



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

تست های طبقه بندی شده دیفرانسیل و انتگرال مخصوص داوطلبان

کنکور سراسری رشته ریاضی

پیوستگی تابع وارون

اگر $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{10-x}$ باشد،

کدام نقطه متعلق به بازه پیوستگی نیست ؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

می دانیم تابع $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{10-x}$ در بازه $[1, 10]$ پیوسته و اکیداً صعودی است، پس تابع $f^{-1}(x)$ در بازه $[f(1), f(10)]$ یعنی در بازه $[-3, 3]$ پیوسته است. پس نقطه $x = 4$

در بازه پیوستگی تابع $f^{-1}(x)$ قرار ندارد.

daryoush_barzegar

تهیه و تنظیم: داریوش برزگر

تلفن: ۰۹۱۷۳۰۱۶۶۱۶

① تابع $f(x) = \log_3(ax+b)$ نقطه برای مقادیر $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$ با معنی است اگر $f(x) = 2$

مقادیر $f(-\frac{4}{9})$ و $f(\frac{1}{3})$ را بیابید

① -2 ② -1 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1

$$D_f = (-\frac{1}{2}, +\infty) \xrightarrow{x = -\frac{1}{2}} -\frac{a}{2} + b = 0 \rightarrow a = 2b \quad ①$$

$$f(x) = 2 \rightarrow \log_3 2a+b = 2 \rightarrow 2a+b = 9 \xrightarrow{①} 9b = 9$$

$$\rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \log_3 2x+1 \xrightarrow{x = -\frac{4}{9}} f(-\frac{4}{9}) = \log_3 \frac{1}{9} = -2$$

$$(\log_3 2^{-2} = -2 \log_3 2 = -1) \quad \text{گزینه ①}$$

② نمودار تابع $y = \log_3(ax+b)$ محورهای را دستکاری به طریقی که 1- و 2- را از آن جدا کند

دستکاری به عرض 1- قطع کرده است. b کدام است؟ 1.394 (خارج از کشور)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3

$\begin{cases} (-1, 0) \\ (1, -1) \end{cases}$

$$0 = \log_3 -a+b \rightarrow -a+b = 1 \quad ①$$

$$-1 = \log_3 a+b \rightarrow a+b = (\frac{1}{3})^{-1} = 3 \quad ② \rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

گزینه ①
③ اگر $\log_{12} 2 = a$ و $\log_2 3 = b$ را بیابید

① $\frac{a-1}{2a}$ ② $\frac{1-a}{2a}$ ③ $\frac{1-a}{a}$ ④ $\frac{a-1}{a}$

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b} \Rightarrow$$

$$\log_{1r} r = \frac{\log r}{\log 1r} = \frac{\log r}{r \log r + \log r} = a$$

$$\rightarrow \frac{r \log r + \log r}{\log r} = \frac{1}{a} \rightarrow r \log r + 1 = \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow \log r = \frac{1-a}{ra} \quad \text{گزینه ۲}$$

۱۲۸۸ و ۲۰۰۰ $\ln(4+e^x)$ $0.6 \cdot 12e^{12} + 12e^{12} = 12 \cdot 1.6$ (۴)

x (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

$$e^{12x} + 4e^x = 14$$

$$e^x = A \rightarrow A^2 + 4A - 14 = 0 \rightarrow (A+7)(A-2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = -7 < 0 \text{ } \overline{00} \overline{00} \\ A = 2 > 0 \end{cases} \rightarrow e^x = 2 \rightarrow x = \ln 2$$

$$\rightarrow \frac{\ln(4+e^x)}{x} = \frac{\ln(4+e^{\ln 2})}{\ln 2} = \frac{\ln(4+2)}{\ln 2} = \frac{\ln 6}{\ln 2} = 2$$

۱۲۸۸ و ۲۰۰۰ $e^{\ln 2} = 2$ (۳) گزینه ۳

۱۲۸۸ و ۲۰۰۰ $\log x = \log r + \log y$ $2 \times 12 = 4 \times 6$ (۵)

$\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۱)

$$S_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$1 + t^r + t^4 + t^9 = 1 \times \frac{(1 - (t^r)^5)}{1 - t^r} = \frac{1 - t^{1r}}{1 - t^r} \quad (1)$$

$$1 + t + t^r + \dots + t'' = 1 \times \frac{(1 - t^{r'})}{1 - t} = \frac{1 - t^{r'}}{1 - t} \quad (P)$$

$$\Rightarrow \frac{(Y)}{(I)} = \frac{\frac{1-t^r}{1-t}}{\frac{1-t^r}{1-t^r}} = \frac{1-t^r}{1-t} = \frac{(1/t)(1+t^r+t)}{(1-t)}$$

$$= t^r + t + 1 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^r + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1$$

$$= \frac{\sqrt{9}}{2+1-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1$$

$$= \frac{4 - \sqrt{0} + \sqrt{0} - 2 + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

نتیجه ①

⑧ درد و ناله حاد به صورت ۴ ... ۱۲، ۷ و ۲ ... ۱۱، ۴ و ۸ ... حید علی زمری

شرك جوبلور؟ ۱۲۹۴ خارج رشتہ

41 (K) 40 (K) 29 (K) 21 (J)

$$\begin{cases} 2, 7, 12, 17, \dots & d_1 = 5 \\ 8, 11, 14, 17, \dots & d_2 = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اونیج فیت}} \text{⑮}$$

محلات شریک دوزخیاتہ یک دوزخیاتہ محلاً و جمعہ ایل ۱۷ و قدر کرب ۱۵ (ک ۱۰۳ ۵۳) (ک ۱۰۳ ۵۳)

$$\Rightarrow Q = 1r + 10(n-1) = 10n + r \Rightarrow 100 \leq 10n + r \leq 1000$$

$$\rightarrow 91 \leq 10n \leq 991 \rightarrow \frac{91}{10} \leq n \leq \frac{991}{10}$$

→ جواب اندیشه (۳) % ۰.۰۰۰ $1 \leq n \leq 44$

۹. محاسبه کنید: $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} (\sqrt{2}-\sqrt{3} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$ که $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ رادیکال دوم و رادیکال سوم هستند.

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \text{ (۱)} \quad 2 \text{ (۲)} \quad 1+\sqrt{2} \text{ (۳)} \quad 2\sqrt{2} \text{ (۴)} \\ & (\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3} + \sqrt{2+\sqrt{3}})^2}) = \sqrt{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+2(\sqrt{2}-\sqrt{3} \times \sqrt{2+\sqrt{3}})} \\ & = \sqrt{4+2 \times \sqrt{4-3}} = \sqrt{4} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \text{ (۱)} \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt{2} \text{ (۲)}$$

$$\text{(۱)} \times \text{(۲)} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

گزینه ۴

۱۰. دو تابع f و g به طوری که $f(x) = 2x - 5$ و $g = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2)\}$ باشد، اگر $(f \circ g)(a) = 4$ باشد، a را بیابید. ۱۳۹۳

$$1 \text{ (۱)} \quad 2 \text{ (۲)} \quad 3 \text{ (۳)} \quad 4 \text{ (۴)}$$

$$(f \circ g)(a) = 4 \Rightarrow f(g(a)) = 4 \Rightarrow g(a) = f^{-1}(4)$$

$$f(x) = 2x - 5 \Rightarrow f(4) = 2 \times 4 - 5 = 3 \Rightarrow g(a) = f(4) = 3$$

$$\Rightarrow g(a) = 3 \Rightarrow a = 3$$

گزینه ۳

۱۱. اگر اعداد صحیح مثبت $7, 9, 12$ و v به طوری که $14\sqrt{5}$ باشد، 1392 را بیابید.

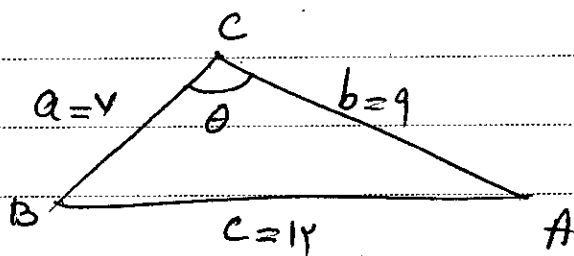
$$14\sqrt{5} \text{ (۱)} \quad 14\sqrt{2} \text{ (۲)} \quad 14\sqrt{3} \text{ (۳)} \quad 14\sqrt{5} \text{ (۴)}$$

$$S = \sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)}$$

$$p = \frac{12+9+7}{2} = 14$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{12 \times (14-12) \times (14-9) \times (14-7)} = \sqrt{12 \times 2 \times 5 \times 7}$$

$$= 14\sqrt{5} \text{ (۴)}$$



$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

$$C^r = a^r + b^r - \gamma a b C_0 \theta$$

$$\Rightarrow \cancel{1}^r = v^r + q^r - \underset{0}{r \times v \times q \times \cos \theta} \Rightarrow 1^r = 1^r_0 - 1^r \gamma \cos \theta$$

$\Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{9} \rightarrow 90^\circ < \theta < 180^\circ$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1}} = \frac{\sqrt{\lambda_1 - 1}}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$S = \frac{1}{r} \times v \times q \times \frac{r\sqrt{a}}{q} = r\sqrt{a} \quad (\sin \theta \approx \frac{0}{1} \approx 0)$$

(۱۲) اگر $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^x$ و $f'(x)$ و $f''(x)$ را بیابید.

$(0, +\infty)$ ⑥ $(-\infty, +\infty)$ ③ $(-\infty, 0)$ ② $[-1, 1]$ ①

$\forall x \geq 0 \rightarrow r^x \geq 1 \rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^x \leq 1 \rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^x \geq -1$: دال جالب

$$\rightarrow 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow a f(x) \geq 0$$

$$x < 0 \rightarrow r^x < 1 \rightarrow \dots \rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow af(x) > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{ans}} x \text{ for } x \geq 0 \rightarrow D_{\substack{\text{for} \\ x \geq 0}} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

۱۳) یک ایستگاه به یک خط طولی در یک خط مستقیم قرار دارد. به طوری که فاصله آن از نقطه

$A(1,0)$ و $B(7,-2)$ بیشترین است. در این صورت a را بیابید.

۱) ۱ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱ ۵) ۱۲

نقطه $P(a,0)$ و $A(1,0)$

$$\Rightarrow d_{PA} = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (0-0)^2} \Rightarrow$$

$$d_{PA} = \sqrt{(a-1)^2 + 0}$$

$$P(a,0) \text{ و } B(7,-2) \Rightarrow d_{PB} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} \Rightarrow$$

$$d_{PB} = \sqrt{(a-7)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{(a-7)^2 + 4}$$

$$D = d_{PA} - d_{PB} = \sqrt{(a-1)^2 + 0} - \sqrt{(a-7)^2 + 4}$$

با Max کردن D از مشتق کاربرد این آیف (مشتق دوم) میگیریم و جواب میگیریم.

$$D' = 0 \Rightarrow \frac{a-1}{\sqrt{(a-1)^2 + 0}} - \frac{(a-7)}{\sqrt{(a-7)^2 + 4}} = 0$$

$$\Rightarrow (a-1)\sqrt{(a-7)^2 + 4} = (a-7)\sqrt{(a-1)^2 + 0}$$

$$\Rightarrow (a-1)^2((a-7)^2 + 4) = (a-7)^2((a-1)^2 + 0)$$

$$\Rightarrow 4(a-1) = \sqrt{4(a-7)^2} = \pm 2(a-7)$$

$$4(a-1) = 2(a-7) \Rightarrow a = 1$$

$$4(a-1) = -2(a-7) \Rightarrow a = \frac{37}{6}$$

۱۴۹۲؟ $f(x) = x^2 - 2x + 5$ و $(f \circ g)(x) = f(x^2 - 2x + 5)$ اگر $g(x) = 2x - 3$ (۱۴)

~~$(x^2 - 2x + 5)$~~ (۳)

~~$(x^2 - 2x + 5)$~~ (۱)

~~$(x^2 - 2x + 5)$~~ (۴)

~~$(x^2 - 2x + 5)$~~ (۲)

$$2x - 3 = u \rightarrow x = \frac{u+3}{2}$$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 - 2x + 5)$$

$$f(g(x)) = f(2x - 3) = 4x^2 - 12x + 20$$

$$f(u) = 4\left(\frac{u+3}{2}\right)^2 - 15 \times \left(\frac{u+3}{2}\right) + 20$$

$$f(u) = u^2 + 9 + 6u - 15u - 22.5 + 20$$

$$f(u) = u^2 - 9u + 6.5 \rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$

گزینه اول (۱۴) برابر گزینه (۳) است

$x^2 - 2x + 3$ (۴) $x^2 - 2x + 5$ (۳) $x^2 - 2x + 5$ (۲) $x^2 - 2x + 3$ (۱)

۱۴۹۱؟ $\log_9 A^2$ و $3^a = A$ اگر (۱۵)

$2+a^2$ (۴) $2+a^2$ (۳) $2+2a$ (۲) $2+2a$ (۱)

$$\log ab = \log a + \log b, \log a^n = n \log a$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log_9 A^2 &= \log_9 9 + \log_9 A^2 = \log_9 9^2 + 2 \log_9 A = 2 \log_9 9 + 2 \log_9 3^a \\ &= 2 + 2a \log_9 3 = 2 + 2a \end{aligned}$$

گزینه (۱)

19) اگر $g(x) = 2x - 1$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x-2}$ باشد، $f(x)$ را بیابید؟ کسری یا صحیح؟

