتی از f رو که در سمت چپ محور y هاست، پاک می کنیم.

۳) به جای قسمت پاک شده، باید قسمت باقیمانده از نمودار f رو که در سمت راست محور y ها قرار داره، نسبت به محور y قرینه کنیم.



→ بازه‌ی $(-1,1)$ بزرگترین بازه‌ی پیوستگیه

سؤال۸۹: اگر $a=121/48$ و $b=0/12$ حاصل $\lfloor \log a\rfloor+\lfloor \log b\rfloor$ کدام است؟ (آزاد ۷۴)

بچه ها برای محاسبه $\left[\log_k^a\right]$ باید عدد صحیحی مانند n رو پیدا کنین که $k^n\le a<k^{n+1}$

$$10^2<121/48<10^3\to\log10^2<\log121/48<\log10^3\to2<\log121/4823\to\lfloor\log a\rfloor=2$$

$$10^{-1}<0/12<10^0\to\log10^{-1}<\log0/12<\log10^0\to-1<\log0/12<0\to\lfloor\log b\rfloor=-1$$

$$\Rightarrow\lfloor\log a\rfloor+\lfloor\log b\rfloor=2-1=1$$

سؤال۹۰: برد تابع جز صحیح $y=\left\lfloor\frac{3x}{x^2+1}\right\rfloor$ شامل چند عدد صحیح است؟ (آزاد ۸۶)

بچه ها این رو بدونین که $-\frac{a}{2}\le\frac{ax}{x^2+1}\le\frac{a}{2}$ (تو مثلثات براتون اثبات کردم)

$$\to-\frac{3}{2}\le\frac{3x}{x^2+1}\le\frac{3}{2}\to\left\lfloor\frac{3x}{x^2+1}\right\rfloor=-2,-1,0,1$$

سؤال۹۱: ماکزیمم مجموعه $\{n:n\in Z,nx^2+n\le x^2\}$ کدام است؟ (آموزش و پرورش ۸۴)

$$\mathrm{Max}\{n:n\in Z,nx^2+n\le x^2\}=\mathrm{Max}\left\{n:n\in Z:n\le\frac{x^2}{x^2+1}\right\}$$

$$0\le\frac{x^2}{x^2+1}<1\to\left\lfloor\frac{x^2}{x^2+1}\right\rfloor=0$$

سؤال۹۲: اگر $(a,b)\cup\{c\}$ مجموعه جواب معادله $3\lfloor x\rfloor+2\lfloor -x\rfloor=5$ باشد مقدار عددی $a+b+c$ کدام است؟ (آموزش و پرورش ۸۴)

$$3\lfloor x\rfloor+2\lfloor -x\rfloor=5$$

$$\begin{cases}x\in Z\to3\lfloor x\rfloor-2\lfloor x\rfloor=5\to\lfloor x\rfloor=5\to x=5\quad(1)\\x\notin Z\to3\lfloor x\rfloor+2(-\lfloor x\rfloor-1)=5\to\lfloor x\rfloor-2=5\to\lfloor x\rfloor=7\\\to7\le x<8\xrightarrow{x\notin Z}7<x<8\quad(2)\end{cases}$$

$$(1)\cup(2)=7<x<8\cup\{5\}=(7,8)\cup\{5\}\to a+b+c=7+8+5=20$$

سؤال۹۳: معادله $\left\lfloor \frac{x}{۲} \right\rfloor = \lfloor x^{۲} \rfloor + \lfloor x \rfloor$ چند ریشه دارد؟ (آموزش و پرورش ۸۵)

$$۲\lfloor x \rfloor + ۲\lfloor x^{۲} \rfloor = x$$

سمت چپ معادله همواره صحیح است، پس باید سمت راست آن نیز همواره صحیح باشد یعنی $x \in Z$ پس:

$$\lfloor x^{۲} \rfloor = x^{۲} \text{ و } \lfloor x \rfloor = x$$

$$\to ۲x + ۲x^{۲} = x \to x + ۲x^{۲} = ۰ \to x(۱+۲x) = ۰ \to \begin{cases} x = ۰ & \in Z \ \checkmark \\ x = -\frac{۱}{۲} & \notin Z \ \times \end{cases}$$

سؤال۹۴: معادله $\lfloor x \rfloor = x + \sqrt{x} + \frac{۱}{۴}$ چند جواب دارد؟ (گزینه۲ ـ ۸۵)

این معادله هیچ وقت جواب نمی تونه داشته باشد.

$$\underbrace{x - \lfloor x \rfloor}_{۰ \le \ <۱} = \underbrace{-(\sqrt{x} + \frac{۱}{۴})}_{\text{همواره منفی}}$$

سؤال۹۵: چند عدد طبیعی در نامعادله $\lfloor ۲x \rfloor < \lfloor x + ۵ \rfloor$ صدق می کند؟ (گزینه۲ـ ۸۵)

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor < \lfloor x \rfloor + ۵ \to \left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor < ۵ \to \left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor \le ۴ \to x + \frac{۱}{۲} < ۵ \to x < ۴/۵ \xrightarrow{x \in N} x = ۱,۲,۳,۴$$

سؤال۹۶: مجموعه جواب معادله $\left\lfloor \frac{x+۲}{x} \right\rfloor = ۲$ کدام است؟ (گزینه ۲ـ ۸۶)

$$\left\lfloor \frac{x+۲}{x} \right\rfloor = ۲ \to ۱ + \left\lfloor \frac{۲}{x} \right\rfloor = ۲ \to \left\lfloor \frac{۲}{x} \right\rfloor = ۱$$

$$۱ \le \frac{۲}{x} < ۲ \to \frac{۱}{۲} < \frac{x}{۲} \le ۱ \to ۱ < x \le ۲$$

سؤال۹۷: اگر $x = \lfloor x \rfloor + P$, $-x = \lfloor -x \rfloor + P'$ حاصل $P + P'$ کدام است؟ (گزینه۲ ـ ۸۶)

$$\begin{cases} x = \lfloor x \rfloor + P \to P = x - \lfloor x \rfloor \\ -x = \lfloor -x \rfloor + P' \to P' = -x - \lfloor -x \rfloor \end{cases} \to P + P' = -(\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor) = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ ۱ & x \notin Z \end{cases}$$

سؤال۹۸: اگر $P = \frac{۱}{x^{۲}+۲} - \left\lfloor \frac{۱}{x^{۲}+۲} \right\rfloor$ و $x \ne ۰$ آنگاه محدوده P کدام است؟

$$x \ne ۰ \to x^{۲} > ۰ \to x^{۲} + ۲ > ۲ \to ۰ < \frac{۱}{x^{۲}+۲} < \frac{۱}{۲} \to \begin{cases} ۰ < \frac{۱}{x^{۲}+۲} < \frac{۱}{۲} \\ \left\lfloor \frac{۱}{x^{۲}+۲} \right\rfloor = ۰ \end{cases} \to ۰ < p < \frac{۱}{۲}$$

سؤال۹۹: دامنه تابع $y = \frac{x+۱}{\lfloor \sin x \rfloor}$ در بازه $(۰,۲\pi)$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$D_f = (۰,۲\pi) - \{x \mid \lfloor \sin x \rfloor = ۰\}$$

$$\lfloor \sin x \rfloor = ۰ \to ۰ \le \sin x < ۱ \xrightarrow{x \in (۰,۲\pi)} \begin{cases} ۰ < x < \frac{\pi}{۲} \\ \frac{\pi}{۲} < x \le \pi \end{cases} \to D_f = (\pi, ۲\pi) \cup \left\{\frac{\pi}{۲}\right\}$$

$$\to D_f = (۳/۱۴, ۶/۲۸) \cup \{۱/۵۷\} \to \text{اعداد صحیح داخل دامنه} \to ۴,۵$$

سؤال۱۰۰: برد تابع $2x-20\left\lfloor \frac{x}{10}\right\rfloor-5$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$A=2x-20\left\lfloor \frac{x}{10}\right\rfloor-5=20\left(\frac{x}{10}-\left\lfloor \frac{x}{10}\right\rfloor\right)-5$$

$$0\le \frac{x}{10}-\left\lfloor \frac{x}{10}\right\rfloor<1\to 0\le 20\left(\frac{x}{10}-\left\lfloor \frac{x}{10}\right\rfloor\right)<20$$

$\to A=-5\le 20\left(\frac{x}{10}-\left\lfloor \frac{x}{10}\right\rfloor-5\right)<15\to$ اعداد صحیح $\to -5,-4,\dots,14\to$ تعداد $14-(-5)+1=20$

سؤال۱۰۱: اگر $\lfloor x^2-x\rfloor=6$ و $\lfloor 5x^2-2x\rfloor=18$ آنگاه $\lfloor 2x^2-x\rfloor$ کدام است؟

$\begin{cases}\lfloor x^2-x\rfloor=6\\ \lfloor 5x^2-2x\rfloor=18\end{cases}\to\begin{cases}6\le x^2-x<7\\ 18\le 5x^2-2x<19\end{cases}\to$ جمع $\to 24\le 6x^2-3x<26\to$

بر ۳ تقسیم $\to 8\le 2x^2-x<8/\dots\to\lfloor 2x^2-x\rfloor=8$

سؤال۱۰۲: معادله $\frac{x}{2}-\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor+\left\lfloor-\frac{x}{3}\right\rfloor$ چند ریشه در بازه $(-20,20)$ دارد؟

$$\begin{cases}0\le \frac{x}{2}-\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor<1\\ \left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor+\left\lfloor-\frac{x}{3}\right\rfloor=\begin{cases}0 & x=3k\\ -1 & x\ne 3k\end{cases}\end{cases}$$

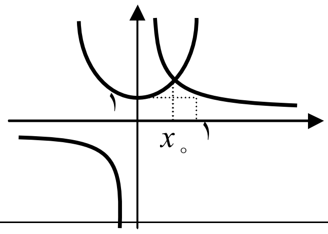
پس تساوی زمانی رخ می دهد که $\frac{x}{2}-\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=0$ یا $\frac{x}{2}\in Z$ یا $x=2k'$ از طرفی $x=3k$ پس $x=6k''$

$\to x=-18,-12,-6,0,6,12,18$

سؤال۱۰۳: معادله $\frac{[x]}{|x|}=x^2+1$ چند ریشه در بازه $(-\infty,2)$ دارد؟

سمت راست معادله همواره مثبت است. پس سمت چپ معادله نیز باید مثبت باشد، $|x|$ هم مثبت است اما چون در مخرج است پس $x\ne 0$ ، پس باید $\lfloor x\rfloor$ مثبت باشد پس باید جواب معادله را در بازه $(0,2)$ بیابیم اگر $1>x>0$ باشد آنگاه داریم: $\lfloor x\rfloor=0$

$\to 0=x^2+1$ ✗



پس باید $2>x\ge 1$ که در این صورت $\lfloor x\rfloor=1, |x|=x$ پس معادله $\frac{1}{x}=x^2+1$ داریم.
نقطه تقاطع در بازه $(0,1)$ است که با فرض در تناقض است پس معادله فوق فاقد جواب است.

