



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

تعریف: هر آزمایشی را که نتیجه‌ی آن قابل پیش‌بینی نباشد ولی نتایج ممکن آن مشخص باشد، آزمایش تصادفی می‌گوئیم.

تعریف: به مجموعه‌ی تمام حالت‌های ممکن در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای می‌گوئیم و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم، به هر عضو از فضای نمونه‌ای یک برآمد می‌گوئیم.

تست) هر یک از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. به طور تصادف متوالی هم یک گوی از جعبه خارج می‌کنیم با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می‌شوند؟

(سراسری ۹۴)

$$0/2 \quad (4)$$

$$0/15 \quad (3)$$

$$0/12 \quad (2)$$

$$0/1 \quad (1)$$

پاسخ: چون مهره‌ها و گوی‌ها متوالیاً خارج می‌شوند داریم:

$$n(S) = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

برای خارج کردن گوی‌ها به صورت یک در میان به صورت زوج و فرد داریم:

$$\underline{3} \quad \underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{2} \quad \underline{1} \quad \underline{1} : 3! \times 3!$$

در خارج کردن گوی‌ها به صورت یک در میان زوج یا فرد دو حالت شروع با زوج یا شروع با فرد اتفاق می‌افتد

$$n(A) = 2 \times 3! \times 3! = 72 \quad \text{برابر است}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10} = 0/1$$

تعریف: احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه‌ای S ، در فضای نمونه‌ای هم شانسی و گسسته برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد حالات ممکن}}$$

تست اعداد ۱، ۲، ...، ۹ بر روی ۹ کارت یکسان نشوته شده است، به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون می‌آوریم با کدام احتمال مجموع اعداد این دو کارت برابر ۱۱ است؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

$$\frac{1}{6} \text{ (۴)} \qquad \frac{1}{12} \text{ (۳)} \qquad \frac{1}{9} \text{ (۲)} \qquad \frac{1}{8} \text{ (۱)}$$

پاسخ: اعدادی که مجموع آنها برابر ۱۱ است را می‌نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{(2,9), (3,8), (4,7), (5,6)\} \\ n(A) = 4 \\ n(S) = \binom{9}{2} = 36 \end{array} \right\} \Rightarrow p(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

تست از ۱۲ کتاب که ۵ عدد آنها در مورد اربیات و ۷ عدد آنها در مورد تاریخ است به طور تصادف ۵ کتاب انتخاب کرده‌ایم احتمال این که ۳ کتاب اربیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده باشند کدام است؟

(خارج ۹۱)

$$\frac{17}{132} \text{ (۴)} \qquad \frac{35}{132} \text{ (۳)} \qquad \frac{17}{166} \text{ (۲)} \qquad \frac{15}{66} \text{ (۱)}$$

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} n(S) = \binom{12}{5} = 792 \\ n(A) = \binom{5}{3} \times \binom{7}{2} = 10 \times 21 = 210 \end{array} \right\} \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{210}{792} = \frac{35}{132}$$

تست سکه ای را پرتاب می‌کنیم اگر رو بیاید تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید سه سکه‌ی دیگر را با هم می‌ریزیم در این آزمایش احتمال این که دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود کدام است؟ (سراسری ۸۹)

$$\frac{11}{16} \text{ (۴)}$$

$$\frac{5}{8} \text{ (۳)}$$

$$\frac{9}{16} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۱)}$$

پاسخ:

$$p(A) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{1}}{2^3} = \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

تست ۳۴) از مجموعه‌ی $\{1.0.1, 1.0.2, 1.0.3, \dots, 6.0.0\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام

احتمال این عدد مضرب ۵ می‌باشد ولی بر ۶ بخش پذیر نیست یا مضرب ۵ نیست ولی بر ۶ بخش پذیر است؟

(سراسری ۸۹)

$$.0/4 \text{ (۴)}$$

$$.0/36 \text{ (۳)}$$

$$.0/32 \text{ (۲)}$$

$$.0/3 \text{ (۱)}$$

پاسخ: اگر A, B مجموعه‌ی مضارب ۵ و ۶ باشند داریم:

$$\begin{aligned} n(C) &= n(A \cap B') + n(B \cap A') = n(A - B) + n(B - A) \\ &= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) \\ &= \left(\binom{6.0.0}{5} - \binom{1.0.0}{5} \right) + \left(\binom{6.0.0}{6} - \binom{1.0.0}{6} \right) - 2 \left(\binom{6.0.0}{3.0} - \binom{1.0.0}{3.0} \right) \\ &= 120 - 20 + 100 - 16 - 2(20 - 3) = 150 \end{aligned}$$

$$p(C) = \frac{150}{500} = \frac{3}{10}$$

تست ۳۵) یک نقطه فقط به طور تصادفی، درون مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $\sqrt{2\pi\sqrt{3}}$ انتخاب می‌شود با