4 ④

2 ③

-2 ②

-4 ①

$$\left. \begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x-1) = \frac{x}{x-2} \\ 2x-1 &= t \\ x &= \frac{t+1}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow f(t) = \frac{\frac{(t+1)}{2}}{\frac{(t+1)}{2} - 2} = \frac{\frac{(t+1)}{2}}{\frac{t+1-4}{2}} = \frac{t+1}{t-3}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x-3} \xrightarrow{f(2)} f(2) = \frac{2+1}{2-3} = \frac{3}{-1} = -3$$

گزینه 2

17) تابع $f = \{(1,2), (3,1), (4,5), (7,7)\}$ و $g = \{(1,2), (3,1), (4,5), (7,7)\}$

مفروضه اند اگر $(4,2) \in f \circ g$ و $(4,1) \in g \circ f$ و $(a,b) \in f$ ؟ صحیح یا صحیح؟

(5,4) ④

(4,2) ③

(4,5) ②

(5,4) ①

$$(4,5) \in f \rightarrow f(4) = 5$$

$$1 = (g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(5) = 1 \Rightarrow (5,1) \in g \Rightarrow b = 1$$

$$(4,2) \in f \circ g \Rightarrow 4 \in \text{Dom } g \xrightarrow{\text{از 5, 3, 7 و 1 حذف}} a = 4 \Rightarrow (a,b) = (4,2)$$

گزینه 2

18) اگر لگاریتم عدد $\sqrt[3]{10}$ در پایه 2 برابر A باشد، آنگاه لگاریتم عدد $(\frac{1}{A}-1)$ در

بسیار کم یا زیاد؟ صحیح یا صحیح؟

$\frac{3}{2}$ ④

$\frac{1}{3}$ ③

$\frac{2}{3}$ ②

-3 ①

$$A = \log_2 \sqrt[3]{10} = \log_2 10^{\frac{1}{3}} = \log_2 (2^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}} = \log_2 2^{\frac{1}{9}} \times 5^{\frac{1}{9}} = \frac{1}{9} \log_2 2 + \frac{1}{9} \log_2 5$$

$$A = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

لديه معدل (18)

$$A = \frac{1}{q} \Rightarrow \log_f \left(\frac{1}{A} - 1 \right) = \log_f (q - 1) = \log_{f^2} f^3 = \frac{3}{2} \log_f 2 = \frac{3}{2}$$

گزینه (4)

(19) در یک تعداد عددی مجموع 12 عدد اول 3 برابر مجموع 12 عدد اول آن است اگر چه هم برابر

و به عدد چه هم کدام است ؟ 1491

38 (4)

34 (3)

33 (2)

32 (1)

پس

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{10} = 3 S_{12} \Rightarrow \frac{10}{2} (2a_1 + 11d) = 3 \times \frac{12}{2} (2a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow 10a_1 + 55d = 36a_1 + 99d \Rightarrow -26d = 26a_1 \Rightarrow$$

$$d = -a_1 \quad (1)$$

$$a_{12} = 4 = a_1 + 11d = 4 \Rightarrow a_1 - 11a_1 = 4 \Rightarrow a_1 = -\frac{4}{10} \Rightarrow d = \frac{4}{10}$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -\frac{4}{10} + 9 \times \frac{4}{10} = \frac{32}{10} = 3.2$$

گزینه (3)

(20) در یک تعداد عددی مجموع 14 عدد و مجموع 14 عدد اول آن 103 عدد اول

ضد به چه هم کدام است ؟ 1491

14 (4)

9 (3)

1 (2)

11 (1)

$$S_4 = 134 \Rightarrow a_1 \frac{(q^4 - 1)}{q - 1} \quad \text{و} \quad S_6 = 103 = a_1 \frac{(q^6 - 1)}{q - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{S_4}{S_6} = \frac{q^4 - 1}{q^6 - 1} = \frac{134}{103} \Rightarrow q^3 + 1 = \frac{103}{134} \Rightarrow q^3 = \frac{103}{134} - 1 = -\frac{31}{134}$$

$$q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{2^3} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

گزینه (۲)

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_0} = \frac{a_1}{a_1 q^2} = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

گزینه (۴)

(۲۱) تابع $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ را در نظر بگیرید

اگر $g(f(x)) = -2$ و x صحیح باشد، x را بیابید.

(۱) $R-2$ (۲) Z (۳) R (۴) $\emptyset$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} g(0) & x \in Z \\ g(-1) & x \notin Z \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} -2 & x \in Z \\ -2 & x \notin Z \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = -2 \text{ برای همه } x$$

پس جواب (۳) است.

(۲۲) اگر $g(x) = f(3x-4)$ و $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، $g^{-1}(14)$ را بیابید.

(۱) 0 (۲) 4 (۳) 7 (۴) 8

$$g(x) = f(3x-4) \Rightarrow y = f(3x-4) \Rightarrow f^{-1}(y) = 3x-4$$

$$x = \frac{y + f^{-1}(y)}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{y + f^{-1}(y)}{3}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(14) = \frac{4 + 14 + 4}{3} = 8$$

گزینه (۴)

$$\text{پس } \log x^2 = \log 4$$

$$\text{پس } \log(x-1) = 2\log 2 - \log(x-1) \quad (۲۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$- (۳)$$

$$+ (۲)$$

$$= (۱)$$

$$\log(x-1) + \log(x-1) = \log 4 \Rightarrow \log(x-1)(x-1) = \log 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 4 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1 + 0 - 4 = 0) \Rightarrow x - 3 = \sqrt{0} \Rightarrow$$

$$\log x^2 = \log \sqrt{0} = \log 0^{1/2} = 1/2$$

$$\Rightarrow \log x^2 = 1/2$$

گزینه (۴)

$$(۲۴) \text{ اعداد } ۲, ۴\sqrt{۲}, \text{ و } ۲^b \text{ سه توان یک توان هستند و به هم می‌زنند}$$

پس a و b کار می‌کنند؟

$$\sqrt{۲} \quad (۴)$$

$$1/۵ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۲۵ \quad (۱)$$

$$(۴\sqrt{۲})^2 = ۲^a \times ۲^b \Rightarrow ۲^2 = ۲^{a+b} \Rightarrow ۲ = ۲^{a+b} \Rightarrow a+b = ۵$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{۲} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

گزینه (۱)

۴۵

$$(1) (a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

$$(2) (a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

$$k, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$$

نکته: ۱) با $(a+b)^n$ داریم که $n+1$ جمله دارد.

۲) با $(a+b)^n$ و $(a-b)^n$ هم داریم که $n+1$ جمله دارد و مشتق می‌گیریم

رابطه‌های وراثت در جبر و مشتق

$$(3) \text{ جمله } (k+1) \text{ با } (a+b)^n \text{ برابر است: } \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(4) \text{ اگر } x \text{ به مشتق از } (a+b)^n \text{ در } x \text{ برابر است:}$$

$$a > b \text{ و } \frac{na}{a-b} + 1 \Rightarrow (a+b)^n$$

$$(5) \text{ رابطه } (1 - \frac{x}{r})^n \text{ در } x \text{ برابر است با } \frac{1}{r} \text{ و } x^3 \text{ را می‌خواهیم؟}$$

$$\text{جمله } (k+1) \text{ با } (1 - \frac{x}{r})^n = \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(-\frac{x}{r}\right)^k$$

$$= \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{r}\right)^k x^k \Rightarrow x^k = x^3 \Rightarrow k=3$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} = \binom{n}{3} (1)^{n-3} \left(-\frac{x}{r}\right)^3 = \frac{n!}{3! \times r^3} \times \left(-\frac{1}{r}\right)^3 \times x^3$$

$$= \frac{\cancel{n!} \times \cancel{r^3} \times \cancel{r^3}}{\cancel{3!} \times \cancel{r^3} \times \cancel{r^3}} \times \frac{-1}{r} x^3 = -rx^3$$

نکته: ۱)

(۲۶) رابعا $(a+b)^n$ ضریب چه عدد و هم برابر است با کلمات؟
 ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

رابعا $(a+b)^n$ ضریب چه $n(k+1)$ برابر $\binom{n}{k}$ است؟

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{3} \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)(n-3)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} \Rightarrow n-2=3 \Rightarrow n=5$$

پنجم

(۲۷) رابعا چه عدد $(x + \frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ ضریب عددی مستقل از x کلمات؟
 گزینه ۴

۱ ۲ ۳ ۴

پاسخ: برای سادگی به x کانفرات فرستاده محسوس در فرستاده x از آن به کار
 توان آن توان x برابر صفر قرار دهیم.

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k \Rightarrow \binom{10}{k} x^{10-k} (x^{-1/2})^k = \binom{10}{k} x^{10-3k/2}$$

$$\Rightarrow 10 - \frac{3k}{2} = 0 \Rightarrow k = 10$$

$$\Rightarrow \binom{10}{10} x^{10-10} (x^{-1/2})^{10} \Rightarrow \text{مستقل از } x = \binom{10}{10}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{10! \times 0!} = 1$$

گزینه ۳

۲۸) برای تعیین مقدار n اگر به صورت $\left\{ \frac{r_{n+1}}{r_{n-2}} \right\}$ از شرط همگرا بودن خودکم‌تر از

۰.۰۲ باشد کوچکترین مقدار n کدام است؟ ۱۳۹۲

۱) ۵۱ ۲) ۵۲ ۳) ۴۳ ۴) ۴۲

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1}}{r_{n-2}} = \frac{r}{r} \Rightarrow \left| a_n - \frac{r}{r} \right| < 0.02$$

$$\Rightarrow \left| \frac{r_{n+1}}{r_{n-2}} - \frac{r}{r} \right| < 0.02 \Rightarrow \left| \frac{12n+3-12n+1}{9n-4} \right| < \frac{2}{100}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{11}{9n-4} \right| < \frac{2}{100} \Rightarrow \frac{11}{|9n-4|} < \frac{2}{100} \Rightarrow \frac{|9n-4|}{11} > \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |9n-4| > \infty \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{9n-4 > 0} 9n-4 > \infty \Rightarrow n > \frac{\infty+4}{9} \Rightarrow n > \frac{\infty}{9} \Rightarrow n > \frac{\infty}{9}$$

$n \geq 42 \Rightarrow$ کوچکترین مقدار n برابر ۴۲ است.

۲۹) اگر α, β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد، حاصل $\alpha' \beta'$ را بیابید. گزینه ۲

۱۳۹۲ و $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ صحیح است.

$$2\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0 \quad (3)$$

$$2\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0 \quad (1)$$

$$2\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0 \quad (4)$$

$$2\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} \alpha' = 1 + \frac{1}{\alpha} \\ \beta' = 1 + \frac{1}{\beta} \end{cases} \quad \begin{aligned} 2\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0 &\Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \text{ و } \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} = -2 \\ \alpha' + \beta' &= 1 + \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha\beta + \beta + \alpha\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{2\alpha\beta + \alpha + \beta}{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha' + \beta' = \frac{2 \times (-2) + \frac{3}{2}}{-2} = \left(+\frac{5}{4} \right)$$

$$\alpha' \beta' = \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) = \frac{1 + 2\alpha + 2\beta}{\alpha\beta} = \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$S \Rightarrow \alpha' + \beta' = \frac{a}{f} \Rightarrow \alpha' + \beta' = -\frac{b'}{a'} = \frac{a}{f} \Rightarrow (a' = -f, b' = 0 \mid a' = f, b' = 0)$$

$$P \Rightarrow \alpha' \beta' = -\frac{1}{f}$$

$$\alpha' \beta' = -\frac{1}{f} \Rightarrow (\alpha' \beta' = -\frac{1}{f} = \frac{c'}{a'} \Rightarrow (a' = -f, c' = 1 \mid a' = f, c' = -1))$$

$$\Rightarrow a' \alpha' + b' \alpha + c' = 0 \Rightarrow \left. \begin{aligned} f \alpha' - a \alpha - 1 &= 0 \\ -f \alpha' + a \alpha + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \alpha' - \beta \alpha + p = 0$$

نیز $\left\{ \frac{n+1}{n+2} \right\}$ از نقطه کمرش $\textcircled{3}$ در محله اعداد طبیعی قرار می‌گیرد. $\textcircled{3}$ در محله اعداد طبیعی قرار می‌گیرد. $\textcircled{3}$

کمر از 1.05 است. مقدار n که کمترین $\frac{1}{n}$ را می‌دهد 149 است.

$$a_n = \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \Rightarrow |a_n - \frac{1}{2}| < 0.05$$

$$\Rightarrow \left| \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{2} \right| < 0.05 \Rightarrow \left| \frac{2n+2 - n - 2}{2n+4} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{14}{|2n+4|} < \frac{1}{100} \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{2n+4 > 0} \frac{2n+2}{14} > \frac{100}{2} = 50$$

$$\Rightarrow 2n+2 > 700 \Rightarrow n > \frac{698}{2} = 349 \Rightarrow n \geq 350$$

نیز $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ $\textcircled{3}$ اگر $a_1 = 1$ و $S_n = S_{n-1} - (\frac{1}{n})^{n-1}$ و $n > 1$ $\textcircled{3}$ اگر $a_1 = 1$ و $S_n = S_{n-1} - (\frac{1}{n})^{n-1}$ و $n > 1$ $\textcircled{3}$

$$S_n - S_{n-1} = a_n \Rightarrow a_n = -(\frac{1}{n})^{n-1} \quad n > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} -(\frac{1}{n})^{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 1 - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2-1}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

اربع (۳۱)

$$\sum_{n=k}^{\infty} a(r)^{n-1} = \frac{a(r)^{k-1}}{1-r}$$

نکته

(۳۲) اگر α, β, γ سه ریشه معادله $x^3 + 3x + 2 = 0$ باشند، برای کدام مقدار K معادله

$$x^3 + Kx + 20 = 0 \quad \text{مجموع مربعات معادله} \quad \left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}, \frac{1}{\gamma^2} \right\} \quad ۱۳۹۰$$

