فصل ۱۰

هندسه‌ی مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم (مقاطع مخروطی)

در این فصل می خوانیم:

بخش اول: هندسه‌ی مختصاتی

- ۱. دستگاه محورهای مختصاتی دکارتی
- ۲. طول پاره‌خط
- ۳. مختصات وسط یک پاره‌خط
- ٤. رابطه‌ی بین رئوس متوازی‌الاضلاع
- ۵. مساحت مثلث با داشتن سه رأس آن
- ۶. شیب خط
- ۷. معادله‌ی خط
- ۸. فاصله‌ی نقطه از خط
- ۹. شرط آن‌که سه نقطه بر یک استقامت باشند.
- ۱۰. اوضاع نسبی دو خط

بخش دوم: منحنی‌های درجه‌ی دوم

- ۱. دایره
- ۲. بیضی
- ۳. سؤالات چهارگزینه ای
- ٤ . پاسخ سؤالات چهارگزینه ای

ریاضیات جامع تجربی

مؤلف: دکتر رضاپور

email: Rezapour۶۲@yahoo.com

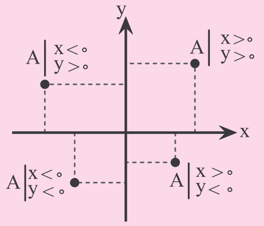
بودجه‌بندی در کنکور سراسری

	۸٤	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹٤	۹۵
هندسه‌ی مختصاتی	۱	–	–	–	–	۱	۱	–	۱	–	–	–
مقاطع مخروطی	۲	۲	۳	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲

بخش ۱ هندسه‌ی مختصاتی

دستگاه محورهای مختصات دکارتی

نقطه‌ی $A(x,y)$ را در نظر بگیرید. در این صورت وضعیت نقطه‌ی A در چهار ناحیه‌ی دستگاه مختصات به صورت زیر می‌باشد.



تست **به ازای چه مقادیری از m نقطه‌ی $A(m^۲-۴, ۳m-۲)$ در ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات قرار دارد؟**

۱) $\frac{۳}{۲}<m<۲$ ۲) $\frac{۲}{۳}<m<۲$ ۳) $۱<m<\frac{۳}{۲}$ ۴) $۰<m<۲$

حل: می‌دانیم در ناحیه‌ی دوم $x<۰$ و $y>۰$ می‌باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} x<۰ \\ y>۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^۲-۴<۰ \Rightarrow m^۲<۴ \xrightarrow{\text{جذر}} |m|<۲ \Rightarrow -۲<m<۲ \\ ۳m-۲>۰ \Rightarrow m>\frac{۲}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \frac{۲}{۳}<m<۲$$

طول پاره‌خط

طول پاره‌خط AB، فاصله‌ی دو نقطه به مختصات $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ است که از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

◀ فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x,y)$ از مبدأ مختصات از رابطه‌ی $OA=\sqrt{x_A^۲+y_A^۲}$ به‌دست می‌آید.

◀ اگر A و B هم عرض باشند، $AB=|x_۲-x_۱|$ و اگر A و B هم طول باشند، $AB=|y_۲-y_۱|$ است.

تست **اگر $A(۴,۴)$ و $C(۱,۱)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند، مساحت مربع کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۸

حل: با داشتن دو رأس مقابل می‌توانیم طول قطر مربع را به‌دست آوریم.

$$\text{قطر مربع}=AC=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۴-۱)^۲}=\sqrt{۳^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۸}$$

$$\text{مساحت مربع}: S=\frac{\text{قطر}\times\text{قطر}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۸}\times\sqrt{۱۸}}{۲}=\frac{۱۸}{۲}=۹$$

تست **طول نقطه‌ی M واقع بر محور طول‌ها که از دو نقطه‌ی $A(-۲,۳)$ و $B(۴,-۱)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟**

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

حل: چون نقطه‌ی M روی محور طول‌ها قرار دارد پس y آن برابر صفر است لذا نقطه‌ی M به صورت $(x,۰)$ خواهد بود. از طرفی چون فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x,۰)$ از دو نقطه‌ی A و B برابر می‌باشد، بنابراین داریم:

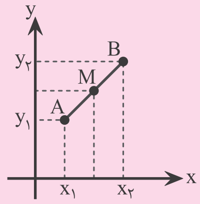
$$AM=\sqrt{(x+۲)^۲+۳^۲}=\sqrt{x^۲+۴x+۴+۹}=\sqrt{x^۲+۴x+۱۳}$$

$$BM=\sqrt{(x-۴)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{x^۲-۸x+۱۶+۱}=\sqrt{x^۲-۸x+۱۷}$$

$$AM=BM \Rightarrow \sqrt{x^۲+۴x+۱۳}=\sqrt{x^۲-۸x+۱۷} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} x^۲+۴x+۱۳=x^۲-۸x+۱۷ \Rightarrow ۱۲x=۴ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

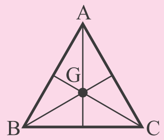
مختصات وسط یک پاره‌خط

وسط پاره‌خط دو نقطه‌ی A و B که نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ دو سر آن باشند، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.



$$x_M=\frac{x_۱+x_۲}{۲}$$
$$y_M=\frac{y_۱+y_۲}{۲}$$

◀ اگر $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مختصات مرکز ثقل مثلث از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

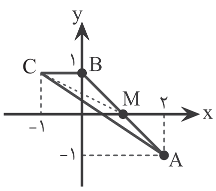


$$G=\frac{A+B+C}{۳}\Rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{۳}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{۳}\end{cases}$$

تست نقاط $A(۲,-۱)$ و $B(۰,۱)$ و $C(-۱,۱)$ سه رأس یک مثلث هستند، طول میانه‌ی CM چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

حل: میانه، خطی است که از یک رأس به وسط ضلع مقابل آن رسم می‌شود. پس برای محاسبه‌ی طول میانه CM، ابتدا وسط پاره‌خط AB را به‌دست می‌آوریم.



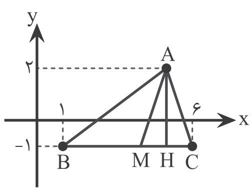
$$AB\text{ وسط } M\Rightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{۲+۰}{۲}=۱\\ y_M=\dfrac{-۱+۱}{۲}=۰\end{cases}\Rightarrow M(۱,۰)$$

$$\text{میانه } CM=\sqrt{(۱+۱)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۵}$$

تست نقاط $A(۴,۲)$ و $B(۱,-۱)$ و $C(۶,-۱)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند، طول MH کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

حل:

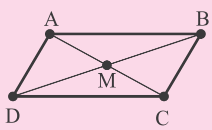


$$\text{پای ارتفاع } H=(۴,-۱)\quad\text{و}\quad BC\text{ وسط}: M=(\frac{۷}{۲},-۱)$$

$$MH=\sqrt{(۴-\frac{۷}{۲})^۲+(-۱+۱)^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

رابطه‌ی بین رئوس متوازی‌الاضلاع

در متوازی‌الاضلاع، قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند. و محل برخورد آن‌ها، مرکز تقارن متوازی‌الاضلاع می‌باشد.



$$AC\text{ وسط } M: x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}\ ,\ y_M=\frac{y_A+y_C}{۲}$$
$$BD\text{ وسط } M: x_M=\frac{x_B+x_D}{۲}\ ,\ y_M=\frac{y_B+y_D}{۲}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$$

این بدین معنی است که، در هر متوازی‌الاضلاع مجموع مختصات رئوس روبه‌روی هم، برابرند.

تست اگر $A(-۱,۷)$ و $B(۲,-۳)$ و $C(۶,۰)$ سه رأس یک متوازی‌الاضلاع باشند و AC قطر آن باشد. مختصات رأس چهارم کدام است؟

۱) $(۲,۱۰)$ ۲) $(۳,۱۰)$ ۳) $(۲,۹)$ ۴) $(۶,۰)$

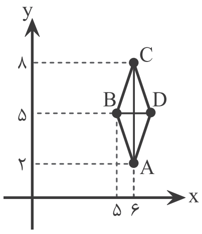
حل: چون AC قطر می‌باشد پس رأس A و رأس C روبه‌روی یک‌دیگر هستند، بنابراین:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow -۱+۶ = ۲ + x_D \Rightarrow x_D = ۳$$
$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow ۷+۰ = -۳ + y_D \Rightarrow y_D = ۱۰$$
$$\Rightarrow D(۳,۱۰)$$

تست نقاط $A(۶,۲)$ و $B(۵,۵)$ و $C(۶,۸)$ سه رأس یک لوزی هستند، مساحت لوزی چه‌قدر است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

حل: بهتر است شکل لوزی را رسم کنیم تا ببینیم کدام نقاط روبه‌روی یک‌دیگر قرار می‌گیرند.



$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow ۶+۶ = ۵ + x_D \Rightarrow x_D = ۷$$
$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow ۲+۸ = ۵ + y_D \Rightarrow y_D = ۵$$
$$\Rightarrow D(۷,۵)$$

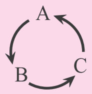
$$AC_{\text{قطر}} = |y_C - y_A| = |۸-۲| = ۶\ ,\ BD_{\text{قطر}} = |x_D - x_B| = |۷-۵| = ۲$$

$$\text{مساحت لوزی} : S = \frac{\text{حاصلضرب دو قطر}}{۲} = \frac{۶\times۲}{۲} = ۶$$

مساحت مثلث با داشتن سه رأس آن

اگر نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ سه رأس مثلث ABC باشند، در این صورت مساحت مثلث ABC از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$S = \frac{۱}{۲}|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$



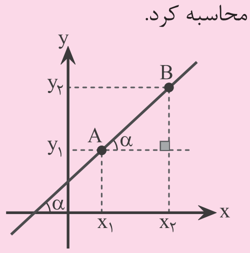
تست اگر $A(۲,۱)$، $B(۳,-۱)$ و $C(۳,۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث برابر است با:

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

حل:
$$S = \frac{۱}{۲}|(۲)(-۱-۲)+(۳)(۲-۱)+(۳)(۱-(-۱))| = \frac{۱}{۲}|-۶+۳+۶| = \frac{۳}{۲}$$

شیب خط

شیب خط، تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد. که با استفاده از سه روش می‌توان شیب خط را محاسبه کرد.

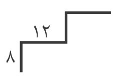


فرم استاندارد خط : $ax + by + c = ۰ \Rightarrow m = -\frac{a}{b}$

با استفاده از مثلث : $m = \tan\alpha$

با استفاده از دو نقطه : $m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$

تست شیب پلکان در شکل مقابل کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

حل: تعداد پله‌ها $= ۲ \Rightarrow$ افزایش ارتفاع $= ۲\times۸ = ۱۶$ و افزایش طول $= ۲\times۱۲ = ۲۴$

$$\text{شیب پلکان} = \frac{\text{افزایش ارتفاع}}{\text{افزایش طول}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۲۴}{۱۶} = \frac{۳}{۲}$$

معادله‌ی خط

برای نوشتن معادله‌ی خط به یک نقطه و یک شیب نیاز داریم که دو حالت خواهیم داشت.

① **شیب و یک نقطه از خط معلوم باشد:** اگر m شیب و نقطه‌ی $(x_۰ , y_۰)$ مختصات یک نقطه‌ی دلخواه از خط باشد، در این صورت معادله‌ی خط به صورت $\mathbf{y - y_۰ = m(x - x_۰)}$ زیر می‌باشد.

② **دو نقطه از خط معلوم باشد:** برای نوشتن معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(x_۱ , y_۱)$ و $B(x_۲ , y_۲)$ می‌گذرد، ابتدا شیب خط را با استفاده از رابطه‌ی $m = \dfrac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$ محاسبه می‌کنیم و سپس با داشتن شیب خط و یکی از آن دو نقطه، معادله خط را مانند حالت اول می‌نویسیم.

تست عرض از مبدأ خطی که از نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ می‌گذرد و با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی ۱۳۵° می‌سازد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

حل: ابتدا شیب خط را محاسبه کرده و سپس معادله‌ی خط را می‌نویسیم و با صفر قرار دادن x، عرض از مبدأ خط به‌دست می‌آید.