سؤال۱۰۴: ریشه های معادله $6x-2\lfloor 2x\rfloor=3$ چقدر است؟

$$6x-2=2\lfloor 2x\rfloor$$

$$\lfloor 2x\rfloor=\frac{6x-3}{2}=k\in Z\to x=\frac{2k+3}{6}\to\left\lfloor\frac{2k+3}{3}\right\rfloor=k\to k\le\frac{2k+3}{3}<k+1$$

$$\to 3k\le 2k+3<3k+3\to\begin{cases}3k\le 2k+3\\ 3k+3<3k+3\end{cases}\to\begin{cases}k\le 3\\ k>0\end{cases}\to 0<k\le 3\xrightarrow{k\in Z}k=1,2,3$$

$$\xrightarrow{x=\frac{2k+3}{6}}\left\{\frac{5}{6},\frac{7}{6},\frac{9}{6}\right\}$$

📖 **سؤال۱۰۵: معادله** $\left\lfloor \frac{x+۲}{۳} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-۱}{۳} \right\rfloor = ۱$ **چند ریشه زوج دارد؟**

$$\left\lfloor \frac{x+۲}{۳} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-۱}{۳} \right\rfloor = ۱ \to \left\lfloor \frac{(x-۱)+۳}{۳} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-۱}{۳} \right\rfloor = ۱ \to \left\lfloor \frac{x-۱}{۳}+۱ \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-۱}{۳} \right\rfloor = ۱$$

$$\to \left\lfloor \frac{x-۱}{۳} \right\rfloor + ۱ + \left\lfloor \frac{x-۱}{۳} \right\rfloor = ۱ \to ۲\left\lfloor \frac{x-۱}{۳} \right\rfloor = ۰ \to \left\lfloor \frac{x-۱}{۳} \right\rfloor = ۰$$

$$\to ۰ \le \frac{x-۱}{۳} < ۱ \to ۰ \le x-۱ < ۳ \to ۱ \le x < ۴ \to x = ۲$$

📖 **سؤال۱۰۶: حاصل عبارت** $[۲\sqrt{۵^{۵۰}-۵^{۲۵}+۱}]$ **کدام است؟**

$$۲\sqrt{۵^{۵۰}-۵^{۲۵}+\frac{۱}{۴}} < ۲\sqrt{۵^{۵۰}-۵^{۲۵}+۱} < ۲\sqrt{۵^{۵۰}} \to ۲\sqrt{\left(۵^{۲۵}-\frac{۱}{۲}\right)^۲} < ۲\sqrt{۵^{۵۰}-۵^{۲۵}+۱} < ۲\times ۵^{۲۵}$$

$$\to ۲\left(۵^{۲۵}-\frac{۱}{۲}\right) < ۲\sqrt{۵^{۵۰}-۵^{۲۵}+۱} < ۲\times ۵^{۲۵} \to ۲\times ۵^{۲۵}-۱ < ۲\sqrt{۵^{۵۰}-۵^{۲۵}+۱} < ۲\times ۵^{۲۵}$$

$$\to \left\lfloor ۲\sqrt{۵^{۵۰}-۵^{۲۵}+۱} \right\rfloor = ۲\times ۵^{۲۵}-۱$$

📖 **سؤال۱۰۷: مجموعه جواب معادله** $[x+|x|]=|x+[x]|$ **چیست؟**

سمت چپ عددی صحیح است پس سمت راست هم باید صحیح باشد. یعنی باید $x \in Z$

$$\to [x+|x|]=|x+x|=|۲x|=۲|x| \to x+|x|=۲|x| \to x=|x| \to x\ge ۰, x\in Z$$

📖 **سؤال۱۰۸: مجموعه جواب** $x+\lfloor -x \rfloor = \left\lfloor \frac{۱}{x} \right\rfloor$ **کدام است؟**

$$x = \left\lfloor \frac{۱}{x} \right\rfloor - \lfloor -x \rfloor \to x \in Z$$

$$x - x = \left\lfloor \frac{۱}{x} \right\rfloor \to \left\lfloor \frac{۱}{x} \right\rfloor = ۰ \to ۰ \le \frac{۱}{x} < ۱ \to x > ۱ \xrightarrow{x\in Z} x \in \{۲,۳,۴,۵,...\}$$

📖 **سؤال۱۰۹: معادله** $\sqrt{x-\lfloor x \rfloor} = [x-\sqrt{x}]$ **چند جواب دارد؟**

سمت چپ معادله صحیح است پس باید $\sqrt{x-\lfloor x \rfloor}$ نیز صحیح باشد پس $x-\lfloor x \rfloor$ باید مربع یک عدد صحیح باشد اما:

$$۰ \le x - \lfloor x \rfloor < ۱$$

پس باید $x-\lfloor x \rfloor = ۰$ یا $x=\lfloor x \rfloor$ یعنی $x\in N\cup\{۰\}$ یا $x\ge ۰$

$$\to \sqrt{x-\lfloor x \rfloor} = ۰ \to ۰ \le x-\sqrt{x} < ۱ \to ۰ \le x - \sqrt{x} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} < ۱ \to \left(\sqrt{x}-\frac{۱}{۲}\right)^۲ < \frac{۵}{۴}$$

$$\to -\frac{\sqrt{۵}}{۲} < \sqrt{x} - \frac{۱}{۲} < \frac{\sqrt{۵}}{۲} \to \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} < \sqrt{x} < \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \xrightarrow{x\ge ۰} ۰ \le x < ۲/۶ \xrightarrow{x\in N} x = ۰,۱,۲$$

📖 **سؤال۱۱۰: تابع** $y=\frac{\lfloor x+1\rfloor}{x-1}+x$ **محور طول ها را در چند نقطه قطع می کند؟**

$$\frac{[x+1]}{x-1}+x=0\xrightarrow{x\neq 1}\frac{[x+1]}{x-1}=-x\rightarrow[x+1]=-x^2+x=x-x^2\rightarrow\lfloor x\rfloor+1=x-x^2\rightarrow\underbrace{x-\lfloor x\rfloor}_{0\le\ <1}=\underbrace{1+x^2}_{\ge 1}$$

تساوی فوق امکان پذیر نیست پس معادله فوق جواب ندارد.

📖 **سؤال۱۱۱: معادله** $(x^2+1)\lfloor x\rfloor=|x|(x^2+3)$ **چند ریشه دارد؟**

$$\frac{[x]}{|x|}=\frac{x^2+3}{x^2+1}>1$$

پس باید $\lfloor x\rfloor>0$ باشد یعنی $x\ge 1$ اما در درس به شما گفتم که برای اعداد مثبت $\frac{[x]}{x}\le 1$ پس معادله جواب نداره.

اما توجه کنین تنها جواب معادله تنها می تونه $x=0$ باشه که توی دامنه معادله اصلی هست.

📖 **سؤال۱۱۲: مجموعه جواب معادله** $\lfloor x\rfloor^2-3\lfloor x\rfloor-10=0$ **کدام است؟**

$$(\lfloor x\rfloor-5)(\lfloor x\rfloor+2)=0\rightarrow\begin{cases}\lfloor x\rfloor=5\\ \lfloor x\rfloor=-2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}5\le x<6\\ \\ -2\le x\end{cases}\rightarrow x\in[-2,-1)\cup[5,6)$$

📖 **سؤال۱۱۳: معادله** $\lfloor 2-x^2\rfloor=|2-x^2|$ **چند جواب دارد؟**

سمت چپ تساوی صحیح است پس باید سمت راست معادله و در نتیجه $2-x^2$ عددی صحیح باشد. پس:

$$2-x^2=|2-x^2|\xrightarrow{u=|u|\Rightarrow u\ge 0}2-x^2\ge 0\rightarrow x^2\le 2\rightarrow-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$$

📖 **سؤال۱۱۴: معادله** $\left\lfloor\sqrt{\frac{x+7}{2}}\right\rfloor=\frac{x+1}{2}$ **چند جواب دارد؟**

$$\frac{x+1}{2}\in Z\rightarrow\frac{x+1}{2}=k$$

$$\rightarrow\left\lfloor\sqrt{\frac{x+7}{2}}\right\rfloor=\frac{x+1}{2}\rightarrow\left\lfloor\sqrt{\frac{x+1+6}{2}}\right\rfloor=\frac{x+1}{2}\rightarrow\left\lfloor\sqrt{\frac{x+1}{2}+3}\right\rfloor=\frac{x+1}{2}\rightarrow[\sqrt{k+3}]=\mathrm{k}$$

$$\mathrm{k}\le\sqrt{k+3}<k+1$$

$$k\le\sqrt{k+3}\rightarrow k^2\le k+3\rightarrow k^2-k-3<0\rightarrow\frac{1-\sqrt{13}}{2}\le k\le\frac{1+\sqrt{13}}{2}\qquad(1)$$

$$\rightarrow\sqrt{k+3}<k+1\rightarrow k+3<k^2+2k+1\rightarrow k^2+k-2<0$$

$$\rightarrow(k+2)(k-1)<0\rightarrow-2<k<1\qquad(2)$$

$$(1)\cap(2)\Rightarrow 1<k<\frac{1+\sqrt{13}}{2}\xrightarrow{k\in Z}k=2$$ یک جواب دارد