۳۱ (۴) ۲۸ (۳) ۱۹ (۲) ۲۷ (۱)

نکته: اگر ریشه α, β, γ معادله $ax^2 + bx + c = 0$ که از ریشه ها $1 - \frac{c}{a}$ و دیگری $1 - \frac{c}{a}$ است

اگر $\alpha + \beta + \gamma = 0$ که از ریشه ها $1 - \frac{c}{a}$ و دیگری $1 - \frac{c}{a}$ است و مقدار اول $\alpha = 1$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2} = 1 \Rightarrow \text{مجموع مربعات معادله}$$

$$\Rightarrow x^2 - Kx + 20 = 0 \Rightarrow K = 29$$

فرجه (۲)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

دوازده (۳۳)

۱) بزرگترین - کمترین (۲) کمترین - بزرگترین (۳) کمترین - غیر کمترین (۴) کمترین - بزرگترین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n^2 + n} - n$$

$$a'_n = \frac{2n+1}{2\sqrt{n^2+n}} - 1 > 0 \Rightarrow \text{دوازده (۳۳) فرجه (۴)}$$

(۳۴) مجموع ضرایب عددی بسط عبارت $(2x^2 + x - 2)^{99} + (x^3 + x^2 - x - 1)^5 + 3$ برابر است با:

- ۱) ۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

نکته: بجای تعیین مجموع ضرایب بسط (عدد) $(a+b)^n$ کافی است به سطر

آن سری a و b عددی قرار دهیم. در شکل بالا $a=2$ و $b=1$ قرار دهیم.

$$= (2+1-2)^{99} + (2+1-1-1)^5 + 3 = 1+1+3=5$$

گزینه (۴)
 (۳۵) در دنباله $a_n = 2 - (\frac{1}{3})^n$ اگر $n \geq N$ و $\frac{1}{3^n} < \epsilon$ باشد a_n از بسط

مقدار کمتر از ϵ کمتر از M بار است. ۱۳۹۱

① $[\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\epsilon}] + 1$ ② $[\log_{\frac{1}{3}} \epsilon] + 1$ ③ $[-\log_{\frac{1}{3}} \epsilon] + 1$ ④ $[\log_{\frac{1}{3}} \epsilon] + 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 - 0 = 2 \Rightarrow |a_n - 2| < \epsilon \Rightarrow |2 - (\frac{1}{3})^n - 2| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |(\frac{1}{3})^n| < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{3^n} < \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3^n} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow n > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow n \geq [\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\epsilon}] + 1$$

$$\Rightarrow M = [\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\epsilon}] + 1$$

19

۳۶) اگر $\theta = \frac{1}{2}$ و $\frac{\cos(\frac{3\pi}{4} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(\frac{3\pi}{4} + \theta)}$ را بیابیم؟

۴

۳

۲

۱

نکته: $\begin{cases} \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \\ \cos(\frac{3\pi}{4} + \theta) = \sin\theta \\ \sin(\pi - \theta) = \sin\theta \end{cases}$

(مقادیر صحیح π در $\cos$)
($\sin$ در مکان θ حرکت کرد)

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta + \sin\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{1}{2} + \frac{\cot\theta}{2}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

گزینه ۲

نکته: $\begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \end{cases} \begin{cases} \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \end{cases} \begin{cases} \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \\ \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \\ \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \end{cases} \begin{cases} \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$

۳۷) $\cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{12} + \cos \frac{9\pi}{12}$ را بیابیم؟

۴

۳

۲

۱

نکته: $\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = 0$ / ($\alpha = \pi - \beta$, $\sin\alpha = \sin\beta$)
 $\cos\alpha + \cos\beta = 0$

$$\frac{3\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \pi \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{5\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} = \pi \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{9\pi}{12} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{7\pi}{12} = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 = 0$$

گزینه ۲

$$\text{یعنی؟} \quad \frac{1}{r} \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha}$$

جواب کس کجاست؟ (21)

$$k\pi + \pi/2 \quad (4) \quad k\pi - \pi/2 \quad (3) \quad k\pi/2 + \pi/2 \quad (2) \quad k\pi/2 \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha = r \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}$$

$$\sin \alpha = \cos(\alpha + \alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = r \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha}{\sin \alpha} = r \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{r \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha}{\sin \alpha} = r \cos \alpha$$

$$\Rightarrow r \cos \alpha + \cos \alpha = r \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = k\pi + \pi/2 \Rightarrow \alpha = k\pi/2 + \pi/2$$

پس (2)

$$\text{یعنی؟} \quad \cos\left(r \sin^{-1} \frac{r\sqrt{r}}{r}\right) \quad \text{جواب (29)}$$

$$\frac{2}{9} \quad (4) \quad \frac{-5}{9} \quad (3) \quad \frac{-19}{24} \quad (2) \quad \frac{-22}{24} \quad (1)$$

$$\sin \theta = \frac{r\sqrt{r}}{r}$$

$$\cos \theta = \sin^{-1} \frac{r\sqrt{r}}{r}$$

$$\cos \theta = 1 - \sin \theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$r \cos \theta = r \cos \theta - r \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = r \times \frac{1}{9} - r \times \frac{1}{9} = -\frac{r}{9}$$

پس (2)

1498 ۹ $\cot x = \frac{\sin x + \sin x}{\cos x + \cos x}$ جواب کدو معادله (50)

$\frac{1}{0} (2K+1)\pi$ (4) $\frac{2K\pi}{0}$ (3) $\frac{2K\pi}{0}$ (2) $\frac{K\pi}{0}$ (1)

$$\begin{cases} \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \\ \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \end{cases} \begin{cases} \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

$$\cot x = \frac{2 \sin \frac{2x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{2x}{2} \cos \frac{x}{2}} \Rightarrow \cot x = \cot \frac{2x}{2}$$

$$\cot x = \cot (\pi - x) = \cot \frac{2x}{2} \Rightarrow \frac{2x}{2} = K\pi + \pi - x$$

$$\Rightarrow x = \pi (2K+1) = \{ \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots \}$$

نکته (4) اگر $\cot x = \cot y$ و $x \neq y$ و $x, y \in [0, \pi)$ آنگاه $x = y$

$$x = \{ \pi (2K+1) \} - \{ K\pi \}$$

1398 ۹ $\sin(2\cos^{-1}(-\frac{5}{13})) = ?$ (41)

120 (4) -90 (3) 90 (2) -120 (1)

$$\cos^{-1}(-\frac{5}{13}) = \theta \Rightarrow -\frac{5}{13} = \cos \theta \text{ و } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Rightarrow \sin \theta = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow 139 \sin(2\theta) = 139 \times 2 \sin \theta \cos \theta = 139 \times 2 \times \frac{12}{13} \times (-\frac{5}{13}) = -120$$

$$\frac{K\pi}{\varepsilon} + \frac{\pi}{\Lambda} \quad (4) \quad \frac{K\pi}{\varepsilon} - \frac{\pi}{\Lambda} \quad (5) \quad \frac{K\pi}{\varepsilon} + \frac{\pi}{18} \quad (6) \quad \frac{K\pi}{\varepsilon} - \frac{\pi}{18} \quad (7)$$

$$\frac{\tan \frac{\pi}{2} - \tan x}{\tan \frac{\pi}{2} + \tan x} = \tan x \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$$

$$\Rightarrow \gamma x = K\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = K\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{KRC}{\varepsilon} + R/q \quad (2) \text{ is correct}$$

۱۴۹۷۵ — $\sin(\cos^{-1}(\frac{5}{6}) + \cos^{-1}(-\frac{4}{6}))$ کا جواب (۴۳)

$$\frac{v}{v_0} \textcircled{r} \quad 1 \textcircled{w} \quad -\frac{v}{v_0} \textcircled{y} \quad -1 \textcircled{1}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = \beta \Rightarrow \cos \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{5} \times (-\frac{6}{5}) + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5}$$

$$= -\frac{15}{r_0} + \frac{9}{r_0} = -\frac{6}{r_0}$$

$$10 \angle 0^\circ - 1 \angle 10^\circ = 1 \angle 90^\circ \cdot \frac{\cos 10^\circ - j \sin 10^\circ}{j \sin 10^\circ - \cos 10^\circ} \quad \text{--- } \textcircled{FF}$$

$$\frac{13}{9} \textcircled{4} \quad \frac{9}{13} \textcircled{11} \quad \frac{-9}{13} \textcircled{2} \quad \frac{-13}{9} \textcircled{17}$$



۴۵) اگر $\beta = \frac{1}{2}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ باشد مقدار $\sin \alpha$ را بیابید. گزینه ۱

$$\gamma_\alpha = \gamma_{[(\alpha\beta) + (\beta)]} = \frac{\gamma_{(\alpha\beta)} + \gamma_\beta}{1 - \gamma_{(\alpha\beta)}\gamma_\beta} = \frac{1 + 1/2}{1 - 1 \times 1/2} = 2$$

$$\frac{p}{h} \sin \alpha = \frac{r \sin \alpha}{1 + r \sin \alpha} = \frac{r \times r}{1 + 9} = \frac{9}{10} = 0.9$$

$$2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin 100^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 0^\circ - \cos 110^\circ} \quad \text{C, u jo } (44)$$

$$\frac{0}{10} = \frac{F}{10} = \frac{4}{10}$$

$$\frac{\phi}{\lambda} \quad \textcircled{f} \quad \frac{V}{\mu} \quad \textcircled{\mu} \quad \frac{\mu}{\epsilon} \quad \textcircled{\gamma} \quad - \frac{\mu}{\epsilon} \quad \textcircled{1}$$

$$A = \frac{\sin(\phi_0 - \theta_0) + \sin(\psi_0 - \theta_0)}{\cos(\phi_0 + \theta_0) - \cos(\psi_0 + \theta_0)} = \frac{-\cos\theta_0 - \sin\theta_0}{-\cos\theta_0 + \sin\theta_0}$$

$$A = \frac{-1 - 5\%}{-1 - 1\%} = \frac{-1 - 5\%}{-1 - 1\%} = \frac{1}{4} \quad \text{القيمة (3)}$$

$$\therefore -1 + \frac{1}{10} \log 10 \rightarrow -1 + \frac{1}{10} \log \frac{10}{1} = -1 + \frac{1}{10} \log 10 = -1 + \frac{1}{10} \cdot 1 = -1 + 0.1 = -0.9$$

$\frac{2}{1} \textcircled{4}$ $\frac{3}{1} \textcircled{3}$ $\frac{4}{2} \textcircled{2}$ $\frac{5}{1} \textcircled{1}$

$$(۲۵) \quad \cos x - \frac{1}{2}x = \cos \frac{x}{2}$$

(۲۷) ←

$$\frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = -\cos x \Rightarrow 1 = -\cos x \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$$

$$(۲۶) \quad \tan x = \frac{\frac{1}{2} \tan x}{1 - \frac{1}{2} \tan x} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

(۲۸) گزیده

$$(۲۸) \quad 1 \text{ یا } 2 \text{ ؟ } \quad \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \sqrt{x^2 + x + 1} \quad \text{با هم مقایسه می‌کنیم}$$

$$1 \quad (۲)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$1 \quad (۲)$$

$$-2 \quad (۱)$$

$$x^2 + x + 1 = A \Rightarrow x^2 + x + 1 - A = 0$$

$$\Rightarrow A - 1 = \sqrt{A} \Rightarrow A^2 + 1 - 2A = A \Rightarrow A^2 - 3A + 1 = 0$$

$$a+b+c=0 \quad \begin{cases} A=1 \quad \text{و } e \\ A=\frac{c}{a}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 1 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1$$

(۲) گزیده

$$(۲۹) \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{با هم مقایسه می‌کنیم}$$

که در هر دو طرف ۱ جمع می‌کنیم

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (۳)$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 + 5x + 1 = 0 \quad (۴)$$

$$x^2 + 5x + 1 = 0 \quad (۲)$$



مستقیم و ۱-۲، $y_1 = \frac{1}{x_1} - 1$
 $y_2 = \frac{1}{x_2} - 1 \Rightarrow y_1 + y_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} - 2 = \frac{\frac{4}{-1}}{-1} - 2 = \textcircled{-6}$

$$y_1 y_2 = \left(\frac{1}{x_1} - 1\right)\left(\frac{1}{x_2} - 1\right) = \frac{1}{x_1 x_2} - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + 1$$

$$= \frac{1 - (x_1 + x_2)}{x_1 x_2} + 1 = \frac{1 - \frac{4}{-1}}{-1} + 1 = \textcircled{2}$$

$$x^2 - 5x + p = 0 \Rightarrow x^2 - (-6)x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 2 = 0$$

نکته ۴

مستقیم و ۱-۲، $x^2 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = 0$ که a ، $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \textcircled{50}$

مستقیم و ۱-۲

$$a > 4 \textcircled{4} \quad a < 4 \textcircled{3} \quad a > 4 \textcircled{2} \quad a < 4 \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 0 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$$x^2 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + ax + 4) = 0 \Rightarrow x^2 + ax + 4 = 0$$

$$\Delta = a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a > 4 \textcircled{2} \quad a < -4 \textcircled{1}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -a > 0 \Rightarrow \textcircled{a < 0}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 4 > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a < -4 \\ a < 0 \\ a > 4 \end{cases} \Rightarrow a < -4$$

نکته ۱

(۵۱) حد $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} \right]$ را در تمام حالت‌های ممکن تعیین کنید؟ ۱۳۹۳

① $x \rightarrow 0^-$ ② $x \rightarrow 0^+$ ③ $x \rightarrow -\infty$ ④ $x \rightarrow +\infty$

$$t = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow +\infty \rightarrow t \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow -\infty \rightarrow t \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \times [t] = \frac{\text{محدود}}{\text{صفر}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} [t] = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{[t]}{t} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad u-1 < [u] \leq u \Rightarrow \frac{1}{x}-1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow 1-x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1 \quad x > 0$$

$$1 \leq x \left[\frac{1}{x} \right] < 1-x \quad x < 0$$

$$\text{طبق قضیه} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} 1-x = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

$$x \rightarrow 0^-$$

نکته ۳) قضا عریضه نمی‌باشد.

