



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

دردوین این جزوه از تجربیات مؤلفین کتاب های زیر
نیز استفاده شده و در تائیدی از سوالات که از نظر نگارنده
غیر قابل چشم پوشی بودند عیناً نقل گردیده است.

۱- حرف آخر (عبدالرضا منتظری)

۲- دیفرانسیل تخته سیاه (مهندس محمد مهربان)

۳- خیلی سبز (محسنی منش)

۴- ریاضی یازدهم خیلی سبز (رسول محسنی منش - سروش
موئینی)

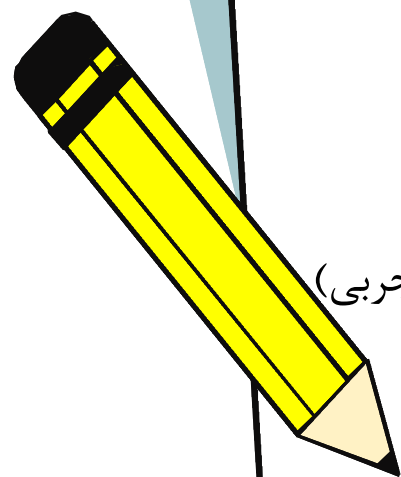
۵- سه سطحی قلم چی

۶- دیفرانسیل پیشرفتهی خیلی سبز (حسین شفیع زاده)

۷- ریاضی دهم و یازدهم خیلی سبز (رشتهی ریاضی و تجربی)

۸- آی کیو گاج ریاضی یازدهم

۹- کتاب درسی ریاضی یازدهم و حسابان ۱



حل معادلات گویا

حل معادلات گویا

اگر می خواهید یک معادله ی گویا رو حل کنید بهتره که مراحل زیر رو طی کنید:

۱. اگر معادلتون کسری بود، دو طرف معادله رو در مخرج مشترک بشون یا ک.م.م مخرجها ضرب کنید تا به یک معادله ی بدون مخرج برسید.

۲. جواب معادله ی بدون مخرج رو به دست بیارید و در معادله ی اولیه (معادله ی کسری) چک کنید. اگر مقادیر به دست اومده در دامنه ی معادله ی اولیه قرار داشتن (یعنی در معادله ی اولیه ی اولیه صدق کردن) به عنوان جواب معادله محسوب می شن و در غیر این صورت خیر.

سؤال ۱: معادله ی زیر چند جواب دارد؟

$$\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4} \xrightarrow{\times(x^2-4)} (x-2)^2 + x(x+2) = 8 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \xrightarrow{\text{قق}} \text{در دامنه ی معادله ی اولیه قرار داره پس جوابه.} \\ x = 2 \xrightarrow{\text{غقق}} \text{در دامنه ی معادله ی اولیه قرار نداره پس جواب نیست.} \end{cases}$$

فرض: $\frac{3x-1}{x+4} = a$

سؤال ۲: مجموعه جواب های $\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2}$ معادله کدام است؟

$$\left(\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x-3}{2(x+1)} \right) \times 2(x-1)(x+1)$$

$$(2x+3)(x+1) - 5(2) = (2x-3)(x-1)$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2x + 3x + 3 - 10 = 2x^2 - 2x - 3x + 3$$

$$\rightarrow 10x = 10 \rightarrow x = 1 \quad \times \text{ زیرا ریشه مخرج است}$$

سؤال ۳: جواب های معادله $\left(\frac{3x-1}{x+4} \right) + 7 \left(\frac{x+4}{3x-1} \right) = 8$ کدام است؟

$$a + \frac{7}{a} = 8 \rightarrow a^2 + 7 = 8a \rightarrow a^2 - 8a + 7 = 0$$

$$(a-1)(a-7) = 0 \rightarrow a = 1, 7 \rightarrow \frac{3x-1}{x+4} = 1 \rightarrow 3x-1 = x+4 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2} \quad \checkmark$$

$$\frac{3x-1}{x+4} = 7 \rightarrow 3x-1 = 7x+28 \rightarrow 4x = -29 \rightarrow x = -\frac{29}{4} \quad \checkmark$$

سؤال ۴: اگر نمودار $f(x) = \left(4 - \frac{m}{x} \right)(mx-1)$ بر محور x ها مماس باشد m کدام می تواند باشد؟

±۴ (۴)

±۳ (۳)

±۲ (۲)

±۱ (۱)

$$f(x) = \frac{(4x-m)(mx-1)}{x}$$

پاسخ: گزینه ۲

باید هر دو ریشه صورت برابر باشند:

$$\begin{cases} 4x - m = 0 \Rightarrow x = \frac{m}{4} \\ mx - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{m} \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{4} = \frac{1}{m} \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

سؤال ۵: تعداد جواب های حقیقی معادله $x^2 - 7 = \left(2 - \frac{x+2}{x-3}\right)\left(1 + \frac{x+2}{x-8}\right)$ کدام است.

(۴) هیچ

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

$$\left(\frac{2(x-3)-(x+2)}{x-3}\right)\left(\frac{(x-8)+x+2}{x-8}\right) = x^2 - 7$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-8}{x-3}\right)\left(\frac{2(x-3)}{x-8}\right) = x^2 - 7 \xrightarrow{x \neq 3, 8} 2 = x^2 - 7 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \xrightarrow{x \neq 3} x = -3$$

سؤال ۶: تعداد جواب های معادله $\frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 2x^2 + 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x - 1} = 1$ برابر است با:

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

$$\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x^2-x-1)} - \frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x-1)} = 1 \xrightarrow{x \neq \pm 1} \frac{x+5}{x^2-x-1} - \frac{x}{x^2-x-1} = 1$$

$$\frac{x+5-x}{x^2-x-1} = 1 \Rightarrow 5 = x^2 - x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

سؤال ۷: مجموع ریشه های معادله $|x^2 + 2x + 3| = 6$ کدام است.

(۴) -۱

(۳) ۱

(۲) -۴

(۱) ۴

$$x \geq 0: x^2 + 2x + 3 = 6 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \xrightarrow{x \geq 0} x = 1$$

$$x \leq 0: x^2 + 2x - 3 = 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \xrightarrow{x \leq 0} x = -2$$

$$1 + (-2) = -1$$

سؤال ۸: معادله $\frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-2)(x+1)} = 2$ چند جواب حقیقی دارد؟

(۲) یک ریشه مضاعف دارد.

(۱) دو ریشه مضاعف دارد.

(۴) دو ریشه ساده دارد.

(۳) یک ریشه ساده و یک ریشه مضاعف دارد.

پاسخ: گزینه ۱

معادله را به صورت زیر مرتب می کنیم:

$$\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x^2 - x - 2} = 2$$

با فرض (*) $x^2 - x = t$ داریم:

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t-2} = 2 \Rightarrow \frac{t-2-t}{t(t-2)} = 2 \Rightarrow \frac{-2}{t^2-2t} = 2 \Rightarrow \frac{-1}{t^2-2t} = 1$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t = -1 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \text{ریشه مضاعف}$$

پس با توجه به (*) داریم: $x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

پس $t=1$ ریشه مضاعف بود پس بعد از بازگرداندن متغیر اولیه هر ریشه ای حاصل شود ریشه مضاعف است چون معادله $x^2 - x - 1 = 0$ دو ریشه دارد ($\Delta > 0$) پس هر دو ریشه معادله مضاعف است. دقت کنید هیچ کدام از ریشه های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ ریشه مفرج معادله اولیه نیستند.

سؤال ۹: معادله $x^2 - x + 3 = \frac{x^2 - x + 6}{x^2 - x + 2}$ چند جواب دارد.

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

$$x^2 - x + 2 = A, \quad A \neq 0$$

$$\Rightarrow A + 1 = \frac{A + 6}{A} \Rightarrow A^2 + A = A + 6 \Rightarrow A^2 = 6 \Rightarrow A = \pm\sqrt{6}$$

$$\begin{cases} x^2 - x + 2 = 2 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 1 \\ x^2 - x + 2 = -2 \Rightarrow x^2 - x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta < 0 \rightarrow \text{جواب ندارد}$$

پس معادله داده شده دارای دو جواب است.

سؤال ۱۰: به ازای چند مقدار a معادله $\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 - 3x - 10} = 0$ فقط یک جواب دارد؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

دو تا حالت می تواند رخ دهد:

$$(1) \text{ معادله } x^2 + ax + 1 = 0 \text{ فقط یک ریشه داشته باشد: } \Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

به ازای $a = 2$ ریشه معادله $x = -1$ و به ازای $a = -2$ ریشه معادله $x = 1$ است که هیچ کدام ریشه مفرج نیستند. پس هر دو مقدار a قابل قبول است.

(۲) معادله $x^2 + ax + 1 = 0$ دو تا ریشه داشته باشد که یکی از آنها ریشه مفرج است پس ریشه های مفرج را می یابیم:

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2, 5$$

$$\text{اگر } x = -2 \text{ ریشه معادله } x^2 + ax + 1 = 0 \text{ باشد آنگاه: } (-2)^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

$$\text{اگر } x = 5 \text{ ریشه معادله } x^2 + ax + 1 = 0 \text{ باشد آنگاه:}$$

$$5^2 + 5a + 1 = 0 \Rightarrow 5a = -26 \Rightarrow a = -\frac{26}{5}$$

$$a = \left\{ \pm 2, \frac{5}{2}, -\frac{26}{5} \right\} \text{ پس چهار مقدار برای } a \text{ وجود فواید داشت:}$$

سؤال ۱۱: a کدام باشد تا معادله $\frac{a+1}{x-x^2} + \frac{1}{x-1} = 1$ ریشه ی مضاعف داشته باشد.

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) مقداری برای a یافت نمی شود.

$$\left(\frac{a+1}{x-x^2} + \frac{1}{x-1} = 1 \right) x(1-x) \xrightarrow{x \neq 0, 1}$$

$$(a+1) - x = x - x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + a + 1 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} \Delta = 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4(a+1) = 0 \Rightarrow a = 0$$

دارد

x نمی تواند صفر و ۱ باشد:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0 - 0 + a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \\ x = 1 \Rightarrow 1 - 2 + a + 1 = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases}$$

پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

سؤال ۱۲: معادله $x + \frac{4}{x+2} = a$ به ازای برخی از مقادیر a دارای ریشه مضاعف می باشد مجموع مقادیر a کدام

است؟

۸ (۴)

۴ (۳)

-۴ (۲)

-۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$x + \frac{4}{x+2} = a \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = a \quad (x \neq -2)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 4 = ax + 2a \Rightarrow x^2 + (2-a)x + 4-2a = 0$$

اگر معادله فوق ریشه مضاعف داشته باشد باید $\Delta = 0$ باشد پس:

$$\Delta = (2-a)^2 - 4(4-2a) = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 + 8a - 16 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 4a - 12 = 0 \Rightarrow (a+6)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow -6 + 2 = -4$$

سؤال ۱۳: به ازای جميع مقادیر حقیقی a ، معادله $\frac{1}{x} + \frac{2}{1-a^2} = \frac{1}{x+2}$ دو جواب متمایز دارد، به جز:

(۴) پنج مقدار a

(۳) چهار مقدار a

(۲) دو مقدار a

(۱) سه مقدار a

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{-2}{1-a^2} \Rightarrow \frac{x+2-x}{x(x+2)} = \frac{-2}{1-a^2} \Rightarrow \frac{2}{x(x+2)} = \frac{2}{a^2-1} \Rightarrow x(x+2) = a^2-1 \Rightarrow x^2 + 2x + (1-a^2) = 0$$

برای آنکه معادله بدست آمده دو جواب داشته باشد داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 2^2 - 4(1-a^2) > 0 \Rightarrow 1 - (1-a^2) > 0 \Rightarrow a^2 > 0 \Rightarrow a \in R = \{0\}$$

ضمناً باید توجه کنیم که $a = \pm 1$ قابل قبول نیست زیرا مخرج یکی از کسره‌های معادله را صفر می کند و x نمی تواند مقادیر صفر و -۲ شود. (ریشه های مخرج)

$$x = 0 \Rightarrow 0 + 0 + (1-a^2) = 0 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$x = -2 \Rightarrow (-2)^2 + 2(-2) + (1-a^2) = 0 \Rightarrow a = \pm 1$$

پس مجموعاً سه مقدار $\{-1, 0, 1\}$ برای a نمی توانند در معادله قرار گیرند تا دو جواب داشته باشد.

سؤال ۱۴: برای چند مقدار طبیعی a خط $y = x + 4$ نمودار $y = \frac{2x+a}{x+2}$ را قطع نمی کند.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

در واقع معادله‌ی $\frac{2x+a}{x+2} = x+4$ جواب ندارد.

$$\begin{aligned} \xrightarrow{x \neq -2} 2x+a &= x^2+6x+8 \Rightarrow x^2+4x+(8-a)=0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 16-4(8-a) < 0 \\ \Rightarrow 4-(8-a) < 0 &\Rightarrow -4+a < 0 \Rightarrow a < 4 \quad (1) \end{aligned}$$

اما توجه ($x \neq -2$) پس باید ببینیم به ازای $x = -2$ چه مقداری برای a بدست می آید.

$$x = -2 \Rightarrow (-2)^2 + 4(-2) + 8 - a = 0 \Rightarrow a = 4 \quad (2) \xrightarrow{(1) \cup (2)} a \leq 4$$

پس چهار عدد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴ در این بازه قرار دارند.

سؤال ۱۵: معادله‌ی $\frac{x}{x^2-4} + \frac{x+a}{x+2} = 1$ ریشه ندارد. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است.

۱ (۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳) ۲/۵ (۴)

$$\xrightarrow{x \neq \pm 2} \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{x+a}{x+2} = 1 \right) \times (x-2)(x+2) \Rightarrow x + (x+a)(x-2) = x^2-4$$

$$\Rightarrow x + x^2 + (a-2)x - 2a = x^2 - 4 \Rightarrow (a-1)x - 2a = -4 \Rightarrow (a-1)x = 2a-4 \Rightarrow x = \frac{2a-4}{a-1}$$

برای اینکه معادله بالا ریشه نداشته باشد حالت های زیر را می توان متصور شد:

۱) $a = 1$

۲) $x = 2 \Rightarrow \frac{2a-4}{a-1} = 2 \Rightarrow 2a-4 = 2a-2 \Rightarrow -4 = -2$ غ ق

۳) $x = 1 \Rightarrow \frac{2a-4}{a-1} = -2 \Rightarrow 2a-4 = -2a+2 \Rightarrow 4a = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow a = 1$ یا $\frac{3}{2} \Rightarrow 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

سؤال ۱۶: به ازای چند مقدار t معادله‌ی $\frac{t-1}{2x} = \frac{x+1}{x^2-2x}$ جواب ندارد.

صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

$$\frac{t-1}{2x} = \frac{x+1}{x^2-2x} \Rightarrow (t-1)x(x-2) = 2x(x+1) \xrightarrow{x \neq 0, 2} (t-1)(x-2) = 2(x+1)$$

$$\Rightarrow (t-1)x - 2(t-1) = 2x+2 \Rightarrow x = \frac{2t}{t-3}$$

برای آنکه معادله جواب نداشته باشد. اولاً باید $x = \frac{2t}{t-3}$ مخرج یکی از کسرها را صفر کند یعنی باید مقدار آن یا صفر یا ۲ باشد.

$$\begin{cases} \frac{2t}{t-3} = 2 \Rightarrow 2t = 2t-6 \Rightarrow 0 = -6 \\ \frac{2t}{t-3} = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

هیچگاه برقرار نیست $0 = -6$

ثانیاً به ازای $t = 3$ مخرج عبارت $\frac{2t}{t-3}$ صفر می شود بنابراین به ازای مقادیر $t = 0, 3$ معادله جواب ندارد.

سؤال ۱۷: به ازای کدام مقدار a ، معادله $\frac{2a}{x-x^2} + \frac{1}{x-1} = 1$ جواب مضاعف دارد.

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -2 (۴) هیچ مقدار a

$$\frac{2a}{x(1-x)} + \frac{1}{-(1-x)} = 1 \Rightarrow \frac{2a-x}{x(1-x)} = 1 \Rightarrow 2a-x = x-x^2 \xrightarrow{x \neq 0, 1}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 2a = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

به ازای $a = \frac{1}{2}$ جواب معادله $x^2 - 2x + 2a = 0$ می شود ولی $x = 1$ ریشهی مخرج است بنابراین به ازای هیچ مقدار a معادله جواب مضاعف ندارد.

سؤال ۱۸: معادله $\frac{4^x+1}{2-x^4} = 2^x$ چند جواب دارد؟

$$4^x + 1 = (2-x^4)2^x \rightarrow \frac{4^x+1}{2^x} = 2-x^4 \rightarrow 2^x + \frac{1}{2^x} = 2-x^4$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2 \\ x^4 \geq 0 \rightarrow -x^4 \leq 0 \rightarrow 2-x^4 \leq 2 \end{cases} \xrightarrow[\text{طرف تساوی ۲ شوند.}]{\text{تساوی زمانی رخ می دهد که هر دو}} \rightarrow 2-x^4 = 2 \rightarrow x = 0$$

سؤال ۱۹: $x = 2 - \sqrt[3]{2}$ آنگاه حاصل عبارت $\left(\frac{x^3-6}{x}\right)^3$ کدام است؟

$$x = 2 - \sqrt[3]{2} \rightarrow x-2 = -\sqrt[3]{2} \rightarrow (x-2)^3 = -2 \rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = -2$$

$$\rightarrow x^3 - 6 = 6x^2 - 12x \rightarrow \left(\frac{x^3-6}{x}\right)^3 = \left(\frac{6x^2-12x}{x}\right)^3 \rightarrow (6x-12)^3 = 6^3(x-2)^3$$

$$\rightarrow 6^3 \times (-2) = 216 \times (-2) = -432$$

سؤال ۲۰: مجموعه جواب نامعادله $x^2 + ax + b \geq 0$ به صورت $|x-2| \geq 1$ می باشد حاصل $a+b$ کدام است.

- (۱) -1 (۲) 1 (۳) -2 (۴) 2

$$|x-2| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-2 \geq 1 \\ x-2 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \text{یا} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

پس $x=1, x=3$ و باید ریشه های معادله $x^2 + ax + b = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$ باشند یعنی

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & & 3 & \\ \hline (x-1)(x-3) & + & - & + & \\ \hline \end{array} \quad a+b = -1$$

سؤال ۲۱: نابرابری $|x| < 2(x-1)^2$ با کدام نامعادله معادل است.

- (۱) $|4x-5| > 5$ (۲) $|2x-3| > 4$ (۳) $|4x-3| > 5$ (۴) $|2x-5| > 4$

$$x \geq 0 \Rightarrow x < 2(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 > 0 \Rightarrow (2x - 1)(x - 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \text{یا} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{x \geq 0} \begin{cases} x > 2 \\ \text{یا} \\ 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

$$x < 0 \Rightarrow -x < 2(x^2 - 2x + 1) \quad (2)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{همواره درست است}$$

$$(1) \cup (2) \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} > 2 - \frac{5}{4} \\ x - \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2} - \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{4} > \frac{3}{4} \\ x - \frac{5}{4} < -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - \frac{5}{4}| > \frac{3}{4} \\ |4x - 5| > 3 \end{cases}$$

سؤال ۲۲: مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{x} + \frac{1}{ax-1} > \frac{3}{x(ax-1)}$ به صورت $\{3\} - (\alpha, +\infty)$ می باشد مقدار α کدام است.

(۴) صفر

(۳) -۲

(۲) -۱

(۱) ۱

چون نقطه‌ی ۳ از دامنه حذف شده است پس جز ریشه های مخرج نامعادله بوده است. لذا:

$$2(2a-1) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{ax-1} = \frac{ax-1+x}{x(ax-1)} > \frac{3}{x(ax-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{ax-1+x-3}{x(ax-1)} > 0 \Rightarrow \frac{(a+1)x-4}{x(ax-1)} > 0 \xrightarrow{a=\frac{1}{3}} \frac{\frac{4}{3}x-4}{x(\frac{1}{3}x-1)} > 0 \Rightarrow \frac{4(\frac{1}{3}x-1)}{x(\frac{1}{3}x-1)} > 0$$

$$\frac{4}{x} > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ با فرض } x \neq 3 \text{ صورت و مخرج را ساده می کنیم}$$

پس مجموعه جواب نامعادله به صورت $\{3\} - (0, +\infty)$ است پس $\alpha = 0$ می باشد.

سؤال ۲۳: مجموع جواب های نامعادله $\frac{4}{x^2+x+1} \leq 3-x-x^2$ کدام است.

(۴) $-\frac{1}{2}$

(۳) -۱

(۲) ۱

(۱) $\frac{1}{2}$

$$\frac{4}{x^2+x+1} + x^2+x-3 \leq 0 \xrightarrow{+1} \frac{4}{x^2+x+1} + x^2+x+1-3 \leq 1$$

$$\xrightarrow{x^2+x+1=u} \frac{4}{u} + u \leq 4 \Rightarrow 4+u^2 \leq 4u \Rightarrow u^2-4u+4 \leq 0 \Rightarrow (u-2)^2 \leq 0 \Rightarrow (u-2) = 0$$

$$\Rightarrow u = 2 \Rightarrow x^2+x+1 = 2 \Rightarrow x^2+x-1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب ها } S = -\frac{b}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

سؤال ۲۴: مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2-4}{a^2-x^2} > 0$ اجتماع دو بازه است به ازای کدام مقادیر a فاصله بین نقطه های

میانی این دو بازه برابر ۴ است. ($a \neq 0$) (ویژه‌ی دانش آموزان باهوشم)

- (۱) ± 2 (۲) ± 3 (۳) $a \in \mathbb{R}$ (۴) هیچ مقدار a

چون تابع $y = \frac{x^2-4}{a^2-x^2}$ تابعی زوج است. اگر مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $y > 0$ دو بازه باشد این جواب ها به صورت

$$\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{(-\alpha-\beta)}{2} = \alpha+\beta=4 \quad \text{خواهد بود. تفاضل نقطه میانی این دو بازه: } (\alpha, \beta) \cup (-\beta, -\alpha)$$

پس نقطه میانی بازه مثبت $\frac{\alpha+\beta}{2} = 2$ است که باید در نامعادله صدق کند. اما ۲ در نامعادله صدق نمی کند چون $y(2) = 0$ پس اصلاً چنین دو بازه ای به عنوان مجموعه‌ی جواب وجود خارجی ندارد.

سؤال ۲۵: به ازای کدام مقادیر a معادله $\left(\frac{2x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = a$ (تقدیم به دانش آموزان باهوشم)

- (۱) $a \geq 2$ (۲) $a \leq 4$ (۳) $2 \leq a \leq 4$ (۴) $0 \leq a \leq 2$

پاسخ: گزینه ۲

اگر فرض کنیم $t = \frac{x}{x-1}$ داریم:

$$\left(\frac{2x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = a \Rightarrow (2t)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 = a \Rightarrow 4t^2 + \frac{1}{t^2} = a \xrightarrow{\times t^2} 4t^4 + 1 = at^2 \quad (x \neq 0, 1)$$

$$\Rightarrow 4t^4 - at^2 + 1 = 0$$

با فرض آن که $t^2 = k$ است داریم: $4k^2 - ak + 1 = 0$

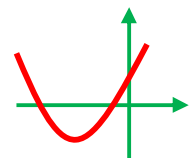
اگر در معادله فوق $\Delta < 0$ معادله جواب ندارد. اما در حالتی هم که $\Delta \geq 0$ و معادله $4k^2 - ak + 1 = 0$ دارای ۲ ریشه منفی متمایز یا یکسان نیز باشد (از آن جا که $t^2 = k$ است و k نمی تواند منفی باشد) معادله $4t^4 - at^2 + a = 0$ جواب نفوادر داشت پس ۲ حالت زیر را داریم:

$$\Delta = a^2 - 16 < 0 \Rightarrow -4 < a < 4$$

(الف) $\Delta < 0$

(ب) $\Delta \geq 0$ و ۲ ریشه منفی متمایز داشته باشیم زمانی ۲ ریشه منفی متمایز داریم که:

$$\begin{cases} (1) \Delta = a^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow a \leq -4 \text{ or } a \geq 4 \\ -a > 0 \Rightarrow a < 0 \end{cases} \Rightarrow (1) \cap (2) \cap (3) = (-\infty, -4]$$



پس از اجتماع جواب های (الف) و (ب) داریم:

$$(-4, 4) \cup (-\infty, -4] = (-\infty, 4]$$

در نتیجه در حالتی که $a < 4$ است جوابی نداریم اما آیا برای $a \geq 4$ معادله دارای جواب است؟ بله

به دلیل آن که معادله $t = \frac{x}{x-1}$ به ازای جمیع مقادیر t به جز $t = 1$ یک معادله درجه ۱ است پس دارای جواب است. اما به

ازای $t = 1$ مقدار $a = 5$ است مقدار a اگر ۵ باشد علاوه بر ۱- نیز می تواند باشد پس $a \geq 4$ عضوی از جواب هاست. پس همه مقادیر $a \geq 4$ قابل قبول اند.

سؤال ۲۶: مجموع جواب های حقیقی معادله $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$ کدام است؟

(تقدیم به دانش آموزان باهوشم)

بیایم به کمک بزینم صورت و مخرج کسرها رو بر x تقسیم کنیم:

$$\frac{4}{4x - 8 + \frac{7}{x}} + \frac{3}{4x - 10 + \frac{7}{x}} = 1 \quad 4x + \frac{7}{x} = u$$

$$\frac{4}{u - 8} + \frac{3}{u - 10} = 1 \rightarrow \frac{4(u - 10) + 3(u - 8)}{(u - 8)(u - 10)} = 1$$

$$\rightarrow 4u - 40 + 3u - 24 = u^2 - 18u + 80 \rightarrow u^2 - 25u + 144 = 0 \rightarrow (u - 9)(u - 16) = 0 \rightarrow \begin{cases} u = 9 \\ u = 16 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x + \frac{7}{x} = 9 \\ 4x + \frac{7}{x} = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 9x + 7 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \\ 4x^2 - 16x + 7 = 0 \rightarrow (2x - 7)(2x - 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}, \frac{1}{2} \end{cases}$$

سؤال ۲۷: برای هر x نامعادله $(x - 1)(x^2 - 2mx + 2 - m^2) \geq 0$ برقرار باشد مقدار m کدام است.

(تقدیم به دانش آموزان باهوشم) ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

برای آنکه نامعادله حول $x = 1$ تغییر علامت ندهد باید $x = 1$ ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج نامعادله باشد پس حتماً $x = 1$ باید ریشه‌ی

$$x = 1 \Rightarrow 1 - 2m + 2 - m^2 = 0 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m + 3)(m - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$$

داخل عبارت پرانتز هم باشد:

$$m = 1: (x - 1)(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow (x - 1)^2(x^2 + x - 1) = 0$$

پرانتز دوم دو ریشه‌ی متمایز دارد چون Δ آن مثبت است پس $m = 1$ نمی تواند جواب موردنظر باشد.

$$m = -3: (x - 1)(x^2 + 6x - 7) = (x - 1)^2(x^2 + x + 7)$$

پرانتز دوم ریشه ندارد چون Δ آن منفی است لذا کل عبارت به صورت همواره نامنفی درمی آید لذا جواب مورد نظر $m = -3$ می باشد.

سؤال ۲۸: معادله $x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} = 12$ را حل کنید. [راه حل از مهتا مقدم احمدی تابستان ۹۷ تعلیم ماندگار رشت]

☞ راه حل اول

$$x^2 + \left(\frac{2x}{x-2}\right)^2 = 12 \quad \boxed{a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab}$$

$$= \left(x + \frac{2x}{x-2}\right)^2 - 2(x)\left(\frac{2x}{x-2}\right) = 12 \Rightarrow \left(\frac{x^2 - 2x + 2x}{x-2}\right)^2 - 4\frac{x^2}{x-2} - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2 - 4\left(\frac{x^2}{x-2}\right) - 12 = 0 \xrightarrow{\frac{x^2}{x-2} = t} t^2 - 4t - 12 = 0 \Rightarrow (t-6)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{x-2} = 6 \Rightarrow x^2 - 6x + 12 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \\ \frac{x^2}{x-2} = -2 \Rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

📖 راه حل دوم) [مهتاب میربلوک - نرگس امیدوار - تابستان ۹۷ - تعلیم ماندگار رشت]

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} = 12 \xrightarrow[x=t+2]{x-2=t} (t+2)^2 + \frac{4(t+2)^2}{t^2} = 12 \xrightarrow{\times t^2} t^2(t+2)^2 + 4(t+2)^2 = 12t^2$$

$$\Rightarrow (t+2)^2(t^2+4) = 12t^2 \Rightarrow (t+2)^2(t^2+4) - 12t^2 = 0$$

$$\Rightarrow (t^2+4+4t)(t^2+4) - 12t^2 = 0 \Rightarrow (t^2+4)^2 + 4t(t^2+4) - 12t^2 = 0$$

$$\Rightarrow (t^2+4+6t)(t^2+4-2t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t^2-2t+4=0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ جواب ندارد} \\ t^2+6t+4=0 \Rightarrow t = -3 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = t+2 \Rightarrow x = (-3 \pm \sqrt{5}) + 2 = -1 \pm \sqrt{5}$$

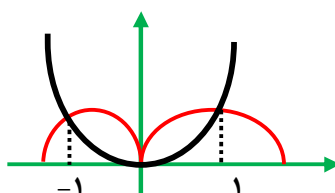
📖 سؤال ۲۹: مجموعه جواب نامعادله $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left|\sin \frac{\pi x}{2}\right|} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$ به صورت بازه $[a, b]$ است. حاصل $b-a$ کدام است.