سؤال۱۱۵: معادله $\left\lfloor \frac{۲x}{x+۱} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۲}{x+۱} \right\rfloor = ۲$ **در بازه چند جواب دارد؟**

$$\left\lfloor \frac{۲(x+۱)-۲}{x+۱} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۲}{x+۱} \right\rfloor = ۲$$

$$\to ۲+\left\lfloor \frac{-۲}{x+۱} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۲}{x+۱} \right\rfloor = ۲ \to \left\lfloor \frac{-۲}{x+۱} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۲}{x+۱} \right\rfloor = ۰ \to \frac{۲}{x+۱} \in Z \to x+۱=\pm۱,\pm۲ \to x=۰,-۲,۱,-۳$$

سؤال۱۱۶: معادله $\lfloor \sin x + \cos x \rfloor = \lfloor tgx + \cot x \rfloor$ **در فاصله** $(۰,۵\pi)$ **چند ریشه دارد؟**

$$-\sqrt{۲} \le \sin x + \cos x \le \sqrt{۲} \to \lfloor \sin x + \cos x \rfloor \in \{-۲,-۱,۰,۱\}$$

اگر $tgx > ۰ \to tgx + \cot x \ge ۲ \to \lfloor tgx + \cot x \rfloor \ge ۲$ ✗

$$tgx < ۰ \to tgx + \cot x \le -۲ \to \lfloor tgx + \cot x \rfloor < -۱$$

حالت تساوی زمانی رخ می دهد که: $\lfloor \sin x + \cos x \rfloor = \lfloor tgx + \cot x \rfloor = -۲$

$$tgx + \cot x = -۲ \to tgx = \cot x = -۱$$

اگر $tgx = -۱$ داریم $\sin x = -\cos x$ یا $\sin x + \cos x = ۰$

پس $\lfloor \sin x + \cos x \rfloor = ۰$ که با فرض $\lfloor \sin x + \cos x \rfloor = ۰$ در تناقض است پس معادله‌ی بالا جواب ندارد.

سؤال۱۱۷: دامنه تعریف $f(x) = \sqrt{\sin^۲ x - \lfloor \sin x \rfloor}$ **کدام است؟**

$$-۱ \le \sin x \le ۱ \to \lfloor \sin x \rfloor = -۱,۰,۱$$

$$\xrightarrow{(۱)} f(x) = \sqrt{\sin^۲ x - ۱} \to \sin^۲ x - ۱ \ge ۰ \to \sin^۲ x \ge ۱ \to \sin^۲ x = ۱ \to \sin x = \pm ۱ \to x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲}$$

$$\xrightarrow{(۲)} f(x) = \sqrt{\sin^۲ x} \to \sin^۲ x \ge ۰ \to R$$

$$\xrightarrow{(۳)} f(x) = \sqrt{\sin^۲ x + ۱} \to \sin^۲ x + ۱ \ge ۰ \to R$$

$$\to (۱) \cup (۲) \cup (۳) \to R$$

سؤال۱۱۸: برد تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{۱-\lfloor x \rfloor}}$ **کدام است؟**

$$۱-\lfloor x \rfloor > ۰ \to \lfloor x \rfloor < ۱ \to x < ۱$$

$$x<۱: \begin{cases} ۰ \le x < ۱ \to f(x) = \frac{x}{\sqrt{۱-۰}} = x \to ۰ \le f(x) < ۱ & (۱) \\ x < ۰ \to \lfloor x \rfloor < ۰ \to ۱-\lfloor x \rfloor > ۰ \to f(x) < ۰ & (۲) \end{cases}$$

$$\to R_f = (۱) \cup (۲) = f(x) < ۱$$

سؤال۱۱۹: برد تابع $\lfloor \sin x - ۲\cos x + ۲\sqrt{۵} \rfloor$ **شامل چند عدد صحیح می شود؟**

توجه: $\boxed{-\sqrt{a^۲+b^۲} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^۲+b^۲}}$

$$\to -\sqrt{۵} \le \sin x - ۲\cos x \le \sqrt{۵} \to \sqrt{۵} \le \sin x - ۲\cos x + ۲\sqrt{۵} \le ۳\sqrt{۵}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} ۲ < \sqrt{۵} < ۳ \\ ۶ < ۳\sqrt{۵} < ۷ \end{array}}$$

$$\lfloor \sin x - ۲\cos x + ۲\sqrt{۵} \rfloor \in \{۲,۳,۴,۵,۶\}$$

سؤال۱۲۰: برد تابع $\left\lfloor tg\, 3x + \cot 3x + \frac{3}{2} \right\rfloor$ **کدام است؟** $(0 < x < \frac{\pi}{3})$

$$0 < x < \frac{\pi}{3} \to 0 < 3x < \frac{\pi}{2} \to tg\, 3x > 0 \to tg\, 3x + \cot 3x \ge 2 \to tg\, 3x + \cot 3x + \frac{3}{2} \ge \frac{7}{2} = \frac{3}{5}$$

$$\to \left\lfloor tg\, 3x + \cot 3x + \frac{3}{2} \right\rfloor \ge 4 \to y \ge 4$$

یادآوری: $a > 0 \quad \left\{ a + \frac{1}{a} \ge 2 \right.$

سؤال۱۲۱: برد تابع $\left\lfloor \frac{x^3+1}{x^3+8} \right\rfloor$ **کدام است؟ (آزاد ۸۷)**

$$y = \frac{x^3+1}{x^3+8} \to R_y = R - \{1\}$$

پس $f(x)$ هر مقدار حقیقی غیر از ۱ می تواند باشد پس $\lfloor f(x) \rfloor$ هر مقدار صحیحی را می تواند اختیار کند.

دقت کنین که با وجود $f(x) \neq 1$ برای $1 < f(x) < 2$، $\lfloor f(x) \rfloor = 1$ پس برد تابع مجموعه $\mathbb{Z}$ است.

تست جزء صحیح

📖 سؤال۱: معادله‌ی $[\sin x]=\frac{۲}{\pi}x$ چند جواب دارد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

می دانیم $-۱\le \sin x\le ۱$ پس:

$$\left.\begin{array}{l}-۱\le \sin x\le ۱\Rightarrow[\sin x]=-۱,۰,۱\\ [\sin x]=\frac{۲}{\pi}x\end{array}\right\}$$

$$\begin{cases}\frac{۲}{\pi}x=۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow[\sin x]=۱=\frac{۲}{\pi}x\\ \frac{۲}{\pi}x=۰\Rightarrow x=۰\Rightarrow[\sin x]=۰=\frac{۲}{\pi}x\\ \frac{۲}{\pi}x=-۱\Rightarrow x=-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow[\sin x]=-۱=\frac{۲}{\pi}x\end{cases}$$

پس ۳ مقدار صفر و $\frac{\pi}{۲},-\frac{\pi}{۲}$ برای x به دست می آید.

📖 سؤال۲: مجموعه‌ی $A=\{[\sqrt{n^۲+۷}-n]:n\in N\}$ چند عضوی است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی شمار

$$n\in N\Rightarrow ۴n>۳\xrightarrow{۴n+۴>۷}۰<n^۲+۷<n^۲+۴n+۴=(n+۲)^۲\Rightarrow\sqrt{n^۲+۷}<n+۲$$

$\Rightarrow ۰<\sqrt{n^۲+۷}-n<۲\Rightarrow[\sqrt{n^۲+۷}-n]=۰$ یا ۱

📖 سؤال۳: اگر $n>۱۰$ عددی طبیعی باشد حاصل $[\sqrt{n^۲+۱}+\sqrt{n^۲-۱}]$ برابر کدام است. (ویژۀ تیزهوشان)

۱) ۲n ۲) ۲n−۱ ۳) ۲n یا ۲n−۱ ۴) ۲n یا ۲n−۱ یا ۲n+۱

می دانیم: $[x+y]=\begin{cases}[x]+[y]\\ \text{یا}\\ [x]+[y]+۱\end{cases}\Rightarrow[x+y]\ge[x]+[y]$:

$$[\sqrt{n^۲+۱}+\sqrt{n^۲-۱}]\ge[\sqrt{n^۲-۱}]+[\sqrt{n^۲+۱}]$$

$$\begin{cases}n^۲<n^۲+۱<(n+۱)^۲\Rightarrow n<\sqrt{n^۲+۱}<n+۱\Rightarrow[\sqrt{n^۲+۱}]=n\\ (n-۱)^۲<n^۲-۱<n^۲\Rightarrow n-۱<\sqrt{n^۲-۱}<n\Rightarrow[\sqrt{n^۲-۱}]=n-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow[\sqrt{n^۲+۱}]+[\sqrt{n^۲+۱}]=۲n-۱\Rightarrow[\sqrt{n^۲-۱}+\sqrt{n^۲+۱}]\ge ۲n-۱\qquad(۱)$$

از طرفی $A=\sqrt{n^۲+۱}+\sqrt{n^۲-۱}\Rightarrow A^۲=n^۲+۱+n^۲-۱+۲\sqrt{n^۴-۱}=۲n^۲+۲\sqrt{n^۴-۱}$

$$\xrightarrow{\sqrt{n^۴-۱}<\sqrt{n^۴}=n^۲}A^۲<۲n^۲+۲n^۲=۴n^۲\Rightarrow A<۲n\qquad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)}۲n-۱\le A<۲n\Rightarrow[\sqrt{n^۲+۱}+\sqrt{n^۲-۱}]=۲n-۱$$

📖 سؤال۴: دامنه‌ی تابع $\sqrt{([x]-۱)([x]-\sqrt{۲})}$ کدام بازه است.

۱) $(-\infty,۱]$ ۲) $[۲,+\infty)$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) R

$$:\begin{cases}[x]=a \Rightarrow (a-۱)(a-\sqrt{۲})\ge ۰ \Rightarrow a\ge\sqrt{۲}\cup a\le ۱\\ \Rightarrow \begin{cases}[x]\ge ۲\Rightarrow x\ge ۲\\ \text{یا} \\ [x]\le ۱\Rightarrow x<۲\end{cases} \xrightarrow{\cup} R\end{cases}$$

سؤال۵: مجموعه جواب نامعادله‌ی $[۳x+۱]\le\frac{۵}{۲}$ کدام است.