شیب خط : $m = \tan\alpha = \tan ۱۳۵^\circ = \tan(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱$

معادله‌ی خط : $y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - (-۲) = (-۱)(x - ۱) \Rightarrow y + ۲ = -x + ۱ \xrightarrow[x=۰]{\text{عرض از مبدأ، یعنی}} y + ۲ = ۰ + ۱ \Rightarrow y = -۱$

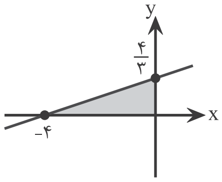
تست خطی که از نقاط $A(-۱,۱)$ و $B(۲,۲)$ می‌گذرد، با محورهای مختصات چه مساحتی می‌سازد؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

حل: ابتدا معادله‌ی خط را می‌نویسیم که برای این‌کار لازم است شیب خط را به‌دست آوریم.

$$m_{AB} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۲ - ۱}{۲ - (-۱)} = \frac{۱}{۳} : y - y_۰ = m(x - x_۰) \xrightarrow{A(-۱,۱)} y - ۱ = \frac{۱}{۳}(x - (-۱)) \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۴}{۳}$$

x	۰	۴-
y	$\frac{۴}{۳}$	۰



$$\Rightarrow S = \frac{(\frac{۴}{۳})(۴)}{۲} = \frac{۸}{۳}$$

تست معادله‌ی میانه‌ی AM در مثلثی که مختصات سه رأس آن $A(۱,۰)$ ، $B(۲,۰)$ و $C(۲,۲)$ باشد، کدام است؟

۱) $y = -x + ۱$ ۲) $y = -x$ ۳) $y = x + ۲$ ۴) $y = x - ۱$

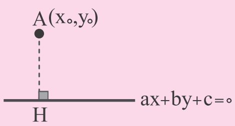
حل: برای نوشتن معادله‌ی میانه‌ی AM باید مختصات A و M را داشته باشیم که M وسط BC می‌باشد.

$$A(۱,۰) \ , \ M = \frac{B + C}{۲} = (\frac{۲ + ۲}{۲}, \frac{۰ + ۲}{۲}) \Rightarrow M = (۲,۱)$$

$$m_{AM} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۱ - ۰}{۲ - ۱} = ۱ \Rightarrow \text{AM معادله‌ی میانه‌ی} : y - ۰ = (۱)(x - ۱) \Rightarrow y = x - ۱$$

فاصله‌ی نقطه از خط

فاصله‌ی نقطه از خط، طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که نقطه را به خط وصل می‌کند و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.



$$\mathbf{AH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}}$$

تست اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1,2)$ از خط $3x+my=1$ برابر ۲ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -4　۲) ۴　۳) ۱　۴) -1

حل: حتماً باید معادله‌ی خط استاندارد باشد یعنی $3x+my-1=0$، بنابراین:

$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow 2=\frac{|3(1)+m(2)-1|}{\sqrt{(3)^2+(m)^2}}\Rightarrow 2=\frac{|2+2m|}{\sqrt{9+m^2}}\Rightarrow 2\sqrt{9+m^2}=|2+2m|\Rightarrow 2\sqrt{9+m^2}=2|1+m|$$

$$\Rightarrow\sqrt{9+m^2}=|1+m|\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}(9+m^2)=1+2m+m^2\Rightarrow 2m=8\Rightarrow m=4$$

تست فاصله‌ی نقطه‌ای واقع بر نیمساز ناحیه‌ی دوم از خط به معادله‌ی $3y-2x+4=0$ برابر $3\sqrt{13}$ واحد است. عرض آن نقطه کدام است؟

۱) ۶　۲) ۵　۳) ۸　۴) ۷

حل: می‌دانیم معادله‌ی خط نیمساز ناحیه‌ی دوم به صورت $y=-x$ می‌باشد یعنی اگر $x=\alpha$ باشد آن‌گاه $y=-\alpha$ خواهد بود پس نقطه‌ی A به صورت $(\alpha,-\alpha)$ خواهد بود، حال کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی A را از خط موردنظر به‌دست آوریم.

$$-2x+3y+4=0\Rightarrow AH=\frac{|-2(\alpha)+3(-\alpha)+4|}{\sqrt{(-2)^2+(3)^2}}\Rightarrow 3\sqrt{13}=\frac{|4-5\alpha|}{\sqrt{13}}\Rightarrow 3\times 13=|4-5\alpha|$$

$$\Rightarrow|4-5\alpha|=39\Rightarrow 4-5\alpha=\pm 39\Rightarrow\begin{cases}4-5\alpha=39\Rightarrow 5\alpha=-35\Rightarrow\alpha=-7\\ 4-5\alpha=-39\Rightarrow 5\alpha=43\Rightarrow\alpha=\frac{43}{5}\end{cases}\Rightarrow A(\alpha,-\alpha)\xrightarrow{\alpha=-7}A(-7,7)$$

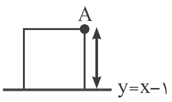
چون در ناحیه‌ی دوم طول منفی می‌باشد پس $\alpha=\frac{43}{5}$ قابل قبول نمی‌باشد، بنابراین گزینه‌ی «۴» صحیح است.

تست مساحت مربعی که یک ضلع آن بر خطی به معادله‌ی $y=x-1$ واقع و مختصات یک رأس آن $(2,3)$ باشد، کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$　۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　۳) ۲　۴) ۴

حل: چون مختصات نقطه‌ی $A(2,3)$ در معادله‌ی خط صدق نمی‌کند پس نقطه‌ی A روی خط قرار ندارد، پس شکل می‌تواند به صورت زیر باشد، که کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی A را از خط به‌دست آوریم که طول ضلع محاسبه خواهد شد.

$$y=x-1\Rightarrow x-y-1=0$$



$$\text{ضلع مربع}\ a=AH=\frac{|(1)(2)+(-1)(3)-1|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

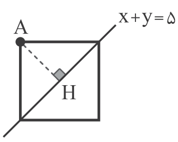
$$S=a^2=(\frac{2}{\sqrt{2}})^2=\frac{4}{2}=2$$

تست معادله‌ی یکی از قطرهای مربع برابر $x+y=5$ می‌باشد. اگر مختصات یکی از رئوس مربع $(-2,1)$ باشد، مساحت مربع کدام است؟

۱) ۱۸　۲) ۳۶　۳) ۷۲　۴) ۹

حل: چون نقطه $A(-2,1)$ در معادله‌ی خط صدق نمی‌کند پس شکل می‌تواند به صورت زیر باشد.

$$x+y=5\Rightarrow x+y-5=0$$



$$\text{نصف قطر}=AH=\frac{|(1)(-2)+(1)(1)-5|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}=\frac{|-6|}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$\text{قطر مربع}=2AH=2\times\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{12}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{12\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت مربع}=\frac{\text{قطر}\times\text{قطر}}{2}=\frac{(6\sqrt{2})(6\sqrt{2})}{2}=\frac{36\times 2}{2}=36$$

تست نقطه‌ی $A(۱,۲)$ رأس مستطیلی است که معادله‌ی دو ضلع آن $۲x-y+۱۵=۰$ و $x+۲y+۵=۰$ می‌باشد، مساحت این مستطیل کدام است؟

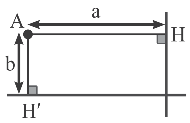
۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۵۰

حل: چون مختصات نقطه‌ی A در معادلات دو ضلع داده شده صدق نمی‌کند، بنابراین وضعیت نقطه‌ی A و دو ضلعی که معادلات آن داده شده به صورت مقابل است.

$$۲x-y+۱۵=۰ \Rightarrow a=AH=\frac{|۲(۱)-(۱)(۲)-۱۵|}{\sqrt{(۲)^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۵}}$$

$$x+۲y+۵=۰ \Rightarrow b=AH'=\frac{|(۱)(۱)+۲(۲)+۵|}{\sqrt{(۱)^۲+(۲)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}$$

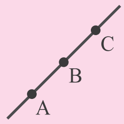
$$S=ab=\frac{۱۵}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=\frac{۱۵۰}{۵}=۳۰$$



شرط آن‌که سه نقطه بر یک استقامت باشند

اگر بخواهیم سه نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$، $B(x_۲,y_۲)$ و $C(x_۳,y_۳)$ بر یک استقامت باشند یعنی بر روی یک خط راست واقع باشند، باید شیب جزء با شیب کل برابر باشد.

$$\mathbf{m_{AB}=m_{AC}}$$



تست نقاط $A(۱,۲)$ ، $B(۲,۱)$ و $C(m,۰)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار m، این سه نقطه روی یک خط راست قرار دارند؟

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) -۱

حل:

$$m_{AB}=\frac{۱-۲}{۲-۱}=\frac{-۱}{۱}=-۱$$

$$m_{AC}=\frac{۰-۲}{m-۱}=\frac{-۲}{m-۱}$$

$$\xrightarrow{m_{AB}=m_{AC}} -۱=\frac{-۲}{m-۱}\Rightarrow -m+۱=-۲\Rightarrow m=۳$$

تست اگر سه نقطه‌ی متمایز $A(۱,۱)$، $B(-۱,-۱)$ و $C(m,m^۲+۲m)$ روی یک خط راست باشند، آن‌گاه:

۱) $m=۰$ ۲) $m=۰,-۱$ ۳) $m=-۱$ ۴) $m=۱$

حل:

$$m_{AB}=\frac{-۱-۱}{-۱-۱}=۱\ ,\ m_{AC}=\frac{m^۲+۲m-۱}{m-۱}\xrightarrow{m_{AB}=m_{AC}}۱=\frac{m^۲+۲m-۱}{m-۱}\Rightarrow m-۱=m^۲+۲m-۱$$

$$\Rightarrow m^۲+m=۰\Rightarrow m(m+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۰ & \text{قق}\\ m=-۱ & \text{غقق}\end{cases}$$

چون اگر $m=-۱$ باشد در این صورت مختصات نقطه‌ی C به صورت $(-۱,-۱)$ می‌شود که با مختصات نقطه B یکسان است و متمایز نخواهند بود.

اوضاع نسبی دو خط

دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ در صفحه نسبت به هم سه وضعیت دارند.

۱) **دو خط متقاطع:** اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ باشد. دو خط متقاطع‌اند که با حل دستگاه دو معادله دو مجهول نقطه تقاطع به‌دست می‌آید.

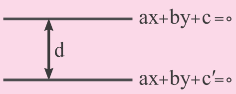
۲) **دو خط موازی:** اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد. دو خط موازی‌اند، به عبارتی شیب دو خط با هم برابر باشند.

۳) **دو خط منطبق:** اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد. دو خط بر هم منطبق‌اند.

◀ دو خط بر هم وقتی عمودند که $m.m'=-۱$ باشد بنابراین $aa'+bb'=۰$

◀ فاصله‌ی بین دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطه‌ی روبه‌رو به‌دست می‌آید.

$$D=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$



تست **به ازای چه مقدار m دو خط $(1+3m)y = 5 - 3mx$ و $(m+1)x + my = 3$ موازی‌اند؟**

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) -1 ۴) 1

حل: باید شیب دو خط با هم برابر باشند.

$$(m+1)x + my - 3 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{m+1}{m}$$

$$3mx + (1+3m)y - 5 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{a'}{b'} = -\frac{3m}{1+3m}$$

$$\xrightarrow{m_1=m_2} -\frac{m+1}{m} = -\frac{3m}{1+3m} \Rightarrow \frac{m+1}{m} = \frac{3m}{1+3m}$$

$$\Rightarrow 3m^2 = m + 3m^2 + 1 + 3m \Rightarrow 4m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

تست **به ازای چه مقادیری از k دو خط $2x + 5ky - 4 = 0$ و $kx + (2k^2+2)y - (3k+2) = 0$ بر هم منطبق‌اند؟**

۱) $k = 2$ ۲) $k = -2$ ۳) $k = \pm 2$ ۴) به ازای هیچ مقادیری از k

حل:

$$2x + 5ky - 4 = 0$$

$$kx + (2k^2+2)y - (3k+2) = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}} \frac{2}{k} = \frac{5k}{2k^2+2} = \frac{-4}{-(3k+2)} \Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{5k}{2k^2+2} = \frac{4}{3k+2}$$

$$\frac{2}{k} = \frac{5k}{2k^2+2} \Rightarrow 4k^2 + 4 = 5k^2 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2 \begin{cases} k = 2 : \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \\ k = -2 : \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{b}{b'} \end{cases}$$

بنابراین به ازای هیچ k ، دو خط بر هم منطبق نمی‌شوند.