(۵۲) تابع $f(x) = (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{4} x$ را در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی بررسی کنید. ۱۳۹۳

① نقطه در خارج از جزیع پیوسته ② نقطه در داخل جزیع پیوسته ③ همواره پیوسته ④ همواره نپیوسته

$$\text{در } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{4} x = 0 \Rightarrow (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{4} x = 0$$

در نقطه تمام جزیع $f(x)$ پیوسته است.

ادم (۵۲) اگر x فرجه $f(x) = (-1)^{[x]} \sin \pi/x$ و x به ∞ میل کند (محدوده فرجه)

$$\lim_{a \rightarrow \bar{a}} f(a) = \lim_{x \rightarrow \bar{a}} (-1)^{[a]} \sin \pi/x = (-1)^{a-1} \sin \frac{\pi a}{r}$$

$$\lim_{a \rightarrow \bar{a}} f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} (-1)^{[a]} \sin \pi/x = (-1)^a \sin \frac{\pi a}{r} = -\sin \frac{\pi a}{r}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \bar{a}} f(x) \quad \text{یعنی } f \text{ در } x=a \text{ نقطه پرش دارد}$$

$$\text{۱) اگر } r = 1/p \text{ و } a+b \text{ } \lim_{x \rightarrow r} \frac{x-\varepsilon}{r x^r + a x + b} = -\infty \quad (۵۳)$$

$$۱۲ \text{ (۴)}$$

$$۶ \text{ (۳)}$$

$$۳ \text{ (۲)}$$

$$-۳ \text{ (۱)}$$

$$\lim_{x \rightarrow r} \frac{x-\varepsilon}{r x^r + a x + b} = -\infty \Rightarrow r x^r + a x + b = 0$$

$$\text{با } x=3 \text{ خروجی می‌دهد و در } x=3 \text{ به } x=3 \text{ میل کند}$$

$$\Rightarrow r x^r + a x + b = 0 \Rightarrow 11 + 3a + b = 0$$

$$\Rightarrow b = -3a - 11 \quad (۱)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4 \times 1 \times b = 0 \Rightarrow a^2 - 11b = 0 \quad (۲)$$

$$\frac{(۲)}{(۱)} \Rightarrow a^2 + 11(3a + 11) = 0 \Rightarrow a^2 + 33a + 121 = 0$$

$$\Rightarrow (a+11)^2 = 0 \Rightarrow a+11=0 \Rightarrow a=-11 \Rightarrow b=11$$

$$\Rightarrow a+b = -11+11=0 \quad \text{نهایت (۳)}$$

راه حل که هر دو مرتبه در (۲۸)

برای $y = \frac{1}{x^2}$ و $x = 3$ (23) دایره

$$y \times (x-3)^2 = yx^2 + ax + b \Rightarrow y(x^2 + 4 - 4x) = yx^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow yx^2 - 4yx + 4y = yx^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow a = -4y, b = 4y \Rightarrow a + b = 0$$

برای $y = \frac{1}{x^2}$ و $x = 3$ (24) دایره

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos(x + \pi/2)} = y^a$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos(x + \pi/2)} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{-\sin(x + \pi/2)} = \frac{\frac{-\sin \pi/2}{2\sqrt{\cos \pi/2}} - \frac{\cos \pi/2}{2\sqrt{\sin \pi/2}}}{-\sin(\pi/2 + \pi/2)}$$

$$x \rightarrow \pi/2 \quad \cos(x + \pi/2) \quad x \rightarrow \pi/2 \quad -\sin(x + \pi/2) \quad -\sin(\pi/2 + \pi/2)$$

$$= \frac{\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}}}{-1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}}{-1}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}}{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1} = 2^{-1/2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

برای $y = \frac{1}{x^2}$ و $x = 3$ (25) دایره

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = a$$

$$2 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin x \times \cos(1 + \cos x)}{2 \sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\cos x \cos(1 + \cos x) - \sin x \sin(1 + \cos x)}{2 \cos x}$$

$$= \frac{-\cos \pi \cos(1 + \cos \pi) - \sin \pi \sin(1 + \cos \pi)}{2 \cos \pi} = \frac{-(-1) \times \cos 0 - 0}{2} = \frac{1}{2}$$

(۵۶) به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{a(1+\sqrt{1-x})}{x^2-2x} & x \neq 2 \\ x-a & x=2 \end{cases}$ پیوسته است؟ ۱۳۹۴

① $1/2$ ② $1/4$ ③ $2/4$ ④ $3/2$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$ شرط پیوستگی

$f(2) = 2-a$ ① ، $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(1+\sqrt{1-x})}{x^2-2x} = \frac{0}{0}$

HOP $\lim_{x \rightarrow 2^+} a \left(\frac{-1}{2x-2} \right) = \frac{-a}{2} = -\frac{a}{2}$ ②

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow -\frac{a}{2} = 2-a \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{1}$

$\Rightarrow a = 2/4$ گزینه ③

(۵۷) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} ([rx] + [-rx]) \frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}$ کدام است؟ (تعداد صحیح ۱۳۹۲)

① -3 ② 3 ③ 0 ④ 1
 $\lim_{u \rightarrow 0} \cos^m u = 1 - \frac{mu^r}{r}$ و $f(x) = [ax] + [-ax] = \begin{cases} 0 & ax \in \mathbb{Z} \\ -1 & ax \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ ⑤

$\lim_{x \rightarrow 0} ([rx] + [-rx]) \frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \frac{1-(1-\frac{3x^2}{2})}{1-\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \frac{3x^2}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{-2x^2} = -\frac{3}{2}$ گزینه ②

(۵۸) تابع $f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$ از نظر صحت در $x=0$ کدام وضع را دارد؟

① حد ندارد ② حد دارد ③ حد دارد ④ حد ندارد

چون $\cos x = 1 \Rightarrow \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{\cos x - 1} = 0$ پس تابع در $x=0$ تعریف شده است.

تقریباً در این نقاط صفر است و در هیچ کجایی از دامنه تعریف نشده است و مع $x=0$

۵۹) $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \left[\frac{1}{x+1} \right]$ ؟

- ۱) ۱ - ۲) ص ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \left[\frac{1}{x+1} \right] = 2 \times \left[\frac{1}{2} \right] = 2 \times 0 = 0$

۶۰) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)+1) \sin \frac{\pi}{x^2}$ ؟ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ ^{نرسه ۲}

وقتی x به 0 میل کند ؟

- ۱) ص ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) π

نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ^{نرسه ۱}

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x)+1) \sin \frac{\pi}{x^2} = 0 \times 0 = 0$

۶۱) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos x}$ ؟ ^{نرسه ۱}

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$ ^{نرسه ۱}

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x}{(1 - \cos x)(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x}{2(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x \sin(-x)}{2(1 - \cos x)}$

$\stackrel{\text{نرسه ۱}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \times x \times (-x)}{2 \times \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2} = 4$ ^{نرسه ۵}

از این روش برای حل مسائل دیگر استفاده کنید

۱۳۹۳ - ۲۰۱۴ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ (۲۲)

$\frac{0}{0}$ (۴) $-\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{3}{8}$ (۲) $-\frac{5}{8}$ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{x^2} \times \frac{\cos x + \sqrt{\cos x}}{\cos x + \sqrt{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x}{x^2 (\cos x + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos x - 1)}{x^2 (\cos x + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos x - 1) (\cos x + \cos x + 1)}{x^2 (\cos x + \sqrt{\cos x})}$$

ساده $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \times \frac{\cos x (\cos x + \cos x + 1)}{(\cos x + \sqrt{\cos x})} \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} \times \frac{\cos x (\cos x + \cos x + 1)}{(\cos x + \sqrt{\cos x})} = -\frac{1}{4} \times \frac{1 \times 3}{1} = -\frac{3}{4}$$

گزینه (۲) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ تابع f در $x=0$ از شرط پیوستگی برخوردار است یا نه؟ (۲۳)

- (۱) از چپ پیوسته - از راست پیوسته
(۲) از چپ پیوسته - از راست نپیوسته
(۳) از چپ نپیوسته - از راست پیوسته
(۴) از چپ پیوسته - از راست نپیوسته

$f(0) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \times \text{محدود} = 0$

$\Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ از چپ و راست پیوسته است

گزینه (۴) $\therefore$ متوالیات $f(x)$ در $x=0$ همگراست و مقدار آن ۰ است.

(۴۴) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ کدام گزینه در مورد پیوستگی تابع $h(x) = f(x) + g(x)$ در $x=1$ صحیح است؟ (۱۳۸۱)

- (۱) تابع h در $x=1$ نقطه پیوستگی محسوب می‌شود (۳) تابع h در $x=1$ از چپ پیوسته است
(۲) تابع h در $x=1$ نقطه پیوستگی محسوب می‌شود (۴) تابع h در $x=1$ از راست پیوسته است

تابع $f(x) = \sqrt{x}$ به ازاء x متغیر تابع و دامنه تابع $g(x) = \sqrt{x}$ از

برای $x \in \mathbb{R}$ و $x \geq 0$ داریم $x = \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2 + 0} = \sqrt{x^2 + 0^2}$

مع (۱) هر دو طرف تنه صف $\Rightarrow$ (*) $\Rightarrow$ $\alpha \geq 1 \cup \{0\} \xrightarrow{\alpha \geq 0} \alpha^2 - \alpha \geq 0$

تابع f در x پیوسته است و در x از صف اول و برای هر $\epsilon > 0$ تابع g در x

سَمْعٌ وَفِيهِ رِزْقَانِ لَكُمْ مَعَهُ عِلْمٌ إِنَّ تَوْفِيقَهُ كَذَلِكَ (*) إِنَّ إِلَٰهَكُمْ

و بعد از آن موقع gof در x برابر با f می شود.

گزینه (۴) اگر $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) - 1 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ آنگاه f و g متساوی نیستند.

تابع و نوی فایده [۴، ۴] - کلام است ۱۳۹۲

۱۰ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

(a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \\ f(x)-1 \end{cases} = \begin{cases} [x]+[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ [x]+[-x]-1 & x \in \mathbb{Z} \end{cases} = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0-1 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x \in \mathbb{Z} \\ x \notin 2 \end{matrix} = -1 = f(x)$$

(۱) در وقت ولادت

نکته: معنی "وفا" در اینجا معنی وفاداری است
و معنی وفات نیست.

(۶۶) حاصل ؟ $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1 - \sqrt{4x}}{2x - \sqrt{x}}$ کدام است ؟

۱) -2π ۲) $-\pi$ ۳) π ۴) 2π

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1 - \sqrt{4x}}{2x - \sqrt{x}} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{-\pi(1 + \sqrt{4x})}{2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{-\pi(1 + \sqrt{4 \cdot \frac{1}{4}})}{2 - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}}$$

$$= \frac{-\pi(1+1)}{2-1} = -2\pi$$

گزینه ۱

در اکثر موارد به دنبال کمک به گرفتن حد می‌کنند به شرطیکه مشتق حاصل مجدداً به هم نرسد و در طابع

که صورت و مخرج توانع مثلاً آن دارد که می‌تواند به هم نرسد.

(۶۷) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax+b & |x| \geq 1 \\ x[x] & |x| < 1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته و در نمودار این تابع خط $x=3$ به

کدام عرض قطع می‌کند ؟ ۱۳۹۰

۱) -2 ۲) 1 ۳) -1 ۴) 2

تابع f در هر نقطه است و پیوسته در نقاط $x=1$ و $x=-1$ بررسی کنیم

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ x[x] & -1 < x < 1 \end{cases}$$

نقطه $x=1 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a+b = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x[x] = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{پیوستگی}} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = a+b = 0$ ①

نقطه $x=-1 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -a+b = f(-1) \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x[x] = (-1) \times (-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow -a+b=1$ ②

① $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$

در صفحه ۳۴ ←

(۷۰) به ازای کدام مقادیر a تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x-3} & x > 3 \\ ax - 3a - \frac{3}{\lambda} & x \leq 3 \end{cases}$$

در نقطه $x=3$ پیوسته است (مخرج کسر $\neq 0$)

① - ۲ ② ۲ ③ هیچ مقدار a ④ مقدار a

برای بررسی $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

① $l = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3a - 3a - \frac{3}{\lambda} = f(3) = -\frac{3}{\lambda}$

$l = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x-3} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$

$\Rightarrow l = -\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{4}}\right) \left(\frac{1}{2\sqrt{3-3}}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{0} = -\frac{3}{\lambda}$ ②

①، ② $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$ و a

به ازای هر مقدار a و $x=3$ پیوسته است و نیز ④

ترجمه: از همان خطی به $f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ می توانیم بگوییم که a هر چه باشد،

همواره می تواند اعتبار کند.

⑦۱ یکی از ریشه های معادله $x^3 + 2x^2 - 4x - 3 = 0$ کدام بازه است؟ ۱۳۹۴

① $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$ ② $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$ ③ $(-\frac{1}{4}, 0)$ ④ $(0, \frac{1}{4})$

تابع $f(x)$ جدید عبارت است و در $\mathbb{R}$ پیوسته است. طبق قضیه بولتزانو اگر $f(a) \times f(b) < 0$ باشد، $f(x)$ در بازه (a, b) برابر صفر است.