۱) $x\le\frac{۱}{۲}$ ۲) $x\le\frac{۱}{۳}$ ۳) $x<\frac{۲}{۳}$ ۴) ϕ

$$[۳x+۱]\le\frac{۵}{۲}\Rightarrow[۳x+۱]\le ۲\Rightarrow ۳x+۱<۳\Rightarrow x<\frac{۲}{۳}$$

اعداد صحیح از داخل جز صحیح بیرون می آید: $[x\pm k]\xrightarrow{k\in Z}[x]\pm k$

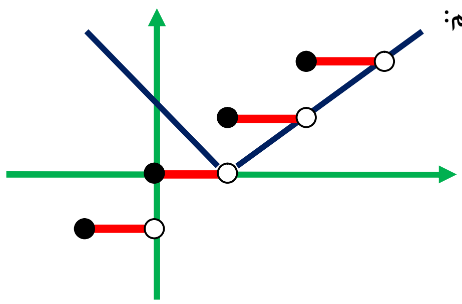
مثال: $[x+۲]=[x]+۲$ $[x+[x]]=[x]+[x]=۲[x]$

سؤال۶: به ازای کدام عدد m معادله‌ی $|x-m|=[x]$ جواب ندارد.

۱) $m=۱$ ۲) $m=۲$ ۳) $m=۰$ ۴) $m=\frac{۱}{۲}$

گزینه ها را در معادله‌ی جاگذاری می کنیم:

$$m=۱\Rightarrow|x-۱|=[x]$$



با توجه به شکل واضح است که معادله جواب ندارد پس $m=۱$ گزینه مطلوب تست است. اکنون فقط برای تمرین بیشتر گزینه های دیگر را بررسی می کنیم:

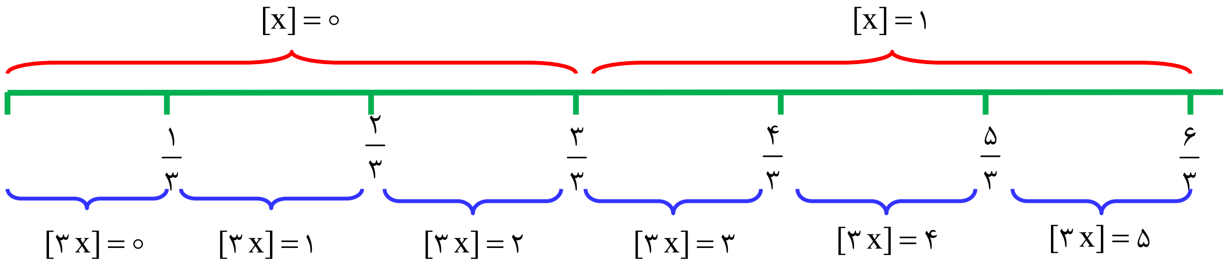
$m=۲:|x-۲|=[x]\xrightarrow{x=۱}|۱-۲|=[۱]\Rightarrow ۱=۱$ $x=۱$ در معادله صدق می کند

$m=۰:|x-۰|=[x]\xrightarrow{x=۰}|۰|=[۰]\Rightarrow ۰=۰$ $x=۰$ در معادله صدق می کند

$m=\frac{۱}{۲}:\left|x-\frac{۱}{۲}\right|=[x]\xrightarrow{x=\frac{۳}{۲}}|۱|=\left[\frac{۳}{۲}\right]\Rightarrow ۱=۱$. $x=\frac{۳}{۲}$ در معادله صدق می کند.

سؤال۷: جواب معادلهٔ $[x]+[۳x]=۲$ یک بازه است حداکثر طول این بازه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$



$$[x]+[۳x]=۲\Rightarrow\frac{۲}{۳}\le x<۱\Rightarrow \text{طول بازه}=۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

سؤال۸: در مجموعه جواب معادله‌ی $\left[\frac{x}{3}\right]=3+\left[-\frac{x}{3}\right]$ چند عدد صحیح وجود دارد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\left[\frac{x}{3}\right]-\left[-\frac{x}{3}\right]=3$$

$$\boxed{[-u]=\begin{cases}-[u] & u\in Z\\ -[u]-1 & u\notin Z\end{cases}}$$

$$\frac{x}{3}\in Z:\left[\frac{x}{3}\right]-\left(-\left[\frac{x}{3}\right]\right)=3\Rightarrow 2\left[\frac{x}{3}\right]=3\Rightarrow\left[\frac{x}{3}\right]=\frac{3}{2}\quad \text{غ ق ق}$$

$$\frac{x}{3}\notin Z:\left[\frac{x}{3}\right]-\left(-\left[\frac{x}{3}\right]-1\right)=3\Rightarrow 2\left[\frac{x}{3}\right]+1=3\Rightarrow 2\left[\frac{x}{3}\right]=2\Rightarrow\left[\frac{x}{3}\right]=1\xrightarrow{x\notin Z}$$

$$\Rightarrow 1<\frac{x}{3}<2\Rightarrow 3<x<6\xrightarrow{x\in Z}x=4,5$$

سؤال ۹: برد تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{[x]}{x} & ; \ x<-1\\ 2 & ; \ x\geq -1\end{cases}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $(1,2]$ ۳) $[1,2]$ ۴) $(0,2]$

پاسخ: گزینه۳

می دانیم $[x]\leq x<[x]+1$ بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}[x]\leq x\xrightarrow{x<-1}\frac{[x]}{x}\geq\frac{x}{x}\Rightarrow\frac{[x]}{x}\geq 1\\ \left.\begin{array}{l}[x]+1>x\xrightarrow{x<-1}\frac{[x]+1}{x}<\frac{x}{x}\Rightarrow\frac{[x]}{x}<1-\frac{1}{x}\\ x<-1\Rightarrow\frac{1}{x}>-1\Rightarrow\frac{-1}{x}<1\Rightarrow 1-\frac{1}{x}<2\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{[x]}{x}<2\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}}1\leq\frac{[x]}{x}<2$$

چون به ازای $x\geq -1$ حاصل تابع برابر ۲ می باشد، پس برد تابع $f(x)$ بازهٔ $[1,2]$ می شود.

سؤال ۱۰: اگر رابطهٔ $[5x]=5[x]+2$ برقرار باشد دقیق ترین محدودهٔ $P=x-[x]$ کدام است؟

۱) $0\leq P<\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{5}\leq P<\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{2}{5}\leq P<\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}\leq P<\frac{4}{5}$

پاسخ: گزینه۳

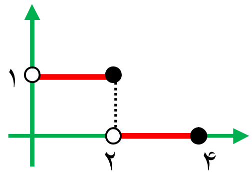
اگر جزء اعشار x را P در نظر بگیریم آنگاه:

$$x=[x]+P\Rightarrow x-[x]=P\ (0\leq P<1)$$

$$[5x]=5[x]+2\Rightarrow[5([x]+P)]=5[x]+2\Rightarrow 5[x]+[5P]=5[x]+2$$

$$\Rightarrow[5P]=2\Rightarrow 2\leq 5P<3\Rightarrow\frac{2}{5}\leq 5P<\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{2}{5}\leq x-[x]<\frac{3}{5}$$

سؤال ۱۱: شکل رو به رو قسمتی از نمودار تابع $f(x)=[ax]+b$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه۲

ابتدای پاره خط باز و انتهای آنها بسته است پس $a<0$ طول پاره خط ها برابر ۲ است بنابراین:

$$\frac{1}{|a|}=2\Rightarrow |a|=\frac{1}{2}\xrightarrow{a<0} a=-\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\left[-\frac{x}{2}\right]+b$$

با توجه به شکل $f(2)=1$ در نتیجه:

$$f(2)=\left[-\frac{2}{2}\right]+b=1\Rightarrow -1+b=1\Rightarrow b=2$$

$$a+b=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}=1/5$$

سؤال ۱۲: اگر β,α ریشهٔ $x^2-2x-4=0$ باشند، $[\alpha]+[\beta]$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۲

پاسخ: گزینه۱

ابتدا ریشه های معادلهٔ $x^2-2x-4=0$ را به دست می آوریم:

$$x^2-2x-4=0\Rightarrow x=1\pm\sqrt{5}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1+\sqrt{5}\\ \beta=1-\sqrt{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3<\alpha<4\Rightarrow[\alpha]=3\\ -2<\beta<-1\Rightarrow[\beta]=-2\end{cases}\Rightarrow[\alpha]+[\beta]=3-2=1$$

سؤال ۱۳: مقدار $[\sqrt{10+4\sqrt{6}}]$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه۲

به کمک مربع سازی عدد $10+4\sqrt{6}$ را به صورت مربع حاصل جمع دو عدد می نویسیم:

$$(a+b)^2=10+4\sqrt{6}\Rightarrow a^2+b^2+2ab=\underbrace{10}_{a^2+b^2}+\underbrace{4\sqrt{6}}_{2ab}$$

$$\left.\begin{matrix}2ab=4\sqrt{6}\\ a^2+b^2=10\end{matrix}\right\}\Rightarrow ab=2\sqrt{6}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{6}\\ b=2\end{cases}\Rightarrow 10+4\sqrt{6}=(\sqrt{6}+2)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{10+4\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{6}+2)^2}=\sqrt{6}+2\Rightarrow[\sqrt{10+4\sqrt{6}}]=[\underbrace{\sqrt{6}+2}_{4/...}]=4$$

📖 سؤال ۱۴: اگر $[۲x]=۲x-۰/۷$ مقدار x کدام می تواند باشد؟

۱) ۳/۷ ۲) -۰/۶۵ ۴) +۲/۶۵ ۴) -۳/۷

☜ پاسخ: گزینه۲

مطابق تعریف برای هر عدد مانند **t** داریم $t=[t]+p$ که در آن **p** را قسمت اعشاری **t** گوییم که $۰\le p<۱$ است. در نتیجه قسمت اعشاری هر عدد برابر تفاضل آن عدد از جزء صحیح آن است: $p=t-[t]$