(ویژه‌ی دانش آموزان باهوشم)

۲ (۱)

۸ (۴)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left|\sin \frac{\pi x}{2}\right|} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \Rightarrow \left|\sin \frac{\pi x}{2}\right| \geq x^2$$



$$\Rightarrow \sin \frac{\pi x}{2} \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow b-a=2$$

$$\bullet) \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2+x-6} + \frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{3x}{(x^2-1)(x-3)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x+3)(x-2)} + \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{3x}{(x^2-1)(x-3)}$$

$$\rightarrow \frac{(x+3) + (x-1) + (x-2)}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{3x}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$$\rightarrow \frac{3x}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{3x}{(x-1)(x+1)(x-3)} \rightarrow x=0$$

$$\rightarrow (x-2)(x+3) = (x+1)(x-3) \rightarrow x^2+x-6 = x^2-2x-3$$

$$\rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1 \quad \times \text{ ریشه مخرج است}$$

📖 سؤال ۳۰: معادله $\frac{x^2-x+3}{2x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x^2+x+1}{x^2-x+3} = 2$ چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} x^2-x+3 & \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \\ 2x^2+x+1 & \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \frac{x^2-x+3}{2x^2+x+1} > 0 \quad \frac{x^2-x+3}{2x^2+x+1} = a$$

$$\rightarrow \frac{x^2-x+3}{2x^2+x+1} + \frac{2x^2+x+1}{x^2-x+3} = a + \frac{1}{a} \geq 2 \rightarrow \underbrace{\frac{x^2-x+3}{2x^2+x+1} + \frac{2x^2+x+1}{x^2-x+3}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{1}{a}}_{> 0} > 2$$

هیچ گاه تساوی رخ نمی دهد پس معادله بالا جواب ندارد.

کاربرد معادلات در مسائل روزمره

📌 کاربرد معادلات در مسائل روزمره

مثال: رضا و محسن با هم پروژه ای را در ۲۰ روز به اتمام می رسانند. اگر رضا این پروژه را به تنهایی ۹ روز دیرتر از محسن انجام دهد، محسن ظرف چند روز پروژهی مذکور را به تنهایی انجام خواهد داد.

👧 آقا اجازه! سخته.

عزیزم! اصلاً اینطوری نیست. برای اینکه به سادگی این سؤال پی ببری، لطفاً به سؤالات من جواب بده!

سؤال (۱) به نظرت در ۱ روز، رضا و محسن با هم چه کسری از پروژه رو تموم می کنن؟

👧 آقا اجازه! وقتی دو تایی در ۲۰ روز یک پروژه رو انجام می دن، پس در ۱ روز، $\frac{1}{20}$ پروژه رو انجام می دن.

سؤال (۲) فکر می کنی در ۱ روز، محسن چه کسری از پروژه رو تموم می کنه؟

👧 آقا اجازه! اگه محسن در x روز یک پروژه رو به تنهایی تموم کنه، پس محسن در ۱ روز $\frac{1}{x}$ پروژه رو تموم می کنه.

سؤال (۳) حالا بگو در ۱ روز، رضا چه کسری از پروژه رو انجام میده؟

👧 آقا اجازه! چون رضا در $x+9$ روز، پروژه رو به تنهایی انجام میده پس رضا در ۱ روز، $\frac{1}{x+9}$ پروژه رو انجام میده.

سؤال (۴) به نظرت در ۱ روز چه ارتباطی بین کار انجام شده توسط (محسن)، (رضا) و (هر دوشون) وجود داره؟

👧 آقا اجازه! در ۱ روز،

(کار انجام شده توسط رضا) + (کار انجام شده توسط محسن) = (کار انجام شده توسط هر دو)

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+9} \Rightarrow \frac{1}{20} = \frac{(x+9) + (x)}{(x)(x+9)} \Rightarrow \frac{2x+9}{x^2+9x} = \frac{1}{20} \Rightarrow x^2+9x=40x+180$$

$$x^2-31x-180=0 \Rightarrow (x+4)(x-45) \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=45 \end{cases}$$

محسن و رضا به تنهایی و به ترتیب ظرف ۴۵ روز و (۴۵+۹) روز پروژه رو به اتمام می رسونن.

👧 آقا اجازه! تازه فهمیدم کلید حل این نوع مسائل، واحد زمانه!

در واقع شما اومدید در ۱ واحد زمان کار انجام شده توسط رضا، محسن و هر دوشون رو مشخص کردید و بعد گفتید در ۱ واحد زمان:

کار انجام شده توسط رضا + کار انجام شده توسط محسن = کار انجام شده توسط هر دو

👧 آقا اجازه! به نظر می رسه که این نوع مسائل رو همیشه تعمیم داد و قانونمندشون کرد، یعنی:

اگه n نفر کاری رو با هم ظرف a واحد زمانی انجام بدن و نفر اول، دوم، ... و n ام همون کار

رو به تنهایی و به ترتیب در $b_1, b_2, \dots, b_n$ واحد زمانی به اتمام برسونن، اون موقع: $\frac{1}{a} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n}$

سؤال ۳۱: در یک مزرعه اگر دو کارگر هم زمان فعالیت کنند کار در ۳۶ روز تمام می شود و اگر کارگر اول به تنهایی کار کند کار ۶۰ روزه تمام می شود. در صورتی که کارگر دوم به تنهایی کار کند کار چند روزه تمام خواهد شد؟

(۱) ۱۸۰ (۲) ۱۳۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۹۰

پاسخ: گزینه ۴

فرض کنیم کارگر دوم به تنهایی در x روز کار را تمام کند در این صورت در هر روز $\frac{1}{x}$ کار را انجام می دهد بدین ترتیب با توجه به میزان کار در هر روز داریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{60} = \frac{1}{36}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{36} - \frac{1}{60} = \frac{5-3}{180} = \frac{1}{90} \Rightarrow x = 90$$

یعنی کارگر دوم به تنهایی طی ۹۰ روز کار را تمام می کند.

مثال: لیلی به همراه تعدادی از دوستانش به یک موزه تاریخی رفت و پول بلیط همه آنها ۱۰۰۰ تومان شد. اما هر کدام از دوستانش تصمیم گرفتند که ۵۰ تومان اضافه بدهند تا لیلی پول بلیط خود را ندهد. دوستان لیلی چند نفر بودند؟

آقا اجازه! مدل این سؤال با سؤال قبلی فرق می کنه. اگه یه کم ما رو راهنمایی کنید خودمون می توانیم به جواب برسیم.

عزیزم! در حل مسائل کاربردی اگه شما یاد بگیری چه جوری زبان فارسی رو به زبان ریاضی ترجمه کنی، به راحتی می تونی از پششون بر بیای.

* اگه لیلی و دوستانش n نفر باشن و قیمت هر بلیط x تومان باشه پس $nx = 1000$ حالا جمله ی دوم رو به زبان ریاضی ترجمه می کنیم:

* چون لیلی پول بلیطش رو نمی ده، پس تعداد خریداران بلیط، $(n-1)$ نفر میشن. اما هر کدومشون باید $(x+50)$ تومان پول بدن تا بتونن ۱۰۰۰ تومان رو پر کنن. پس: $(n-1)(x+50) = 1000$

$$\begin{cases} nx = 1000 \Rightarrow x = \frac{1000}{n} \\ (n-1)(x+50) = 1000 \Rightarrow (n-1)\left(\frac{1000}{n} + 50\right) = 1000 \Rightarrow \cancel{1000} + 50n - \frac{1000}{n} - 50 = 1000 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times n} 50n^2 - 50n - 1000 = 0 \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Rightarrow (n+4)(n-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -4 \\ n = 5 \end{cases}$$

(+4) (-5)

از اونجایی که لیلی و دوستانش ۵ نفر هستن، پس دوستان لیلی میشن ۴ نفر.

آقا اجازه! راست می گفتید که: «کافیه مسائل کاربردی رو از فارسی به ریاضی ترجمه کنید تا حل بشن.»

سؤال ۳۲: جسمی به وزن ۱۵ کیلوگرم از جنس آلیاژ نیکل و کرم بوده و ۸۰ درصد آن نیکل می باشد. برای رساندن

درصد نیکل به ۶۰ درصد باید چند کیلوگرم کرم به این آلیاژ افزوده شود؟

طبق گفته مسئله ۱۵ کیلوگرم آلیاژ نیکل و کرم که ۸۰ درصدش نیکل و ۲۰ درصدش کرمه یعنی توی آلیاژ ۳ کیلوگرم کرم و ۱۲

$$\left(\frac{20}{100} \times 15 = 3 \right) \Rightarrow \text{کیلوگرم نیکل وجود دارد}$$

حالا باید x کیلوگرم کرم به آلیاژ اضافه کنیم تا درصدش به ۴۰ درصد برسه یعنی درصد نیکل ۶۰ بشه پس با اضافه کردن x کیلوگرم کرم وزن کرم $x+3$ و وزن کل آلیاژ $15+x$ می شه.

$$\frac{x+3}{x+15} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5x+15 = 2x+30 \rightarrow 3x=15 \rightarrow x=5$$

سؤال ۳۳: هلی کوپتر مسیر ۸۰۰ کیلومتری بین دو شهر را طی می کند. در مسیر رفت سرعتش به طور متوسط ۲۰

کیلومتر بر ساعت بیشتر از برگشت است. اگر زمان بازگشت ۱۰ دقیقه بیشتر باشد سرعت هلی کوپتر در مسیر رفت چقدر

است؟

۴۰۰ (۴)

۳۶۰ (۳)

۳۲۰ (۲)

۳۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

اگر سرعت رفت v باشد سرعت برگشت $20-v$ است زمان رفت می شود $t_1 = \frac{d}{v} = \frac{800}{v}$ و زمان برگشت برابر است با:

$$t_2 - t_1 = 10 \text{ min} \Rightarrow \frac{800}{v-20} - \frac{800}{v} = \frac{1}{6} \quad \text{و سوال می گوید: } t_2 = \frac{d}{v_2} = \frac{800}{v-20}$$

دقت کردید؟ واحد زمان بر حسب ساعت است پس به جای ده دقیقه نوشتیم $\frac{1}{6}$ ساعت.

حالا باید معادله کسری را حل کرد:

$$\frac{800}{v-20} - \frac{800}{v} = \frac{1}{6} \xrightarrow{\times 6v(v-20)} 800 \times 6v - 800 \times 6(v-20) = v(v-20)$$

$$\Rightarrow 4800v - 4800v + 96000 = v^2 - 20v \Rightarrow v^2 - 20v - 96000 = 0 \Rightarrow (v-320)(v+300) = 0$$

$$\xrightarrow{v>0} v = 320$$

جواب را کنترل کنیم. سرعت رفت ۳۲۰ و سرعت برگشت ۳۰۰ است و داریم: $t_2 - t_1 = \frac{800}{300} - \frac{800}{320} = \frac{8}{3} - \frac{5}{2} = \frac{1}{6}$

سؤال ۳۴: در یک آکواریوم با آب شور، قرار است محلول آب نمک با غلظت ۶ درصدی داشته باشیم. اگر در حال

حاضر ۱۵۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۴ درصدی داشته باشیم چقدر از آب آن تبخیر شود تا به حد مجاز برسیم؟

۶۰ (۴)

۳۰ (۳)

۵۰ (۲)

۷۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا نمک موجود در آب را محاسبه می کنیم و داریم: $150 \times \frac{4}{100} = 6 \text{ kg}$

فرض کنیم ۵۰ کیلوگرم آب تبخیر کنیم در این صورت داریم:

$$\frac{6}{150-x} = \frac{6}{100}$$

$$150-x = 100 \Rightarrow x = 50$$

یعنی ۵۰ کیلوگرم آب باید تبخیر شود.

اگر قرار بود نمک بیفزاییم تا به هر میزان برسیم باید به شکل زیر حل می کردیم:

$$\frac{6+x}{150+x} = \frac{6}{100}$$

$$600 + 100x = 900 + 6x$$

$$94x = 300 \Rightarrow x = \frac{300}{94}$$

در واقع وقتی غلظت اولیه از هر میزان کمتر باشد یا باید نمک اضافه کنیم یا آب تبخیر کنیم و اگر غلظت اولیه از هر میزان بیشتر باشد باید میزان آب درون مخلوط را افزایش دهیم.

سؤال ۳۵: ۲۰۰ کیلوگرم رنگ با غلظت ۲۰ درصد را با n کیلوگرم رنگ با غلظت ۸ درصدی مخلوط کرده ایم. حاصل

رنگ با غلظت ۱۰ درصد شده است مقدار n کدام است؟

- ۱) ۱۰۰۰ ۲) ۱۵۰۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۲۵۰۰

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا مقدار رنگ فاصل را پیدا می کنیم:

$$200 \times \frac{20}{100} + n \times \frac{8}{100} = 40 + \frac{2n}{25}$$

سپس غلظت رنگ مخلوط شده را برابر ۱۰ درصد قرار می دهیم:

$$\frac{40 + \frac{2n}{25}}{100} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{40 + \frac{2n}{25}}{100} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{40 + \frac{2n}{25}}{100} = \frac{1}{10} \Rightarrow n + 200 = 400 + \frac{20n}{25} \Rightarrow 25n = 5000 + 20n$$

$$\Rightarrow 5n = 500 \Rightarrow n = 1000$$

وقتی قرار است یک معادله گویا را حل کنیم ابتدا طرفین معادله در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها ضرب می کنیم و عبارت را ساده می کنیم و بعد معادله را حل می کنیم. فقط به این مطلب دقت کنیم که ریشه به دست آمده مخرج کسرها را صفر نکند.

سؤال ۳۶: درون ظرفی ۴۹ لیتر آب موجود است، x لیتر آب از ظرف خارج نموده و x لیتر متانول درون ظرف

می ریزیم سپس x لیتر از محلول برمی داریم اگر در محلول باقیمانده ۳۶ لیتر آب موجود باشد، x کدام است؟

یه ظرف داریم که ۴۹ لیتر آب توشه. ابتدا x گرم آب روبروی داریم و بجاش متانول می ریزیم بنابراین از محلول ۴۹ لیتری آب و متانول سهم آب $49-x$ لیتره.