تست **اگر خطوط $y = (2k+1)x + 1$ و $(k+1)y = x + 2$ قطرهای یک لوزی باشند، k کدام است؟**

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

حل: همواره می‌دانیم در هر لوزی، قطرها بر هم عمودند یعنی باید حاصل‌ضرب شیب خط‌ها برابر -1 باشد، بنابراین:

$$(2k+1)x - y + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{2k+1}{-1}$$

$$x - (k+1)y + 2 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{-(k+1)}$$

$$\xrightarrow{m.m'=-1} (2k+1)\left(\frac{1}{k+1}\right) = -1 \Rightarrow \frac{2k+1}{k+1} = -1 \Rightarrow 2k+1 = -k-1$$

$$\Rightarrow 3k = -2 \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

تست **محل برخورد دو خط به معادله‌های $y = x + 2$ و $my = x + n$ روی محور ox قرار دارد n کدام است؟ $(m \neq 1)$**

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

حل: چون دو خط یک‌دیگر را روی محور xها قطع می‌کنند پس $y = 0$ می‌باشد، بنابراین:

$$y = x + 2 \xrightarrow{y=0} 0 = x + 2 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, 0)$$ مختصات نقطه‌ی تلاقی

مختصات نقطه تلاقی در هر دو خط صدق می‌کند لذا کافی است مختصات نقطه‌ی A را در خط دوم نیز قرار دهیم.

$$my = x + n \xrightarrow{A(-2,0)} 0 = -2 + n \Rightarrow n = 2$$

تست **معادلات دو ضلع مربعی به صورت $-2x + 4y + 6 = 0$ و $x - 2y + 1 = 0$ می‌باشد، مساحت مربع کدام است؟**

۱) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{16}{5}$ ۴) $\frac{16}{25}$

حل: اگر کمی دقت کنید، مشاهده می‌کنید که دو خط با هم موازی‌اند، بنابراین کافی است فاصله‌ی بین دو خط موازی که همان طول ضلع می‌باشد را به‌دست آوریم.

$$-2x + 4y + 6 = 0 \xrightarrow{\div(-2)} x - 2y - 3 = 0$$

$$x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow x - 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{|-3-1|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

تست معادله‌ی خطی که از وسط پاره‌خط AB که در آن $A(۲,۲)$ و $B(۴,-۴)$ می‌باشد گذشته و بر خط $۲y-x-۱=۰$ عمود باشد، کدام است؟

۱) $y+۲x+۵=۰$ ۲) $y+۲x-۵=۰$ ۳) $y-۲x-۱=۰$ ۴) $y-۲x+۱=۰$

حل: ابتدا مختصات وسط پاره‌خط AB را به‌دست می‌آوریم.

$$M=\frac{A+B}{۲}=(\frac{۲+۴}{۲},\frac{۲-۴}{۲})=(۳,-۱)$$

چون خط موردنظر بر خط $۲y-x-۱=۰$ عمود می‌باشد پس شیب آن خط عکس و قرینه‌ی این خط خواهد بود، یعنی:

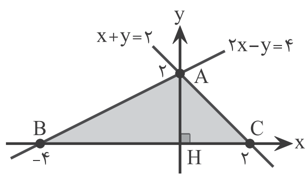
$$۲y-x-۱=۰\Rightarrow m=-\frac{-۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{شرط عمود بودن}}m.m'=-۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times m'=-۱\Rightarrow m'=-۲$$

معادله‌ی خط $y-y_۰=m'(x-x_۰)\Rightarrow y-(-۱)=(-۲)(x-۳)\Rightarrow y+۱=-۲x+۶\Rightarrow y+۲x-۵=۰$

تست مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوط به معادله‌ی $y+x=۲$ و $۲y-x=۴$ است و ضلع دیگر آن بر محور ox قرار دارد، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

حل: ابتدا مثلث را رسم می‌کنیم (با نقطه‌یابی)



ارتفاع : $AH=۲$ و قاعده : $BC=۶$

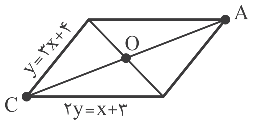
$$S=\frac{\text{ارتفاع}\times\text{قاعده}}{۲}=\frac{۶\times۲}{۲}=۶$$

تست یک رأس از متوازی‌الاضلاعی نقطه‌ی $A(۷,۹)$ و معادله‌ی دو ضلع آن $۲y=x+۳$ و $y=۳x+۴$ است. مختصات محل تلاقی دو قطر آن کدام است؟

۱) $(۲,۴)$ ۲) $(۳,۲)$ ۳) $(۳,۴)$ ۴) $(۳,۵)$

حل: چون نقطه‌ی $A(۷,۹)$ در معادله‌ی دو ضلع متوازی‌الاضلاع صدق نمی‌کند پس شکل متوازی‌الاضلاع می‌تواند به صورت زیر باشد. که با قطع دادن دو خط، مختصات نقطه‌ی C به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}۲y=x+۳\\y=۳x+۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲y=x+۳\\-۲y=-۶x-۸\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}۰=-۵x-۵\Rightarrow x=-۱\Rightarrow y=۱\Rightarrow C(-۱,۱)$$



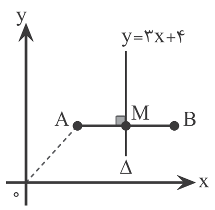
اکنون با داشتن دو رأس مقابل متوازی‌الاضلاع می‌توانیم وسط قطر AC که همان محل تلاقی دو قطر می‌باشد را به‌دست آوریم.

$$\text{وسط } AC: O=\frac{A+C}{۲}=(\frac{۷-۱}{۲},\frac{۹+۱}{۲})=(۳,۵)$$

تست معادله‌ی عمود منصف پاره‌خط AB، $A(-a,b)$ و $B(b,۰)$ به صورت $y=۳x+۴$ است. فاصله‌ی مبدأ مختصات از A کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۲}$

حل: عمود منصف دارای دو ویژگی می‌باشد. **اولاً:** خط روبه‌رو را نصف می‌کند، **ثانیاً:** بر خط روبه‌رو عمود می‌باشد. با توجه به شکل زیر داریم:



$$M=\frac{A+B}{۲}=(\frac{b-a}{۲},\frac{b}{۲})\longrightarrow\frac{b}{۲}=۳(\frac{b-a}{۲})+۴\xrightarrow{\times۲}b=۳b-۳a+۸\Rightarrow۲b-۳a=-۸\qquad(۱)$$

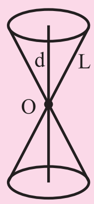
$$M_{AB}=\frac{۰-b}{b+a}=-\frac{b}{b+a}\xrightarrow{\text{چون}}AB\perp\Delta\Rightarrow m.m'=-۱\qquad(y=۳x+۴\Rightarrow m'=۳)$$

$$\Rightarrow-\frac{b}{b+a}\times۳=-۱\Rightarrow\frac{۳b}{b+a}=۱\Rightarrow۳b=b+a\Rightarrow a=۲b\xrightarrow{(۱)}۲b-۳(۲b)=-۸$$

$$\Rightarrow-۴b=-۸\Rightarrow b=۲\,,\,a=۴\Rightarrow A(-۴,۲)\Rightarrow OA=\sqrt{x_A^۲+y_A^۲}=\sqrt{(-۴)^۲+(۲)^۲}\Rightarrow OA=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

بخش ۲ منحنی‌های درجه دوم

رویه و مقاطع مخروطی



رویه مخروطی: فرض کنید خطوط L و d در O متقاطع باشند، با چرخش L حول d، دو مخروط که در O هم‌رأس می‌شوند پدید می‌آید، که به آن‌ها رویه مخروطی گویند. به L مولد مخروط و به d محور اصلی گویند.

مقاطع مخروطی: هرگاه صفحه‌ای را با یک رویه مخروطی تقاطع دهیم، بسته به نوع تلاقی فصل مشترک‌هایی پدید می‌آید که به آن مقطع مخروطی گویند.

۱) اگر صفحه عمود بر محور رویه باشد و از رأس نگذرد، مقطع مخروطی دایره می‌باشد.
۲) اگر صفحه عمود بر محور رویه باشد و از رأس بگذرد، مقطع مخروطی نقطه می‌باشد.
۳) اگر صفحه یکی از دو رویه را به‌طور مورب قطع کند، مقطع مخروطی بیضی می‌باشد.
۴) اگر صفحه یکی از دو رویه را به همراه قاعده آن قطع کند، مقطع مخروطی سهمی می‌باشد.
۵) اگر صفحه هر دو رویه را همراه با هر دو قاعده آن‌ها قطع کند، مقطع مخروطی هذلولی می‌باشد.
۶) اگر صفحه بر هر دو رویه مماس باشد، فصل مشترک یک خط می‌باشد.
۷) اگر صفحه از محور اصلی دو رویه بگذرد، فصل مشترک دو خط متقاطع می‌باشد.

تست اگر صفحه با مولد رویه مخروطی موازی باشد، سطح مقطع به‌دست آمده کدام می‌تواند باشد؟

۱) یک خط　　۲) سهمی　　۳) دایره　　۴) گزینه ۱ و ۲

حل: با توجه به مطابق درسنامه‌ی فوق، سطح مقطع به‌دست آمده یک خط و یا سهمی است. بنابراین گزینه «۴» صحیح است.

تست اگر زاویه مولد با محور رویه مخروطی برابر زاویه صفحه با محور رویه مخروطی باشد، سطح مقطع کدام است؟

۱) دایره　　۲) بیضی　　۳) هذلولی　　۴) سهمی

حل: چون زاویه مولد با محور رویه با زاویه صفحه با محور رویه یکسان است یعنی صفحه با مولد موازی است، بنابراین سطح مقطع سهمی است.

تشخیص نوع مقطع مخروطی

معادله‌ی $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ معادله‌ی مقطع مخروطی است. اگر $b=0$ باشد، مقطع مخروطی استاندارد است. در این صورت کافی است مختصات مرکز مقطع مخروطی را به‌دست آوریم که برای این کار کافی است یک بار نسبت به x مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم و بار دیگر نسبت به y مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم.

$$\left.\begin{array}{l} f'_x=0 \Rightarrow 2ax+d=0 \Rightarrow x=-\dfrac{d}{2a} \\ f'_y=0 \Rightarrow 2cy+e=0 \Rightarrow y=-\dfrac{e}{2c} \end{array}\right\} \Rightarrow O\left|\begin{array}{l} -\dfrac{d}{2a}=\alpha \\ -\dfrac{e}{2c}=\beta \end{array}\right. \Rightarrow O(\alpha,\beta)$$

۱) **اگر $a=c$ باشد**، مقطع مخروطی دایره، نقطه و یا تهی است. با شرط آن‌که ضریب x^2 مثبت باشد، کافی است $f(\alpha,\beta)$ را تشکیل دهیم.

الف. اگر $f(\alpha,\beta)<0$ باشد، مقطع دایره است. **ب.** اگر $f(\alpha,\beta)>0$ باشد، مقطع تهی است. **ج.** اگر $f(\alpha,\beta)=0$ باشد، مقطع نقطه است.

۲) **اگر $ac>0$ باشد**، مقطع مخروطی بیضی، نقطه و یا تهی است. با شرط آن‌که ضریب x^2 مثبت باشد، کافی است $f(\alpha,\beta)$ را تشکیل دهیم.

الف. اگر $f(\alpha,\beta)<0$ باشد، مقطع بیضی است. **ب.** اگر $f(\alpha,\beta)>0$ باشد، مقطع تهی است. **ج.** اگر $f(\alpha,\beta)=0$ باشد، مقطع نقطه است.

۳) **اگر $ac<0$ باشد**، مقطع مخروطی هذلولی و یا دو خط متقاطع است. با شرط آن‌که ضریب x^2 مثبت باشد، کافی است $f(\alpha,\beta)$ را تشکیل دهیم.

الف. اگر $f(\alpha,\beta)\neq 0$ باشد، مقطع هذلولی است. **ب.** اگر $f(\alpha,\beta)=0$ باشد، مقطع دو خط متقاطع است.

۴) **اگر $ac=0$ باشد**، مقطع مخروطی سهمی، یک خط، دو خط موازی و یا تهی می‌باشد.

مثال: نوع مقطع مخروطی معادله‌ی $x^{۲}+y^{۲}-۲x+۲y-۳=۰$ را تعیین کنید.

پاسخ

چون ضریب $x^{۲}$ و $y^{۲}$ برابر است، لذا مقطع مخروطی می‌تواند دایره، نقطه و یا تهی باشد. برای تشخیص کافی است مختصات مرکز را به‌دست آوریم.

$$\begin{cases} f'_x=۰\Rightarrow ۲x-۲=۰\Rightarrow x=۱ \\ f'_y=۰\Rightarrow ۲y+۲=۰\Rightarrow y=-۱ \end{cases}\Rightarrow f(۱,-۱)=(۱)^{۲}+(-۱)^{۲}-۲(۱)+۲(-۱)-۳=-۵<۰$$

چون $f(۱,-۱)<۰$ می‌باشد پس مقطع مخروطی دایره می‌باشد.

مثال: نوع مقطع مخروطی معادله‌ی $-۲x^{۲}-y^{۲}-۴x+۲y=۱$ را تعیین کنید.

پاسخ

چون ضرایب $x^{۲}$ و $y^{۲}$ نابرابر ولی هم‌علامت هستند لذا مقطع مخروطی می‌تواند بیضی، نقطه و یا تهی باشد، توجه کنید با شرط این‌که $x^{۲}$ مثبت باشد $f(\alpha,\beta)$ را محاسبه می‌کنیم. یعنی اگر ضریب $x^{۲}$ منفی باشد ابتدا کلیه جملات را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم تا ضریب $x^{۲}$ مثبت شود، سپس $f(\alpha,\beta)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$-۲x^{۲}-y^{۲}-۴x+۲y=۱\Rightarrow ۲x^{۲}+y^{۲}+۴x-۲y+۱=۰$$

$$\begin{cases} f'_x=۰\Rightarrow ۴x+۴=۰\Rightarrow x=-۱ \\ f'_y=۰\Rightarrow ۲y-۲=۰\Rightarrow y=۱ \end{cases}\Rightarrow f(-۱,۱)=۲(-۱)^{۲}+(۱)^{۲}+۴(-۱)-۲(۱)+۱=-۲<۰$$

بنابراین مقطع بیضی است.

تست نوع مقطع مخروطی $x^{۲}+y^{۲}+۲x-۲y+۴=۰$ کدام است؟

۱) تهی ۲) نقطه ۳) دایره ۴) سهمی

حل: چون ضرایب $x^{۲}$ و $y^{۲}$ برابر می‌باشد لذا مقطع مخروطی می‌تواند دایره، نقطه و یا تهی باشد. کافی است مختصات مرکز را به‌دست آوریم.

$$\begin{cases} f'_x=۰\Rightarrow ۲x+۲=۰\Rightarrow x=-۱ \\ f'_y=۰\Rightarrow ۲y-۲=۰\Rightarrow y=۱ \end{cases}\Rightarrow f(-۱,۱)=(-۱)^{۲}+(۱)^{۲}+۲(-۱)-۲(۱)+۴=۲>۰$$

بنابراین مقطع تهی است.