ریشه بازه (a, b) برابر صفر است.

$$\begin{cases} f(-\frac{3}{4}) = \frac{27}{64} + 2 \times \frac{9}{16} + 3 - 3 > 0 \\ f(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 2 - 3 < 0 \Rightarrow f(-\frac{3}{4}) \times f(-\frac{1}{4}) < 0 \\ f(0) = -3 < 0 \quad f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + (-2) - 3 < 0 \\ f(-1) = -1 + 2 + 4 - 3 > 0 \end{cases}$$

گزینه د درست است و بولتزانو را

$$\begin{aligned} a = -1/2 \\ b = 1/2 \end{aligned} \rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & |x| \geq 1 \\ x[x] & |x| < 1 \end{cases}$$

ادامه سوال ۵۷

درج فوق بجای مقدار ۳ قرار داده شود

$$f(3) \stackrel{|x| \geq 1}{=} -\frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} = -1$$

گزینه ۵ درست است.

$$\textcircled{48} \text{ حد درستی} \quad \lim_{x \rightarrow \bar{r}} \frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$$

$$\begin{matrix} 3 & 4 & -3 & 3 & -2 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{r}} \frac{|(x-2)(x+1)|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} = \lim_{x \rightarrow \bar{r}} \frac{-(x-2)(x+1)}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$$

$$\begin{aligned} \text{HoP} \quad \lim_{x \rightarrow \bar{r}} \frac{-(x+1) + (x-2)}{2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 12}}} &= \lim_{x \rightarrow \bar{r}} \frac{-2x + 1}{2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 12}}} = 2 \end{aligned}$$

گزینه ۱

$$\begin{aligned} \textcircled{49} \text{ درج با ضابطه} \quad \lim_{x \rightarrow \bar{r}} f(x^2 - x) \quad \text{که } f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{1+x} & x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & \text{موجود نمی باشد} \end{matrix}$$

$$(x^2 - x) = x(x^2 - 1) = 0(-1) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{r}} f(x^2 - x) = f(0^+) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \bar{r}} \sqrt{1-x} = 1$$

گزینه ۲

توجه: به سوال ۵۷ برگردید و حدی را که گذاشتید سوال ۱۴۹۰ را

۷۲ - یکی از جوابهای معادله $x = \sqrt{2} \sin x$ در کدام فاصله است؟ ۱۳۷۷

- ① $(0, \pi/6)$ ② $(\pi/3, \pi/2)$ ③ $(\pi/4, \pi/3)$ ④ $(\pi/6, \pi/4)$

$$f(x) = x - \sqrt{2} \sin x = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} x & 0 & \pi/4 & \pi/3 & \pi/2 \\ \hline f(x) & 0 & - & - & + \end{array} \Rightarrow f(\pi/3) \times f(\pi/2) < 0$$

نکته: اگر تابعی در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و متناهی در نقطه a مثبت و در نقطه b منفی

یا برعکس باشد $f(a) \times f(b) < 0$ آنگاه $\exists x_0 \in (a, b)$ که $f(x_0) = 0$ *

گزینه ②
۷۳ - یکی از ریشههای معادله $(a+2)x^2 - 7x + 4 = a$ بین دو عدد 1 و -1 است مجموع سایر

ا کدام است؟ ۱۳۸۱

- ① $\{a: a < -2\}$ ② $\{a: a > 4\}$ ③ $\emptyset$ ④ $\mathbb{R}$

$$f(x) = (a+2)x^2 - 7x + 4 - a = 0 \quad \uparrow \text{طبق نکته بالا} \leftarrow$$

$$\rightarrow f(1) \times f(-1) < 0 \Rightarrow f(1) = (a+2) - 7 + 4 - a = -1 < 0$$

$$f(-1) = (a+2) + 7 + 4 - a = 13 > 0$$

حدوده ناحیه $f(x)$ به ازای x در $(-1, 1)$ $\Rightarrow \nexists a$

گزینه ④

۷۴ - با کدام مجموعه تعداد ریشههای معادله $ax^3 + 2x^2 - x + 4 = 0$ در بازه $(0, 1)$ برابر است؟ ۱۳۸۸

- ① $a < -3/4$ ② $a < -5/4$ ③ $a < -5/3$ ④ $a < -3$ ⑤ $a < -5$

$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(1) = a+5 \end{cases} \xrightarrow{\text{فصلنامه ریاضی}} f(0) \times f(1) < 0 \Rightarrow f \text{ حداقل یک ریشه در } (0, 1)$$

۷۴. طبق قضیه مقدار میانی اگر $f(0) \times f(1) < 0$ و $f(x)$ در $[0, 1]$ پیوسته باشد،

حدیث یک ریشه دارد. $f(0) = 4$, $f(1) = a+5$

$$\Rightarrow f(0) \times f(1) = 4(a+5) < 0 \Rightarrow a < -5$$

گزینه (۵) درست است.

۷۵. کوچکترین ریشه مثبت معادله $x^3 - 12x + 1 = 0$ کدام بازه است؟ ۱۲۹۱

① $(\frac{1}{10}, \frac{1}{8})$ ② $(\frac{1}{13}, \frac{1}{12})$ ③ $(\frac{1}{11}, \frac{2}{13})$ ④ $(\frac{2}{13}, \frac{1}{12})$

توجه: برای یافتن کوچکترین ریشه از قضیه مقدار میانی و کوچکترین بازه شروع می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\frac{1}{13}) = (\frac{1}{13})^3 - 12(\frac{1}{13}) + 1 > 0 \\ f(\frac{1}{12}) = (\frac{1}{12})^3 - 1 + 1 > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\frac{2}{13}) = (\frac{2}{13})^3 - \frac{24}{13} + 1 < 0 \\ f(\frac{1}{12}) > 0 \end{array} \right. \Rightarrow f(\frac{1}{12}) \times f(\frac{2}{13}) < 0$$

گزینه (۴)

۷۶. اگر $f(x) = [\frac{1}{x}]$ در بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3} + K]$ پیوسته و حدیث مقدار میانی را داشته باشد، ۱۲۹۱

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{3}$

نکته: تابع $f(x) = [\frac{1}{x}]$ در بازه $\frac{1}{K} \leq x < \frac{1}{K+1}$ پیوسته است. $K \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + K \Rightarrow K = \frac{1}{4}$$

گزینه (۳)

۷۷ - جواب صحیح را بفرمایید $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2\sqrt{x} - 1}}$ ؟

۱ (۱) - ۱ (۲) - ۲ (۳) - ۲ (۴)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2\sqrt{x} - 1}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \times (1 + \sqrt{2\sqrt{x} + 1})}{(1 - \sqrt{2\sqrt{x} - 1})(1 + \sqrt{2\sqrt{x} + 1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(1 - 2\sqrt{x} + 1)} \times \underbrace{(1 + \sqrt{2\sqrt{x} + 1})}_{= 1+1=2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{-2(\sqrt{x} - 1)} \times 2 = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$$

فرینه (۲)

۷۸ - مشتق تابع $y = \cos^2(\sqrt[3]{x})$ را برای $x=1$ بفرمایید ؟

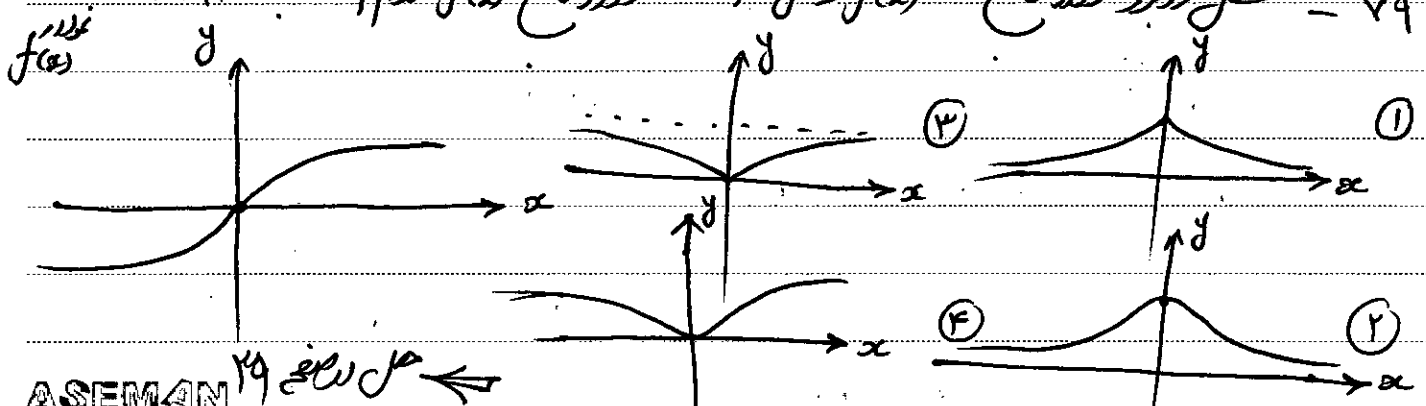
۱ (۱) - $-\frac{1}{2}$ (۲) - $-\frac{1}{4}$ (۳) - $\frac{1}{4}$ (۴)

$$y' = \frac{1}{1+x^2} (-2 \sin(\sqrt[3]{x}) (\cos \sqrt[3]{x})) = \frac{-1}{1+x^2} (\sin(2 \sqrt[3]{x}))$$

$$\stackrel{x=1}{=} \frac{-1}{2} \times \sin(2 \sqrt[3]{1}) = -\frac{1}{2} \sin(\pi/2) = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

فرینه (۱)

۷۹ - شکل روبرو نمودار تابع $y = f(x)$ را بفرمایید ؟

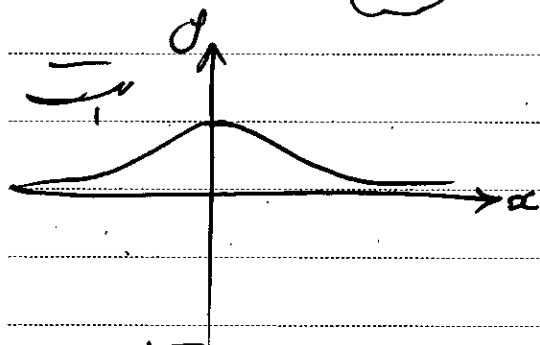


با توجه به نمودار تابع $f(x)$ جهت تغییر دایره $(-\infty, 0)$ در بالا است بر علامت مشتق دوم $f''(x)$ در نقطه $x=0$ جهت تغییر کرده و نقطه $x=0$ نقطه عطف تابع f می باشد و مشتق دوم در $x=0$ برابر صفر است. جهت تغییر تابع f در بازه $(0, +\infty)$ به طرف پایین است. بر علامت مشتق دوم تابع f در بازه $(0, +\infty)$ تغییر است. جدول زیر تغییرات را در موضوع بالا است.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	U	•	∩
$f''(x)$	+	•	-
$f'(x)$		↗ ↘	

نمودار تابع $f'(x)$ در بازه $(0, +\infty)$ نزولی و در بازه $(-\infty, 0)$ صعودی و نقطه به

طول $x=0$ نقطه Max است. البته توجه داشته باشید $x=0$ Max نسبی است.



نمودار تابع $f'(x)$ به صورت تقریبی به صورت

گزینه (۲) جواب است.

۸۰ - از نقطه $A(2, -1)$ دو خط موازی بر منحنی $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ رسم شده است. کدام یک این دو خط موازی کدام است؟ ۱۳۹۳

① $\pi/4$ ② $\pi/3$ ③ $\pi/2$ ④ $2\pi/3$

نقطه B که در منحنی $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ قرار دارد به نحوی که $B(\alpha, \frac{1}{4}\alpha^2 - \alpha)$

$$\rightarrow f'(\alpha) = \left(\frac{1}{2} \times 2\alpha - 1\right) = \alpha - 1$$

شیب خط گذرنده از AB برابر است با

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{1}{4}\alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha - 2}$$

الف) خط مماس به منحنی $f = \frac{1}{4}x^2 - x$ و خط AB بر هم می‌خورند.

$$\Rightarrow m = m_{AB} \Rightarrow a-1 = \frac{\frac{1}{4}a^2 - a + 1}{a-2}$$

$$\Rightarrow (a-1)(a-2) = \frac{1}{4}a^2 - a + 1 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = \frac{1}{4}a^2 - a + 1$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 4a + 2 = a^2 - 2a + 2 \Rightarrow a^2 - 2a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} a = 2 + \sqrt{2} \rightarrow m = 2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2} \\ a = 2 - \sqrt{2} \rightarrow m = 2 - \sqrt{2} - 1 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{1 + \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2})}{1 + (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{0} = +\infty$$

$$\Rightarrow \theta = \theta'_{(+\infty)} = \frac{\pi}{2} \quad \text{گزینه (۳)}$$

۱۹۳ - ۱. مشتق ریشه سوم تابع $f(x) = ([x] - |x|)\sqrt[3]{4x}$ در نقطه $x = -3$ را بیابید.

$$\textcircled{1} \quad -\frac{15}{3} \quad \textcircled{2} \quad -5 \quad \textcircled{3} \quad -4 \quad \textcircled{4} \quad \frac{4}{3}$$

برای تابع $[x]$ در صورتی که x عدد صحیح نباشد.

$$x \rightarrow -3 \rightarrow -3 \leq x < -2 \Rightarrow [x] = -3 \Rightarrow f(x) = (-3 - |x|)\sqrt[3]{4x}$$

$$(x \rightarrow -3 \rightarrow -3 < x \leq -2 \Rightarrow [x] = -3)$$

$$f'(-3) = \left(-\frac{x}{|x|}\right)\sqrt[3]{4x} + \frac{9}{3\sqrt[3]{(4x)^2}} \times (-3 - |x|)$$

$$\Rightarrow f'(-3) = \left(-\frac{3}{-3}\right)\sqrt[3]{4 \times (-3)} + \frac{9}{3\sqrt[3]{(4 \times (-3))^2}} \times (-3 - |-3|) = -3 - 2 = -5 \quad \text{گزینه (۲)}$$