حالا سؤال اینه که: } وقتی در ۴۹ لیتر محلول، به مقدار $49-x$ لیتر آب وجود داره.
در $49-x$ لیتر محلول، چند لیتر آب وجود دارد.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{محلول} & \text{آب} & \\
 ۴۹ & ۴۹-x & \rightarrow ? = \frac{(۴۹-x)^2}{۴۹} = ۳۶ \\
 ۴۹-x & ? & \\
 \rightarrow (۴۹-x)^2 = ۴۹ \times ۳۶ = ۷^2 \times ۶^2 \rightarrow ۴۹-x = \pm ۷ \times ۶ = \pm ۴۲ \\
 \rightarrow \begin{cases} ۴۹-x = ۴۲ \\ ۴۹-x = -۴۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = ۷ \quad \checkmark \\ x = ۹۱ \quad \times \end{cases}
 \end{array}$$

سؤال ۳۷: آقای فلاح چای چند اسباب بازی برای هدیه به مهد کودک خرید که در مجموع قیمت آنها ۱۲۰۰۰ شد. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی ۱۰۰ تومان به او تخفیف می داد او ۴ اسباب بازی بیشتر می توانست بخرد. قیمت هر اسباب بازی بدون تخفیف چقدر است؟

اول سوال می گه آقای فلاح چای ۱۲۰۰۰ تومان پول داره و n تا اسباب بازی می خره که قیمت هر عددشون x تومان بود یعنی:

$$nx = ۱۲۰۰۰ \quad (۱)$$

دومین قسمت سوال می گه ۱۰۰ تومان برای هر اسباب بازی تخفیف می گرفت (یعنی قیمت هر اسباب بازی $x - ۱۰۰$ بود) می تونست ۴ تا اسباب بازی بیشتر بخره یعنی $n + ۴$ اسباب بازی پس: $(n + ۴)(x - ۱۰۰) = ۱۲۰۰۰$

$$\begin{cases} nx = ۱۲۰۰۰ \rightarrow x = \frac{۱۲۰۰۰}{n} \\ (n + ۴)(x - ۱۰۰) = ۱۲۰۰۰ \rightarrow (n + ۴)\left(\frac{۱۲۰۰۰}{n} - ۱۰۰\right) = ۱۲۰۰۰ \end{cases}$$

$$\rightarrow ۱۲۰۰۰ - ۱۰۰n + \frac{۴۸۰۰۰}{n} - ۴۰۰ = ۱۲۰۰۰ \rightarrow -۱۰۰ + \frac{۴۸۰۰۰}{n} - ۴۰۰ = ۰$$

$$\rightarrow -n + \frac{۴۸۰}{n} - ۴ = ۰ \xrightarrow{\times n} -n^2 + ۴۸۰ - ۴n = ۰ \rightarrow n^2 + ۴n - ۴۸۰ = ۰$$

$$\rightarrow (n + ۲۴)(n - ۲۰) = ۰ \rightarrow \begin{cases} n = -۲۴ \quad \times \\ n = ۲۰ \rightarrow \checkmark \end{cases} \quad x = ۶۰۰$$

سؤال ۳۸: در ضرب دو عدد که یکی از دیگری ۱۰ واحد بزرگتر است اشتباهی رخ می دهد، در نتیجه رقم دهگان ۴ واحد کوچکتر می شود. برای آزمایش حاصل ضرب را بر عدد کوچکتر تقسیم می کنند. خرج قسمت ۳۹ و باقیمانده ۲۲ می شود. عدد کوچکتر کدام است؟

عدد کوچکتر رو x در نظر می گیریم. پس عدد بزرگتر $x + ۱۰$ می شه. از طرفی چون گفته این دو عدد در هم ضرب می شن و اشتباهی رقم دهگان ۴ واحد از مقدار واقعی اش کمتر می شه یعنی حاصل ضرب دو عدد به اشتباهی شده $x(x + ۱۰) - ۴۰$ در هم می گه اگه همین مقدار اشتباه رو بر عدد کوچکتر (x) تقسیم کنیم. خارج قسمت ۳۹ و باقیمانده ۲۲ می شه یعنی:

$$\begin{array}{r}
 x(x + ۱۰) - ۴۰ \quad | \quad \begin{array}{r} x \\ ۳۹ \end{array} \\
 \hline
 ۲۲
 \end{array}$$

$$\rightarrow x(x + ۱۰) - ۴۰ = ۳۹x + ۲۲ \rightarrow x^2 + ۱۰x - ۴۰ = ۳۹x + ۲۲$$

$$\rightarrow x^2 - ۲۹x - ۶۲ = ۰ \rightarrow (x + ۲)(x - ۳۱) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = -۱ \quad \times \\ x = ۳۱ \quad \checkmark \end{cases}$$

سؤال ۳۹: رستورانی برای تبلیغ و فروش بیشتر خود عبارت « n تا بخر - $n+1$ تا ببر » را روی شیشه‌ی رستوران خود می‌نویسد. درعین حال می‌خواهد ضرری نکند و سودی که برای فروش $n+1$ غذا می‌خواهد بدست آورد. اگر برای این منظور مجبور شود هر پرس غذا را ۷۰۰ تومان گران تر بفروشد و برای n غذا ۶۳۰۰۰ تومان بگیری. n چه عددی است؟

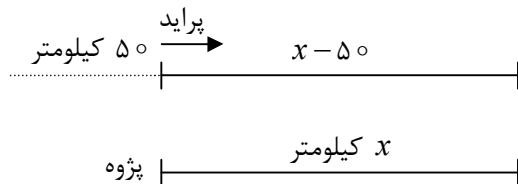
اگر فروشنده درحالت عادی و بدون تبلیغات n غذا را به قسمت ۶۳۰۰۰ تومان بفروشد قیمت هر غذا برایش $\frac{۶۳۰۰۰}{n}$ خواهد بود. حال فروشنده می‌خواهد بابت فروش $n+1$ غذا همین پول را (۶۳۰۰۰ تومان) از مشتری بگیرد. پس در اینحالت قیمت هر غذا برایش $\frac{۶۳۰۰۰}{n+1}$ می‌شود. به حالت واقعی برسد و متضرر نشود یعنی:

$$\frac{۶۳۰۰۰}{n+1} + ۷۰۰ = \frac{۶۳۰۰۰}{n} \rightarrow \frac{۹۰}{n+1} + ۱ = \frac{۹۰}{n} \rightarrow \frac{۹۰}{n} - \frac{۹۰}{n+1} - ۱ = 0 \rightarrow ۹۰(n+1) - ۹۰(n) - n(n+1) = 0$$

$$\rightarrow ۹۰ - n^2 - n = 0 \rightarrow n^2 + n - ۹۰ = 0 \rightarrow (n+۱۰)(n-۹) = 0 \rightarrow \begin{cases} n = -۱ & \times \\ n = ۹ & \checkmark \end{cases}$$

سؤال ۴۰: یک راننده با پراید از تهران به سمت اصفهان حرکت کرد و پس از طی ۵۰ کیلومتر یک راننده با پژو در همان مسیر از تهران حرکت کرد و یک ساعت زودتر از راننده پراید به اصفهان رسید اگر سرعت پراید ۸۰ کیلومتر بر ساعت و سرعت پژو ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت باشد فاصله تهران تا اصفهان چند کیلومتر است؟ (تمرین منزل)

فاصله تهران تا اصفهان رو x کیلومتر فرض می‌کنیم می‌دونیم راننده پژو زودتر زمانی حرکت کرده که راننده پراید ۵۰ کیلومتر رو طی کرده.



مدت رانندگی توسط پژو (x) یک ساعت کمتر از مدت رانندگی توسط پراید ($x-50$) هست پس:

$$۱ = \text{مدت رانندگی پژو بر } x \text{ کیلومتر} - \text{مدت رانندگی پراید برای } x-50 \text{ کیلومتر}$$

ساعت	کیلومتر	ساعت	کیلومتر
۱	$x-50$	۱	x
$\rightarrow ? = \frac{x-50}{۸۰}$	پراید:	$\rightarrow ? = \frac{x}{۱۲۰}$	پژو:
$۱ = \frac{x-50}{۸۰} - \frac{x}{۱۲۰}$		$۱ = \frac{۳(x-50) - ۲x}{۲۴۰}$	
$\rightarrow x = ۳۹۰$		$\rightarrow x = ۳۹۰$	

سؤال ۴۱: شقایق مقداری عدس و لوبیا خرید وزن عدس ۲ کیلوگرم بیشتر از لوبیا بود. او برای خرید عدس ۱۵۰ تومان و برای خرید لوبیا ۱۲۰ تومان داد. اگر قیمت لوبیا ۵ تومان گران تر از قیمت یک کیلو عدس باشد شقایق در مجموع چند کیلو عدس و لوبیا خرید؟ (تمرین منزل)

$$\left. \begin{array}{l} \text{برای } x \text{ کیلوگرم لوبیا } ۱۲۰ \text{ تومان داد پس برای یک کیلوگرم لوبیا } \frac{۱۲۰}{x} \text{ پول داده.} \\ \text{برای } x+۲ \text{ کیلوگرم عدس } ۱۵۰ \text{ تومان داد پس برای یک کیلوگرم عدس } \frac{۱۵۰}{x+۲} \text{ پول داده.} \end{array} \right\} \text{شقایق:}$$

با توجه به اینکه قیمت یک کیلوگرم لوبیا ۵ تومان بیشتر از قیمت یک کیلوگرم عدس به پس:

$$\frac{120}{x} - \frac{150}{x+2} = 5 \Rightarrow \frac{24}{x} - \frac{30}{x+2} = 1$$

$$\frac{24x + 48 - 30x}{x(x+2)} = 1 \Rightarrow \frac{-6x + 48}{x^2 + 2x} = 1 \Rightarrow x^2 + 2x = -6x + 48 \Rightarrow x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$\Rightarrow (x+12)(x-4) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -12 & \times \\ 4 & \checkmark \end{cases}$$

پس وزن لوبیا ۴ کیلو و وزن عدس ۶ کیلو بوده پس مجموع وزنشون ۱۰ کیلوگرمه.

سؤال ۴۲: فاصله بین تهران و قم ۱۰۰ کیلومتر است. راننده‌ای با پژو ۳۰ دقیقه زودتر از راننده‌ای با پراید این فاصله را طی کرد. چون سرعت پژو ۱۰ کیلومتر بر ساعت بیشتر از سرعت پراید بود سرعت پژو چند کیلومتر بر ساعت بوده است؟ (تمرین منزل)

اگر سرعت پراید رو x کیلومتر در ساعت فرض کنیم سرعت پژو می شه $(x+10)$ کیلومتر در ساعت حالا می خوایم ببینیم که هر کدام از دو راننده مسافت ۱۰۰ کیلومتری در چه زمانی طی کرده اند.

$$\begin{array}{cc} x & 1 \\ \text{پراید} & \rightarrow ? = \frac{100}{x} \\ 100 & ? \end{array} \quad \begin{array}{cc} x+10 & 1 \\ \text{پژو} & \rightarrow ? = \frac{100}{x+10} \\ 100 & ? \end{array}$$

$$\text{مدت مسافت پژو} - \text{مدت مسافت پراید} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{100}{x} - \frac{100}{x+10} = \frac{1}{2} = \frac{100}{200} \rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} = \frac{1}{200}$$

$$\rightarrow \frac{10}{x(x+10)} = \frac{1}{200} \rightarrow x^2 + 10x - 2000 = 0$$

$$\rightarrow (x+50)(x-40) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -50 \\ x = 40 \end{cases} \rightarrow \text{سرعت پژو} = 40 + 10 = 50$$

سؤال ۴۳: رامتین در دفترچه پس از اندازش ۱۰۰۰۰ تومان داشت. بعد از یک سال نصف آن را برداشت و پس از گذشت دو سال ۱/۱ افتتاح حساب معلوم شد که ۸۴۰۰ تومان در دفترچه اش وجود دارد. بانک در سال چند درصد به رامتین سود می دهد؟ (تمرین منزل)

اگه بانک در هر سال x درصد به پول رامتین سود بده بعد از گذشت یکسال ۱۰۰۰۰ تومان سپرده رامتین برابر می شه با:

$$10000 + \frac{x}{100}(10000) = 10000 + 100x$$

سوال داره می گه که رامتین بعد از گذشت یکسال ۵۰۰۰ تومان از پولش روبرو می دارد. پس پول رامتین پس از یک سال می شه:

$$10000 + 100x - 5000 = 5000 + 100x$$

حالا اگه یک سال دیگه بگذره (یعنی تو سال دوم) x درصد به مقدار $5000 + 100x$ اضافه می شه و پول را برابر می شه با:

$$5000 + 100x + \frac{x}{100}(5000 + 100x) = 8400$$

$$\rightarrow 5000 + 100x + 50x + x^2 = 8400 \rightarrow x^2 + 150x - 3400 = 0$$

$$\rightarrow (x-20)(x+170) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 20 & \checkmark \\ x = -170 & \times \end{cases}$$

سؤال ۴۴: قیمت یک آب گرم کن با تخفیف ۲۰ درصد، ۴۵۰۰۰ تومان بیشتر از قیمت آن با ۴۵ درصد تخفیف است. قیمت این آب گرم کن با ۱۰ درصد تخفیف چقدر است؟ (تمرین منزل)
اگر قیمت آب گرم کن x تومان باشد:

$$\left(x - \frac{20}{100}x\right) - \left(x - \frac{45}{100}x\right) = 45000 \rightarrow \frac{80}{100}x - \frac{55}{100}x = 45000$$

$$\rightarrow \frac{25}{100}x = 45000 \rightarrow \frac{1}{4}x = 45000 \rightarrow x = 180000$$

$$\text{قیمت آب گرم کن با ده درصد تخفیف} = x - \frac{10}{100}x = \frac{90}{100}x = \frac{90}{100} \times 180000 = 162000$$

سؤال ۴۵: در یک دوره مسابقات لیگ فوتبال با شرکت ۱۸ تیم، مسابقات به صورت دوره ای انجام شده است. اگر کل امتیازات جدول ۸۸۳ باشد تعداد مسابقه هایی که در آن یک تیم برنده شده باشد چه تعداد است؟ (تمرین منزل)

ابتدا کل بازی های انجام شده را محاسبه می کنیم. چون هر تیم با ۱۷ تیم دیگر بازی می کند تعداد کل بازی ها $17 \times 18 = 306$ می شود از طرفی همان طور که می دونیم در فوتبال برد ۳ امتیاز، مساوی ۱ امتیاز دارد. بنابراین اگر تعداد بازی ها با نتیجه مساوی n تا باشد تعداد بازی هایی که مساوی نشده اند $306 - n$ خواهد بود. از طرفی برای هر بازی با نتیجه مساوی در کل ۲ امتیاز (به هر تیم یک امتیاز) و برای بازی های با نتیجه برد و باخت، ۳ امتیاز به تیم برنده داده می شود و چون کل امتیازها ۸۸۳ است داریم:

$$2n + 3(306 - n) = 883$$

$$2n + 918 - 3n = 883 \rightarrow n = 35 \rightarrow \text{تعداد مسابقات با نتیجه مساوی}$$

$$271 = 306 - 35 = \text{تعداد مسابقات با نتیجه برد و باخت}$$

سؤال ۴۶: در یک دانشگاه فاصله بین دانشکده ی فنی و کتابخانه ۷۲۰ متر است. امیر و غزاله هر روز این مسیر را طی می کنند و چون امیر قد بلندتر است برای طی این مسیر ۱۰۰ گام کمتر برمی دارد. زیرا هر گام ۱ و ۱۰ سانتی متر بلندتر از غزاله است. در این صورت طول هر گام غزاله چند سانتی متر است؟ (تمرین منزل)

اگر طول گام غزاله را x متر فرض کنیم فاصله ۷۲۰ متر را با $\frac{720}{x}$ گام طی می کند و امیر این فاصله را با $\frac{720}{x+0.1}$ طی می کند و در نهایت امیر ۱۰۰ گام کمتر برمی دارد:

$$\frac{720}{x} - \frac{720}{x+0.1} = 100 \rightarrow \frac{720(x+0.1) - 720x}{x(x+0.1)} = 100 \rightarrow \frac{72}{x(x+0.1)} = 100 \rightarrow \frac{36}{x^2+0.1x} = 50$$

$$\rightarrow 50x^2 + 5x - 36 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{7225}}{100} = \frac{-5 \pm 85}{100} \rightarrow \begin{cases} x = 0.8 & \checkmark \\ x = -0.9 & \times \end{cases}$$