تست اگر معادله‌ی $x^{۲}+(m-۲)y^{۲}+۳x+(n+۱)y+۲=۰$ معادله‌ی دو خط موازی باشد، $m+n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: برای این‌که مقطع مخروطی تبدیل به ۲ خط موازی شود باید ضرایب جملات شامل x یا ضرایب جملات شامل y صفر شود. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m-۲=۰\Rightarrow m=۲ \\ n+۱=۰\Rightarrow n=-۱ \end{cases}\Rightarrow m+n=۲-۱=۱$$

بنابراین مقطع به صورت $x^{۲}+۳x+۲=۰$ خواهد بود که معادل دو خط موازی $x=-۱$ و $x=-۲$ می‌باشد.

دایره و شرط وجود آن

تعریف دایره: به مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت به نام مرکز دایره (O) برابر مقداری ثابت به نام شعاع (R) باشد. دایره گویند و به صورت $C(O,R)$ نمایش می‌دهند.

معادله‌ی کلی دایره: برای پیدا کردن مختصات مرکز و شعاع دایره کافی است با مربع‌سازی شکل معادله را به صورت $(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲}$ تبدیل کنیم در این صورت مرکز دایره $O(\alpha,\beta)$ و شعاع دایره R خواهد بود.

معادله‌ی ضمنی دایره: به معادله‌ی گسترده شده دایره به صورت روبه‌رو گویند. $F(x,y)=۰\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$

از روی معادله‌ی گسترده‌ی دایره می‌توان به صورت زیر مختصات مرکز و شعاع آن را محاسبه کرد.

$$O\left(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}\right),\ R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}$$

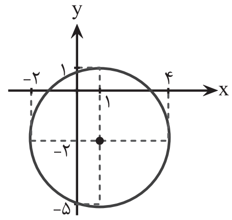
ضریب x را نصف و قرینه کن ضریب y را نصف و قرینه کن

شرط وجود دایره: شرط دایره بودن معادله‌ی $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ آن است که $a^{۲}+b^{۲}-۴c>۰$ باشد.

مثال: مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره‌ی به معادله‌ی $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۴=۰$ را تعیین کنید و نمودار آن را رسم کنید.

پاسخ

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} f'_x=۰ \Rightarrow ۲x-۲=۰ \Rightarrow x=۱ \\ f'_y=۰ \Rightarrow ۲y+۴=۰ \Rightarrow y=-۲ \end{cases} \Rightarrow O(۱,-۲)$$



$$a=-۲, b=۴, c=-۴ \Rightarrow R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+(۴)^۲-۴(-۴)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶}=۳$$

مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(۱,-۲)$ و $B(-۱,۴)$ دو سر یک قطر آن باشند.

پاسخ

اگر AB قطر دایره باشد، نقطه‌ی وسط AB مرکز دایره است. ضمناً فاصله‌ی مرکز از نقطه‌ی A یا B، شعاع دایره می‌باشد.

$$A(۱,-۲), B(-۱,۴) \Rightarrow C(\frac{۱+(-۱)}{۲}, \frac{(-۲)+۴}{۲})=C(۰,۱)$$ مرکز دایره

$$R=AC=\sqrt{(۱-۰)^۲+(-۲-۱)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

معادله‌ی دایره: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \Rightarrow (x-۰)^۲+(y-۱)^۲=(\sqrt{۱۰})^۲ \Rightarrow x^۲+y^۲-۲y-۹=۰$

تست به ازای کدام مقدار k، شعاع دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x+۶y+k-۲=۰$ برابر ۲ است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸

حل: می‌دانیم در معادله‌ی گسترده‌ی دایره‌ی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ شعاع دایره از رابطه‌ی $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$x^۲+y^۲-۲x+۶y+k-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ b=۶ \\ c=k-۲ \end{cases} \Rightarrow R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+(۶)^۲-۴(k-۲)} \Rightarrow ۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۳۶-۴k+۸}$$

$$\Rightarrow ۴=\sqrt{۴۸-۴k} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} ۱۶=۴۸-۴k \Rightarrow ۴k=۳۲ \Rightarrow k=۸$$

تست به ازای کدام مقدار k، معادله‌ی $۳x^۲+۳y^۲+۳x+۶y+k-۱=۰$ معادله‌ی یک دایره می‌باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

حل: بهتر است در دایره ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ عدد یک باشد، بنابراین:

$$۳x^۲+۳y^۲+۳x+۶y+k-۱=۰ \xrightarrow{\div ۳} x^۲+y^۲+x+۲y+\frac{k-۱}{۳}=۰ \xrightarrow{\text{شرط وجود دایره}} a^۲+b^۲-۴c>۰$$

$$\Rightarrow (۱)^۲+(۲)^۲-۴(\frac{k-۱}{۳})>۰ \Rightarrow ۱+۴-۴(\frac{k-۱}{۳})>۰ \Rightarrow ۴(\frac{k-۱}{۳})<۵ \xrightarrow{\times ۳} ۴(k-۱)<۱۵$$

$$\Rightarrow ۴k-۴<۱۵ \Rightarrow ۴k<۱۹ \Rightarrow k<\frac{۱۹}{۴}$$

بنابراین گزینه‌ی «۱» صحیح است.

تست نقطه $O(a,۲a)$ مرکز دایره گذرنده از دو نقطه $(۲,۱)$ و $(-۱,۴)$ می‌باشد، معادله‌ی دایره کدام است؟

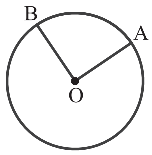
۱) $(x-۲)^۲+(y-۴)^۲=۹$

۲) $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۸$

۳) $(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۸$

۴) $(x-۲)^۲+(y+۴)^۲=۹$

حل: طبق تعریف دایره، فاصله هر نقطه از مرکز دایره برابر با شعاع دایره است، پس:



$$R=|OA|=|OB|\Rightarrow\sqrt{(a-۲)^۲+(۲a-۱)^۲}=\sqrt{(a+۱)^۲+(۲a-۴)^۲}$$

$$\Rightarrow a^۲-۴a+۴+۴a^۲-۴a+۱=a^۲+۲a+۱+۴a^۲-۱۶a+۱۶\Rightarrow -۸a+۵=-۱۴a+۱۷$$

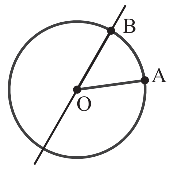
$$\Rightarrow ۶a=۱۲\Rightarrow a=۲\xrightarrow{\text{جایگذاری در مرکز}}O(۲,۴)\Rightarrow R=|OA|=\sqrt{(۲-۲)^۲+(۴-۱)^۲}=۳$$

$$\text{معادله‌ی دایره}:(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲\Rightarrow(x-۲)^۲+(y-۴)^۲=۹$$

تست شعاع دایره‌ای که از دو نقطه‌ی $(۱,۲)$ و $(۲,۱)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادله‌ی $y=۲x$ باشد، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

حل: چون مرکز روی خط $y=۲x$ قرار دارد، لذا اگر $x=\alpha$ فرض کنیم آن‌گاه $y=۲\alpha$ خواهد بود بنابراین مختصات مرکز دایره به صورت $O(\alpha,۲\alpha)$ خواهد بود، از طرفی می‌دانیم فاصله مرکز تا یکی از نقاط A یا B برابر شعاع می‌باشد.



$$R=|OA|=|OB|\Rightarrow\sqrt{(\alpha-۱)^۲+(۲\alpha-۲)^۲}=\sqrt{(\alpha-۲)^۲+(۲\alpha-۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha^۲-۲\alpha+۱+۴\alpha^۲-۸\alpha+۴=\alpha^۲-۴\alpha+۴+۴\alpha^۲-۴\alpha+۱\Rightarrow -۱۰\alpha+۵=-۸\alpha+۵$$

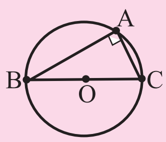
$$\Rightarrow -۲\alpha=۰\Rightarrow\alpha=۰\Rightarrow O(۰,۰)$$

$$R=|OA|=\sqrt{(۰-۱)^۲+(۰-۲)^۲}=\sqrt{۵}$$

نوشتن معادله دایره‌ی گذرا از سه نقطه

کافی است مختصات سه نقطه‌ی A، B و C را در معادله‌ی گسترده‌ی دایره، یعنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$، جایگذاری کنیم. حال از حل دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی حاصل، مقادیر a، b و c را به‌دست آورده و معادله‌ی دایره را می‌نویسیم.

حالت خاص: اگر A، B و C سه رأس مثلث قائم‌الزاویه باشد در این صورت با توجه به شکل زیر مشاهده می‌شود که اگر مثلث قائم‌الزاویه در دایره محاط شود. در این صورت وتر مثلث قائم‌الزاویه منطبق بر قطر دایره می‌شود. کافی است برای محاسبه‌ی شعاع دایره، وتر مثلث قائم‌الزاویه را به‌دست آورده و آن را بر ۲ تقسیم کنیم.



$$R=\frac{BC}{۲}$$

تست شعاع دایره‌ای که از سه نقطه‌ی $A(۱,۱)$، $B(-۱,-۱)$ و $C(-۱,۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

حل: مختصات نقطه‌ی A، B و C را در معادله‌ی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ صدق می‌دهیم.

$$A(۱,۱)\in f\Rightarrow(۱)^۲+(۱)^۲+a(۱)+b(۱)+c=۰\Rightarrow a+b+c=-۲\quad(۱)$$

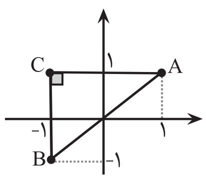
$$B(-۱,-۱)\in f\Rightarrow(-۱)^۲+(-۱)^۲+a(-۱)+b(-۱)+c=۰\Rightarrow -a-b+c=-۲\quad(۲)$$

$$C(-۱,۱)\in f\Rightarrow(-۱)^۲+(۱)^۲+a(-۱)+b(۱)+c=۰\Rightarrow -a+b+c=-۲\quad(۳)$$

$$\left.\begin{matrix}(۱):a+b+c=-۲\\(۲):-a-b+c=-۲\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{جمع کن}}۲c=-۴\Rightarrow c=-۲\xrightarrow[\text{۳ و ۱}]{\text{جایگذاری در روابط}}\begin{cases}a+b-۲=-۲\\-a+b-۲=-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=۰\\-a+b=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۰\\b=۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}}x^۲+y^۲-۲=۰\Rightarrow x^۲+y^۲=۲\Rightarrow R=\sqrt{۲}$$

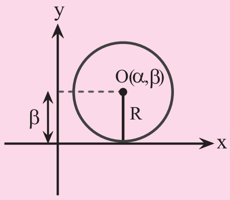
روش دوم: با توجه به شکل رسم شده سه نقطه‌ی A و B و C سه رأس مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد. لذا داریم:



$$\text{وتر}=|AB|=\sqrt{(۱+۱)^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow R=\frac{\text{وتر}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=۲$$

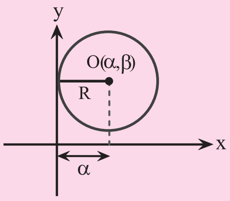
دایره‌ی مماس بر محورهای مختصات

دایره‌ی مماس بر محور xها: اگر دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ بر محور xها مماس باشد، شعاع R برابر با فاصله‌ی O از محور xها است، یعنی شعاع دایره با قدرمطلق عرض مرکز، برابر می‌باشد.



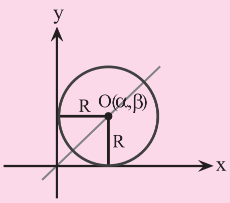
$$R=|\beta|$$

دایره‌ی مماس بر محور yها: اگر دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ بر محور yها مماس باشد، شعاع دایره با قدرمطلق طول مرکز، برابر می‌باشد.



$$R=|\alpha|$$

دایره‌ی مماس بر هر دو محور مختصات: اگر دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ بر هر دو محور مختصات مماس باشد، قدرمطلق طول و عرض مرکز، یکسان بوده و با شعاع دایره برابر می‌باشد.



$$R=|\alpha|=|\beta|$$

◀ چون قدر مطلق طول و عرض مرکز برابرند، درنتیجه مرکز دایره روی یکی از دو خط $y=x$ یا $y=-x$ قرار می‌گیرند و این بستگی به این دارد که دایره در کدام ناحیه‌ی دستگاه مختصات، بر هر دو محور مماس شده است.