۱۲- امتداد جانبی با نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ نمایش داده شده است و در نقطه A و B قطع می کنند اندازه AB کدام است ؟ ۱۳۹۴

- ① $2\sqrt{2}$ ② ۴ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $4\sqrt{2}$

توجه: چون تابع گویا غیر یکنواخت قائم ندارد. برای جانب انتی و پل باید حد جمع رو

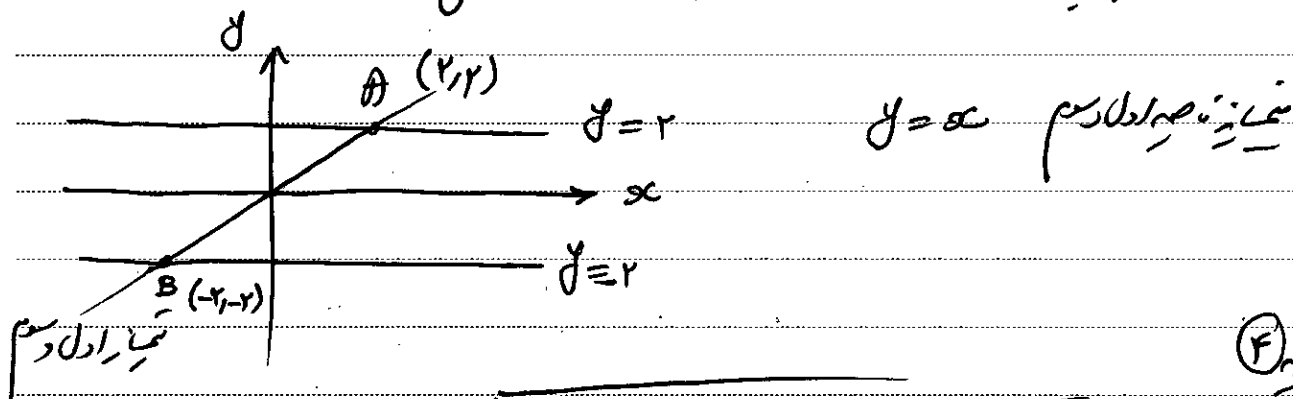
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \stackrel{\text{م. اری}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \stackrel{a>0}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$$

* م. کیده بودن هم

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = |x+1| - |x-1|$$

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty \rightarrow y = (x+1) - (x-1) = 2 \\ x \rightarrow -\infty \rightarrow y = -(x+1) + (x-1) = -2 \end{cases}$$

جانب پل جانب آنتی



گزینه (۴)

$$AB = \sqrt{(1-(-1))^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۱۳- اگر $f(x) = [x + \frac{1}{x}]x + x^2$ در نقطه $x = \frac{1}{4}$ قطع می کنند اندازه AB کدام است ؟ ۱۳۹۴

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} [x + \frac{1}{x}]x + x^2 = [1^+] \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{3}{4} = f(\frac{1}{4})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^-} [x + \frac{1}{x}]x + x^2 = [1^-] \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

رضی بود

سوال ۸۲ - با توجه به اینکه زاویه بین مماس در یک نقطه و خط مماس در آن نقطه برابر است.

در نقطه $x = \frac{1}{2}$ به سبب نزدیکی این دو خط به هم $f(x) = [x + \frac{1}{2}]x + x^2$ که در نقطه

$x = \frac{1}{2}$ به سبب نزدیکی این دو خط به هم در یک نقطه وجود ندارد و در این سوال ما

جواب بدهیم که در این زمینه مورد نظر است.

۸۲ - از رابطه $x^2y - y^2 - 2\sqrt{x} + 4 = 0$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $(1, 2)$ کدام است؟ ۱۳۹۲

① $\frac{y}{x}$ ② $\frac{1}{x}$ ③ $\frac{1}{y}$ ④ $\frac{1}{x^2}$

از طرفین مشتق گرفته شود

$$(2xy + x^2y') - 2yy' - \frac{2}{2\sqrt{x}} + 0 = 0 \quad ①$$

در $x=1, y=2 \rightarrow (4 + y' - 4y' - 1) = 0 \rightarrow y' = 1$

مقدار از رابطه ① مشتق گرفته شود

$$\Rightarrow (2y + 2xy') + (2y'x + x^2y'') - (2y'y' + 2yy'') + \frac{1}{x}x' = 0$$

$x=1, y=2, y'=1 \rightarrow (4 + 2) + (2 + y'') - (2 + 4y'') + \frac{1}{1} = 0 \Rightarrow y'' = \frac{1}{6}$

④

۸۵ - اگر $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ باشد معادله خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $x=2$ واقع

بر آن کدام است؟ ۱۳۹۴

① $y + 3x = 7$ ② $y - 3x = -5$ ③ $3y + x = 5$ ④ $3y - x = 1$

نکته: طول مماس بر منحنی f در نقطه $x=2$ برابر است با $f(2) = 2$

$$\Rightarrow x^3 - x^2 + 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \quad A(1, 2) \rightarrow A'(2, 1) \in f'$$

در نقطه $(2, 1) \Rightarrow (f')'(2) = \frac{1}{f'(1)}$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2 \rightarrow f'(1) = 3 \Rightarrow (f')'(2) = \frac{1}{3}$$

شیب خط مماس بر f در نقطه $x=2$ $m' = \frac{1}{m} = -\frac{1}{3}$

$$\left. \begin{array}{l} m' = -3 \\ A'(2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1 = -3(x - 2)$$

درم بنویس ۱۵ -

$$f'(2) = \frac{1}{f'(1)}$$
 صحیح

$$\Rightarrow y + 3x = 7$$

گزینه ۱

۱۳۹۴
 ۱۶- نمودار تابع $y = |x| e^{-x}$ کدام بازه نزولی و تقریب آن روی بایستی است؟

① $(-\infty, 2)$ ② $(0, 1)$ ③ $(1, 2)$ ④ $(2, +\infty)$

باتوجه به شیب تابع f شرط نزولی بودن آن $f'(x) < 0$ و شرط آنکه تقریب بایستی باشد
 $f''(x) < 0$ و بدین واسطه $(|u|)' = \frac{u'|u|}{u}$ آنف

$$f(x) = |x| e^{-x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{|x|}{x} e^{-x} - e^{-x} |x| = e^{-x} |x| \left(\frac{1}{x} - 1 \right) < 0$$

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \leq 0 \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x \geq 1 \quad ①$$

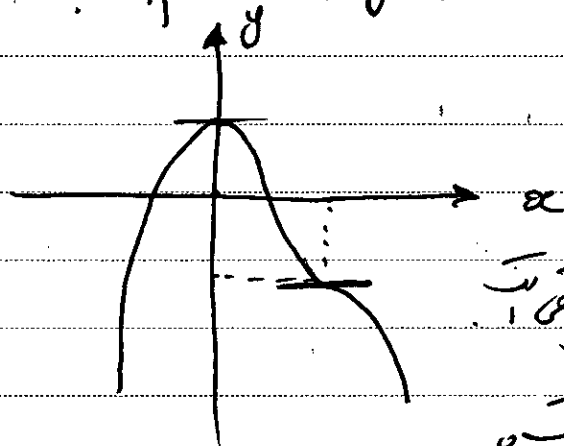
$$f'(x) = e^{-x} |x| \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \Rightarrow f''(x) = -e^{-x} |x| \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + \frac{|x|}{x} e^{-x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + \frac{-1}{x^2} e^{-x} |x| < 0$$

$$\Rightarrow e^{-x} |x| \left(-\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) < 0 \Rightarrow -\frac{2}{x} + 1 = \frac{x-2}{x} < 0$$

تقریب صحیح
 $\Rightarrow 0 < x < 2 \quad ② \Rightarrow ① \cap ② = (1, 2)$

گزینه ۳

۱۷- شکل دربر نمودار تابع $f(x) = -x^4 + 12x^3 + ax^2 + b$ به صورت زیر است. a و b را بیابید. ۱۳۹۴



① -۱۸ ③ -۱۲

② -۱۵ ④ -۹

توجه: تابع در $x=0$ دارای $\max$ نسبی است و در $x=9$ دارای $\min$ نسبی است.

در نقطه $x=0$ در هر نقطه مماس افقی است.

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$$

مشق تابع یک ریشه ساده دارد.

برای یافتن مضاعف $x=0$ را در f' در یک نقطه صفر قرار دهیم و

تغییر علامت را بررسی می‌کنیم.

$$f'(x) = -4x^3 + 36x^2 + 2ax = x(-4x^2 + 36x + 2a) = 0$$

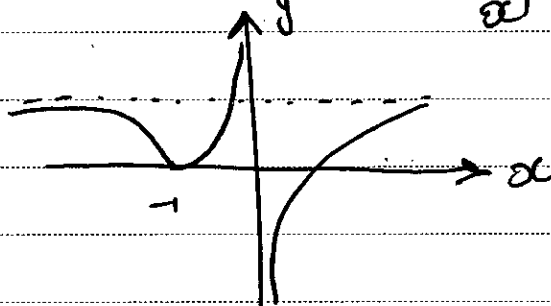
در آنجا که f' ریشه مضاعف داشته باشد، $-4x^2 + 36x + 2a = 0$ معادله درجه دوم.

$$\Delta = 36^2 - (-4) \times 2a \times 4 = 36^2 + 32a = 0$$

$$\Rightarrow 576 + 32a = 0 \Rightarrow a = \frac{576}{-32} = -18$$

گزینه ①

۱۸- بیگاه نمودار تابع $y = \frac{x^3 + ax + b}{x^3}$ به صورت زیر است. a و b را بیابید. ۱۳۹۰



① -۵

② -۲

③ ۲

④ -۱

حل در صفحه ۴۴

نکته: نمودار نقطه ای به طول نصف در محورهای مختصات است لذا معادله خطی آن به صورت

درجه نصف محور $(x = -1)$ به برین اگر $y = 0$ صورت کسر درجه نصف محور

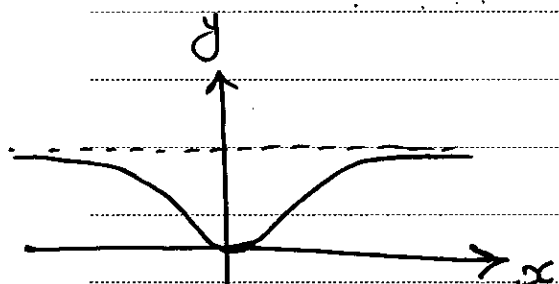
$$\Rightarrow x^3 + ax + b = 0 \xrightarrow{\text{درجه نصف}} y' = 3x^2 + a \Big|_{x=-1} = 0$$

$$\Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3 \quad (1)$$

از طرفی داریم $f(-1) = 0$ در صورت $y = \frac{x^3 - 3x + b}{x^3}$ وارده

$$-1 + 3 + b = 0 \Rightarrow b = -2$$

گزینه ۲ صحیح



۱۹ - ضابطه نمودار تابع شکل مقابل کدام است.

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 1} \quad (1) \quad y = \frac{|x|}{|x| + 1} \quad (3)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1} \quad (2) \quad y = \frac{|x|}{|x| - 1} \quad (4)$$

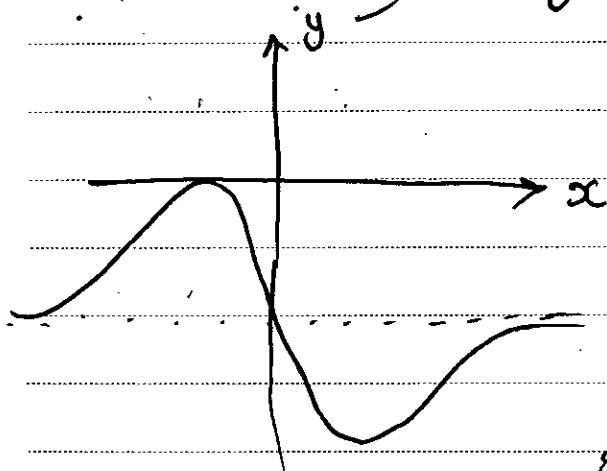
توجه: تابع بی نهایت کم ندارد. متوجه خروجی که محدود بدین رسم خواهد بود. گزینه (۲) (۴)

از جوابها که در زانو است می شود. تابع در $x = 0$ مشتق پذیر است و گزینه (۳) در

$x = 0$ مشتق پذیر نخواهد بود. (از تعریف مشتق استفاده کردیم). آنگاه گزینه (۱) صحیح است.

نکته: کسی در راه حل نکرده این سوال در خرداد ۱۳۸۸ آئینده گفته خواهد شد.