سؤال ۴۷: محیط چرخ عقب یک تراکتور ۲ برابر محیط چرخ جلوی آن است. اگر با تعویض چرخ های تراکتور محیط

چرخ عقب یک متر کمتر و محیط چرخ جلو یک متر زیاد شود. آنگاه در یک مسیر n متری چرخ عقب $\frac{n}{4}$ دور بیشتر از

چرخ جلو می چرخد. در این صورت محیط چرخ عقب تراکتور چند است؟ (تمرین منزل)

اگر محیط چرخ جلو x متر باشد محیط چرخ عقب $2x$ متر است. اگر محیط چرخ جلو را یک متر بیشتر و محیط چرخ عقب را یک

متر کمتر کنیم در n متر چرخ جلو $\frac{n}{x+1}$ دور و چرخ عقب $\frac{n}{2x-1}$ دور می چرخد. بنابراین داریم:

$$\frac{n}{2x-1} - \frac{n}{x+1} = \frac{n}{2} \xrightarrow{\div n} \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x+1-(2x-1)}{(2x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{-x+2}{(2x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \rightarrow -2x+4 = 2x^2+2x-x-1 \rightarrow 2x^2+3x-5=0$$

$$(x-1)(2x+5)=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \quad \checkmark \\ x=-\frac{5}{2} \quad \times \end{cases}$$

سؤال ۴۸: یک موتور سوار از کرج به سمت رشت حرکت کرده پس از طی ۶ کیلومتر یک راننده با پژو از کرج حرکت کرده و ۳ ساعت زودتر از موتورسوار به رشت می رسد. هرگاه سرعت موتورسوار V کیلومتر در ساعت و سرعت پژو $4V$ کیلومتر در ساعت باشد فاصله کرج تا رشت چقدر است؟ (تمرین منزل)

اگر فاصله بین دو شهر x کیلومتر باشد، موتور سور این مسافت را در مدت $\frac{x}{V}$ و ماشین سوار در $\frac{x}{4V}$ ساعت طی می کند. موتورسوار $\frac{6}{V}$ ساعت زودتر حرکت کرده و ۳ ساعت دیرتر می رسد. پس اختلاف زمانی این دو نفر $3 + \frac{6}{V}$ است.

$$\rightarrow \frac{x}{V} - \frac{x}{4V} = 3 + \frac{6}{V} \rightarrow \frac{4x-x}{4V} = \frac{3V+6}{V} \rightarrow 3x = 12V+24 \rightarrow x = 4V+8$$

سؤال ۴۹: یک خط متروی بین شهری ۲۰ کیلومتر طول دارد. اگر سرعت مترو ۱۲ کیلومتر در ساعت بیشتر بود زمان رفت و برگشت بین دو شهر ۴۵ دقیقه کوتاهتر می شد. در حال حاضر سرعت حرکت قطار چند کیلومتر در ساعت است؟ (تمرین منزل)

اگر زمان رفت و برگشت قطار x ساعت باشد سرعت فعلی قطار در مسافت ۴۰ کیلومتری $\frac{40}{x}$ کیلومتر بر ساعت است ولی وقتی زمان ۴۵ دقیقه (یا $\frac{3}{4}$ ساعت) کوتاهتر می شود سرعت آن برابر $\frac{40}{x-\frac{3}{4}}$ کیلومتر بر ساعت است.

$$\frac{40}{x} + 12 = \frac{40}{x - \frac{3}{4}}$$

$$\frac{40+12x}{x} = \frac{40}{x-\frac{3}{4}} \rightarrow 40x-30+12x^2-9x = 40x$$

$$\rightarrow 12x^2-9x-30=0 \rightarrow 4x^2-3x-10=0 \rightarrow (x-2)(4x+5)=0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \quad \checkmark \\ x=-\frac{5}{4} \quad \times \end{cases}$$

تست معادلات گویا

۱- اعداد $\frac{3-4a}{a+2}$ ، $\frac{2a}{1-3a}$ معکوس یکدیگر هستند، قریبۀ معکوس $2 - \frac{3}{a}$ کدام گزینه می تواند باشد؟

- (۱) ۲ (۲) -۱۳ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{13}$

۲- هرگاه $\frac{x}{x+1} + \frac{x+2}{x} = -x$ دارای ریشه α باشد، α کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -۲ (۴) ۲

۳- اگر معادله $x=3$ ریشه معادله $\frac{x^2-2a}{2x+a} = \frac{3x-a}{3x-1}$ باشد مجموع مقادیر a کدام است؟

- (۱) ۱۹ (۲) -۱۹ (۳) ۱۸ (۴) -۱۸

۴- معادله $\frac{x^2}{(x-1)^2} - \frac{3x}{1-x} = 4$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۵- تعداد جواب های معادله $\frac{2x-2x^2}{x^2-x+2} = x^2-x$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶- معادله $\frac{x+1}{1-x} + \frac{2}{x+1} = 5$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۷- برای آن ۱۶۰ کیلوگرم محلول آب و نمک با غلظت ۱۵ درصد را به غلظت ۲۰ درصد برسانیم، باید چند کیلوگرم نمک به محلول اضافه کنیم؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۸- علی و حسین خانه ای را ۱۲ روزه رنگ می کنند. اگر سرعت علی دو برابر سرعت حسین باشد آنگاه علی به تنهایی خانه را در چند روز رنگ می زند؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۹- یک استاد نقاش ساختمانی را ۲۰ روز زودتر از همکاری تمام می کند. اگر او و همکاری با هم کار کنند نقاشی ساختمان ۲۴ روز طول می کشد همکاری استاد به تنهایی چند روزه تمام می کند؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۶۰ (۳) ۴۰ (۴) ۱۶

۱۰- یک دست فروش در ۲۰ روز اول ماه جمعاً ۸۰۰ دلار درآمد داشته است. اگر در روزهای بعدی هر روز ۷۲ دلار درآمد داشته باشد چند روز دیگر باید کار کند تا میانگین کل درآمدش از ابتدای ماه به ۵۲ دلار برسد؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴) ۸

۱۱- معادله $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۲- معادله $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = x \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \right)$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۳- از معادله $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{x-2}{x-x^2}$ مقدار جزء صحیح معکوس جواب برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۴- به ازای کدام مقدار m حاصل ضرب ریشه های معادله $\frac{x}{x-3} = 2 - \frac{m}{x}$ برابر ۳ است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۵- اگر $x=a$ یک جواب معادله $\frac{a-1}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-a}$ باشد مقدار مثبت a چقدر بزرگتر از مقدار منفی آن است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۶- جواب های معادله $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$ چگونه اند؟

- (۱) یک جواب مثبت و یک جواب منفی
(۲) فقط یک جواب منفی
(۳) فقط یک جواب مثبت
(۴) معادله جواب حقیقی ندارد.

۱۷- به ازای کدام مقدار b مجموعه جواب های معادله $\frac{2x-1}{x+1} = a + \frac{b}{x}$ به صورت $\{-2, -4\}$ است؟

- (۱) -۸ (۲) ۸ (۳) -۱ (۴) ۱

۱۸- اگر جواب های معادله $\frac{5-m}{2x} + \frac{m-3}{x(x+4)} = \frac{x}{x^2+3x-4}$ باشند $\alpha, 2$ باشند $\alpha^2 + \alpha$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱۲ (۳) ۲۰ (۴) ۳۰

۱۹- اگر دو ماشین چمن زنی با هم کار کنند چمن های یک پارک را در ۱۲ ساعت کوتاه می کنند. اگر سرعت کار یکی از آن ها دو برابر دیگری باشد ماشین کندتر چند ساعت طول می کشد که به تنهایی کار را تمام کند؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۲۰- یک قطار مسیری به طول ۶۰ کیلومتر را با سرعت ثابت ۷ طی می کند. اگر در مسیر برگشت از سرعت قطار 10 km/h کاسته شود. زمان بازگشت نیم ساعت طولانی تر می شود، سرعت قطار در مسیر رفت چند کیلومتر بر ساعت است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۲۰ (۳) ۴۰ (۴) ۱۵

۲۱- یک مرغ به همراه جوجه اش ۷۲ دقیقه طول می کشد تا تمام کرم های یک باغچه را بخورند، اگر جوجه به تنهایی بخواند این کار را انجام دهد یک ساعت بیشتر از مدت زمانی طول می کشد که مرغ بخواند آن را به تنهایی انجام دهد. جوجه به تنهایی در چند ساعت تمام کرم ها را می خورد؟

- (۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳) ۲/۵ (۴) ۳

۲۲- شیرهای A, B یک استخر را در ۱۵ ساعت پر می کنند. بعد از ۶ ساعت که هر دو شیر باز بوده اند، شیر A را می بندیم شیر B به تنهایی ۱۵ ساعت بعد استخر را پر می کند. شیر A به تنهایی چند ساعت طول می کشد تا استخر را پر کند؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۲/۵ (۳) ۳۷/۵ (۴) ۳۸

۲۳- معادله $\frac{x^2}{x^3+1} + \frac{2}{x^2-x+1} = \frac{3}{x+1}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۴- ریشه های معادله $\frac{x}{2x^2+x-6} + \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}$ چگونه اند؟

- (۱) فقط یک ریشه منفی دارد. (۲) دو ریشه مثبت دارد. (۳) فقط یک ریشه مثبت دارد. (۴) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد.

۲۵- قدر مطلق تفاضل جواب های معادله $\frac{1}{9-x^2} + \frac{2}{x^2-6x+9} = \frac{1}{x+3}$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۲۶- اگر α, β جواب های معادله $\frac{6}{x} = 2 + \frac{x}{x+1}$ باشند حاصل $\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{8}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۲۷- معادله $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = x \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \right)$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۲۸- جواب های معادله $\frac{2x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x} = 3$ چگونه اند؟

- (۱) یک ریشه مضاعف مثبت دارد. (۲) یک ریشه مضاعف منفی دارد. (۳) یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی دارد. (۴) یک ریشه منفی و دو ریشه مثبت دارد.

۲۹- حاصل ضرب جواب های معادله $\frac{2}{x^2-2x+3} + \frac{1}{x^2-2x} = 1$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $-\sqrt{3}$

۳۰- مجموع تمام مقادیری از x که به ازای آن ها عبارت $\frac{1}{x^2+2x}$ به اندازه $\frac{1}{12}$ از عبارت $\frac{1}{(x+1)^2}$ بیشتر می باشد کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۳

۳۱- اگر $x=2$ یک جواب معادله $\frac{6}{x} - \frac{2x-a}{x^2-1} = \frac{4}{x-1}$ باشد جواب دیگر معادله کدام است؟

- (۱) ۰/۵ (۲) -۰/۷۵ (۳) ۱ (۴) ریشه دیگر ندارد.

۳۲- به ازای کدام مقدار m یک ریشه معادله $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{3}{m}$ از دو برابر ریشه دیگر دو واحد کمتر است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۳۳- به ازای کدام مقدار a معادله $\frac{x+1}{x} + \frac{a}{x-1} = 1$ جواب حقیقی ندارد؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۳۴- معادله $\frac{1-x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{ax+b}{x^2-4}$ بی شمار ریشه حقیقی دارد زوج مرتب (a,b) کدام است؟

- (۱) (۱,۵) (۲) (۵,-۲) (۳) (-۲,۱) (۴) معادله بی شمار ریشه نخواهد داشت.

۳۵- اگر در یک مستطیل با طول L عرض W و محیط ۱۶ داشته باشیم $\frac{W}{L} = \frac{L}{W+L}$ مساحت مستطیل کدام است؟

- (۱) $32(\sqrt{5}-2)$ (۲) $64(\sqrt{5}-2)$ (۳) $32(\sqrt{5}-1)$ (۴) $64(\sqrt{5}-1)$

۳۶- یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد، مخلوط شده اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن غلظت محلول به ۵۰ درصد می رسد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

- (۱) ۰/۴ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۶ (۴) ۰/۸

۳۷- فردی چند اسباب بازی برای هدیه به مهد کودک خرید که در مجموع قیمت آن ها ۱۲۰۰۰ تومان شد. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی ۱۰۰ تومان به او تخفیف می داد او ۴ اسباب بازی بیشتر می توانست بخرد. قیمت هر اسباب بازی بدون تخفیف چند تومان است؟ (قیمت اسباب بازی ها با هم برابر است.)

- (۱) ۳۰۰ (۲) ۶۰۰ (۳) ۴۰۰ (۴) ۲۴۰

۳۸- دو کارگر با هم کاری را در ۶ روز تمام می کنند. اگر هر کدام به تنهایی کار کنند کارگر اول ۵ روز زودتر از کارگر دوم کار را تمام می کند. کارگر دوم کار را در چند روز به پایان می رساند؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۳۹- دو کارگر کاری را در ۶ روز تمام می کنند. بعد از ۴ روز کار مشترک کارگر اول کار را رها می کند و کارگر دوم بقیه کار را در ۶ روز تمام می کند. کارگر اول کل کار را به تنهایی در چند روز تمام می کند؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۴۰- فاصله بین دو شهر ۱۸۰ کیلومتر است. راننده ای این مسیر را با سرعت ثابت طی می کند. اگر در مسیر برگشت سرعت را ۱۰ کیلومتر بر ساعت بیشتر کند ۱۲ دقیقه زودتر به مقصد می رسد. سرعت مسیر برگشت چند کیلومتر بر ساعت بوده است؟

- (۱) ۸۵ (۲) ۹۰ (۳) ۹۵ (۴) ۱۰۰

۴۱- به ازای چه مقدار k معادله $\frac{2x}{x-1} + \frac{k}{x-2} = 1$ فقط یک ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۲- حاصل ضرب جواب های معادله $\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{(2x+1)^2} = \frac{5}{4}$ کدام است؟ (ویژه دانش آموزان باهوشم)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{10}$ (۴) $\frac{1}{10}$

۴۳- معادله $\frac{k}{x^2+4x+2} = \frac{1}{x^2+1}$ دو جواب حقیقی متمایز دارد. حدود k شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴۴- به ازای کدام مقدار k یکی از ریشه های معادله $\frac{x}{x-1} + \frac{k}{x+2} = \frac{1}{2}$ نصف معکوس ریشه دیگر است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۴۵- جواب های معادله $\frac{x}{x-3} + \frac{3}{x-1} = 5$ چگونه اند؟

- (۱) دو جواب مثبت دارد. (۲) دو جواب منفی دارد. (۳) یک جواب منفی و یک جواب مثبت دارد. (۴) فقط یک جواب منفی دارد.

۴۶- مجموع جواب های معادله $\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۴۷- معادله $\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5x^3}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2}$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۸- اگر $x=2$ یک جواب معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ باشد جواب دیگر معادله کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) جواب دیگر ندارد.

پاسخنامه معادلات گویا

۱- پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{3-4a}{a+2} = \frac{1-3a}{2a} \xrightarrow{a \neq 0, a \neq -2} 2a(3-4a) = (a+2)(1-3a) \Rightarrow 6a - 8a^2 = -3a^2 - 5a + 2$$

$$\Rightarrow 5a^2 - 11a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{11 \pm \sqrt{81}}{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \Rightarrow 2 - \frac{3}{a} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{قرینه معکوس}} -2 \\ a=\frac{1}{5} \Rightarrow 2 - \frac{3}{5} = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5} \xrightarrow{\text{قرینه معکوس}} -\frac{5}{7} \end{cases}$$

در بین گزینه ها $\frac{1}{13}$ وجود دارد.