تست معادله‌ی دایره‌ای به شعاع ۲ که در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس باشد، کدام است؟

۱) $(x+1)^2+(y-1)^2=4$ ۲) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

۳) $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ ۴) $(x-2)^2+(y+2)^2=4$

حل: چون دایره در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس می‌باشد پس مرکز آن به صورت $O(R,-R)$ می‌باشد، بنابراین:

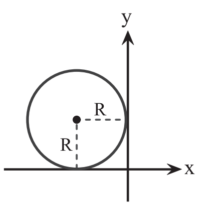
$$O(2,-2),R=2\Rightarrow (x-2)^2+(y+2)^2=4$$

تست دایره‌ای از نقطه‌ی $(-2,4)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره‌ی بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

حل: چون نقطه‌ی $(-2,4)$ در ربع دوم قرار دارد پس دایره در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است. بنابراین مطابق شکل مرکز به صورت $O(-R,R)$ می‌باشد.

پس معادله‌ی دایره به صورت $(x+R)^2+(y-R)^2=R^2$ خواهد بود. از طرفی چون دایره از نقطه‌ی $(-2,4)$ می‌گذرد پس این نقطه در معادله‌ی دایره صدق می‌کند.



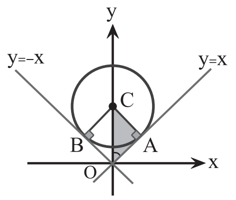
$$\xrightarrow{(-2,4)}(-2+R)^2+(4-R)^2=R^2\Rightarrow 4-4R+R^2+16-8R+R^2=R^2\Rightarrow R^2-12R+20=0$$

$$\Rightarrow (R-2)(R-10)=0\Rightarrow\begin{cases}R=2\\R=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{قطر کوچک}: d=2R=4\\ \text{قطر بزرگ}: d=2R=20\end{cases}$$

تست **معادله‌ی دایره‌ای به شعاع $۳\sqrt{۲}$ و مماس بر نیمساز ناحیه‌ی اول و نیمساز ناحیه‌ی دوم، کدام است؟**

۱) $x^۲+y^۲-۱۲y=۱۸$ ۲) $x^۲+y^۲+۱۲x=۱۸$ ۳) $x^۲+y^۲-۱۲y+۱۸=۰$ ۴) $x^۲+y^۲+۱۲x+۱۸=۰$

حل: چون دایره‌ی موردنظر بر نیمسازهای ناحیه‌های اول و دوم مماس است، پس همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، مرکز دایره روی محور yها قرار دارد، بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه OAC داریم:



$$\text{OAC وتر مثلث}=OC\Rightarrow (OA)^۲+(AC)^۲=(OC)^۲\xrightarrow{OA=OC}(OA)^۲+(OA)^۲=(OC)^۲\Rightarrow (OC)^۲=۲(OA)^۲$$

$$\Rightarrow OC=\sqrt{۲}\,OA\Rightarrow OC=\sqrt{۲}R\xrightarrow{R=۳\sqrt{۲}}OC=\sqrt{۲}(۳\sqrt{۲})=۶\Rightarrow C(۰,۶)$$

$$\text{معادله‌ی دایره}:(x-۰)^۲+(y-۶)^۲=(۳\sqrt{۲})^۲\Rightarrow x^۲+y^۲-۱۲y+۳۶=۱۸\Rightarrow x^۲+y^۲-۱۲y+۱۸=۰$$

وضعیت نسبی نقطه و دایره

برای بررسی وضعیت نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ نسبت به دایره‌ی C، کافی است مختصات نقطه‌ی A را در معادله‌ی دایره یعنی: $f(x,y)=x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ قرار دهیم، آن‌گاه:

نقطه A خارج دایره است. $\longrightarrow f(A)>۰$

نقطه A روی محیط دایره است. $\longrightarrow f(A)=۰$

نقطه A داخل دایره است. $\longrightarrow f(A)<۰$

تست **حدود m برای آن‌که نقطه‌ی $A(m,m-۱)$ خارج دایره‌ی $x^۲+y^۲=۵$ باشد، کدام است؟**

۱) $-۱<m<۲$ ۲) $m>-۱$ ۳) $m<۲$ ۴) $m>۲$ یا $m<-۱$

حل:

$$x^۲+y^۲=۵\Rightarrow f(x,y)=x^۲+y^۲-۵\xrightarrow[\text{دایره باشد.}]{\text{شرط این‌که نقطه بیرون}}f(A)>۰\Rightarrow (m)^۲+(m-۱)^۲-۵>۰$$

$$\Rightarrow m^۲+m^۲-۲m+۱-۵>۰\Rightarrow ۲m^۲-۲m-۴>۰\xrightarrow{\div ۲}m^۲-m-۲>۰\Rightarrow (m+۱)(m-۲)>۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\ m=۲\end{cases}$$

m		-۱		۲	
f(A)	+	۰	-	۰	+
	جواب				جواب

$\Rightarrow m<-۱$ یا $m>۲$

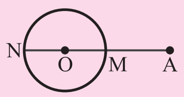
خط قائم بر دایره

خطی که از مرکز دایره می‌گذرد، خط قائم بر دایره است پس تمام قطرهای دایره عمود بر دایره هستند چون تمامی قطرها از مرکز می‌گذرند.

- مختصات مرکز دایره در خط قائم همواره باید صدق کند.
- مرکز دایره تنها نقطه‌ای است که تمامی خطوط قائم بر دایره از آن می‌گذرند.

کم‌ترین فاصله نقطه A از دایره $=|AM|=|OA-OM|=|OA-R|$

بیش‌ترین فاصله نقطه A از دایره $=|AN|=|OA+ON|=|OA+R|$



تست **بیش‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی روی دایره‌ی $(x-۸)^۲+(y+۱۵)^۲=۴$ از مبدأ مختصات کدام است؟**

۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

حل: در این‌جا نقطه‌ی A مبدأ مختصات یعنی $(۰,۰)$ می‌باشد، بنابراین:

$$(x-۸)^۲+(y+۱۵)^۲=۴\Rightarrow O(۸,-۱۵)\ ,\ R=۲$$

$$|OA|=\sqrt{(۰-۸)^۲+(۰+۱۵)^۲}=\sqrt{۶۴+۲۲۵}=\sqrt{۲۸۹}=۱۷$$

$$\text{بیش‌ترین فاصله}=|OA+R|=|۱۷+۲|=۱۹$$

تست **خط قائم بر دایره به معادله‌ی $x^2+y^2+3x=7$، بر خط $2y+x=0$ عمود است. عرض از مبدأ آن کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) -3

حل: چون خط قائم بر دایره‌ی $x^2+y^2+3x=7$ بر خط $2y+x=0$ عمود می‌باشد پس نتیجه می‌گیریم، شیب خط قائم، عکس و قرینه‌ی شیب خط $2y+x=0$ است یعنی شیب خط قائم برابر ۲ می‌باشد. چون تمام خط‌های قائم از مرکز دایره می‌گذرند لذا مختصات مرکز دایره را به‌دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} f'_x=0\Rightarrow 2x+3=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2} \\ f'_y=0\Rightarrow 2y=0\Rightarrow y=0 \end{array}\right. \Rightarrow O(-\frac{3}{2},0)$$

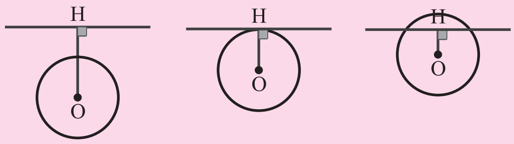
معادله‌ی خط قائم : $y-0=2(x-(-\frac{3}{2}))\Rightarrow y=2x+\underset{\text{عرض از مبدأ}}{3}$

وضعیت خط نسبت به دایره

برای پیدا کردن وضعیت خط $ax+by+c=0$ با دایره‌ی $f(x,y)=0$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

الف. ابتدا مرکز دایره و شعاع دایره را پیدا می‌کنیم.

ب. فاصله‌ی مرکز دایره تا خط $ax+by+c=0$ را OH می‌نامیم. که در این صورت داریم:



متقاطع — $OH<R$ | مماس — $OH=R$ | متخارج — $OH>R$

◀ اگر خطی بر دایره مماس باشد، آن‌گاه شعاع (یا قطر) در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است. (شکل ۲)

تست **به ازای کدام مقدار m، دایره‌ی به معادله‌ی $x^2+y^2-2x+4y=0$ بر خط $x+2y=m$ مماس است؟**

۱) -2 ۲) -4 ۳) -6 ۴) -8

حل: باید شعاع دایره برابر با فاصله‌ی مرکز دایره تا خط باشد، لذا ابتدا مرکز و شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} f'_x=0\Rightarrow 2x-2=0\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1 \\ f'_y=0\Rightarrow 2y+4=0\Rightarrow 2y=-4\Rightarrow y=-2 \end{array}\right. \Rightarrow O(1,-2)$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(4)^2-4(0)}=\frac{1}{2}\sqrt{20}=\frac{1}{2}(2\sqrt{5})=\sqrt{5}$$

حال کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی $O(1,-2)$ از خط $x+2y-m=0$ به‌دست آوریم.

$$OH=\frac{|(1)(1)+(2)(-2)-m|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}=\frac{|1-4-m|}{\sqrt{5}}=\frac{|-3-m|}{\sqrt{5}}=\frac{|m+3|}{\sqrt{5}}$$

$$\xrightarrow{OH=R}\frac{|m+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Rightarrow |m+3|=5\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m+3=5 \\ m+3=-5 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m=2 \\ m=-8 \end{array}\right.$$

بنابراین گزینه «۴» صحیح است.

تست **دایره‌ای به مرکز $(2,0)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله‌ی $y=1$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟**

۱) $4,2$ ۲) $\frac{1}{3},\frac{5}{3}$ ۳) $3,1$ ۴) $2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}$

حل: شعاع دایره برابر با فاصله‌ی مرکز دایره از نیمساز ربع اول (خط $y=x$) است.

$$\left.\begin{array}{l} y=x\Rightarrow x-y=0 \\ O(2,0) \end{array}\right\}\Rightarrow |OH|=\frac{|2-(0)|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow R=|OH|=\sqrt{2}$$

حال با داشتن مرکز و شعاع دایره، معادله‌ی دایره را به صورت زیر می‌نویسیم.

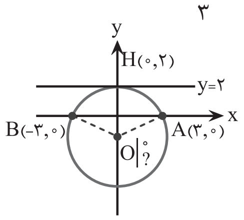
$$\begin{matrix} O(2,0) \\ R=\sqrt{2} \end{matrix} \Rightarrow (x-2)^2+(y-0)^2=(\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2-4x+4+y^2=2 \Rightarrow x^2+y^2-4x+2=0$$

اکنون معادله‌ی دایره‌ی فوق را با خط $y=1$ قطع می‌دهیم، یعنی در معادله‌ی دایره به جای y عدد یک را قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم.

$$x^2+(1)^2-4x+2=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=1, x=3$$

تست **دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(3,0)$ و $(-3,0)$ گذشته و بر خط به معادله‌ی $y=2$ مماس است. شعاع این دایره کدام است؟**

۱) $\frac{\sqrt{69}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{61}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{53}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{41}}{3}$



حل: عمود منصف پاره‌خط AB مکان هندسی مراکز دوایری است که از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد. با توجه به شکل زیر مشاهده می‌شود که عمود منصف AB، همان محور yها است. $(x=0)$ پس مختصات نقطه‌ی O به صورت $(0,b)$ و همچنین $R=|OA|=|OH|$ می‌باشد، بنابراین:

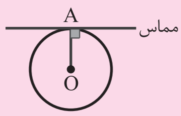
$$R=|OA|=|OH| \Rightarrow \sqrt{(3-0)^2+(0-b)^2}=\sqrt{(0-0)^2+(2-b)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 9+b^2=0+4-4b+b^2 \Rightarrow -4b=5 \Rightarrow b=-\frac{5}{4} \Rightarrow O(0,-\frac{5}{4})$$

$$R=|OA|=\sqrt{(3-0)^2+(0+\frac{5}{4})^2}=\sqrt{9+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{36+25}{4}}=\sqrt{\frac{61}{4}}=\frac{\sqrt{61}}{2}$$

معادله‌ی خطوط مماس و قائم بر دایره

معادله‌ی خط مماس: برای نوشتن معادله‌ی خط مماس بر دایره در نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ واقع بر آن، ابتدا از معادله‌ی دایره مشتق ضمنی گرفته و مختصات نقطه‌ی A را در آن قرار می‌دهیم تا شیب خط مماس به‌دست آید. حال با داشتن مختصات نقطه‌ی تماس و شیب خط، معادله‌ی مماس را می‌نویسیم.



$$\mathbf{y-y_0=m(x-x_0)}$$

معادله‌ی خط قائم: برای نوشتن معادله‌ی خط قائم بر دایره در نقطه‌ای روی دایره، شیب خط مماس را با مشتق ضمنی به‌دست آورده عکس و قرینه کرده تا شیب خط قائم به‌دست آید. با یک نقطه و شیب به‌دست آمده، معادله‌ی خط قائم بر دایره را می‌نویسیم.