۹۰- بخش قابل عنودر ناحیه $f(x) = \frac{ax^2+bx+2}{x^2+1}$ است در صورتی که (a,b) کدام است؟ ۱۳۹۱



- ① $(1, -2)$ ② $(2, -4)$
 ③ $(1, 2)$ ④ $(2, 4)$

چون آن ناحیه را برای $y=2$ برابر است
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$
 چون $f(0) = 2$ به همزاد

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2+bx+2}{x^2+1} = a \Rightarrow y=a=2$$

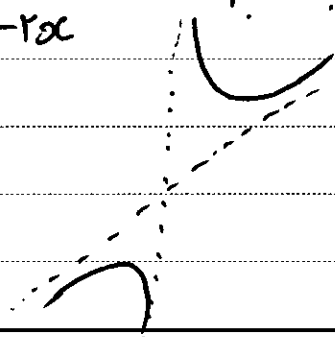
از طرف عنودر در نقطه $(0, 2)$ به طول مثبت بر محور x است لذا در آن ناحیه
 محور x ها هم به همزاد عنودر نیز است (صورت کرد)

منفرد مثبت بود

$$2x^2+bx+2=0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta=0 \Rightarrow b^2-14=0 \Rightarrow b=\pm\sqrt{14} \\ x = -\frac{b}{2(2)} > 0 \rightarrow b < 0 \end{cases}$$

بر $b=-4$ و $(a,b) = (2,-4)$ گزینه (۳) است

۹۱- به ازای کدام مقادیر a عنودر ناحیه $y = \frac{ax^2+3x+1}{1-2x}$ بخش پذیر است؟ ۱۳۹۴



- ① $a < 0$
 ② $a < -10$
 ③ $-10 < a < 0$
 ④ $0 < a < 10$

عنودر $f(x)$

$$y = \frac{ax^r + rx + 1}{1 - rx}$$

محل سوال 91
(راہ میں اراد کو توجہ)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{r}^+} f(x) = +\infty$$

محبوب اول را بدست آوردند
محبوب دهم را بدست آوردند

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{0^+}} \frac{\frac{a}{x} + \frac{r}{x} + 1}{0} = +\infty \Rightarrow \frac{a}{x} + \frac{r}{x} < 0 \Rightarrow a < -10$$

(دراہ نام) توجہ : اگر شخص بخود رحم نہ کرے اور خیر مجاہد ہل نہیں سکتا۔ لہذا خیر

$$④ a_{x0} \leftarrow -\frac{a_{y0}}{r} \int_0^r \frac{r' - r_0}{r'} x \cdot x'$$

• توجه: بخش اعظم مسائل دو استدم است بر مبنای $f'(x) = 0$ و در این موارد

$$f'(x) = \frac{(rax+r)(1-rx) + r(ax'+rx+1)}{(1-rx)^2} = 0$$

$$\Rightarrow rax' - rax - a = 0 \xrightarrow{\Delta x > 0} (-ra)' - r \times rax - a) > 0$$

$\Rightarrow f a^2 + f_0 a > 0 \Rightarrow a^2 + 10a > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \wedge a < -10 \\ a < 0 \wedge a > -10 \end{cases}$

میں درستی ننگوہر فرست گیم آپ ۱۰۰ حل اول میچہ دے دے۔

۹۲- اگر $G(x) = x^r \int_r^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t+r)}{t^r} dt$ باشد مقدار $G'(4)$ چند برابر $\ln 2$ است؟ ۱۳۹۴

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱/۵

(۱) ۱

نکته ۱) $\left(u \int_a^{u(x)} f(t) dt \right)' = u'(x) f(u(x))$

۲) $\int_a^a f(x) dx = 0$

$$G(4) = \int_2^2 \frac{\ln(1+t)}{t^r} dt = 0 \quad (۳)$$

از درجه ۳ به این نتیجه رسیدیم که برای محاسبه $G'(4)$ کافی است از عمل منفی کردن مشتق بگیریم و

در بقیه عبارت ضرب کنیم.

$$G'(x) = x^r \left(\int_r^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t+r)}{t^r} dt \right)'$$

$$= x^r \times \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{\ln(\sqrt{x}+r)}{x} \right) = \frac{x \ln(\sqrt{x}+r)}{\sqrt{x}}$$

$$G'(4) = \frac{4 \ln 2}{2} = 2 \ln 2 \quad \text{گزینه (۳)}$$

((این تست شبیه این تست در سال ۱۳۸۷ آزمون است.))

۹۳- اگر $G(x) = \int_2^x \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt$ آنگاه مشتق در $x=2$ مع $G(x)$ در $x=2$ برابر است با؟ ۱۳۸۷

$$y' = G(x) + x G'(x) \Rightarrow y'(2) = G(2) + 2 G'(2)$$

(۱) ۴/۳

(۲) ۲/۳

(۳) ۴/۳

$$\Rightarrow y'(2) = 0 + 2 \times \frac{2}{\sqrt{1+8}} = \frac{4}{3}$$

گزینه (۳)

۹۴ - سوال ۱۳۴: $\int_0^4 \left[\frac{x}{2} \right] \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx$ کدام است؟ ۱) ۲۹۴

۱) $4-2\sqrt{2}-\ln 2$ ۲) $4-2\sqrt{2}+\ln 2$ ۳) $2+\sqrt{2}-\ln 2$ ۴) $2-\sqrt{2}+\ln 2$

$0 < x < 4 \rightarrow 0 < \frac{x}{2} < 2 \rightarrow 0 < \frac{x}{2} < 1 \rightarrow \left[\frac{x}{2} \right] = 0 \quad (0 < x < 2)$
 $1 \leq \frac{x}{2} < 2 \rightarrow \left[\frac{x}{2} \right] = 1 \quad (2 \leq x < 4)$
 (توجه: در تابع $[]$ از سمت راست می‌رویم)

$$\int_0^4 \left[\frac{x}{2} \right] \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx = \int_0^2 (0) dx + \int_2^4 (1) \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx$$

$$= \int_2^4 \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx = \int_2^4 \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} - \frac{1}{x} \right) dx = \int_2^4 \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{-1} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \ln|x| \right]_2^4 = \left[2\sqrt{x} - \ln|x| \right]_2^4$$

$$= (4 - 2\ln 2) - (2\sqrt{2} - \ln 2) = 4 - 2\sqrt{2} - \ln 2$$

۹۵ - سوال ۱۳۵: $f(x) = \int_2^x \frac{1}{1+t^2} dt$ اگر $f(x)$ مشتق تابع $f \circ f(x)$ در $x=2$ کدام است؟ گزینه ۲

۱) صفر ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{2}{5}$

$(f \circ f)'(2) = f'(2) \times f'(f(2)) = f'(2) \times f'(0)$ (توجه: $f(2)=0$)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (f \circ f)'(2) = \frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$$

لازم است سوال را ترکیبی می‌دانند گزینه سوال کشور ۱۵۹۰ (۱)

۹۶- حاصل انتگرال $\int_0^9 |\sqrt{x}-2| dx$ کدام است ؟ ۱۳۹۳

- ① صفر ② $\frac{1}{3}$ ③ ۴ ④ $\frac{17}{3}$

توجه: ابتدا باید عبارت راجع قدرمطلق ۰ توجه: حدود انتگرال نیز تعین گردد.

$$\sqrt{x}-2=0 \Rightarrow x=4 \in [0,9)$$

x	0	4	9
$\sqrt{x}-2$	-	0	+

$$\Rightarrow \int_0^9 |\sqrt{x}-2| dx = \int_0^4 (-\sqrt{x}+2) dx + \int_4^9 (\sqrt{x}-2) dx$$

$$= \left(-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2x \right)_0^4 + \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2x \right)_4^9$$

$$= \left(-\frac{14}{3} + 8 - 0 \right) + \left((18-18) - \left(\frac{15}{3} - 8 \right) \right) = \frac{15}{3}$$

گزینه ④

۹۷- حاصل انتگرال $\int \alpha \sqrt{\alpha+1} d\alpha$ کدام است ؟ ۱۳۹۱

$\alpha = (\alpha+1) - 1$

① $2(\alpha+1)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3\alpha-2}{10} \right) + C$ ② $2(\alpha+1)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3\alpha-2}{10} \right) + C$

③ $(\alpha+1)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3\alpha-2}{10} \right) + C$ ④ $(\alpha+1)^{\frac{3}{2}} (3\alpha-2) + C$

$$\int ((\alpha+1)-1) \sqrt{\alpha+1} d\alpha = \int (\alpha+1) \sqrt{\alpha+1} d\alpha - \int \sqrt{\alpha+1} d\alpha$$

$$= \int (\alpha+1)^{\frac{3}{2}} d\alpha - \int (\alpha+1)^{\frac{1}{2}} d\alpha \Rightarrow \text{الگرم صفر ۱}$$

۹۷ اردو سوال

$$= (x+1)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{3} (x+1) - \frac{1}{3} \right) + C = (x+1)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3x-1}{3} \right) + C$$

② نفس

1992 $\frac{1}{115} \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$ for $x = k\pi + \pi/2$ $b = 91$

$$-\sin x + \cos x + C \quad (3) \quad \sin x + \cos x + C \quad (1)$$

$$-\sin x - \cos x + C \quad (F) \quad \sin x - \cos x + C \quad (Y)$$

$$f) \cos x = \cos' x - \sin' x$$

$$\int \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)} dx$$

$$= \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + C$$

۹۹ - مقدار انتگرال $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ را بیابید؟

$$\text{Ans: } \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx \quad \text{--- (II)}$$

$$\text{Ex 2) } \int_0^{\pi/r} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\pi/r} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{r} \quad *$$

از روش تست ۹۹

$$\text{نیمه:} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \quad \textcircled{I}$$

طبق رابطه ۱

$$2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \pi/2 \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \pi/4$$

برای ربات رابطه (I) از رابطه (II) در پیج قبل استفاده کرد.

اثبات:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\pi/2 - x)}{\sin(\pi/2 - x) + \cos(\pi/2 - x)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$$

این رابطه هم با رابطه دیگر مطابقت درجه به اشتباه دارد.

۱۰۰) اصل $\int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx$ برابر است با کدام گزینه؟

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$-x + \cos x + C \quad \textcircled{۳}$$

$$x + \sin x + C \quad \textcircled{۱}$$

$$x - \cos x + C \quad \textcircled{۴}$$

$$x - \sin x + C \quad \textcircled{۲}$$

$$\int \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)} dx = \int (1 + \cos x) dx$$

$$= x + \sin x + C$$

گزینه ①

۱۳۷۰. اگر $F(x) = \int f(x) dx$ و $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ ؟ ۱۳۷۰

۱) $aF(ax+b)$ ۲) $\frac{1}{a}F(ax+b)$ ۳) $aF(x)$ ۴) $\frac{1}{a}F(x)$

فرض کنیم $F(x) = \int f(x) dx \Rightarrow F'(x) = f(x)$

$\Rightarrow F'(ax+b) = f(ax+b)$

پس مشتق برای گزینه ها هم می شود $F'(ax+b)$ در کان جواب می باشد.

گزینه ۲ جواب می باشد.

۱۳۹۳. میانگین تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ بر بازه $[1, 3]$ کدام است ؟ ۱۳۹۳

۱) $2 - \ln 3$ ۲) $3 - \ln 3$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

(اگر میانگین تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ را می خواهیم)

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \frac{\int_1^3 \frac{x^2-1}{x} dx}{3-1} = \frac{\int_1^3 (x - x^{-1}) dx}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \ln x \right) \Big|_1^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} - \ln 3 - \frac{1}{2} + \ln 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} (4 - \ln 3 + \ln 1) = 2 - \frac{\ln 3}{2} = 2 - \ln \sqrt{3}$$

گزینه ۱

۱۳۷۷. اگر $\int_1^5 \frac{x^2-1}{x^2} dx$ ؟ ۱۳۷۷

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{3}$

$$f(x) = \int_1^5 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \xrightarrow{103} = \left[x + \frac{1}{x}\right]_1^5$$

$$= \frac{(5 + \frac{1}{5}) - (1 + 1)}{1} \Rightarrow f(x) = \frac{15}{5} = \frac{4}{5}$$

$$1 - \frac{1}{x^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \pm \sqrt{5} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{5} & \text{من مثبت} \\ -\sqrt{5} & \text{من منفی} \end{cases}$$

نزینه ۱

$$1291 \text{ اگر } f(x) = |x| + |x+1| \text{ و } \int_{-1}^2 f(x) dx \text{ را حساب کنید} \quad (104)$$

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

$$\int_{-1}^0 (|x| + |x+1|) dx + \int_0^2 (|x| + |x+1|) dx$$

$$= \int_{-1}^0 (-x + (x+1)) dx + \int_0^2 (x + (x+1)) dx$$

$$= x \Big|_{-1}^0 + (x^2 + x) \Big|_0^2 = (0 - (-1)) + ((4+2) - 0) = 7$$

نزینه ۴

$$1292 \text{ اگر } \int_1^{16} [\sqrt{x}] dx \text{ را حساب کنید؟ (تعداد [] جزء صحیح است)} \quad (105)$$

۱) ۲۵ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

من رستم ۵۵

۱۰۵ ← برای بی‌نهایت انتگرال، بازه‌ها [۱، ۱۶] به بازه‌های کوچکتر افزوده شود.

$$1 \leq x < 4 \rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \rightarrow [x] = 1$$

$$4 \leq x < 9 \rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \rightarrow [x] = 2$$

$$9 \leq x < 16 \rightarrow 3 \leq \sqrt{x} < 4 \rightarrow [x] = 3$$

$$\rightarrow \int_1^{16} [\sqrt{x}] dx = \int_1^4 [\sqrt{x}] dx + \int_4^9 [\sqrt{x}] dx + \int_9^{16} [\sqrt{x}] dx$$

$$= \int_1^4 1 dx + \int_4^9 2 dx + \int_9^{16} 3 dx$$

$$= x \Big|_1^4 + 2x \Big|_4^9 + 3x \Big|_9^{16} = (4-1) + 2(9-4) + 3(16-9) \\ = 3 + 10 + 21 = 34$$

نزدیک (۴)

۱۲۵ و ۱۰۶ اگر $\log A = \sum_{k=2}^{100} \log \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

۱) ۵۰.۲۵ ۲) ۵۰.۵ ۳) ۵۱.۲۵ ۴) ۵۲.۵

$$\sum_{k=2}^{100} \log \left(\frac{k^2-1}{k^2} \right) = \sum_{k=2}^{100} \log \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} = \sum_{k=2}^{100} \log \frac{(k-1)}{k} \frac{(k+1)}{k}$$

$$= \sum_{k=2}^{100} \left(\log \frac{k-1}{k} - \log \frac{k}{k+1} \right) = \log \frac{1}{2} - \log \frac{100}{101} \quad (*)$$

$$= \log \frac{1}{2} = \log \frac{101}{200} = \log A \rightarrow A = \frac{101}{200} = ۵۰.۵$$

(نم: خاصیت قسری گنجا)

$$(*) \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

۱۳۶۹ (۱۵۷) اگر $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{p}{n^2}$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ کدام است ؟ ۱۳۶۹

① صفر ② $\frac{1}{2}$ ③ ۱ ④ ∞

پایه درستی: $\sum_{p=1}^n p = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \frac{p}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^n p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

گزینه ②

۱۵۸) $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n 1$ کدام است ؟

① n^2 ② n^3 ③ $3n$ ④ n

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n 1 = n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n 1 = n \sum_{k=1}^n n = n^2 \sum_{k=1}^n 1 = n^3$$

۱۵۹) برای تابع $f(x) = \frac{x}{1+x}$ روی بازه $[0, 1]$ انتخاب $n=4$ در برابری

انتهای هر یک از بازه‌های Δx کدام است ؟ ۱۵۹۲

① ۰.۹۵ ② ۱.۰۲ ③ ۱.۰۵ ④ ۱.۰۸

تبع $f(x)$ روی بازه $[0, 1]$ معصوم است. $\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$

برای سه Δx به دست آمده از انتهای یک بازه‌ها پیدا کنید.