اگر فرض کنیم $۲x=t$ است داریم:

$$[۲x]=۲x-۰/۷\xrightarrow{۲x=t}[t]=t-۰/۷\Rightarrow t-[t]=۰/۷$$

با توجه به اینکه $۲x=t$ است پس گزینه ای که قسمت اعشاری دو برابر آن برابر ۰/۷ است پاسخ سوال است.

$$۱)\ \ x=۳/۷\Rightarrow t=۲x=۷/۴\Rightarrow t=۷+۰/۴\Rightarrow p=۰/۴$$

$$۲)\ \ x=-۰/۶۵\Rightarrow t=۲x=-۱/۳\Rightarrow t=-۲+۰/۷\Rightarrow p=۰/۷$$

$$۳)\ \ x=۲/۶۵\Rightarrow t=۲x=۵/۳\Rightarrow t=۵+۰/۳\Rightarrow p=۰/۳$$

$$۴)\ \ x=-۳/۷\Rightarrow t=۲x=-۷/۴\Rightarrow t=-۸+۰/۶\Rightarrow p=۰/۶$$

📖 سؤال ۱۵: در یک دایره به شعاع $\sqrt{۳}$ مساحت S و محیط ℓ می باشد $[S]+[\ell]$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

☜ پاسخ: گزینه۳

$$\text{محیط}=۲\pi r\Rightarrow L=۲\pi\times\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}\pi=\sqrt{۴\times۳\times\pi^۲}=\sqrt{۱۲\pi^۲}$$

$$\text{مساحت}=\pi r^۲\Rightarrow S=\pi\times\sqrt{۳}^۲=۳\pi$$

می دانیم $۹<\pi^۲<۱۰$ پس:

$$۹\times۱۲<۱۲\pi^۲<۱۰\times۱۲\Rightarrow ۱۰۸<۱۲\pi^۲<۱۲۰\Rightarrow\underbrace{\sqrt{۱۰۸}}_{۱۰/۳۹}<\sqrt{۱۲\pi^۲}<\underbrace{\sqrt{۱۲۰}}_{۱۰/۹۵}\Rightarrow[\sqrt{۱۲\pi^۲}]=۱۰$$

$$[۳\pi]=۹\Rightarrow[S]+[L]=۹+۱۰=۱۹$$

📖 سؤال ۱۶: اگر $x^۲+x<۰$ حاصل $[x^۲]-۲[x]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

☜ پاسخ: گزینه۲

$$x^۲+x<۰\Rightarrow\underbrace{x}_{x=۰}\underbrace{(x+۱)}_{x=-۱}<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

x		-۱		۰	
$x(x+۱)$	+	۰	−	۰	+

پس باید $-۱<x<۰$ باشد تا $x^۲+x<۰$ شود در نتیجه:

$$-۱<x<۰\Rightarrow ۰<x^۲<۱\Rightarrow[x^۲]=۰$$

$$-۱<x<۰\Rightarrow[x]=-۱$$

$$[x^۲]-۲[x]=۰-۲(-۱)=۲$$

سؤال ۱۷: **اگر $(۲+\sqrt{۳})^۶+(۲-\sqrt{۳})^۶=۲۷۰۲$ مقدار $[(۲+\sqrt{۳})^۶]$ چقدر از $[(\sqrt{۳}-۲)^۶]$ بیشتر است؟**

۱) ۲۷۰۱ ۲) ۲۷۰۲ ۳) ۱۳۵۰ ۴) ۱۳۵۱

پاسخ: گزینه۱

عدد $۲-\sqrt{۳}$ عددی است بین صفر و یک در نتیجه توان ششم آن نیز عددی بین صفر و یک است اگر این عدد را α بنامیم داریم:

$$\begin{cases}(۲-\sqrt{۳})^۶=۲۷۰۲-\alpha \Rightarrow ۲۷۰۱<(۲-\sqrt{۳})^۶<۲۷۰۲\\ \alpha=(۲-\sqrt{۳})^۶ \Rightarrow ۰<\alpha<۱ \Rightarrow [(۲-\sqrt{۳})^۶]=۰\end{cases}$$

پس عدد $(۲-\sqrt{۳})^۶$ عددی بین ۲۷۰۱ و ۲۷۰۲ است در نتیجه جزء صحیح آن ۲۰۷۱ است پس:

$$[(۲-\sqrt{۳})^۶]-[(۲-\sqrt{۳})^۶]=۲۷۰۱$$

سؤال ۱۸: **جواب معادلهٔ $[x]^۲+۵[x]+۶=۰$ بازه $[a,b)$ است مقدار $b-a$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه۲

اگر فرض کنیم $[x]=t$ است داریم:

$$[x]^۲+۵[x]+۶=۰ \Rightarrow t^۲+۵t+۶=۰$$

معادلهٔ فوق یک معادلهٔ درجه دوم است به کمک تجزیه مقادیر **t** را محاسبه می کنیم:

$$(t+۲)(t+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases}t=-۲\\ t=-۳\end{cases}$$

با توجه به آن که $t=[x]$ است داریم:

$$[x]=-۲ \Rightarrow -۲\le x<-۱$$
$$[x]=-۳ \Rightarrow -۳\le x<-۲$$

از اجتماع دو بازه فوق حدود **x** به دست می آید: $x\in([-۲,-۱)\bigcup[-۳,-۲))=[-۳,-۱)$

پس $b-a=۲$ است.

سؤال ۱۹: **اگر $[x-۲[x]]=k+[x]$ دارای جواب باشد k کدام می تواند باشد؟**

۱) ۱۶- ۲) $\frac{۳۳}{۲}$ ۳) ۱۷ ۴) $\frac{۳۱}{۳}$

پاسخ: گزینه۱

می دانیم $۲[x]$ عدد صحیح است پس در حاصل جمع با **x** می تواند مطابق خاصیت $[x+k]=[x]+k(\mathrm{k}\in \mathrm{Z})$ از جزء صحیح خارج شود:

$$[\mathrm{x}-۲[x]]=[x]-۲[x] \Rightarrow [x-۲[x]]=k+[x] \Rightarrow [x]-۲[x]=k+[x] \Rightarrow -۲[x]=k$$

با توجه به آن که $[x]$عدد صحیح است پس $-۲[x]$ عددی زوج است پس **k** باید عددی زوج باشد. تنها گزینه ای که عددی زوج است (۱) است.

سؤال ۲۰: اگر $(۲+\sqrt{۳})^۵+(۲-\sqrt{۳})^۵=۷۲۴$ باشد جزء صحیح عدد $(۲+\sqrt{۳})^۵$ کدام است؟

۱) ۷۲۲ ۲) ۷۲۳ ۳) ۷۲۴ ۴) ۷۲۵

پاسخ: گزینه۲

با تعیین محدودهٔ $(۲+\sqrt{۳})^۵$ جزء صحیح آن را به دست می آوریم:

$$(۲+\sqrt{۳})^۵=۷۲۴-(۲-\sqrt{۳})^۵$$
$$۰<۲-\sqrt{۳}<۱\Rightarrow ۰<(۲-\sqrt{۳})^۵<۱\Rightarrow -۱<-(۲-\sqrt{۳})^۵<۰$$
$$\Rightarrow ۷۲۳<۷۲۴-(۲-\sqrt{۳})^۵<۷۲۴$$

یعنی عبارت $(۲-\sqrt{۳})^۵$ عدی بین ۷۲۳ و ۷۲۴ است بنابراین جزء صحیح آن برابر ۷۲۳ می باشد.

سؤال ۲۱: مجموعه جواب معادلهٔ $\left[\frac{۲x-۱}{x}\right]=۳$ به صورت بازهٔ $(a,b]$ می باشد. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) -۱ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه۳

با استفاده از تعریف $[x]=k \Leftrightarrow k\le x<k+۱ (k\in Z)$ داریم:

$$\left[\frac{۲x-۱}{x}\right]=۳\Rightarrow ۳\le\frac{۲x-۱}{x}<۴\Rightarrow ۳\le ۲-\frac{۱}{x}<۴\Rightarrow ۱\le -\frac{۱}{x}<۲$$

از نامساوی $۱\le\frac{-۱}{x}<۲$ نتیجه می گیریم $\frac{-۱}{x}$ حتماً مثبت است. از طرفی می دانیم اگر **a** و **b** مثبت باشند و $a>b$ آنگاه $\frac{۱}{a}<\frac{۱}{b}$ بنابراین:

$$۱\le -\frac{۱}{x}<۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}<-x\le ۱\Rightarrow -۱\le x<-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a+b=-۱+\left(\frac{-۱}{۲}\right)=\frac{-۳}{۲}$$

سؤال ۲۲: اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & ; \ [x] \text{ زوج} \\ x^۲-۱ & ; \ [x] \text{ فرد}\end{cases}$ باشد حاصل $f(\cos ۳۰^\circ)+f(\cot ۳۰^\circ)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۳}+۳$ ۴) $\sqrt{۳}+۲$

پاسخ: گزینه۳

می دانیم $\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$, $\left[\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right]=۰$ می باشد حال چون صفر عددی زوج است پس برای محاسبهٔ $f(\cos ۳۰^\circ)$ از ضابطهٔ اول استفاده می کنیم:

$$f(\cos ۳۰^\circ)=f\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)+۱=\sqrt{۳}+۱$$

همچنین $f(\cos ۳۰^\circ)=\sqrt{۳}$ و $[\sqrt{۳}]=۱$ می باشد. چون ۱ عددی فرد است، پس برای محاسبهٔ $f(\cot ۳۰^\circ)$ از ضابطهٔ دوم استفاده می کنیم:

$$f(\cot ۳۰^\circ)=f(\sqrt{۳})=(\sqrt{۳})^۲-۱=۳-۱=۲$$

$$\Rightarrow f(\cos ۳۰^\circ)+f(\cot ۳۰^\circ)=\sqrt{۳}+۱+۲=\sqrt{۳}+۳$$

سؤال ۲۳: مجموعهٔ $A=\left\{\left[x^۲+\frac{۱}{۲}\right] \;\middle|\; |x+۱|<۳\right\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۶ ۳) ۱۳ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۱