مثال: **معادلات خطوط مماس و قائم بر دایره‌ی $x^2+y^2=25$ را در نقطه‌ی $A(3,4)$ بنویسید.**

پاسخ: چون نقطه‌ی A روی دایره قرار دارد لذا داریم:

$$f(x,y)=x^2-x^2-25=0 \Rightarrow m_{\text{مماس}}=y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{2x}{2y} \xrightarrow{A(3,4)} m_{\text{مماس}}=-\frac{3}{4}$$

معادله‌ی خط مماس $: y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-4=-\frac{3}{4}(x-3) \Rightarrow 3x+4y=25$

روش دوم به‌دست آوردن شیب خط مماس:

$$\begin{cases} O(0,0) \\ A(3,4) \end{cases} \Rightarrow m_{OA}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3} \Rightarrow m_{\text{مماس}}=-\frac{1}{m_{OA}}=-\frac{3}{4}$$

معادله‌ی خط قائم: مرکز دایره $O(0,0)$ می‌باشد لذا کافی است معادله‌ی خط گذرنده از دو نقطه‌ی A, O را بنویسیم.

$$m_{OA}=\frac{4}{3} \Rightarrow y-0=\frac{4}{3}(x-0) \Rightarrow y=\frac{4}{3}x$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶

تست معادله‌ی خط مماس بر دایره $x^2+y^2-2x+3y-5=2$ در نقطه‌ی $(1,1)$ کدام است؟

۱) $x+y=1$ ۲) $2x-y=1$ ۳) $y=1$ ۴) $x-2y=1$

حل: ابتدا شیب خط مماس را در نقطه‌ی $A(1,1)$ محاسبه می‌کنیم.

$$m=y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{2x-2}{2x+3}\xrightarrow{A(1,1)}m=-\frac{0}{5}=0\Rightarrow y-1=0(x-1)\Rightarrow y=1$$

تست اگر معادله‌ی قطرهای یک دایره به صورت $(1-m)x+(2+m)y+6m+3=0$ باشد و دایره بر خط $3x+4y=6$ مماس باشد، شعاع دایره کدام است؟

۱) $\frac{9}{5}$ ۲) $\frac{7}{5}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{1}{5}$

حل: همان‌طور که می‌دانید معادله‌ی قطرهای دایره، بی‌شمار خط راست می‌باشند که از یک نقطه‌ی ثابت می‌گذرند که با دادن عددهای مختلف به m، نقطه‌ی ثابت که همان مرکز دایره می‌باشد، به‌دست می‌آید.

$$(1-m)x+(2+m)y+6m+3=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\Rightarrow x+2y+3=0\\ m=1\Rightarrow 3y+9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-3\end{cases}\Rightarrow O(3,-3)$$

کافی است فاصله‌ی مرکز تا خط را به‌دست آوریم که شعاع دایره به‌دست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l}3x+4y-6=0\\ O(3,-3)\end{array}\right\}\Rightarrow R=|OH|=\frac{|3(3)+4(-3)-6|}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}}=\frac{9}{\sqrt{25}}=\frac{9}{5}$$

تست اگر خط $ax+by=4$ بر دو دایره $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ و $x^2+y^2-2x-3=0$ عمود باشد، شیب خط کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) 4 ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) -4

حل: چون خط بر دایره عمود است پس حتماً از مرکز دایره می‌گذرد لذا کافی است مرکز دو دایره را به‌دست آوریم و در معادله‌ی خط جای‌گذاری کنیم.

$$x^2+y^2+4x-2y+1=0\Rightarrow\begin{cases}f'_x=0\\ f'_y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_x=2x+4=0\Rightarrow x=-2\\ f'_y=2y-2=0\Rightarrow y=1\end{cases}\Rightarrow O(-2,1)$$

$$x^2+y^2-2x-3=0\Rightarrow\begin{cases}f'_x=0\\ f'_y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_x=2x-2=0\Rightarrow x=1\\ f'_y=2y=0\Rightarrow y=0\end{cases}\Rightarrow O'(1,0)$$

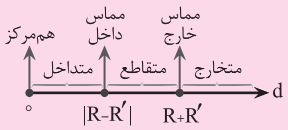
حال باید مختصات این ۲ مرکز در معادله‌ی خط $ax+by=4$ صدق کنند.

$$\begin{array}{l}\xrightarrow{O(-2,1)}a(-2)+b(1)=4\Rightarrow -2a+b=4\\ \xrightarrow{O'(1,0)}a(1)+b(0)=4\Rightarrow a=4\end{array}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=12\end{cases}\xrightarrow{\text{معادله‌ی خط}}4x+12y=4\overset{\div 4}{\Rightarrow}x+3y=1$$

$$\Rightarrow 3y=-x+1\Rightarrow y=\frac{-1}{3}x+\frac{1}{3}\Rightarrow m=-\frac{1}{3}$$

وضعیت دو دایره نسبت به هم

برای تشخیص وضعیت دو دایره‌ی C و C'، باید ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را به‌دست آوریم و سپس فاصله‌ی مرکز دو دایره، یعنی طول خط‌المرکزین دو دایره را محاسبه کرده و با توجه به سه پارامتر $d=OO'$ و $R+R'$ و $|R-R'|$، اوضاع نسبی دو دایره را مشخص کنیم.



مثال: وضعیت دو دایره به معادلات $x^2+y^2+4x+2y-20=0$ و $x^2+y^2+2x+2y-7=0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

پاسخ: ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را به‌دست می‌آوریم.

$$x^2+y^2+4x+2y-20=0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2 \\ 2y+2=0 \Rightarrow 2y=-2 \Rightarrow y=-1 \end{cases} \Rightarrow O(-2,-1)$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(4)^2+(2)^2-4(-20)}=\frac{1}{2}\sqrt{100}=\frac{1}{2}\times 10=5 \Rightarrow R=5$$

$$x^2+y^2+2x+2y-7=0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1 \\ 2y+2=0 \Rightarrow 2y=-2 \Rightarrow y=-1 \end{cases} \Rightarrow O'(-1,-1)$$

$$R'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(2)^2+(2)^2-4(-7)}=\frac{1}{2}\sqrt{36}=\frac{1}{2}\times 6=3 \Rightarrow R'=3$$

حال کافی است طول خط‌المرکزین دو دایره یعنی d را محاسبه کنیم.

$$d=|OO'|=\sqrt{(-2+1)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{1+0}=1 \quad \text{و} \quad |R-R'|=5-3=2$$

چون $d<|R-R'|$ می‌باشد پس دو دایره متداخل هستند.

مثال: مقدار k را طوری تعیین کنید که دو دایره‌ی $x^2+y^2-2x+4y-k=0$ و $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ مماس داخل باشند.

پاسخ: ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را محاسبه می‌کنیم.

$$x^2+y^2-2x+4y-m=0 \Rightarrow O(1,-2)\ ,\ R=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(4)^2-4(-k)}=\frac{1}{2}\sqrt{20+4k}=\sqrt{5+k}$$

$$x^2+y^2+4x-2y+1=0 \Rightarrow O'(-2,1)\ ,\ R'=\frac{1}{2}\sqrt{(4)^2+(-2)^2-4(1)}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$$

$$d=|OO'|=\sqrt{(1+2)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

اما می‌دانیم اگر $d=|R-R'|$ باشد در این صورت دو دایره مماس داخل می‌باشند.

$$3\sqrt{2}=|\sqrt{5+k}-2| \Rightarrow 3\sqrt{2}=\sqrt{5+k}-2 \Rightarrow 3\sqrt{2}+2=\sqrt{5+k}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} (3\sqrt{2}+2)^2=(\sqrt{5+k})^2=18+12\sqrt{2}+4=5+k \Rightarrow k=17+12\sqrt{2}$$

تست دو دایره به معادلات $x^2+y^2-2x+4y=4$ و $x^2+y^2+2x-4y=9$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس خارج ۲) مماس داخل ۳) متقاطع ۴) متخارج

حل: کافی است ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع هر دایره را حساب کنیم.

$$x^2+y^2-2x+4y-4=0 \Rightarrow O(1,-2)\ ,\ R=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(4)^2-4(-4)}=\frac{1}{2}\sqrt{36}=\frac{1}{2}\times 6=3$$

$$x^2+y^2+2x-4y-9=0 \Rightarrow O'(-1,2)\ ,\ R'=\frac{1}{2}\sqrt{(2)^2+(-4)^2-4(-9)}=\frac{1}{2}\sqrt{56}=\frac{1}{2}\sqrt{4\times 14}=\sqrt{14}$$

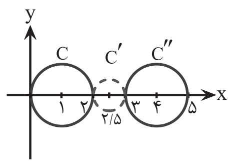
$$d=|OO'|=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$

چون $|R-R'|<d<R+R'$ می‌باشد لذا دو دایره متقاطع‌اند.

تست معادله‌ی دایره‌ای که بر دو دایره‌ی $x^۲ - ۲x + y^۲ = ۰$ و $x^۲ - ۸x + y^۲ + ۱۵ = ۰$ مماس خارج بوده و مرکزش روی محور xها باشد، کدام است؟

۱) $x^۲ + y^۲ + ۵x + ۶ = ۰$ ۲) $x^۲ + y^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ ۳) $x^۲ + y^۲ + ۳x - ۱ = ۰$ ۴) $x^۲ + y^۲ - ۵x + ۶ = ۰$

حل: دو دایره‌ی $C: x^۲ - ۲x + y^۲ = ۰$ و $C'': x^۲ - ۸x + y^۲ + ۱۵ = ۰$ متخارج می‌باشند. بنابراین اگر دایره‌ی سومی بر این دو دایره مماس خارجی باشد و مرکز نیز روی محور xها قرار گیرد و به صورت زیر خواهد بود.

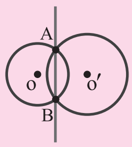


$$O'(\frac{۵}{۲}, ۰),\ R' = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره‌ی مماس}} (x - \frac{۵}{۲})^۲ + y^۲ = (\frac{۱}{۲})^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۵x + ۶ = ۰$$

بنابراین گزینه‌ی «۴» صحیح است.

وتر مشترک دو دایره‌ی متقاطع

وتر مشترک دو دایره‌ی متقاطع خطی است که نقاط تقاطع دو دایره را به هم وصل می‌کند. برای پیدا کردن معادله‌ی وتر مشترک دو دایره‌ی متقاطع کافی است معادله‌ی دو دایره را مساوی هم قرار داده تا $x^۲$ و $y^۲$ حذف شوند و به یک معادله‌ی خط برسیم.



معادله‌ی وتر مشترک $: C = C' \Rightarrow (a_۱ - a_۲)x + (b_۱ - b_۲)y + (C_۱ - C_۲) = ۰$

برای پیدا کردن طول وتر مشترک کافی است معادله‌ی وتر مشترک را پیدا کرده سپس در یک دستگاه با یکی از معادلات دایره قطع دهیم تا مختصات A و B به‌دست آید. طول AB همان طول وتر مشترک می‌باشد.

مثال: معادله‌ی وتر مشترک دو دایره‌ی $x^۲ + y^۲ + ۴x + ۲y + ۱ = ۰$ و $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۳y - ۲ = ۰$ را بنویسید.

پاسخ کافی است معادلات دو دایره را مساوی یک‌دیگر قرار دهیم تا جملات $x^۲$ و $y^۲$ حذف شوند.

$$x^۲ + y^۲ + ۴x + ۲y + ۱ = x^۲ + y^۲ + ۲x + ۳y - ۲ \Rightarrow ۴x + ۲y + ۱ = ۲x + ۳y - ۲ \Rightarrow ۲x - y = -۳$$

تست طول وتر مشترک دو دایره‌ی $(x+۱)^۲ + y^۲ = ۱$ و $(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۴$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{۴}{\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{۳}{\sqrt{۷}}$ ۴) $\frac{۴}{\sqrt{۷}}$

حل: ابتدا معادله‌ی وتر مشترک دو دایره را به‌دست می‌آوریم.

$$(x+۱)^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ + y^۲ - ۱ = ۰$$

$$(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۴ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ + ۲y + ۱ - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ + y^۲ - ۱ = x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ + ۲y + ۱ - ۴$$

$$\Rightarrow ۲x = -۲x + ۲y - ۲ \Rightarrow ۴x + ۲ = ۲y \Rightarrow y = ۲x + ۱ \quad \text{معادله‌ی وتر مشترک}$$

حال کافی است معادله‌ی وتر مشترک را با یکی از معادلات دایره قطع دهیم تا مختصات نقاط A و B به‌دست آید.

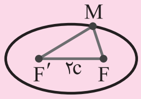
$$(x+۱)^۲ + y^۲ = ۱ \xrightarrow{y=۲x+۱} (x+۱)^۲ + (۲x+۱)^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ + ۴x^۲ + ۴x + ۱ = ۱$$

$$\Rightarrow ۵x^۲ + ۶x + ۱ = ۰ \Rightarrow (۵x+۱)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۵x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۵} \Rightarrow y = \frac{۳}{۵} \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow y = -۱ \end{cases}$$

$$|AB| = \sqrt{(-\frac{۱}{۵} + ۱)^۲ + (\frac{۳}{۵} + ۱)^۲} = \sqrt{(\frac{۴}{۵})^۲ + (\frac{۸}{۵})^۲} = \sqrt{\frac{۱۶ + ۶۴}{۲۵}} = \sqrt{\frac{۸۰}{۲۵}} = \frac{۴\sqrt{۵}}{۵} = \frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

بیضی

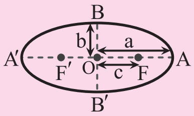
تعریف: بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت واقع در صفحه (کانون)، مقدار ثابتی است که این مقدار ثابت را با $2a$ نشان می‌دهند که طول قطر بزرگ بیضی است.



$$MF + MF' = 2a$$

◀ محیط تمام مثلث‌هایی که یک ضلع آن FF' می‌باشد و رأس دیگر آن روی محیط بیضی در حالت حرکت است، مقدار ثابت $2(a+c)$ می‌باشد.