۲- پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+2}{x} = -x \Rightarrow \frac{x^2 + (x+1)(x+2)}{x^2+x} = -x \Rightarrow \frac{x^2 + x^2 + 3x + 2}{x^2+x} = -x \quad (x \neq 0, x \neq -1)$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 3x + 2 = -x^3 - x^2 \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}_{(x+1)^3} + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^3 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^3 = -1 \Rightarrow x+1 = -1 \Rightarrow x = -2$$

$$\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases} \quad \text{تذکره:}$$

۳- پاسخ: گزینه ۱

اگر $x=3$ ریشه معادله زیر باشد در این معادله صدق می کند:

$$\frac{x^2-2a}{2x+a} = \frac{3x-a}{3x-1} \xrightarrow{x=3} \frac{9-2a}{6+a} = \frac{9-a}{1} \Rightarrow 72-16a = 54+3a-a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 19a + 18 = 0 \Rightarrow (a-1)(a-18) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=18 \end{cases} \Rightarrow 1+18=19$$

۴- پاسخ: گزینه ۲

اگر فرض کنیم $\frac{x}{x-1} = t$ است داریم:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} - \frac{3x}{1-x} = 4 \Rightarrow \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{3x}{x-1}\right) = 4$$

$$t^2 + 3t = 4 \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t+4)(t-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -4 \Rightarrow \frac{x}{x-1} = -4 \Rightarrow x = -4x + 4 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \\ t = 1 \Rightarrow \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow x = x-1 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

پس معادله تنها ۱ جواب دارد.

۵- پاسخ: گزینه ۲ اگر فرض کنیم $x^2 - x = t$ داریم:

$$x^2 - x = \frac{2x - 2x^2}{x^2 - x + 2} \Rightarrow t = \frac{-2t}{t+2} \Rightarrow t^2 + 2t = -2t \Rightarrow t^2 + 4t = 0 \Rightarrow t(t+4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \\ t = -4 \Rightarrow x^2 - x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

پس معادله دارای ۲ جواب است.

۶- پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{x+1}{1-x} + \frac{2}{x+1} = 5 \Rightarrow \frac{(x+1)^2 + 2 - 2x}{1-x^2} = 5 \Rightarrow \frac{x^2 + 3}{1-x^2} = 5$$

$$\Rightarrow x^2 + 3 = 5 - 5x^2 \Rightarrow 6x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{پس معادله دارای ۲ جواب است.}$$

۷- پاسخ: گزینه ۳

۱۵٪ درصد وزنی مملول نمک است پس مقدار نمک موجود در مملول را حساب می کنیم.

$$\text{مقدار نمک موجود در مملول} = \frac{15}{100} \times 160 = 24 \text{ kg}$$

پس در مملول ۲۴ کیلوگرم نمک است و فرض کنید x کیلوگرم به مملول نمک اضافه کنیم تا غلظت آن به ۲۰٪ برسد به کمک معادله زیر x مناسبه می شود:

$$\frac{\text{مقدار نمک}}{\text{مقدار کل}} = \frac{x+24}{160+x} = \frac{20}{100} \Rightarrow \frac{x+24}{x+160} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x+120 = x+160$$

$$\Rightarrow 4x = 40 \Rightarrow x = 10 \text{ kg}$$

۸- پاسخ: گزینه ۱

فرض می کنیم علی در x روز کل کار را انجام می دهد. چون سرعت علی دو برابر حسین است پس حسین در $2x$ روز کل کار را انجام می دهد. حال اگر فرض کنیم ۱ روز گذشته است یعنی $\frac{1}{x}$ کل کار و حسین $\frac{1}{2x}$ کل کار را انجام داده اند. چون کل کار در ۱۲ روز

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{3}{2x} = \frac{1}{12} \Rightarrow x = 18$$

انجام می شود پس در کل $\frac{1}{12}$ کل کار را انجام داده اند پس:

پس علی به تنهایی در ۱۸ روز کار را انجام می دهد.

۹- پاسف: گزینه ۲

فرض کنیم همکار در x روز تمام کند پس استاد در $x - 20$ روز کار را تمام می کند بنابراین در یک روز همکار $\frac{1}{x}$ و استاد

$\frac{1}{x - 20}$ از کار را انجام می دهند چون طبق صورت سوال با هم در ۲۴ روز تمام کرده اند در هر روز $\frac{1}{24}$ کار انجام شده است

یعنی:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 20} = \frac{1}{24} \quad \text{ک.م.م.مخرج ها} \rightarrow 24(x - 20) + 24x = x(x - 20)$$

$$24x - 480 + 24x = x^2 - 20x \Rightarrow x^2 - 68x + 480 = 0 \quad \text{یا } x = 60$$

با دقت به اتمار مشترک داریم: $(x - 8)(x - 60) = 0 \Rightarrow x = 8$

دقت کنید که همکار نمی تواند ۸ روزه تمام کند چون ۲۰ روز زودتر از ۸ روز امکان ندارد پس همکار به تنهایی ۶۰ روزه تمام می کند.

۱۰- پاسف: گزینه ۲

اگر n روز دیگر کار کند علاوه بر ۸۰۰ دلار به اندازة $72n$ دلار درآمد خواهد داشت و میانگین درآمدش در این $20 + n$ روز می شود:

$$\frac{\text{جمع}}{\text{تعداد}} = \frac{800 + 72n}{20 + n} \quad \text{این درآمد را مساوی ۵۲ قرار می دهیم:}$$

$$\frac{800 + 72n}{20 + n} = 52 \xrightarrow{\times(20+n)} 800 + 72n = 52(20 + n) = 1040 + 52n \Rightarrow 20n = 240 \Rightarrow n = 12$$

یعنی باید ۱۲ روز دیگر کار کند.

۱۱- پاسف: گزینه ۲

برای حل معادله $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$ اول مخرج مشترک می گیریم و طرفین معادله را ساده می کنیم:

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2} \Rightarrow \frac{3(x-3) - 2x}{x(x-3)} = \frac{12}{(3-x)(3+x)}$$

عامل $(x-3)$, $(3-x)$ را با شرط $x \neq 3$ از طرفین حذف میکنیم. (البته با در نظر گرفتن ضریب -1 که باقی می ماند):

$$\Rightarrow \frac{3x - 9 - 2x}{x} = \frac{12}{-(x+3)} \Rightarrow \frac{x-9}{x} = \frac{12}{-(x+3)} \Rightarrow (x-9)(x+3) = -12x$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 27 = -12x \Rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 & \text{غ ق} \\ x=-9 & \text{ق ق} \end{cases}$$

ریشه $x=3$ چون مخرج معادله را صفر می کند غیر قابل قبول است و معادله فقط یک جواب $(x=-9)$ دارد.

۱۲- پاسف: گزینه ۲

مخرج مشترک می گیریم و معادله را ساده می کنیم:

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = x \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \right) \Rightarrow \frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = x \left(\frac{x+1-x+1}{x+1} \right)$$

$$\xrightarrow{x \neq -1 \text{ با شرط}} \frac{-4x}{x-1} = \frac{2x}{1}$$

برای ساده کردن $(x-1)^2 - (x+1)^2 = -4ab$ از اتحاد استفاده کردیم. حالا چون x عامل هر دو طرف معادله است x را از طرفین حذف می‌کنیم و می‌گوییم یکی از ریشه‌ها $x=0$ است و در ادامه:

$$\frac{-4}{x-1} \Rightarrow -4 = 2x - 2 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

پس معادله فقط یک ریشه دارد $x=0$.

۱۳- پاسخ: گزینه ۴

تجزیه مخرج‌ها به صورت $x(1-x), (x+1), (x-1)(x+1)$ است پس ک.م.م. مخرج‌ها $x(x-1)(x+1)$ است و داریم:

$$\xrightarrow{\times x(x-1)(x+1)} 2xx + 2x(x-1) = (x-2)(-1)(x+1)$$

دقت کردید که در مخرج کسر سمت راست عامل $1-x$ داشتیم و در $x-1$ ضرب کرده بودیم پس (-1) باقی ماند:

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x^2 - 2x = -(x^2 - x - 2) = -x^2 + x + 2 \Rightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, \frac{-2}{5}$$

$$x=1 \text{ که قبول نیست چون ریشه مخرج است پس } x = \frac{-2}{5} \text{ و جزء صحیح عکس آن می شود } \left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 5 \end{array} \right] \text{ یعنی } \left[\begin{array}{c} -5 \\ 2 \end{array} \right] \text{ که برابر}$$

۳- است.

۱۴- پاسخ: گزینه ۲

اول مخرج مشترک می‌گیریم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x-3} = 2 - \frac{m}{x} \Rightarrow \frac{x}{x-3} = \frac{2x-m}{x} \Rightarrow x^2 = (x-3)(2x-m) \Rightarrow x^2 = 2x^2 - mx - 6x + 3m$$

$$\Rightarrow x^2 - (m+6)x + 3m = 0$$

حالا حاصل ضرب ریشه‌های این معادله باید برابر ۳ باشد پس $\frac{c}{a} = 3$:

$$\frac{c}{a} = 3 \Rightarrow \frac{3m}{1} = 3 \Rightarrow m = 1$$

چون جواب در گزینه‌ها هست و گزینه «مقداری برای m وجود ندارد» نداریم نیاز نیست امتحان کنیم. اما در حالت کلی باید مطمئن

شویم که جواب‌های معادله به دست آمده به ازای $m=1$ یعنی $x^2 - 7x + 3 = 0$ قابل قبول اند. برای این کار کافی است

امتحان کنیم که ریشه‌های مخرج معادله اصلی یعنی $x=0, x=3$ ریشه‌های معادله $x^2 - 7x + 3 = 0$ نیستند:

$$x=0 \Rightarrow 0 - 0 + 3 \neq 0$$

$$x=3 \Rightarrow 9 - 21 + 3 \neq 0$$

پس مقدار $m = 1$ قابل قبول است.

۱۵- پاسخ: گزینه ۳

$x = a$ جواب معادله است پس باید در معادله صدق کند:

$$\frac{a-1}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-a} \xrightarrow{x=a} \frac{a-1}{a+2} + \frac{2}{a} = \frac{4a-4}{a^2-a}$$

کسر ها را ساده می کنیم و مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{(a-1)a + 2(a+2)}{(a+2)a} = \frac{4(a-1)}{4(a-1)} \xrightarrow[\text{حذف } a \neq 0, a \neq 1]{a=1, a} \frac{a^2 - a + 2a + 4}{a+2} = \frac{4}{1}$$

$$\Rightarrow a^2 + a + 4 = 4a + 2 \Rightarrow a^2 - 3a - 2 = 0 \xrightarrow[\text{با شرط } a+c=b]{a+c=b} \begin{cases} a = -1 \\ a = 4 \end{cases}$$

پس اختلاف مقدار مثبت و منفی a برابر است با: $4 - (-1) = 5$

۱۶- پاسخ: گزینه ۱

از هر طرف مخرج مشترک می گیریم و معادله را ساده می کنیم:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \Rightarrow \frac{x-x-1}{x(x+1)} = \frac{x+2-x+1}{(x-1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x(x+1)} = \frac{3}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow -(x-1)(x+2) = 3x(x+1)$$

$$\Rightarrow -x^2 - x + 2 = 3x^2 + 3x \Rightarrow 4x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

چون در معادله آفر a, c مختلف علامت اند پس معادله یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد. هیچ کدام از ریشه های مخرج معادله

اصلی یعنی $x = 0, x = -1, x = 1, x = -2$ ریشه معادله $2x^2 + 2x - 1 = 0$ نیستند پس معادله تماماً ریشه دارد و (۴) جواب

نیست.

۱۷- پاسخ: گزینه ۱

$\{-2, -4\}$ مجموعه جواب معادله است پس $x = -4, x = -2$ باید در معادله صدق کنند:

$$\frac{2x-1}{x+1} = a + \frac{b}{x}$$

$$x = -2 \Rightarrow \frac{-5}{-1} = a - \frac{b}{2} \Rightarrow 2a - b = 10$$

$$x = -4 \Rightarrow \frac{-9}{-3} = a - \frac{b}{4} \Rightarrow 4a - b = 12$$

دو رابطه به دست آمده بر حسب a, b را در یک دستگاه حل می کنیم:

$$\begin{cases} 2a - b = 10 \\ 4a - b = 12 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2 - b = 10 \Rightarrow b = -8$$

۱۸- پاسف: گزینه ۲

یکی جواب های معادله $x = 2$ است پس باید در معادله صدق کند:

$$\frac{5-m}{2x} + \frac{m-3}{x(x+4)} = \frac{x}{x^2+3x-4} \xrightarrow{x=2} \frac{5-m}{4} + \frac{m-3}{12} = \frac{2}{4+6-4}$$

$$\Rightarrow \frac{3(5-m)+m-3}{12} = \frac{2}{6} \Rightarrow 15-3m+m-3=4 \Rightarrow -2m=-8 \Rightarrow m=4$$

پس معادله به صورت است. مفرج مشترک می گیریم و معادله را ساده می کنیم:

$$\frac{x+4+2}{2x(x+4)} = \frac{x}{(x-1)(x+4)} \xrightarrow[\text{با شرط } x \neq -4]{\text{حذف } (x+4)} \frac{x+6}{2x} = \frac{x}{x-1}$$

$$\Rightarrow (x+6)(x-1) = 2x^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 2x^2$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

پس ریشه دیگر معادله $\alpha = 3$ است و $\alpha^2 + \alpha = 9 + 3 = 12$

۱۹- پاسف: گزینه ۳

اگر ماشین سریع تر چمن ها را در x ساعت کوتاه کند ماشین کندتر این کار را در $2x$ ساعت انجام می دهد. پس این ماشین ها در هر ساعت $\frac{1}{2x}$ کل کار را انجام می دهند. از طرفی وقتی با هم کار کنند در هر ساعت $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$ این کار را انجام می دهند که برابر $\frac{1}{12}$ کل کار است (چون هر دو با هم در ۱۲ ساعت چمن ها را کوتاه می کنند) پس داریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{2+1}{2x} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{3}{2x} = \frac{1}{12} \Rightarrow 2x = 36 \Rightarrow x = 18$$

پس ماشین کندتر به تنهایی این کار را در $2x = 36$ ساعت انجام می دهد.