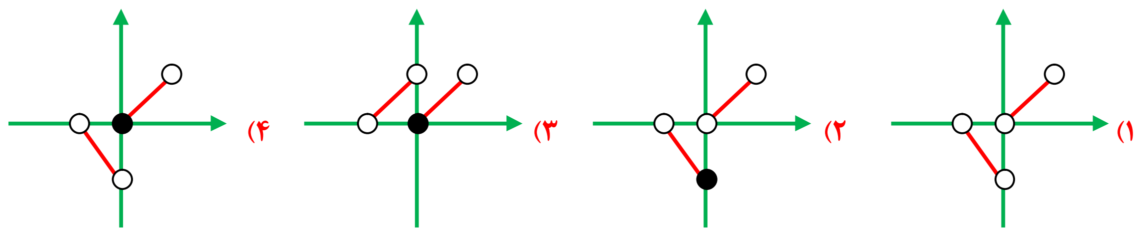
ابتدا از نامساوی $|x+۱|<۳$ محدودهٔ x را به دست آورده و سپس از روی آن محدودهٔ $x^۲+\frac{۱}{۲}$ را تعیین می کنیم:

$$|x+۱|<۳\Rightarrow -۳<x+۱<۳\Rightarrow -۳<x<۲$$

$$-۴<x<۲\Rightarrow ۰\le x^۲<۱۶\Rightarrow ۰/۵\le x^۲+\frac{۱}{۲}<۱۶/۵\Rightarrow \left[x^۲+\frac{۱}{۲}\right]=۰,۱,۲,\dots,۱۶$$

پس مجموعهٔ A، ۱۷ عضو دارد.

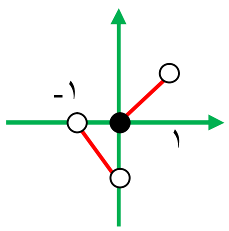
سؤال ۲۴: نمایش هندسی $y=|x|+[x]$ در فاصلهٔ $-۱<x<۱$ کدام است؟



پاسخ: گزینه ۴

❖ **راه اول** با استفاده از جدول زیر نمودار تابع را رسم می کنیم:

x	$-۱<x<۰$	$۰\le x<۱$
$[x]$	-۱	۰
$y=\|x\|+[x]$	$y=-x-۱$	$y=x+۰$

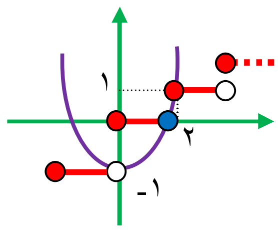


❖ **راه دوم (عددگذاری)** با تعیین مقادیر $f(۰)=۰$ و $f\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{۱}{۲}$ تنها گزینه ای که این شرایط را دارد گزینه ۴ است.

سؤال ۲۵: معادلهٔ $\left[\frac{x}{۲}\right]=x^۲-۱$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

☜پاسخ: گزینه۱



از روش هندسی استفاده کرده و نمودار های $y=\left[\frac{x}{۲}\right]$، $y=x^۲-۱$ را رسم می کنیم. برای رسم $y=\left[\frac{x}{۲}\right]$ کافی است طول تمام نقاط $y=[x]$ را در ۲ ضرب کنیم. (انبساط در راستای محورطول ها) با توجه به شکل دو نمودار فقط در یک نقطه مشترک هستند.

📖 **سؤال ۲۶: اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $-۶<[۲[x]+۱+x]<۴$ به صورت بازهٔ (a,b) باشد مقدار $b-۲a$ کدام است؟**

۱) ۵ ‏ ‏ ‏ ۲) ۱ ‏ ‏ ‏ ۳) ۲ ‏ ‏ ‏ ۴) ۳

☜پاسخ: گزینه۱

می دانیم اگر $k\in Z$ آنگاه $[x+k]=[x]+k$ بنابراین:

$$[۲[x]+۱+x]=۲[x]+۱+[x]=۳[x]+۱$$

$$-۶<۳[x]+۱<۴\Rightarrow -۷<۳[x]<۳\Rightarrow -\frac{۷}{۳}<[x]<۱\Rightarrow -۲\le x<۱\Rightarrow b-۲a=۱-۲(-۲)=۵$$

شاید خیلی جاها به این نامساوی ها برخورد کردی. مثلاً $-۲<[x]<۵$ یا $\frac{۳}{۲}<[x]\le ۶$ یا ... و ممکنه دنبال رابطه ای برای حل این سوال ها رفته باشی. ولی هیچ رابطه ای نمی خواد. فقط چند تا عدد اطراف دو سر بازه بده تا محدودهٔ جواب ها رو بتونی پیدا کنی. در این جا مجموعه جواب به ترتیب $-۱\le x<۵$ و $۲\le x\le ۷$ میشه.

📖 **سؤال ۲۷: اگر $[x^۲]=۰$ باشد حاصل $\sqrt{x^۲-۲x\sqrt{x}+x}+\sqrt{۱+x-۲\sqrt{x}}$ کدام است؟**

۱) ۱ ‏ ‏ ‏ ۲) $۱-x$ ‏ ‏ ‏ ۳) $۱-\sqrt{x}$ ‏ ‏ ‏ ۴) $۱-[x]$

☜پاسخ: گزینه۲

هر دو عبارت زیر رادیکال به صورت مربع کامل هستند بنابراین:

$$\sqrt{x^۲-۲x\sqrt{x}+x}+\sqrt{۱+x-۲\sqrt{x}}=\sqrt{(x-\sqrt{x})^۲}+\sqrt{(\sqrt{x}-۱)^۲}=|x-\sqrt{x}|+|\sqrt{x}-۱|$$

چون $[x^۲]=۰$ پس $۰\le x^۲<۱$ است. از طرفی دامنهٔ عبارت بالا $x\ge ۰$ می باشد. بنابراین محدودهٔ $\mathbf{x}$ به صورت $۰\le x<۱$ در می آید و می دانیم در این بازه $\sqrt{x}\ge x$، $\sqrt{x}\le ۱$ است پس داریم:

$$|x-\sqrt{x}|+|\sqrt{x}-۱|=\sqrt{x}-x+۱-\sqrt{x}=۱-x$$

📖 **سؤال ۲۸: اگر جواب معادلهٔ $\left[\frac{x}{۲}-[x]\right]=-۲$ به صورت بازهٔ $[a,b)$ باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟**

۱) ۱ ‏ ‏ ‏ ۲) ۲ ‏ ‏ ‏ ۳) ۲/۵ ‏ ‏ ‏ ۴) ۴

پاسخ: گزینه۲

از رابطهٔ $[۲x]=[x]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]$ بنابراین: $[x]=\left[\frac{x}{۲}\right]+\left[\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\right]$

$$\left[\frac{x}{۲}-[x]\right]=-۲\xrightarrow{[x]\in Z}\left[\frac{x}{۲}\right]-[x]=-۲\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}\right]-\left[\frac{x}{۲}\right]-\left[\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\right]=-۲$$

$$\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\right]=۲\Rightarrow ۲\le\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}<۳\Rightarrow ۱/۵\le\frac{x}{۲}<۲/۵\Rightarrow ۳\le x<۵\Rightarrow a=۳,b=۵,b-a=۲$$

سؤال ۲۹: برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{[x]} & ; \quad x<۰\\ ۰ & ; \quad x\ge ۰\end{cases}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۰]$ ۲) $[۰,۱]$ ۳) $[۰,۱)$ ۴) $[۰,+\infty)$

پاسخ: گزینه۲

می دانیم $[x]\le x$ بنابراین: $[x]\le x\xrightarrow{x<۰}۱\ge\frac{x}{[x]}$

چون $[x],x$ در بازهٔ $(-\infty,۰)$ هم علامت هستند پس $\frac{x}{[x]}$ همواره مثبت است و داریم: $۰<\frac{x}{[x]}\le ۱$

$$\begin{cases}x<۰\Rightarrow ۰<y\le ۱\\ x\ge ۰\Rightarrow y=۰\end{cases}\Rightarrow R_y=[۰,۱]$$

سؤال ۳۰: اگر مجموعه جواب معادلهٔ $\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+\left[x-\frac{۴}{۳}\right]+\left[x-\frac{۷}{۳}\right]=۳$ به صورت بازهٔ $[a,b)$ باشد مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینه۱

می دانیم اگر $k\in Z$ باشد آنگاه $[x+k]=[x]+k$ بنابراین:

$$\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+\left[x-\frac{۱}{۳}-۱\right]+\left[x-\frac{۱}{۳}-۲\right]=۳\Rightarrow\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+\left[x-\frac{۱}{۳}\right]-۱+\left[x-\frac{۱}{۳}\right]-۲=۳$$

$$\Rightarrow ۳\left[x-\frac{۱}{۳}\right]=۶\Rightarrow\left[x-\frac{۱}{۳}\right]=۲\Rightarrow ۲\le x-\frac{۱}{۳}<۳\Rightarrow\frac{۷}{۳}\le x<\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow b-a=\frac{۱۰}{۳}-\frac{۷}{۳}=۱$$

سؤال ۳۱: برد تابع $y=\sqrt{x-۳\left[\frac{x-۳}{۳}\right]}$ شامل چند عدد صحیح می باشد؟

۱) صفر   ۲) ۳   ۳) ۲   ۴) ۱

پاسخ: گزینه۴

می دانیم $۰\le U-[U]<۱$ می باشد پس:

$$y=\sqrt{x-۳\left[\frac{x}{۳}-۱\right]}=\sqrt{x-۳\left[\frac{x}{۳}\right]+۳}=\sqrt{۳\left(\frac{x}{۳}-\left[\frac{x}{۳}\right]\right)+۳}$$

$$۰\le\frac{x}{۳}-\left[\frac{x}{۳}\right]<۱\Rightarrow ۳\le ۳\left(\frac{x}{۳}-\left[\frac{x}{۳}\right]\right)+۳<۶\Rightarrow\sqrt{۳}\le\sqrt{۳\left(\frac{x}{۳}-\left[\frac{x}{۳}\right]\right)+۳}<\sqrt{۶}$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[\sqrt{۳},\sqrt{۶}]$ است که شامل یک عدد صحیح ۲ می باشد.