چند تعریف مهم:



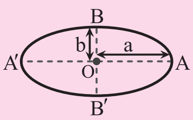
قطر کوچک $= BB' = 2b$ و قطر بزرگ $= AA' = 2a$

محور تقارن $: AA', BB'$ و فاصله‌ی کانونی $= FF' = 2c$

رأس‌های ناکانونی $: B, B'$ و رأس‌های کانونی $: A, A'$

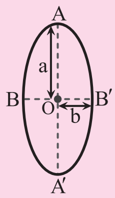
بیضی افقی: اگر در یک بیضی محور کانونی (یا قطر بزرگ) موازی محور xها باشد، بیضی را افقی می‌نامیم که مرکز آن $O(\alpha,\beta)$ و قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$ می‌باشد.

بیضی قائم: اگر در یک بیضی محور کانونی (یا قطر بزرگ) موازی محور yها باشد، بیضی را قائم می‌نامیم که مرکز آن $O(\alpha,\beta)$ و قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$ می‌باشد.



$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

بیضی افقی



$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$$

بیضی قائم

◀ در هر بیضی رابطه‌ی $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است.

◀ اگر عدد بزرگ‌تر زیر پرانتز شامل x باشد، بیضی افقی است و اگر عدد بزرگ‌تر زیر پرانتز شامل y باشد، بیضی قائم است.

مثال: معادله‌ی بیضی $x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$ مفروض است. مختصات کانون‌ها، رأس‌ها و قطرها را مشخص کنید.

پاسخ

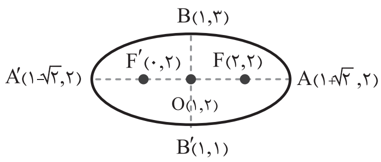
$$x^2 - 2x + 2y^2 - 8y + 7 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 + 2(y^2 - 4y + 4) - 8 + 7 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 2(y-2)^2 = 2$$

مرکز بیضی $\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2} + (y-2)^2 = 1 \Rightarrow O(1,2)$

طول قطر بزرگ $a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2} \Rightarrow AA' = 2a = 2\sqrt{2}$

طول قطر کوچک $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow BB' = 2b = 2$

فاصله‌های کانونی $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2 = 1 + c^2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow FF' = 2c = 2$



مثال: در بیضی به معادلهٔ $5x^2 + 4y^2 - 10x - 15 = 0$ مطلوب است:

الف. مرکز بیضی ب. افقی یا قائم بودن بیضی

پاسخ

الف. برای به‌دست آوردن مرکز کافی است یک‌بار نسبت به x و بار دیگر نسبت به y مشتق بگیریم و آن‌ها را مساوی صفر قرار دهیم.

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 0 \Rightarrow 10x - 10 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 \Rightarrow 8y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow O(1,0)$$

ب. اگر از روی معادله‌ی گسترده‌ی بیضی بخواهیم افقی یا قائم بودن آن را تشخیص بدهیم کافی است ضریب x^2 را در مخرج y^2 و ضریب y^2 را در مخرج x^2 قرار دهیم تا افقی یا قائم بودن بیضی مشخص شود یعنی:

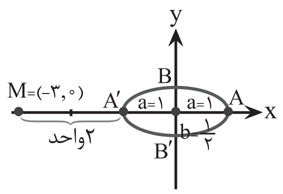
$$Ax^2 + By^2 + \ldots \Rightarrow \frac{x^2}{B} + \frac{y^2}{A} + \ldots$$

$$5x^2 + 4y^2 - 10x - 15 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} \Rightarrow$$ بیضی قائم است.

تست **فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی روی منحنی $x^۲+۴y^۲=۱$ از نقطه‌ی $M(-۳,۰)$ چه‌قدر است؟**

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

حل: کافی است نمودار بیضی را در دستگاه مختصات رسم کرده و موقعیت نقطه M را مشخص کنیم.



$$x^۲+۴y^۲=۱\Rightarrow\frac{x^۲}{۱}+\frac{y^۲}{\frac{۱}{۴}}=۱\Rightarrow\begin{cases}O(۰,۰)\\ a^۲=۱\Rightarrow a=۱\\ b^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی روی منحنی تا نقطه‌ی M، برابر ۲ است.

تست **نقطه‌ی $M(x,y)$ بر روی بیضی به معادله‌ی $\begin{cases}x=۲+۳\cos t\\ y=-۱+۲\sin t\end{cases}$ قرار دارد. مجموع فواصل نقطه‌ی M از دو کانون این بیضی کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱

حل: طبق تعریف بیضی مقدار $MF+MF'$ برابر $۲a$ می‌باشد. در معادله‌ی پارامتری بیضی، ضریب سینوس و کسینوس می‌توانند a یا b باشند که هر کدام عدد بزرگ‌تری باشد a و هر کدام که عدد کوچک‌تری باشد b محسوب می‌شود. بنابراین $a=۳$ است و داریم: $MF+MF'=۲a=۲(۳)=۶$

چون عدد a در تساوی x وجود دارد لذا بیضی افقی می‌باشد.

به‌طور کلی داریم: $\begin{cases}x=\alpha+a\sin t\\ y=\beta+b\cos t\end{cases}\Rightarrow O(\alpha,\beta)$ و بیضی افقی است $(a>b)$

تست **نقاط $F(۱,۵)$ و $F'(۱,-۳)$ کانون‌ها و نقطه‌ی $M(-۲,۱)$ نقطه‌ی از بیضی می‌باشد، طول بزرگ‌ترین قطر بیضی کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۰

حل: برای نوشتن معادله‌ی بیضی باید مقادیر a، b و مختصات مرکز بیضی را داشته باشیم. مرکز بیضی وسط F',F می‌باشد یعنی $O(\frac{۱+۱}{۲},\frac{-۳+۵}{۲})$ یا $O(۱,۱)$ می‌باشد.

$$FF'=۲c\Rightarrow FF'=\sqrt{(۱-۱)^۲+(-۳-۵)^۲}=\sqrt{۶۴}=۸\Rightarrow ۲c=۸\Rightarrow c=۴$$

$$MF+MF'=۲a\Rightarrow\sqrt{(۱+۲)^۲+(۵-۱)^۲}+\sqrt{(۱+۲)^۲+(-۳-۱)^۲}=\sqrt{۲۵}+\sqrt{۲۵}=۵+۵=۱۰\Rightarrow ۲a=۱۰$$

قطر بزرگ بیضی : $AA'=۲a=۱۰$

تست **مساحت محدود به خطوط مماس بر منحنی به معادله‌ی $۳x^۲+۴y^۲+۶x-۸y=۵$ در هر رأس کانونی و غیرکانونی آن کدام است؟**

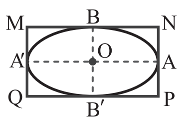
۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

حل: ابتدا معادله‌ی بیضی را استاندارد می‌کنیم.

$$(۳x^۲+۶x)+(۴y^۲-۸y)-۵=۰\Rightarrow ۳(x^۲+۲x)+۴(y^۲-۲y)-۵=۰$$

$$\Rightarrow ۳(x^۲+۲x+۱-۱)+۴(y^۲-۲y+۱-۱)-۵=۰\Rightarrow ۳(x+۱)^۲-۳+۴(y-۱)^۲-۴-۵=۰\Rightarrow ۳(x+۱)^۲+۴(y-۱)^۲=۱۲$$

$$\xrightarrow{\div ۱۲}\frac{(x+۱)^۲}{۴}+\frac{(y-۱)^۲}{۳}=۱\Rightarrow O(-۱,۱)\ ,\ a^۲=۴\Rightarrow a=۲\ ,\ b^۲=۳\Rightarrow b=\sqrt{۳}$$

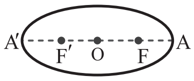


$$S_{MNPQ}=۲a\times ۲b=۲(۲)\times ۲(\sqrt{۳})=۸\sqrt{۳}$$

تست در بیضی $\frac{x^۲}{۱۶}+\frac{y^۲}{۹}=۱$ فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی محیط بیضی تا کانون کدام است؟

۱) $۳-\sqrt{۷}$ ۲) $۴-\sqrt{۷}$ ۳) $۴+\sqrt{۷}$ ۴) $۳+\sqrt{۷}$

حل: چون $a^۲=۱۶$ و $b^۲=۹$ می‌باشد لذا بیضی افقی است که با توجه به شکل زیر داریم:



$AF'=a+c$: فاصله‌ی هر کانون تا دورترین رأس

$AF=a-c$: فاصله‌ی هر کانون تا نزدیک‌ترین رأس

$$a^۲=۱۶\Rightarrow a=۴\ ,\ b^۲=۹\Rightarrow b=۳\ ,\ a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۱۶=۹+c^۲\Rightarrow c^۲=۷\Rightarrow c=\sqrt{۷}$$

$$AF=a-c=۴-\sqrt{۷}$$

خروج از مرکز

در هر بیضی به مقدار $e=\frac{c}{a}$ خروج از مرکز بیضی می‌گویند. با توجه به این‌که همواره در بیضی $۰<c<a$ است، نتیجه می‌گیریم که $۰<e<۱$ است.

- هر چقدر مقدار e به صفر نزدیک‌تر شود $(e\to ۰)$، شکل بیضی به دایره شبیه‌تر می‌شود.
- هر چقدر مقدار e به یک نزدیک‌تر شود $(e\to ۱)$، شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود.
- در هر بیضی با داشتن نسبت قطر کوچک به قطر بزرگ، یعنی $\frac{b}{a}$، مقدار خروج از مرکز از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$\mathbf{e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^۲}{a^۲}}=\sqrt{\frac{a^۲-b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}\Rightarrow e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}}$$

- برای محاسبه‌ی خروج از مرکز بیضی از روی فرم گسترده یعنی $Ax^۲+By^۲+Cx+Dy+E=۰$ از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

$$\mathbf{e=\sqrt{۱-\frac{\min\{A,B\}}{\max\{A,B\}}}}$$

تست خروج از مرکز بیضی به معادله‌ی $۴x^۲+۹y^۲=۲۵$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

حل: **روش اول:** ابتدا معادله‌ی بیضی را به صورت زیر استاندارد می‌کنیم.

$$۴x^۲+۹y^۲=۲۵\xrightarrow{\div ۲۵}\frac{x^۲}{\frac{۲۵}{۴}}+\frac{y^۲}{\frac{۲۵}{۹}}=۱\Rightarrow a^۲=\frac{۲۵}{۴}\ ,\ b^۲=\frac{۲۵}{۹}\Rightarrow e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱-\frac{\frac{۲۵}{۹}}{\frac{۲۵}{۴}}}=\sqrt{۱-\frac{۴}{۹}}=\sqrt{\frac{۵}{۹}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

روش دوم:

$$۴x^۲+۹y^۲-۲۵=۰\Rightarrow e=\sqrt{۱-\frac{\min\{۴,۹\}}{\max\{۴,۹\}}}=\sqrt{۱-\frac{۴}{۹}}=\sqrt{\frac{۵}{۹}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

تست نسبت دو قطر یک بیضی $\frac{۴}{۳}$ است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۷}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

حل: چون نسبت $\frac{۴}{۳}$ از یک بزرگ‌تر است لذا نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک یعنی $\frac{a}{b}$ برابر $\frac{۴}{۳}$ می‌باشد، بنابراین:

$$\frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۱۶}}=\sqrt{\frac{۷}{۱۶}}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶

تست خروج از مرکز بیضی $\frac{(۳y-۲)^۲}{۴}+\frac{(۲x-۱)^۲}{۵}=۱$ برابر است با:

۱) $\sqrt{\frac{۴}{۵}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۲۹}{۴۵}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۱}{۵}}$

حل:

$$\frac{(۲x-۱)^۲}{۵}+\frac{(۳y-۲)^۲}{۴}=۱\Rightarrow\frac{(۲(x-\frac{۱}{۲}))^۲}{۵}+\frac{(۳(y-\frac{۲}{۳}))^۲}{۴}=۱\Rightarrow\frac{۴(x-\frac{۱}{۲})^۲}{۵}+\frac{۹(y-\frac{۲}{۳})^۲}{۴}=۱\Rightarrow\frac{(x-\frac{۱}{۲})^۲}{\frac{۵}{۴}}+\frac{(y-\frac{۲}{۳})^۲}{\frac{۴}{۹}}=۱$$

$$\Rightarrow a^۲=\frac{۵}{۴}\,,\,b^۲=\frac{۴}{۹}\Rightarrow e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱-\frac{\frac{۴}{۹}}{\frac{۵}{۴}}}=\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۴۵}}=\sqrt{\frac{۲۹}{۴۵}}$$

تست طول قطر کوچک بیضی، $۴\sqrt{۲}$ و فاصله‌ی کانون تا نزدیک‌ترین رأس، ۲ واحد است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

حل: در بیضی طول قطر کوچک $۲b$ می‌باشد پس $۲b=۴\sqrt{۲}$، همچنین فاصله‌ی کانون تا نزدیک‌ترین رأس $a-c$ می‌باشد لذا $a-c=۲$، بنابراین:

$$\begin{cases}۲b=۴\sqrt{۲}\Rightarrow b=۲\sqrt{۲}\\ a-c=۲\quad(۱)\end{cases}\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow b^۲=a^۲-c^۲\Rightarrow(۲\sqrt{۲})^۲=(a-c)(a+c)\Rightarrow ۸=۲(a+c)\Rightarrow a+c=۴\quad(۲)$$

اکنون با حل دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی زیر مقادیر a و c را محاسبه می‌کنیم.