(ریاضی ۹۴)

کدام احتمال فاصله‌ی بین این نقطه تا هر رأس مثلث بیشتر از یک واحد است؟

$$\frac{2}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۱)}$$

مؤلف: عباس اسدی امیرآبادی

پاسخ: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر است با:

$$a_S = S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\text{فضای نمونه‌ای } S = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2\pi\sqrt{3}})^2 = \frac{3 \times 2\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} = a_S$$

سه قطاع وقتی کنار یکدیگر قرار گیرند یک نیم دایره به شعاع یک می‌دهند.

$$\text{نیم دایره } S = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi$$

$$a_{(A)} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$p(A) = \frac{a_{(A)}}{a_{(S)}} = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

نکته: در فضای نمونه‌ای سطحی برای محاسبه‌ی احتمال، مساحت مربوط به پیشامد را به مساحت ناحیه‌ی فضای نمونه‌ای تقسیم می‌کنیم:

$$p(A) = \frac{a_A}{a_S}$$

تست) زمان تصادفی که حیوان خاصی نسبت به داروی خاص عکس العمل نشان دهد بین $1/8$ دقیقه تا

$2/45$ دقیقه است با کدام احتمال عکس العمل این حیوان به این دارو کمتر از $2/19$ دقیقه است؟

(سراسری ۹۱)

۰/۶ (۴)

۰/۴ (۳)

۰/۴۵ (۲)

۰/۵۴ (۱)

پاسخ:

$$\left. \begin{aligned} L_A &= 2/19 - 1/8 = 0/39 \\ L_S &= 2/45 - 1/8 = 0/65 \end{aligned} \right\} \Rightarrow p(A) = \frac{0/39}{0/65} = \frac{3}{5} = 0/6$$


نکته: برای محاسبه‌ی احتمال، در فضای پیوسته‌ی خطی، طول پاره‌خط پیشامد را به طول پاره‌خط فضای نمونه‌ای تقسیم می‌کنیم یعنی:

$$p(A) = \frac{L_A}{L_S}$$

احتمال

تست) اگر A ، B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $p(A \Delta B) = 0.6$ ، $p(A) = 0.2$ ، $p(B) = 0.8$ آن گاه $p(B' \cap A)$ کدام است؟ (خارج ۹۲)

- (۱) ۰/۲ (۲) ۰/۳ (۳) ۰/۴ (۴) ۰/۵


پاسخ: 

$$p(A \Delta B) = p(A) + p(B) - 2p(A \cap B) = 0.6 = 0.2 + 0.8 - 2p(A \cap B) \\ \Rightarrow p(A \cap B) = 0.3$$

$$p(B' \cap A) = p(A \cap B') = p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = 0.2 - 0.3 = 0.5$$

تست) اگر A ، B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $p(A) = 0.6$ ، $p(B) = 0.7$ و $p(A \cap B') = 0.2$ باشند آن گاه $p(A' \cap B)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

- (۱) ۰/۱ (۲) ۰/۳ (۳) ۰/۴ (۴) ۰/۵

پاسخ: 

$$p(A' \cap B) = p(B - A) = p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow 0.2 = 0.6 - p(A \cap B) \\ \Rightarrow p(A \cap B) = 0.4$$

$$p(A' \cap B) = p(B \cap A') = p(B - A) = p(B) - p(A \cap B) = 0.7 - 0.4 = 0.3$$

تست ۴۳) اگر A, B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای باشند، در کدام حالت $p(B - A) = p(B) - p(A)$

(خارج ۹۱)

درست است؟

(۲) همواره

(۱) $A \subseteq B$

(۴) $p(A) < p(B)$

(۳) $A \cap B = \emptyset$

پاسخ:

$$p(B - A) = p(B) - p(A \cap B) = p(B) - p(A) \Rightarrow p(A \cap B) = p(A)$$

$$\Rightarrow (A \cap B) = A \Rightarrow A \subseteq B$$

تست ۴۴) پنج مهره‌ی سفید با شماره‌ی ۱ تا ۵ و همچنین پنج مهره‌ی سیاه با شماره‌ی ۱ تا ۵ یکسان را