سؤال ۳۲: **مجموعه جواب معادلهٔ $[x-۲]+۳[۱-x]=۶$ به صورت بازهٔ (a,b) می باشد مقدار $a-۲b$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه۲

ابتدا اعداد صحیح را از درون بارکت خارج می کنیم: $[x]-۲+۳(۱+[-x])=۶\Rightarrow[x]+۳[-x]=۵$

در دو حالت $x\in Z, x\notin Z$ معادله را حل می کنیم:

$$\begin{cases} x\in Z\Rightarrow x+۳(-x)=۵\Rightarrow -۲x=۵\Rightarrow x=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow \text{با توجه به شرط قابل قبول نیست} \\ x\notin Z\xrightarrow{[-x]=-۱-[x]}[x]+۳(-۱-[x])=۵\Rightarrow -۲[x]=۸ \\ \Rightarrow[x]=-۴\Rightarrow -۴\le x<-۳\xrightarrow{x\notin Z}-۴<x<-۳ \\ \Rightarrow z-۲b=--۴-۲(-۳)=۲ \end{cases}$$

سؤال ۳۳: **دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{-۲[x]^۲+[x]+۱}}{(۲x)!}$ شامل چند عضو است؟**

۱) بی شمار ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه۳

می دانیم تابع $y=(۲x)!$ به ازای مقادیری از **x** تعریف می شود که **۲x** متعلق به مجموعهٔ اعداد حسابی باشد پس داریم:

$$۲x=k,k\in W\Rightarrow x=\frac{k}{۲},k\in W\Rightarrow\left\{۰,\frac{۱}{۲},۱,\frac{۳}{۲},۲,\frac{۵}{۲},\ldots\right\}$$

از طرفی زیر رادیکال باید نامنفی باشد بنابراین باید $-۲[x]^۲+[x]+۱\ge ۰$ باشد:

$$[x]=t\Rightarrow -۲t^۲+t+۱\ge ۰\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\le t\le ۱\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\le[x]\le ۱\Rightarrow ۰\le x\le ۲$$

هم چنین می دانیم همواره $y=(۲x)!\ne ۰$ است حال دامنهٔ تابع $f(x)$ را می یابیم:

$$D_{f(x)}=[۰,۲)\cap\left\{۰,\frac{۱}{۲},۱,\frac{۳}{۲},۲,\frac{۵}{۲},\ldots\right\}=\left\{۰,\frac{۱}{۲},۱,\frac{۳}{۲}\right\}$$

در نتیجه دامنهٔ تابع $f(x)$ شامل ۴ عضو می باشد.

📖 سؤال ۳۴: مجموعه جواب معادلهٔ $[x+[x]]=۳$ کدام است؟

۱) $[۲,۳)$ ۲) $[۱,۲)$ ۳) $[۰,۱)$ ۴) ϕ

☜ پاسخ: گزینه۴

می دانیم اگر $k\in Z$ باشد آنگاه: $[x+k]=[x]+k$

از آنجا که است بنابراین:

$$[x+[x]]=۳\Rightarrow [x]+[x]=۳\Rightarrow ۲[x]=۳\Rightarrow [x]=\frac{۳}{۲}$$

خروجی جزء صحیح همواره عددی صحیح است و هیچگاه برابر $\frac{۳}{۲}$ نمی شود پس معادلهٔ بالا جواب ندارد.

📖 سؤال ۳۵: مجموعه جواب معادلهٔ $۳[x]-[x-۱]=۵$ کدام است؟

۱) $(۱,۳)$ ۲) $[۲,۳)$ ۳) $[۲,۴)$ ۴) $(۳,۴)$

☜ پاسخ: گزینه۲

$$۳[x]-[x-۱]=۵\Rightarrow ۳[x]-([x]-۱)=۵\Rightarrow ۲[x]+۱=۵\Rightarrow ۲[x]=۴\Rightarrow [x]=۲$$
$$\Rightarrow ۲\le x\le ۳\Rightarrow x\in[۲,۳)$$

📖 سؤال ۳۶: مجموعه جواب معادلهٔ $[x]^۲+۱۲=۷[x]$ کدام است؟

۱) $[۳,۴]$ ۲) $[۴,۵)$ ۳) $[۳,۵]$ ۴) $[۳,۵)$

☜ پاسخ: گزینه۴

با فرض $(*)$ $[x]=A$ داریم:

$$A^۲+۱۲=۷A\Rightarrow A^۲-۷A+۱۲=۰\Rightarrow (A-۳)(A-۴)=۰\Rightarrow \begin{cases} A=۳\xrightarrow{(*)}[x]=۳ \\ \text{یا} \\ A=۴\xrightarrow{(*)}[x]=۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳\le x<۴ \\ ۴\le x<۵ \end{cases}\xrightarrow{\text{اجتماع}}۳\le x<۵\Rightarrow x\in[۳,۵)$$

📖 سؤال ۳۷: مجموعه جواب نامعادلهٔ $|۲[x]+۱|<۲$ به صورت $[a,b)$ است کدام $a-b$ است؟

۱) ۴- ۲) ۳- ۳) ۲- ۴) ۱-

☜ پاسخ: گزینه۳

اول باید یک نامعادلهٔ قدرمطلقی حل کنیم:

$$|۲[x]+۱|<۲\Rightarrow -۲<۲[x]+۱<۲\Rightarrow -۳<۲[x]<۱\Rightarrow -\frac{۳}{۲}<[x]<\frac{۱}{۲}$$

با توجه به این که $[x]\in Z$ است بنابراین با توجه به حدود $[x]$ داریم:

$$\begin{cases}[x]=-2 \Rightarrow -1 \le x < 0 \\ [x]=0 \Rightarrow 0 \le x < 1\end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} -1 \le x < 1$$

$$\text{مجموعه جواب}:[a,b)=[-1,1) \Rightarrow \begin{cases}a=-1 \\ b=1\end{cases} \Rightarrow a-b=-2$$

📖 **سؤال ۳۸: اگر مجموعه جواب معادلهٔ $\left[\frac{3}{2}-x\right]+\left[\frac{1}{2}-x\right]$ به صورت $(a,b]$ باشد a کدام است؟**

۱) ۲- ۲) ۲/۵- ۳) ۳- ۴) ۳/۵-

☜ **پاسخ: گزینه۲**

در جزء صحیح دوم $\frac{3}{2}$ را به صورت $\frac{1}{2}+1$ می نویسیم تا بتوانی عبارت های یکسان ایجاد کنیم:

$$\left[\frac{1}{2}-x\right]+\left[1+\frac{1}{2}-x\right]=5$$

۱ عددی صحیح است پس می تواند از جزء صحیح بیرون بیاید.

$$\left[\frac{1}{2}-x\right]+\left[\frac{1}{2}-x\right]+1=5 \Rightarrow 2\left[\frac{1}{2}-x\right]=4 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}-x\right]=2$$

$$\Rightarrow 2 \le \frac{1}{2}-x < 3 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \frac{3}{2} \le -x < \frac{5}{2} \xrightarrow{\times(-1)} -\frac{5}{2} < x \le -\frac{3}{2} \Rightarrow a=-\frac{5}{2}=-2/5$$

📖 **سؤال ۳۹: معادلهٔ $x=\sqrt{2}-[x]$ چند جواب حقیقی دارد؟**

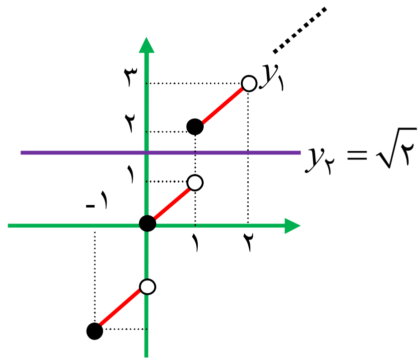
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☜ **پاسخ: گزینه۱**

معادله را به صورت زیر مرتب می کنیم:

$$x=\sqrt{2}-[x] \Rightarrow x+[x]=\sqrt{2}$$

حالا از روش رسم استفاده می کنیم: $\underbrace{x+[x]}_{y_1}=\underbrace{\sqrt{2}}_{y_2}$



با توجه به شکل نمودارهای y_1, y_2 در هیچ نقطه ای متقاطع نیستند

پس معادله جواب حقیقی ندارد.

📖 **سؤال ۴۰: اگر $[x+y]=[x]+[y+1]$ آنگاه حدود $x+y-[x+1]-[y]$ کدام است؟**

۱) $[0,1)$ ۲) $[-1,0)$ ۳) $(-1,0]$ ۴) $(0,1]$

☜ پاسخ: گزینه۱

ابتدا توجه کنید که :

$$[y+۱]=[y]+۱\Rightarrow[x+y]=[x]+[y]+۱\ (*)$$

هم چنین در عبارت داده شده داریم:

$$[x+۱]=[x]+۱\Rightarrow x+y-[x]-۱-[y]\Rightarrow x+y-[x]-[y]-۱\Rightarrow x+y-([x]-[y]+۱)$$

با توجه به (*) خواهیم داشت:

$$\text{عبارت}=x+y-[x+y]$$

از آن جا که $۰\leq x-[x]<۱$ بنابراین: $۰\leq x+y-[x+y]<۱$

📖 **سؤال ۴۱:** **اگر $f(x)=\dfrac{[-x]}{۱-[x]}$ آنگاه $f\left(\dfrac{۱}{۱-\sqrt{۲}}\right)$ کدام است؟**

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۵

☜ پاسخ: گزینه۴

ابتدا عدد $\dfrac{۱}{۱-\sqrt{۲}}$ را گویا می کنیم:

$$\frac{۱}{۱-\sqrt{۲}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱-۲}=-(۱+\sqrt{۲})$$

از آن جا که $\sqrt{۲}=۱/۴$ بنابراین:

$$-(۱+\sqrt{۲})=-۲/۴\Rightarrow\begin{cases}[-x]=[-(-۲/۴)]=[۲/۴]=۲\\ [x]=[-۲/۴]=-۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{۱}{۱-\sqrt{۲}}\right)=\frac{۲}{۱-(-۳)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