۲۰- پاسف: گزینه ۳

با توجه به رابطه $v = \frac{x}{t}$ (یعنی $v = \frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}$ = سرعت) زمان مسیر رفت برابر است با $\frac{60}{v}$ و زمان مسیر برگشت برابر است با $\frac{60}{v-10}$ و زمان برگشت نیم ساعت طولانی تر از زمان رفت است. پس:

$$\frac{60}{v-10} = \frac{1}{2} + \frac{60}{v} \Rightarrow \frac{60}{v-10} - \frac{60}{v} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{60(v-v+10)}{(v-10)v} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{600}{(v-10)v} = \frac{1}{2} \Rightarrow v(v-10) = 1200$$

و چون $1200 = 40 \times 30$ پس: $v = 40$

۲۱- پاسخ: گزینه ۴

اگر مرغ این کار را در x ساعت انجام دهد بوجه آن را در $x+1$ ساعت انجام می دهد پس هر دو با هم در یک ساعت $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ کم های باغچه را می فورند با توجه به صورت سوال هر دو با هم در ۷۲ دقیقه تمام کرم های باغچه را میفورند یعنی در

$$\frac{72}{60} = \frac{6}{5} \text{ ساعت پس باید داشته باشیم:}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{\frac{6}{5}} \Rightarrow \frac{x+1+x}{x(x+1)} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{2(2)+1}{2(3)} = \frac{5}{6} \text{ همین جا می توانیم گزینه ها را در معادله به دست آمده امتحان کنیم و ببینیم که جواب } x=2 \text{ است چون}$$

طرفین وسطین می کنیم و معادله را حل می کنیم:

$$6(2x+1) = 5x(x+1) \Rightarrow 12x+6 = 5x^2+5x \Rightarrow 5x^2-7x-6=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(5)(-6)}}{2(5)} = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{10} = \frac{7 \pm 13}{10} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7+13}{10} = 2 \\ x = \frac{7-13}{10} = -\frac{3}{5} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

پس مرغ این کار را در ۲ ساعت انجام می دهد و بوجه ۳ ساعت طول فواید دارد.

۲۲- پاسخ: گزینه ۴

شیر A, B با هم استفر را در ۱۵ ساعت پر می کنند یعنی در هر ساعت $\frac{1}{15}$ استفر را پر می کنند. پس بعد از ۶ ساعت که هر دو

شیر باز بوده اند $\frac{6}{15}$ استفر پر می شود و می ماند $\frac{9}{15}$ حجم آب آن شیر B این حجم را در ۱۵ ساعت پر می کند. پس شیر B در هر

$$\frac{9}{15} \text{ استفر را پر می کند، بنابراین داریم:} \quad \frac{1}{15} = \frac{9}{225} = \frac{1}{25} \text{ ساعت}$$

$$\frac{1}{25} + \frac{1}{x} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{15} - \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{5-3}{75} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{75} \Rightarrow x = \frac{75}{2} = 37.5$$

۲۳- پاسخ: گزینه ۳

ک.م.م مخرج کسرها $(x+1)(x^2-x+1)$ یا همان x^3+1 است. با ضرب طرفین معادله در این عبارت داریم:

$$(x+1)(x^2-x+1) \left(\frac{x^2}{x^3+1} + \frac{2}{x^2-x+1} = \frac{3}{x+1} \right)$$

$$\text{معادله: } x^2 + 2(x+1) = 3(x^2-x+1) \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 3x^2 - 3x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Delta > 0 \rightarrow \text{دو ریشه دارد}$$

دقت کنید که تنها ریشه مخرج کسرها $x = -1$ است که ریشه معادله درجه دوم بالا نیست پس هر دو جواب قابل قبول هستند.

۲۴- پاسخ: گزینه ۳

برای مناسبه ک.م.م باید عبارت های $x^2 - 4$, $x^2 + x - 6$, $2x^2 + x - 6$ را تجزیه کنیم تجزیه $x^2 - 4$ که کاری نداره!

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \quad \text{برای تجزیه } 2x^2 + x - 6 \text{ به صورت زیر عمل می کنیم:}$$

$$A = 2x^2 + x - 6 \xrightarrow{\times 2} 2A = 4x^2 + 2x - 12 \Rightarrow 2A = (2x)^2 + 1(2x) - 12$$

دو تا عدد پیدا می کنیم که جمع آنها ۱ و ضربشان -12 است (این اعداد ۴ و -3 هستند).

$$\Rightarrow 2A = (2x + 4)(2x - 3) \Rightarrow 2A - 2(x + 2)(2x - 3) \Rightarrow A = (x + 2)(2x - 3)$$

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 6 = (x + 2)(2x - 3) \\ x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \\ x - 2 \end{cases} \Rightarrow \text{م.م.ک} = (x - 2)(x + 2)(2x - 3)$$

با ضرب طرفین معادله در ک.م.م مخرج کسرها معادله را حل می کنیم:

$$(x - 2)(x + 2)(2x - 3) \left(\frac{x}{(x + 2)(2x - 3)} + \frac{4}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{1}{x - 2} \right)$$

$$\Rightarrow x(x - 2) + 4(2x - 3) = (x + 2)(2x - 3) \Rightarrow x^2 - 2x + 8x - 12 = (x + 2)(2x - 3)$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x - 12 = 2x^2 + x - 6 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 3$$

اما $x = 2$ ریشه مخرج کسر است پس معادله تنها یک جواب مثبت ($x = 3$) دارد.

۲۵- پاسخ: گزینه ۳

اول معادله را کمی مرتب می کنیم:

$$\frac{1}{\underbrace{9 - x^2}_{-(x^2 - 9)}} + \frac{2}{\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x - 3)^2}} = \frac{1}{x + 3} \Rightarrow \frac{-1}{x^2 - 9} + \frac{2}{(x - 3)^2} = \frac{1}{x + 3} \quad (*)$$

حالا ک.م.م مخرج کسرها را می یابیم:

$$\begin{cases} x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \\ (x - 3)^2 \\ (x + 3) \end{cases} \Rightarrow \text{م.م.ک} = (x + 3)(x - 3)^2$$

طرفین معادله (*) را در ک.م.م مخرج ها ضرب می کنیم:

$$(x + 3)(x - 3)^2 \left(\frac{-1}{(x - 3)(x + 3)} + \frac{2}{(x - 3)^2} = \frac{1}{x + 3} \right)$$

$$\Rightarrow -(x - 3) + 2(x + 3) = (x - 3)^2 \Rightarrow -x + 3 + 2x + 6 - x^2 - 6x + 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(x - 7) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 7$$

هر دو جواب قابل قبول هستند پس قدرمطلق تفاضل جواب ها برابر ۷ است. $|7 - 0| = |7| = 7$

۲۶- پاسف: گزینه ۱

در طرف راست مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{6}{x} = \frac{2x+2+x}{x+1} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{3x+2}{x+1}$$

حالا طرفین وسطین می کنیم:

$$6x+6=3x^2+2x \Rightarrow 3x^2-4x-6=0 \quad (*)$$

این معادله دو ریشه (α, β) دارد $(\Delta > 0)$ که هیچ کدام آنها صفر و ۱- نیستند در نتیجه هر دو ریشه قابل قبول هستند در نهایت حاصل عبارت فواست هشده را می یابیم:

$$\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 = \alpha\beta(\beta + \alpha) = P(S)$$

$$\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 = (-2)\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{8}{3} \quad \text{با توجه به معادله } (*), S = \frac{4}{3}, P = -2 \text{ است در نتیجه:}$$

۲۷- پاسف: گزینه ۲

در طرف چپ و راست برای آنکه مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = x \left(\frac{x+1-x+1}{x+1} \right) \Rightarrow \frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)} = x \left(\frac{2}{x+1} \right) \Rightarrow \frac{4x}{x-1} = 2x$$

در صورت کسر هر دو طرف معادله عبارت x داریم پس: $x=0$ ریشه معادله است با حذف x از طرفین معادله داریم:

$$\frac{4}{x-1} = 2 \xrightarrow{\div 2} \frac{2}{x-1} = 1 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3 \quad \checkmark$$

چون ریشه مخرج نیست قابل قبول است پس معادله دو جواب حقیقی دارد.

۲۸- پاسف: گزینه ۱

اگر کمی دقت کنید کسرها خیلی شبیه به هم هستند با فرض $t = \frac{x}{x^2+1}$ داریم:

$$\frac{x}{x^2+1} = t \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{t} \Rightarrow 2t + \frac{1}{t} = 3 \xrightarrow{\times t} 2t^2 + 1 = 3t \Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = x^2 + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب} = 0} \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{x}{x^2+1}=t} \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} = 1 \Rightarrow x^2+1=x \\ \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2+1=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x+1=0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه ندارد} \\ x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

پس معادله یک ریشه مضاعف مثبت دارد.

۲۹- پاسخ: گزینه ۴

از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم با فرض $x^2 - 2x = t$ داریم:

$$\text{معادله: } \frac{2}{t+3} + \frac{1}{t} = 1$$

حالا مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{2t+t+3}{t(t+3)} = 1 \Rightarrow \frac{3t+3}{t^2+3t} = 1 \Rightarrow t^2+3t=3t+3 \Rightarrow t^2=3 \Rightarrow t=\pm\sqrt{3}$$

از آن جا که $x^2 - 2x = t$ بنابراین:

$$x^2 - 2x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = \sqrt{3} \\ x^2 - 2x = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - \sqrt{3} = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \\ x^2 - 2x + \sqrt{3} = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \end{cases}$$

حاصل ضرب جوابها $\frac{c}{a} = -\sqrt{3} \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow$

پس حاصل ضرب جواب ها برابر $-\sqrt{3}$ است.

۳۰- پاسخ: گزینه ۳

عبارت $\frac{1}{x^2+2x}$ به اندازه $\frac{1}{12}$ از عبارت $\frac{1}{(x+1)^2}$ بیشتر است یعنی: $\frac{1}{x^2+2x} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{12}$

برای حل این معادله از مربع کامل کردن استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{(x+1)^2-1} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{12}$$

حالا با فرض $(x+1)^2 = t$ داریم:

$$\text{معادله: } \frac{1}{t-1} = \frac{1}{t} + \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{t-(t-1)}{t(t-1)} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow t^2-t=12 \Rightarrow t^2-t-12=0 \Rightarrow (t-4)(t+3)=0$$

$$\Rightarrow t=-3, t=4$$

هیچ کدام از جوابها ریشهٔ مخرج معادله نیستند پس هر دو جواب قابل قبول هستند:

$$\xrightarrow{(x+1)^2=t} \begin{cases} (x+1)^2 = -3 \\ (x+1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x+1=2 \Rightarrow x=1 \\ x+1=-2 \Rightarrow x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب ها} = 1 + (-3) = -2$$

۳۱- پاسف: گزینه ۲

$x = 2$ ریشه معادله است پس در آن صدق می کند:

$$x = 2: \frac{4}{1} - \frac{4-a}{3} = 3 \Rightarrow \frac{4-a}{3} = 1 \Rightarrow 4-a = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$$

$$\text{معادله: } \frac{4}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2-1} = \frac{6}{x}$$

برای یافتن جواب دیگر باید معادله را حل کنیم طرفین معادله را در $x(x-1)(x+1)$ (ک.م.م. مفرج کسر ها) ضرب می کنیم:

$$x(x-1)(x+1) \left(\frac{4}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2-1} = \frac{6}{x} \right) \Rightarrow 4x(x+1) - x(2x-1) = 6(x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x - 2x^2 + x = 6x^2 - 6 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 6 = 0$$

ضرب ریشه ها برابر $\frac{c}{a} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$ است چون یک ریشه $x = 2$ است در نتیجه ریشه دیگر (α) برابر است با:

$$(\alpha)(2) = -\frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{4} = -0.75$$

این ریشه مفرج کسر ها را صفر نمی کند پس جواب معادله است.

۳۲- پاسف: گزینه ۱

مفرج مشترک می گیریم:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2} = \frac{3}{m} \frac{x-2-x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{3}{m} \Rightarrow \frac{-3}{x^2-x-2} = \frac{3}{m} \Rightarrow \frac{-1}{x^2-x-2} = \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = -m \Rightarrow x^2 - x + m - 2 = 0 \quad (*)$$

اگر ریشه های این معادله را α, β در نظر بگیریم داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 1 \quad (**)$$

می فوایم یکی از ریشه ها از دو برابر ریشه دیگر دو واحد کمتر باشد، پس:

$$\alpha = 2\beta - 2 \xrightarrow{(**)} 2\beta - 2 + \alpha = 1 \Rightarrow 3\beta = 3 \Rightarrow \beta = 1$$

$\beta = 1$ ریشه معادله $(*)$ است پس در معادله صدق می کند:

$$1^2 - 1 + m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2 \quad \text{پاسف: گزینه ۲}$$

اول مفرج مشترک می گیریم:

$$\text{معادله: } \frac{(x-1)(x+1) + ax}{x(x-1)} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 1 + ax}{x^2 - x} = 1$$

طرفین وسطین می کنیم:

$$x^2 + ax - 1 = x^2 - x \Rightarrow (a+1)x = 1 \quad (*)$$

برای این که معادله اصلی جواب نداشته باشد معادله (*) نباید ریشه داشته باشد. این معادله هم به ازای $a = -1$ ریشه حقیقی ندارد.

۳۴- پاسخ: گزینه ۲

در طرف چپ مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{x - x^2 + 2x - 2 + x^2 + 2x}{(x+2)(x-2)} = \frac{ax+b}{x^2-4} \Rightarrow \frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{ax+b}{x^2-4} \Rightarrow 5x-2 = ax+b$$

معادله بالا باید بی شمار ریشه داشته باشد پس باید دو طرف معادله عین هم باشند در نتیجه باید ضرایب x با هم و اعداد ثابت با هم برابر باشند:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (5, -2)$$

۳۵- پاسخ: گزینه ۲

م محیط مستطیل ۱۶ است. پس داریم:

$$2(W + L) = 16 \Rightarrow W + L = 8 \Rightarrow W = 8 - L \quad (*)$$

حالا با توجه به تساوی داده شده طول L را مناسبه می کنیم:

$$\frac{W}{L} = \frac{L}{W+L} \xrightarrow{(*)} \frac{8-L}{L} = \frac{L}{8} \Rightarrow \frac{8}{L} - 1 = \frac{L}{8}$$

$$\text{با فرض } \frac{L}{8} = t > 0 \text{ داریم } \left(\frac{8}{L} = \frac{1}{t} \right)$$

$$\frac{1}{t} - 1 = t \xrightarrow{\times t} 1 - t = t^2 \Rightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\xrightarrow{t > 0} t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow \frac{L}{8} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow L = 4(\sqrt{5} - 1) = 4\sqrt{5} - 4$$

با توجه به تساوی (*):

$$W = 8 - L = 8 - 4\sqrt{5} + 4 = 12 - 4\sqrt{5}$$

پس مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = W \times L = (4\sqrt{5} - 4)(12 - 4\sqrt{5}) \Rightarrow S = 48\sqrt{5} - 16\sqrt{5} - 48 + 16\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow S = 64\sqrt{5} - 128 = 64(\sqrt{5} - 2)$$

◀ نکته: اگر بین اضلاع مستطیل رابطه $\frac{W}{L} = \frac{L}{W+L}$ برقرار باشد آنگاه اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی است و

$$\text{داریم: } \frac{L}{W} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{W}{L} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

۳۶- پاسف: گزینه ۳

یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد به مقدار $\frac{4}{4} = 1$ کیلوگرم رنگ فاصل دارد. هم چنین چهار کیلوگرم رنگ با غلظت ۷۰ درصد به اندازه $\frac{7}{8} = 0.875$ کیلوگرم رنگ فاصل دارد. بنابراین در مجموع $1 + 0.875 = 1.875$ کیلوگرم رنگ داریم که $\frac{7}{2} = 3.5$ کیلوگرم آن فاصل است. حالا برای اینکه به غلظت ۵۰ درصد برسیم باید از تبفیر مفلول رنگ استفاده کنیم (البته با این شرط که رنگ فاصل تبفیر نشود) فرض کنیم x کیلوگرم از مفلول بفار شود در این صورت $\frac{7}{2}$ کیلوگرم رنگ فاصل در $(1.875 - x)$ کیلوگرم مفلول رنگی وجود دارد. چون می فواهیم غلظت ۵۰ درصد شود پس داریم:

$$\frac{7/2}{1.875 - x} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1.875 - x = 1.4/4 \Rightarrow x = 0.4/6 \text{ کیلوگرم}$$

۳۷- پاسف: گزینه ۲

تعداد اسباب بازی های خریداری شده را x و قیمت آنها را p در نظر می گیریم. از آن جاکه کل فرید وی ۱۲۰۰۰ تومان شده پس:

$$xp = 12000 \Rightarrow p = \frac{12000}{x} \quad (*)$$

اگر فروشنده برای هر اسباب بازی ۱۰۰ تومان تففیف می دار قیمت هر اسباب بازی $(p - 100)$ تومان می شد و چون ۴ اسباب بازی بیشتر می توانست بفرد بنابراین تعداد کل اسباب بازی های خریداری شده $(x + 4)$ می شد. در این حالت معادله ای به صورت زیر فواهیم داشت:

$$(x + 4)(p - 100) = 12000 \xrightarrow{(*)} (x + 4) \left(\frac{12000}{x} - 100 \right) = 12000$$

$$\Rightarrow 12000 + \frac{48000}{x} - 100x - 400 = 12000 \xrightarrow{\times \frac{x}{100}}$$

$$480 - x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 480 = 0 \Rightarrow (x + 24)(x - 20) = 0$$

$$\xrightarrow{x > 0} x = 20 \xrightarrow{(*)} p = \frac{12000}{20} = 600$$

پس قیمت اسباب بازی ها بدون تففیف ۶۰۰ تومان بوده است.