در ظرفی قرار می‌دهیم به تصادف دو مهره از بین آنها بیرون می‌آوریم اگر مجموع شماره‌های هر دو مهره ۶

(سراسری ۹۲)

باشد، با کدام احتمال هر دو مهره هم‌رنگ هستند؟

$$\frac{3}{5} \text{ (۴)}$$

$$\frac{5}{9} \text{ (۳)}$$

$$\frac{4}{9} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{5} \text{ (۱)}$$

پاسخ: برای آن که مجموع اعداد رور شده ۶ باشد باید مهره‌هایی با شماره‌های (۵, ۱), (۴, ۲), (۳, ۳)

از ظرف خارج شوند برای (۵, ۱), (۴, ۲) هر کدام چهار حالت داریم (هر دو سفید یا هر دو سیاه یا یکی

سفید و یکی سیاه باشد) و برای (۳, ۳) فقط یک حالت داریم پس در کل ۹ حالت داریم و در ۴ حالت هر دو

سیاه و یا هر دو سفید هستند.

$$p(A|B) = \frac{4}{9}$$

نکته: احتمال شرطی، بررسی اتفاق افتادن پیشامدی مانند B اتفاق افتاده باشد و آن را به صورت

$p(A|B)$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad \text{یا} \quad p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

تست) دو تاس همگن را انداخته‌ایم، اگر حاصل جمع شماره‌های رو شده کمتر از ۶ باشد احتمال آن که

(حداقل) شماره‌ی یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد کدام است؟ (سراسری ۹۱)

- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{2}{5}$
 (۳) $\frac{1}{3}$
 (۴) $\frac{2}{5}$

پاسخ: پیشامد B این است که مجموع شماره‌های رو شده کمتر از ۶ باشد

$$B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,2), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\}$$

پیشامد مجموع اعداد رو شده کمتر از ۶ و حداقل یکبار ۲ ظاهر شده باشد: $A \cap B$

$$p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

تست) اگر A, B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $p(A) = 0.2$, $p(B) = 0.22$

و $p(A|B) = 0.7$ ، آن گاه $p(B'|A')$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

- (۱) ۰/۹۶
 (۲) ۰/۹۰
 (۳) ۰/۹۲
 (۴) ۰/۸۴

پاسخ: 

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Rightarrow \cdot/7 = \frac{p(A \cap B)}{\cdot/2} \Rightarrow p(A \cap B) = \cdot/14$$

$$p(B'|A') = \frac{p(B' \cap A')}{p(A')} = \frac{p(A \cup B)'}{p(A')} = \frac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(A)}$$

$$= \frac{1 - p(A) - p(B) + p(A \cap B)}{1 - p(A)} = \frac{1 - \cdot/2 - \cdot/22 + \cdot/14}{1 - \cdot/2} = \frac{\cdot/72}{\cdot/8} = \cdot/9$$

تست) اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $A \subset B$, $p(A) = \frac{1}{3}$, $p(B) = \frac{2}{4}$

(خارج ۹۰)


آن گاه $p(B|A')$ کدام است؟

$\frac{5}{8}$ (۴)

$\frac{7}{12}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{3}{8}$ (۱)

پاسخ: 

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) = \frac{1}{3}$$

$$p(B|A') = \frac{p(B \cap A')}{p(A')} = \frac{p(B - A)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{4} - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$$

تست) در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبه‌ی اول ۴ عدد و در

جعبه‌ی دوم ۳ عدد لامپ معیوب‌اند از اولی ۸ لامپ و از دومی ۶ لامپ به تصادف برداشته و در جعبه‌ی جدید

(سراسری ۸۹)

قرار می‌دهیم با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه‌ی جدید معیوب است؟

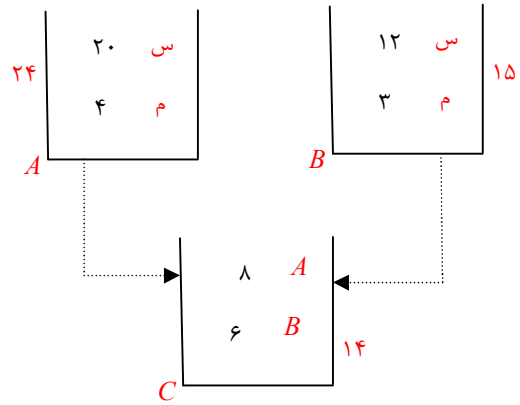
$\frac{8}{35}$ (۴)