📖 **سؤال ۴۲:** **اگر $|x-۱|<۱$ باشد مجموعه جواب $\left[-\dfrac{۱}{x+۱}\right]$ کدام است؟**

۱) $\{-۱\}$ ۲) $\{۰,-۱\}$ ۳) $\{۰,۱\}$ ۴) $\{۱\}$

☜ پاسخ: گزینه۱

$$|x-۱|<۱\Rightarrow-۱<x-۱<۱\Rightarrow۰<x<۲$$

حالا حدود $-\dfrac{۱}{x+۱}$ را می یابیم:

$$۰<x<۲\xrightarrow{+۱}۱<x+۱<۳\Rightarrow\frac{۱}{۳}<\frac{۱}{x+۱}<۱$$

$$\Rightarrow-۱<-\frac{۱}{x+۱}<-\frac{۱}{۳}\Rightarrow\left[-\frac{۱}{x+۱}\right]=-۱$$

سؤال ۴۳: معادلهٔ $[[x]-x]=x^{2}+2x$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه۳

چون $[x]\in Z$ است پس می توانیم $[x]$ را از عبارت $[[x]-x]$ خارج کنیم.

$$[x]+[-x]=x^{2}+2x$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x\notin Z:-1=x^{2}+2x\Rightarrow x^{2}+2x+1=0\Rightarrow (x+1)^{2}=0\\ x\in Z:0=x^{2}+2x\Rightarrow x(x+2)=0\Rightarrow x=0,-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x\notin Z: x=-1 \quad \text{غ ق ق}\\ x\in Z: x=0,-2 \quad \checkmark\end{cases}$$

سؤال۴۴: مجموع ریشه های معادله $[x]=x-\frac{1}{2}$ در بازهٔ $[0,10)$ کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۵

پاسخ: گزینه (۳)

$$x-[x]=\frac{1}{2}\Rightarrow x=[x]+\frac{1}{2}\xrightarrow{x\in[0,10)}x=0+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2},2+\frac{1}{2},\dots,9+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه ها}=(0+1+2+3+\dots+9)+10\times\frac{1}{2}=45+5=50$$

سؤال۴۵: اگر به ازای هر عدد حقیقی a و $b>0$ ، $a-c=\left[\frac{a}{b}\right]b$ آنگاه:

۱) $0\le c<b$ ۲) $b\le c<0$ ۳) $0\le c<a$ ۴) $a\le b$

پاسخ: گزینه (۱)

طرفین را تقسیم بر b می کنیم. داریم: $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\left[\frac{a}{b}\right]\Rightarrow\frac{a}{b}-\left[\frac{a}{b}\right]=\frac{c}{b}$

از طرفی $1>\frac{a}{b}-\left[\frac{a}{b}\right]\ge 0$ ، پس $1>\frac{c}{b}\ge 0$ و از آن جا $0\le c<b$.

سؤال۴۶: معادله‌ی $3+\left[\frac{x}{2}\right]=\left[\frac{x}{3}\right]-\frac{x}{3}$ چند ریشه دارد؟

۱) بی شمار ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه (۴)

می دانیم $1>\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]\ge 0$ است. از طرفی سمت راست تساوی همواره مقداری صحیح است، پس سمت چپ آن نیز می‌بایست صحیح باشد و در نتیجه $\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]=0$ است و از آن جا $\frac{x}{3}\in Z$ خواهد بود و: $x=0,\pm3,\pm6,\pm9,\dots$

پس نتیجه می گیریم این معادله فقط یک ریشه $(x=-6)$ دارد.

سؤال۴۷: معادله‌ی $[x+4[x]]+[x-3[x]]=1$ دارای چند ریشه است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار

پاسخ: گزینه (۱)

در این تست از ویژگی های (۹) و (۱۰) استفاده می‌کنیم. $[x]$۴ و $-۳[x]$ صحیح هستند و در نتیجه از داخل جزء صحیح بیرون می‌آیند، پس:

$([x]+۴[x])+([x]-۳[x])=۱\Rightarrow ۳[x]=۱\Rightarrow [x]=\frac{۱}{۳}\notin Z$ غیرقابل قبول است. پس معادله ریشه ندارد:

در دو تست بعدی از ویژگی (۱۱) هم استفاده می کنیم. ببینید:

سؤال۴۸: معادله‌ی $۷[x]+۳[-x]=۴$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) بی شمار

پاسخ: *گزینه (۳)*

$$\begin{cases} ۷[x]-۳[x]=۴ & x\in Z \\ ۷[x]+۳(-[x]-۱)=۴ & x\notin Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴\lfloor x\rfloor=۴ & x\in Z \\ ۴\lfloor x\rfloor=۷ & x\notin Z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lfloor x\rfloor=۱ & x\in Z \\ \lfloor x\rfloor=\frac{۷}{۴} & x\notin Z \end{cases} \Rightarrow \lfloor x\rfloor=۱\Rightarrow ۱\le x<۲ \xrightarrow{x\in Z} x=۱$$

پس معادله فقط یک جواب دارد آن هم $x=۱$.

سؤال۴۹: اگر $x\notin Z$ و $(۶a-۴)[[x]-x]=۲a$ آنگاه a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: *گزینه (۳)*

$[x]$ مقداری صحیح است، بنابراین از داخل جزء صحیح بیرون می آید.

$$[[x]-x]=[x]+[-x]\xrightarrow{x\notin Z}[x]+[-x]=-۱\Rightarrow (۶a-۴)(-۱)=۲a\Rightarrow ۸a=۴\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

سؤال۵۰: معادله $\left[x+\frac{۱}{۲}\right]\left[x-\frac{۳}{۲}\right]=x-۵$ مفروض است، حاصل $[x]^۲-۳[x]$ چقدر است؟

۱) ۴- ۲) ۵- ۳) ۶- ۴) ۷-

پاسخ: *گزینه (۲)*

سمت چپ تساوی حاصل ضرب دو مقدار صحیح است، بنابراین سمت چپ تساوی همیشه صحیح خواهد بود و در نتیجه سمت راست تساوی و از آن جا x نیز صحیح خواهد بود. اما می دانیم مقادیر صحیح از داخل جزء صحیح بیرون می آیند. بنابراین:

$$\left(x+\left[\frac{۱}{۲}\right]\right)\left(x+\left[-\frac{۳}{۲}\right]\right)=x-۵\Rightarrow (x)(x-۲)=x-۵\Rightarrow x^۲-۲x=x-۵\Rightarrow x^۲-۳x=-۵\xrightarrow{x\in Z}$$
$$[x]^۲-۳[x]=-۵$$

سؤال۵۱: نامعادله‌ی $[۲\cos x-۱]>۰$ چند ریشه در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار

پاسخ: *گزینه (۳)*

$$[۲\cos x-۱]>۰\Rightarrow ۲\cos x-۱\ge ۱\Rightarrow ۲\cos x\ge ۲\Rightarrow \cos x\ge ۱$$

حالت $\cos x>۱$ که غیرممکن است، بنابراین فقط ممکن است $\cos x=۱$ باشد و در نتیجه $x=۰$ و $x=۲\pi$ جواب خواهند بود.

سؤال۵۲: اگر $x > -۱$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $-۱ \leq \frac{۲}{\lfloor x \rfloor}$ دارای کدام ویژگی است؟ (گزینه ۲ـ ۸۶)

۲) Max دارد
۲) Min دارد
۳) هم Max و هم Min دارد
۴) نامتناهی است.

پاسخ:

$x > -۱ \to \lfloor x \rfloor \geq -۱ \qquad (۱)$

برای برقراری نامعادله $-۱ \leq \frac{۲}{\lfloor x \rfloor}$ باید:

$\lfloor x \rfloor < ۰ \to \lfloor x \rfloor \leq -۱ \qquad (۲)$

$(۱) \bigcap (۲) \to \lfloor x \rfloor = -۱ \to -۱ \leq x < ۰ \xrightarrow{x > -۱} -۱ < x < ۰$ گزینه (۴) درست است.

سؤال۵۳: به ازای کدام یک ازحالات زیر $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$ است؟

۱) $x = y + ۱$
۲) $|x - y| > ۱$
۳) $|x - y| < \frac{۳}{۲}$
۴) $|x - y| < ۱$

پاسخ: *گزینه (۴)*

باید x , y بین دو عدد متوالی باشند یعنی: $|x - y| < ۱$

سؤال۵۴: عبارت $P = \left| x - \left\lfloor x + \frac{۵}{۲} \right\rfloor \right|$ به ازای جمیع مقادیر x کدام عدد زیر نمی تواند باشد؟

۱) $\frac{۵}{۲}$
۲) ۲
۳) $\frac{۷}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: *گزینه (۴)*

کلک می زنم و به داخل قدر مطلق $\frac{۵}{۲}$ اضافه و کم می کنم.

$$P = \left| \left(x + \frac{۵}{۲}\right) - \left\lfloor x + \frac{۵}{۲} \right\rfloor - \frac{۵}{۲} \right|$$

$$۰ \leq \left(x + \frac{۵}{۲}\right) - \left\lfloor x + \frac{۵}{۲} \right\rfloor < ۱ \to -\frac{۵}{۲} \leq \left(x + \frac{۵}{۲}\right) - \left\lfloor x + \frac{۵}{۲} \right\rfloor - \frac{۵}{۲} < -\frac{۳}{۲} \to \frac{۳}{۲} < |P| \leq \frac{۵}{۲}$$

پس P هرگز $\frac{۳}{۲}$ نمی تونه باشه.

همه‌ی برگ های من رو شد
در دلم هرچه داشتم گفتم
آس دل را زدی زمین، بردی
من به حکمت به خاک می افتم

***

آرزویی نمانده توی دلم
از تو سیرم از عاشقی سیرم
حکم کردی که از تو دور شوم
می روم... گرچه بی تو می میرم

***

خشت خشت من از تو بر جا بود
این بریدن ورای فهم من است
برگ هایم که ریخت فهمیدم
باختن تا همیشه سهم من است

***

وای اگر حکم، حکم من باشد
شک نکن بی درنگ می کُشمت
با همین دست های خون آلود
بار دیگر به شعر می کِشمت

«دکتر نوید دانایی هوشیار»