$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$ و $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$ و $\left[\frac{3}{4}, 1 \right]$ و $\left[0, \frac{1}{4} \right]$

$$U_4(f) = \Delta x (f(1/4) + f(1/2) + f(3/4) + f(1))$$

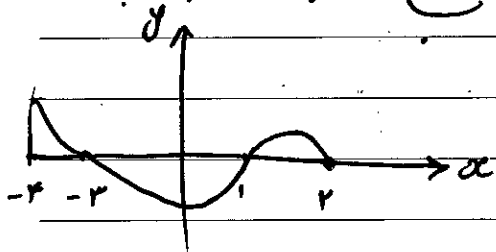
گزینه ③ $= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \right) = \frac{21}{40} = 1.05$



Subject.....

Date.....

۱۱) شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $f(x)$ کدام است؟ ۱۳۹۲



- ① $[0, 2]$ ③ $[-4, -2] \cup [1, 2]$
 ② $[-2, 2]$ ④ $[-2, 0] \cup [1, 2]$

$$\forall x \in [-4, -2] : f(x) \geq 0 \text{ و } \forall x \in [-2, 0] : f(x) \leq 0$$

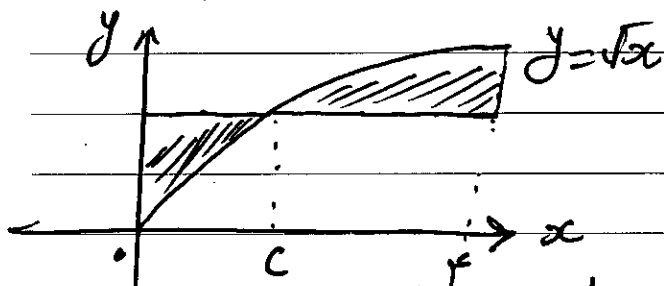
$$\forall x \in [0, 1] : f(x) \leq 0 \text{ و } \forall x \in [1, 2] : f(x) \geq 0$$

$$D_{g(x)} = ? \Rightarrow g(x) = \sqrt{x f(x)} \Rightarrow x f(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [1, 2] \\ x \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [-4, -2] \end{cases} \Rightarrow D_g = [-4, -2] \cup [1, 2]$$

گزیده ④

۱۱۱) شکل زیر به دست آمده است. مقدار $f(0)$ را بیابید. ۱۳۹۲



- ① $\frac{4}{3}$ ③ ۲
 ② $\frac{12}{9}$ ④ $\frac{9}{4}$

$$f(0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{4-0} \int_0^4 \sqrt{x} dx$$

$$\Rightarrow f(0) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^4 = \frac{4}{3}$$



$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(0) = \sqrt{c} = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \frac{16}{9}$$

گزیده ②



۱۱۲) اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - 4x}$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ را بیابید.

۱۲۹۲ $\frac{f(x)}{h(x)}$

$-\frac{r}{\varepsilon}$ (۴) $-\frac{r}{\gamma}$ (۳) $-r$ (۲) $-r$ (۱)

فرض کنیم $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - 4x} = g(x) \cdot h(x)$

$g(-1) = 0$ و $h(-1) = \sqrt{(-1)^2 - 4(-1)} = \sqrt{5} = 2 \neq 0$

$g'(x) = 2x - 1 \Rightarrow g'(-1) = -3$

$f'(-1) = g'(-1) \times h(-1) + g(-1) \times h'(-1)$

$\Rightarrow f'(-1) = -3 \times 2 = -6$ گزینه ۱

۱۱۳) اگر $f(x) = \max\{|2x|, |x+1|\}$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را بیابید.

2 (۴) $\frac{r}{r}$ (۳) $\frac{r}{r}$ (۲) $\frac{1}{r}$ (۱)

ابتدا باید بررسی کنیم که $|2x| = |x+1|$ در $x=1$ برقرار است یا نه.

$|2x| = |x+1| \Rightarrow 4x^2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	∞
$3x^2 - 2x - 1$	+	0	-	+

$\Rightarrow f(x) = \max\{|2x|, |x+1|\} = \begin{cases} |2x| & |2x| \geq |x+1| \\ |x+1| & |2x| < |x+1| \end{cases}$

$= \begin{cases} |2x| & x \leq -\frac{1}{3} \text{ یا } x \geq 1 \\ |x+1| & -\frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ در $x=1$



← اسم (۱۱۳) به علت اینکه مشتق تابع f در نقاط مرزی $x = -1$ و $x = 1$ وجود ندارد این دو نقطه کاندید برای بیشینه و کمینه هستند.

$$x = -1 \rightarrow f(-1) = |2 \times (-1)| = \frac{2}{3}$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = |1 + 1| = 2 \rightarrow \min f = \frac{2}{3}$$

گزینه (۲)

(۱۱۴) تابع $y = [2x] - 2x$ کدام شرایط را دارد؟

- (۱) $\max$ و $\min$ ندارد (۲) $\max$ ندارد و $\min$ دارد
(۳) $\max$ و $\min$ ندارد (۴) $\max$ دارد و $\min$ ندارد

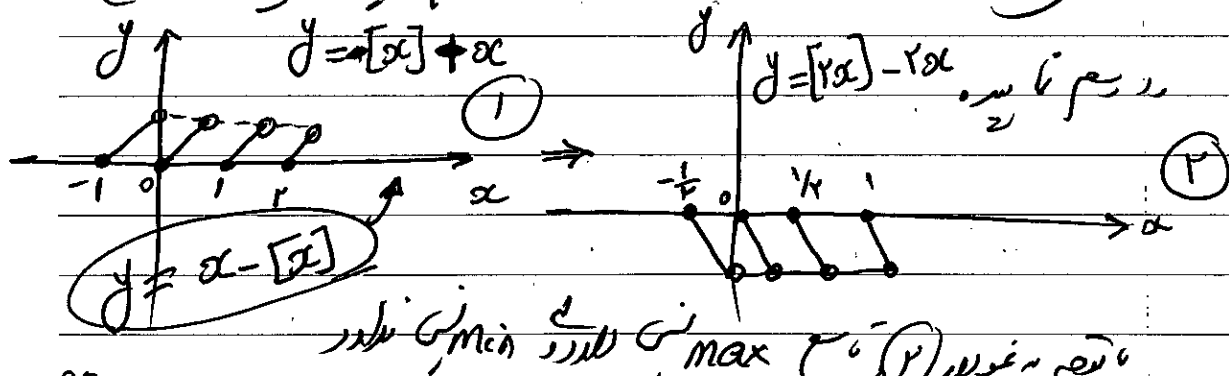
گزینه (۴)

ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم و آنرا از آنگاه که محورهای رسم کنیم.

$$y = 2x - [2x] \rightarrow T = \frac{1}{2}$$

$$y = x - [x] \rightarrow$$

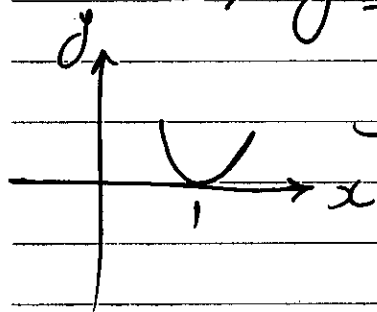
نمودار تابع $y = x - [x]$ را رسم می‌کنیم و آنرا از آنگاه که محورهای رسم کنیم.



(1) σ_{max} (2) σ_{min} (3) σ_{avg} (4) σ_{x-1}

$$\Rightarrow y = \frac{(x-1)^r \overbrace{(x+1)(x^r+x+1)}^{h(x)}}{\underbrace{x^r+1}_{g(x)}} \Rightarrow y = \frac{(x-1)^r}{g(x)} \times h(x)$$

$$\Rightarrow f = (x-1)^2 \times l(x) \quad , \quad \text{حيث } l(x) \text{ غير قابل تقسيم}$$



۱. x سے بڑو $x = \text{کل وقت}$ $\min$

۲) فزنی

توجه: نقطه $x=1$ تنها نقطه است که $y=0$ شود و در این نقطه $\frac{dy}{dx}$ نامتناهی می باشد.
 منو میسر است و در این نقطه به نقطه M_1 میسر است.

(114) $y = 1 - f(x)$ $\max A(-4, 1)$ f $\rightarrow$ y

این نقطه به کدام نقطه تبدیل می شود ؟

$$\sigma_{\max}(-t, 0) \quad (3) \quad \sigma_{\max}(-t, 0) \quad (1)$$

(31) ~~20~~ $\frac{d}{dt} \psi_{Min}(-x, 0) \quad (4) \quad \psi_{Min}(-x, 0) \quad (2)$



Subject.....

Date.....

محل گرایی ۱۱۵ نقطه $(-4, 1)$ بر این تابع $y = f(x)$ نقطه $\max$ نیست در این

$2x = -4 \rightarrow x = -2$
 $y = f(x)$ در نقطه $(-2, 1)$ که $(x = -2, y = 1)$ تبدیل می شود

تبدیل $y = -f(x)$ به نقطه $(-2, -1)$ و در این $y = 1 - f(x)$

به نقطه $(-2, 1)$ تبدیل می شود.

گزینه (۲)

* نکته: رفتار تابع f و $f - \text{حد}$ یکدیگر است

(۱۱۷) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x + \sin x$ در $x = 0$ چگونه است؟ ۱۲۸۶

① ② ③ ④

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1 + \cos x \rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = x - \sin x \rightarrow f''(0) = 0$$

در $x = 0$ $\sin x < x$ و $\sin x > x$ در $x < 0$ و $x > 0$ به ترتیب

همین آنگاه $x = 0$ نقطه عطف است. گزینه (۲)

x | 0
 f'' | 0

(۱۱۸) بر این تابع با ضابطه $f(x) = |x| - x^2$ در $x = 1$ چه وضعی دارد؟ (نقطه $x = 1$ چه نقطه است؟) ۱۲۴۹

① عطف ② گزین ③ مشتق پذیر است ④ نقطه عطف ندارد و گزین دارد



حل سوال (۱۱۸) $f(x) = |x^2 - x| \geq 0$ $x \in \mathbb{R}$

تعداد f در $x=1$ به تعداد حدش 0 رسد $f(1) = 0$

لذا $x=1$ تنها $\min$ ممکن است. این نقطه را ندانستیم $\min$ می‌توانیم

گزینه (۵)

(۱۱۹) x دل دو عدد حقیقی مثبت هستند به طوری که $x+y=1$ برای یک x کمترین مقدار

$x^3 + y^3$ کدام است ؟ ۱۳۹۴

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

$S = x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$

$\rightarrow S = 1 - 3xy$ $\min$ است $x=y$

$x=y=\frac{1}{2}$ $\max$ مقدار $\rightarrow$ $\frac{1}{4}$ است $\rightarrow$ $\frac{1}{4}$ است $\rightarrow$ $\frac{1}{4}$ است

$\Rightarrow S_{\min} = 1 - 3 \times (\frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{4}$ است

نتیجه: برای حل این مسئله کمترین و بیشترین را مشخص کرده و نقاط

محز را در نظر بگیریم و به ترتیب به $\min$ و $\max$ تبدیل می‌کنیم

(۱۲۰) $\max (\cos x + \cos 2x)^2 + (\sin x + \sin 2x)^2$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}$ است $\rightarrow$ $\frac{1}{2}$ است

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۸

$\rightarrow$ S_2 صحیح



22



Subject.....

Date.....

$$(1) \quad (\sin x + \sin x)^2 = \sin^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \sin x \quad (12)$$

$$(2) \quad (\cos x + \cos x)^2 = \cos^2 x + \cos^2 x + 2 \cos x \cos x$$

$$(1) + (2) = 1 + 1 + 2[(\sin x \sin x) + (\cos x \cos x)]$$

$$= 2 + 2 \cos(x - x) = 2(1 + \cos x)$$

مشتق قسار عبارت ریاضی نه $\cos x = 1$ در $\max$ عبارت برابر

$$\max = 2(1 + 1) = 4$$

گزینه (2)

(12)