$\frac{6}{35}$ (۳)

$\frac{19}{105}$ (۲)

$\frac{17}{105}$ (۱)

$$\frac{8}{14} \times \frac{4}{24} + \frac{6}{14} \times \frac{3}{15} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{19}{105}$$



تست ۳۳) در یک شرکت بسته بندی کالا درصد محصولات تولیدی، با سه دستگاه A ، B ، C به ترتیب ۳۰، ۴۵، ۲۵ می‌باشد می‌دانیم ۱ درصد از محصولات A ، ۲ درصد از محصولات B و ۴ درصد از محصولات C معیوب هستند اگر یک کالا به تصادف از بین این محصولات انتخاب کنیم، احتمال سالم بودن آن کدام است؟ (خارج ۸۹)

- (۱) ۰/۹۷۵ (۲) ۰/۹۷۸ (۳) ۰/۹۸۲ (۴) ۰/۹۸۷

پاسخ: D پیشامد سالم بودن محصول و D' پیشامد معیوب بودن آن است.

$$p(D') = \frac{30}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{2}{100} + \frac{25}{100} \times \frac{4}{100} = \frac{30 + 90 + 100}{10000} = \frac{22}{1000}$$

$$p(D) = 1 - p(D') = 1 - \frac{22}{1000} = \frac{978}{1000}$$

تست ۳۴) در ظرفی ۴ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۱ مهره سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهره سفید و ۲ مهره سبز قرار دارد به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره متفاوت است؟ (خارج ۸۹)

- (۱) $\frac{19}{40}$ (۲) $\frac{21}{40}$ (۳) $\frac{23}{40}$ (۴) $\frac{27}{40}$

مؤلف: عباس اسدی امیرآبادی

پاسخ: اگر A پیشامد هم‌رنگ نبودن مهره باشد در این صورت A' پیشامد هم‌رنگ بودن ۲ مهره است.

$$p(A') = \frac{4}{10} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{10} \times \frac{2}{8} = \frac{24+2}{80} = \frac{26}{80} = \frac{13}{40}$$

از هر دو طرف مهره‌ی سفید خارج شود از هر دو طرف مهره‌ی سبز خارج شود

$$p(A) = 1 - \frac{13}{40} = \frac{27}{40}$$

تست) تابع احتمال به صورت $p(X=x) = \frac{\binom{5}{x}}{A}$ ، $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ تعریف شده است با

محاسبه‌ی عدد A ، مقدار $p(X=2 \text{ یا } 3)$ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

$$\frac{5}{8} \text{ (۴)} \qquad \frac{9}{16} \text{ (۳)} \qquad \frac{7}{16} \text{ (۲)} \qquad \frac{3}{8} \text{ (۱)}$$

پاسخ:

$$\sum_{x=0}^5 p(X=x) = 1 \Rightarrow p(X=0) + p(X=1) + \dots + p(X=5) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}}{A} = 1 \Rightarrow A = 2^5 = 32$$

$$p(X=2 \text{ یا } 3) = \frac{\binom{5}{2}}{32} + \frac{\binom{5}{3}}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

نکته: متغیر تصادفی گسسته‌ی X ، تابعی است که به هر یک از مقادیر تصادفی (x_1, x_2, \dots) ،

یک عدد احتمال را در بازه‌ی $[0, 1]$ نسبت می‌دهد. به طوری که مجموع اعداد احتمال برابر ۱ است

تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X را به صورت $p(X=x_i) = p_i$ نمایش می‌دهیم.

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

تست) در یک آزمایش دو حالت احتمال موفقیت p است، اگر متغیر تصادفی X تعداد آزمایش‌هایی باشد

که برای اولین بار موفقیت حاصل می‌شود تابع احتمال آن کدام است؟ (سراسری ۹۰)

$$p(1-p)^x \quad (۲) \qquad C_n^x p(1-p)^{x-1} \quad (۱)$$

$$p(1-p)^{x-1} \quad (۴) \qquad (1-p)p^x \quad (۳)$$

پاسخ: وقتی آزمایش X ام موفقیت حاصل می‌شود یعنی در $X = 1$ آزمایش اول شکست و آزمایش X ام

موفقیت آمیز بوده است.

$$p(X = x) = (1-p)(1-p) \dots (1-p)p = (1-p)^{x-1}p$$