۳۸- پاسف: گزینه ۴

در این سوالات باید وقتی دو کارگر با هم کار می کنند معادله را در واحد زمان بنویسیم. اگر مدت زمان انجام کار کارگر اول را x در نظر بگیریم چون کارگر اول ۵ روز زودتر از کارگر دوم کار را انجام می دهد پس مدت زمان انجام کار کارگر دوم $x + 5$ روز است. وقتی دو کارگر با هم کار می کنند مدت زمان انجام کار ۶ روز می شود پس داریم:

کارگر اول کار را در x روز تمام می کند، پس در یک روز، $\frac{1}{x}$ کار را انجام می دهد.

کارگر دوم کار را در $x + 5$ روز تمام می کند پس در یک روز، $\frac{1}{x + 5}$ کار را انجام می دهد.

کل کار را دو نفری در ۶ روز تمام می کنند پس در هر روز $\frac{1}{6}$ کار انجام می شود.

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x+5+x}{x(x+5)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2x+5}{x^2+5x} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x = 12x + 30 \Rightarrow x^2 - 7x - 30 = 0 \Rightarrow (x-10)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 10$$

پس کارگر دوم کار را در $x+5=15$ روز به پایان می رساند.

۳۹- پاسخ: گزینه ۳

دو کارگر با هم کار را در ۶ روز تمام می کنند. بعد از ۴ روز کار مشترک $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ کار انجام می شود پس $\frac{1}{3}$ کار هنوز باقی مانده

است. چون کارگر دوم مابقی کار ($\frac{1}{3}$ کل کار) را در ۶ روز تمام می کند پس اگر فرض کنیم کارگر دوم کل کار را در x روز تمام

$$\text{می کند داریم: } \frac{1}{3}x = 6 \Rightarrow x = 18$$

دو کارگر با هم کار را در ۶ روز تمام می کنند. پس اگر کارگر اول کار را در y روز تمام کند خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \xrightarrow{x=18} \frac{1}{18} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{3-1}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{2}{18} \Rightarrow y = 9$$

پس کارگر اول به تنهایی کل کار را در ۹ روز تمام می کند.

۴۰- پاسخ: گزینه ۴

$$\text{می دانیم: } \text{زمان} = \frac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}} \Rightarrow \text{زمان} \times \text{سرعت} = \text{مسافت}$$

$$\text{فاصله دو شهر } 180 \text{ کیلومتر است پس: } \text{زمان} = \frac{180}{\text{سرعت}}$$

اگر سرعت مسیر رفت را V (کیلومتر بر ساعت) در نظر بگیریم سرعت مسیر برگشت $V+10$ خواهد بود پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{زمان رفت} = \frac{180}{V} \\ \text{زمان برگشت} = \frac{180}{V+10} \end{cases}$$

چون مسیر برگشت را ۱۲ دقیقه ($\frac{1}{5}$ ساعت) زودتر طی می کند پس:

$$\text{زمان برگشت} - \text{زمان رفت} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{180}{V} - \frac{180}{V+10} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{180(V+10) - 180V}{V(V+10)} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{180(V+10) - 180V}{V(V+10)} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1800}{V^2 + 10V} = \frac{1}{5} \Rightarrow V^2 + 10V = 9000$$

$$\Rightarrow V^2 + 10V - 9000 = 0 \Rightarrow (V - 90)(V + 100) = 0 \Rightarrow V = 90 \text{ سرعت رفت؛}$$

پس سرعت برگشت $V + 10 = 100$ کیلومتر بر ساعت بوده است.

۴۱- پاسف: گزینه ۱

مفرج مشترک می گیریم:

$$\frac{2x^2 - 4x + kx - k}{(x-1)(x-2)} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2 + (k-4)x - k}{x^2 - 3x + 2} = 1 \Rightarrow 2x^2 + (k-4)x - k$$

$$= x^2 - 3x + 2 \Rightarrow x^2 + (k-1)x - k - 2 = 0 \quad (*)$$

برای این که معادله اصلی فقط یک ریشه داشته باشد باید یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

۱) معادله (*) یک ریشه مضاعف (غیر از ۱ و ۲ که ریشه های مفرج هستند) داشته باشد. پس دلتای معادله (*) را برابر صفر

قرار می دهیم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (k-1)^2 - 4(-k-2) = 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 + 4k + 8 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 + 2k + 9 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه حقیقی ندارد}$$

۲) معادله (*) دو ریشه داشته باشد که یک ریشه آن ۱ یا ۲ باشد پس $x=1, x=2$ در معادله (*) قرار می دهیم:

$$x=1: 1 + (k-1) - k - 2 = 0 \Rightarrow -2 = 0 \text{ غ ق ق}$$

$$x=2: 4 + (k-1)2 - k - 2 = 0 \Rightarrow 4 + 2k - 2 - k - 2 = 0 \Rightarrow k = 0$$

پس تنها به ازای $k=0$ معادله یک ریشه حقیقی دارد.

۴۲- پاسف: گزینه ۱

در طرف چپ تساوی از اتحاد فرعی مربع کامل استفاده می کنیم:

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

$$\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{(2x+1)^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x+1} \right)^2 + \frac{2}{2x(2x+1)} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2x+1-2x}{2x(2x+1)} \right)^2 + \frac{2}{2x(2x+1)} = \frac{5}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2x(2x+1)} \right)^2 + \frac{2}{2x(2x+1)} = \frac{5}{4}$$

$$\text{با فرض } \frac{1}{2x(2x+1)} = t \text{ داریم:}$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t = \frac{5}{4} \Rightarrow t^2 + 2t - \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\left(-\frac{5}{4}\right)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \\ t = \frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{از آن جا که } \frac{1}{2x(2x+1)} = t \text{ است بنابراین:}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x(2x+1)} = \frac{-6}{2} \Rightarrow 1 \circ x^2 + 5x = -1 \\ \frac{1}{2x(2x+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 + x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \circ x^2 + 5x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه ندارد.} \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{حاصل ضرب ریشه ها} = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

دقت کنید که هیچکدام از جواب های $2x^2 + x - 1 = 0$ ریشه مفرج معادله اصلی نیستند.

۴۳- پاسخ: گزینه ۲

طرفین وسطین می کنیم:

$$\frac{k}{x^2 + 4x + 2} = \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow kx^2 + k = x^2 + 4x + 2 \Rightarrow (k-1)x^2 - 4x + k - 2 = 0$$

باید این معادله دو ریشه حقیقی داشته باشد پس باید $\Delta > 0$ باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(k-1)(k-2) > 0 \Rightarrow 16 - 4(k-1)(k-2) > 0$$

$$\xrightarrow{\div(-4)} -4 + k^2 - 3k + 2 < 0 \Rightarrow k^2 - 3k - 2 < 0 \quad (*)$$

ریشه های معادله $k^2 - 3k - 2 = 0$ برابر است با:

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

پس مجموعه جواب نامعادله (*) برابر است با:

$$k^2 - 3k - 2 < 0 \Rightarrow \frac{3 - \sqrt{17}}{2} < k < \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

از آن جا که $\sqrt{17}$ تقریباً برابر ۴ است پس اعداد صحیح این فاصله صفر، ۱، ۲، ۳ هستند.

۴۴- پاسخ: گزینه ۳

مفرج مشترک می گیریم و معادله را مرتب می کنیم:

$$\frac{x}{x-1} + \frac{k}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + kx - k}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2 + (2+k)x - k}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + (4+2k)x - 2k = x^2 + x - 2 \Rightarrow x^2 + (3+2k)x - 2k + 2 = 0 \quad (*)$$

اگر ریشه ها را α, β در نظر بگیریم یک ریشه نصف معکوس ریشه دیگر است یعنی:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} \right) \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

در معادله (*) ضرب ریشه ها برابر $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-2k+2}{1}$ است در نتیجه:

$$\frac{-2k+2}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow -4k+4=1 \Rightarrow -4k=-3 \Rightarrow k=\frac{3}{4}$$

دقت کنید که به ازای $k = \frac{3}{4}$ معادله (*) دو ریشه حقیقی دارد و هیچکدام از ریشه ها ۱ و ۲- (ریشه مخرج کسرها) نیستند.

۴۵- پاسخ: گزینه ۱

در طرف چپ مخرج مشترک می گیریم و بعد طرفین وسطین می کنیم:

$$\frac{x}{x-3} + \frac{3}{x-1} = 5 \Rightarrow \frac{x(x-1) + 3(x-3)}{(x-3)(x-1)} = 5 \Rightarrow \frac{x^2 - x + 3x - 9}{x^2 - 3x - x + 3} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 9}{x^2 - 4x + 3} = 5 \Rightarrow 5x^2 - 20x + 15 = x^2 + 2x - 9 \Rightarrow 4x^2 - 22x + 24 = 0$$

برای حل این معادله دو تا روش وجود دارد:

❖ راه اول) تجزیه:

$$4x^2 - 22x + 24 = 0 \Rightarrow (2x)^2 - 11(2x) + 24 = 0$$

دو تا عدد پیدا می کنیم که جمع آن ها ۱۱- و ضربشان ۲۴ باشد این اعداد ۳- و ۸- هستند:

$$\Rightarrow (2x-8)(2x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

هیچ کدام از این جواب ها ریشه مخرج کسر معادله اصلی نیستند پس معادله دو جواب مثبت دارد.

❖ راه دوم) روش کلی:

$$4x^2 - 22x + 24 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2 - 11x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4(2)(12)}}{2(2)}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{4} \Rightarrow x = \frac{11 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11+5}{4} = 4 \\ x = \frac{11-5}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

۴۶- پاسخ: گزینه ۳

از هر طرف جبرگانه مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{2x-2x-1}{x(2x+1)} = \frac{x+3-x+1}{(x-1)(x+3)} \Rightarrow \frac{-1}{2x^2+x} = \frac{4}{x^2+2x-3}$$

حالا طرفین وسطین می کنیم:

$$\Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 4x^2 + 4x \Rightarrow 9x^2 + 6x - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{c}{a} = -\frac{-3}{9} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب ها برابر $\frac{2}{3} -$ است.

۴۷- پاسخ: گزینه ۲

ک.م.م. مخرج کسرها برابر است با:

$$\begin{cases} 2x - 2 = 2(x - 1) \\ x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \Rightarrow \text{ک.م.م.} = 2(x - 1)(x + 1) \\ 2x + 2 = 2(x + 1) \end{cases}$$

طرفین معادله را در ک.م.م. مخرج کسرها ضرب می کنیم:

$$2(x - 1)(x + 1) \left(\frac{2x + 3}{2x - 2} - \frac{5x^2}{x^2 - 1} = \frac{2x - 3}{2x + 2} \right) \Rightarrow (x + 1)(2x + 3 - 2(5x^2))$$

$$= (x - 1)(2x - 3) \Rightarrow 2x^2 + 5x + 3 - 10x^2 = 2x^2 - 5x + 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \checkmark \\ x = 1 & \times \text{ (ریشه مخرج است)} \\ x = -1 & \checkmark \text{ (ریشه مخرج است)} \end{cases}$$

پس معادله فقط یک ریشه دارد.

۴۸- پاسخ: گزینه ۴

معادله را به صورت زیر مرتب می کنیم:

$$\frac{x}{a - x} + \frac{a - x}{x} = \frac{a}{x} \Rightarrow \frac{x}{a - x} + \frac{a}{x} - 1 = \frac{a}{x} \Rightarrow \frac{x}{a - x} = 1$$

$x = 2$ یک ریشه معادله است پس در معادله صدق می کند:

$$\frac{2}{a - 2} = 1 \Rightarrow a - 2 = 2 \Rightarrow a = 4$$

به ازای $x = 4$ معادله به صورت زیر نوشته می شود که جواب دیگر ندارد:

$$\frac{x}{4 - x} = 1 \Rightarrow x = 4 - x \Rightarrow x = 2$$



بی خیالی و عاقبت یک روز
روی عشقم قمار خواهی کرد
عشق - بازی به آخرش که رسید
نفرتم را چه کار خواهی کرد

هیبتم را به باد دادی رفت
با غرورم چه کارها کردی
له شدم، گم شدم، خراب شدم
دست آخر مرا رها کردی

حرف دارم ولی به برکت بغض
لال لام سکوت پشت سکوت
مهر بر لب نگاه خیره به مهر
قل اعوذ به ربناى قنوت

حرف دارم ولی... ندارم... نه...
حرف در تو اثر نخواهد کرد
کارد وقتی به استخوان برسد
دکترت را خبر نخواهد کرد

آخرین حرف آخرین تلفن
توی گوشی صدای جیغ تو بود
«قطع کن... نه! تو قطع کن...» باشد
قطع کردم ... و تیغ، تیغ تو بود

روی حرفت حساب وا کردم
فکر کردم به قول پابندی
خرت از پل گذشت، وا دادی
از من و از من زندگیم دل کندي

ربنا اتنا کمی اميد
ربنا اتنا کمی خنده
من به فکر جواب ادعونی استجب...
نه....

جواب: شرمنده

«نوید دانایی هوشیار»