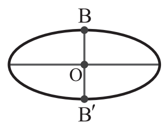
$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\begin{cases}a+c=۴\\ a-c=۲\end{cases}\Rightarrow ۲a=۶\Rightarrow a=۳\,,\,c=۱\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۳}$$

تست مشخصات دو سر قطر کوچک یک بیضی $(-۲,۳)$ و $(-۲,۱)$ است. این بیضی از نقطه‌ی $(۱,۲)$ می‌گذرد، خروج از مرکز آن کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

حل: چون $x_B=x_{B'}=-۲$ لذا بیضی افقی می‌باشد، بنابراین:

$$O=\frac{B+B'}{۲}=(\frac{-۲-۲}{۲}\,,\,\frac{۱+۳}{۲})=(-۲,۲)$$



$$۲b=|BB'|\Rightarrow ۲b=\sqrt{(-۲+۲)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۰+۴}=۲\Rightarrow ۲b=۲\Rightarrow b=۱$$

معادله‌ی بیضی : $\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}+\frac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱\Rightarrow\frac{(x+۲)^۲}{a^۲}+\frac{(y-۲)^۲}{۱}=۱$

چون بیضی از نقطه‌ی $(۱,۲)$ می‌گذرد پس این نقطه در معادله‌ی بیضی صدق می‌کند.

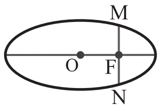
$$\frac{(۱+۲)^۲}{a^۲}+\frac{(۲-۲)^۲}{۱}=۱\Rightarrow\frac{۹}{a^۲}+۰=۱\Rightarrow\frac{۹}{a^۲}=۱\Rightarrow a^۲=۹\Rightarrow a=۳$$

$$e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱-\frac{۱}{۹}}=\sqrt{\frac{۸}{۹}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

تست در بیضی به معادله‌ی $x^2+2y^2-2x=1$ اندازه‌ی وتری که از کانون بر قطر بزرگ آن عمود شود، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{2}$

حل: اگر در بیضی از کانون خطی بر محور کانونی عمود رسم کنیم تا بیضی را در نقاط M و N قطع کند طول MN از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.



$$MN=\frac{2b^2}{a}=2b\sqrt{1-e^2}$$: وترکانونی

$$x^2+2y^2-2x=1\Rightarrow(x^2-2x+1)+2y^2=2\Rightarrow(x-1)^2+2y^2=2\xrightarrow{\div 2}\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2=2\Rightarrow a=\sqrt{2}\\ b^2=1\Rightarrow b=1\end{cases}\Rightarrow MN=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(1)^2}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

وضعیت نقطه نسبت به بیضی

برای بررسی وضعیت نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ نسبت به بیضی $f(x,y)=Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$، کافی است مختصات نقطه‌ی A را در معادله‌ی بیضی قرار دهیم، آن‌گاه:

نقطه A بیرون بیضی است. $\longrightarrow$ $\mathbf{f(A)>0}$

نقطه A روی محیط بیضی است. $\longrightarrow$ $\mathbf{f(A)=0}$

نقطه A داخل بیضی است. $\longrightarrow$ $\mathbf{f(A)<0}$

تست به ازای کدام مقدار m، از نقطهٔ $A(1,2)$ هیچ مماس بر بیضی $\frac{(y-1)^2}{4}+\frac{(x+1)^2}{m}=1$ نمی‌توان رسم کرد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

حل: چون گفته شده از نقطه‌ی A هیچ مماس نمی‌توان بر بیضی رسم کرد پس نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ی A درون بیضی است، بنابراین باید $f(A)<0$ باشد.

$$f(x,y)=\frac{(x+1)^2}{m}+\frac{(y-1)^2}{4}-1=0\Rightarrow f(1,2)=\frac{(1+1)^2}{m}+\frac{(2-1)^2}{4}-1<0\Rightarrow\frac{4}{m}+\frac{1}{4}-1<0$$

$$\Rightarrow\frac{4}{m}-\frac{3}{4}<0\Rightarrow\frac{4}{m}<\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{m}{4}>\frac{4}{3}\Rightarrow m>\frac{16}{3}$$

بنابراین گزینه‌ی «۳» صحیح است.

تست نقطه‌ی M در خارج بیضی $3x^2+2y^2-6y=\frac{15}{2}$ قرار ندارد، بیش‌ترین مقدار مجموع فواصل M از دو کانون بیضی کدام است؟

۱) $4\sqrt{3}$ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) ۶

حل: چون نقطه‌ی M خارج بیضی نمی‌باشد لذا نتیجه می‌گیریم که $MF+MF'\le 2a$ می‌باشد، بنابراین بیش‌ترین مقدار مجموع فواصل M از دو کانون بیضی برابر $2a$ است.

$$3x^2+(2y^2-6y)=\frac{15}{2}\Rightarrow 3x^2+2(y^2-3y)=\frac{15}{2}\Rightarrow 3x^2+2(y^2-3y+\frac{9}{4}-\frac{9}{4})=\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow 3x^2+2((y-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4})=\frac{15}{2}\Rightarrow 3x^2+2(y-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{2}=\frac{15}{2}\Rightarrow 3x^2+2(y-\frac{3}{2})^2=\frac{15}{2}+\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 3x^2+2(y-\frac{3}{2})^2=\frac{24}{2}=12\xrightarrow{\div 12}\frac{x^2}{4}+\frac{(y-\frac{3}{2})^2}{6}=1\Rightarrow\begin{cases}a^2=6\\ b^2=4\end{cases}\Rightarrow a=\sqrt{6}\Rightarrow\max(MF+MF')=2a=2\sqrt{6}$$

تعیین دامنه و برد بیضی

برای تعیین دامنه (حدود تغییرات x) و برد (حدود تغییرات y) کافی است شکل بیضی را رسم کنیم که با توجه به رأس‌های کانونی و ناکانونی داریم:

بیضی افقی : $\begin{cases} \alpha - a \le x \le \alpha + a \\ \beta - b \le y \le \beta + b \end{cases}$ و بیضی قائم : $\begin{cases} \alpha - b \le x \le \alpha + b \\ \beta - a \le y \le \beta + a \end{cases}$

تست بیش‌ترین مقدار y در بیضی $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 16 = 4$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

حل:

$$9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 12 = 0 \Rightarrow (9x^2 + 18x) + (4y^2 - 8y) + 12 = 0 \Rightarrow 9(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 2y) + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 9(x^2 + 2x + 1 - 1) + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 12 = 0 \Rightarrow 9((x+1)^2 - 1) + 4((y-1)^2 - 1) + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 9(x+1)^2 - 9 + 4(y-1)^2 - 4 + 12 = 0 \Rightarrow 9(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 1 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{\frac{1}{9}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ b^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow b = \frac{1}{3} \end{cases}, \quad O(-1,1) \xrightarrow{\text{بیضی قائم}} \beta - a \le y \le \beta + a \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \le y \le 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \le y \le \frac{3}{2}$$

ببخشید استاد: از کجا فهمیدید بیضی افقی؟

جواب: عزیزم چون عدد بزرگ‌تر یعنی $\frac{1}{4}$ زیر متغیر y قرار دارد.

معادله‌ی خطوط مماس و قائم بر بیضی

معادله‌ی خط مماس: برای نوشتن معادله‌ی خط مماس بر بیضی در نقطه‌ی $M(x_0, y_0)$ واقع بر آن، ابتدا از معادله‌ی بیضی مشتق ضمنی گرفته و مختصات نقطه‌ی M را در آن قرار می‌دهیم تا شیب خط مماس به‌دست آید. حال با داشتن مختصات نقطه‌ی تماس و شیب خط، معادله‌ی مماس را می‌نویسیم.

$$\mathbf{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

معادله‌ی خط قائم: برای نوشتن معادله‌ی خط قائم بر بیضی در نقطه‌ای روی بیضی، شیب خط مماس را با مشتق ضمنی به‌دست آورده عکس و قرینه کرده تا شیب خط قائم به‌دست آید. با یک نقطه و شیب به‌دست آمده، معادله‌ی خط قائم بر بیضی را می‌نویسیم.

تست عرض از مبدأ خط مماس بر بیضی $x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ در نقطهٔ $M(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 4 ۳) 5 ۴) 7

حل: چون نقطه‌ی M روی بیضی واقع است، داریم:

$$m = y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x}{\frac{2(y-1)}{4}} = -\frac{x}{\frac{y-1}{4}} \xrightarrow{M(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)} m = -\frac{4(\frac{\sqrt{3}}{2})}{2-1} = -2\sqrt{3}$$

عرض از مبدأ

معادله‌ی خط مماس : $y - 2 = -2\sqrt{3}(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow y = -2\sqrt{3}x + 5$

تست **معادله‌ی خط مماس بر بیضی $\frac{(y-۱)^۲}{۲۵}+\frac{(x+۱)^۲}{۴}=۱$ در نقطه‌ای به عرض ۱ در ربع دوم کدام است؟**

۱) $x=-۳$ ۲) $x=۱$ ۳) $y=۱$ ۴) $y=-۳$

حل: ابتدا مختصات نقطه را روی بیضی به‌دست می‌آوریم.

$$y=۱\Rightarrow\frac{(x+۱)^۲}{۴}+\frac{(۱-۱)^۲}{۲۵}=۱\Rightarrow\frac{(x+۱)^۲}{۴}=۱\Rightarrow(x+۱)^۲=۴\Rightarrow x+۱=\pm۲\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۲\\x+۱=-۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۱ & \text{غ‌ق‌ق}\\x=-۳ & \text{ق‌ق}\end{cases}\rightarrow \text{چون طول در ربع دوم منفی است.}\Rightarrow A(-۳,۱)$$

$$\text{شیب خط مماس}: m=y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\frac{۲(x+۱)}{۴}}{\frac{۲(y-۱)}{۲۵}}=-\frac{۲۵(x+۱)}{۴(y-۱)}\xrightarrow{A(-۳,۱)}-\frac{۲۵(-۳+۱)}{۴(۱-۱)}=\frac{۵۰}{۰}=\infty$$

اکنون معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $A(-۳,۱)$ را با شیب $m=\infty$ می‌نویسیم.

$$y-۱=\infty(x+۳)\Rightarrow\infty=\frac{y-۱}{x+۳}\Rightarrow x+۳=۰\Rightarrow x=-۳$$

بنابراین گزینه‌ی «۱» صحیح است.

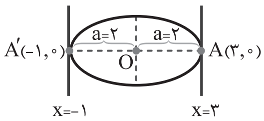
تست **خط به معادله‌ی $x=a$ بر بیضی $x^۲+۲y^۲-۲x=۳$ مماس است. A کدام است؟**

۱) $-۱,-۳$ ۲) $۱,-۳$ ۳) $-۱,۳$ ۴) $۱,۳$

حل: ابتدا معادله‌ی بیضی را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم.

$$(x^۲-۲x)+۲y^۲=۳\Rightarrow(x^۲-۲x+۱-۱)+۲y^۲=۳\Rightarrow(x-۱)^۲+۲y^۲=۴\xrightarrow{\div۴}\frac{(x-۱)^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^۲=۴\Rightarrow a=۲\\b^۲=۱\Rightarrow b=۱\end{cases},\quad O(۱,۰)$$



همان‌طور که در شکل فوق مشاهده می‌کنیم، بیضی در دو نقطه‌ی A و A' که همان رأس‌های کانونی هستند بر خط $x=-۱$ و $x=۳$ مماس است. درنتیجه مقدار a برابر است با: $a=-۱,۳$

روش دوم: می‌دانیم شرط این‌که خطی بر یک منحنی مماس باشد آن است که خط را با منحنی قطع دهیم که معادله‌ی تقاطع آن‌ها ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$\begin{cases}x^۲+۲y^۲-۲x=۳\\x=a\end{cases}\xrightarrow{\text{معادله‌ی تقاطع}}a^۲+۲y^۲-۲a=۳\Rightarrow۲y^۲+a^۲-۲a-۳=۰$$

$$\xrightarrow[\Delta=۰]{\text{شرط مماس}}\Delta=(۰)^۲-۴(۲)(a^۲-۲a-۳)=۰\Rightarrow-۸(a^۲-۲a-۳)=۰\overset{\div(-۸)}{\Rightarrow}a^۲-۲a-۳=۰\Rightarrow(a+۱)(a-۳)=۰\Rightarrow a=-۱,۳$$

تست **شیب خط قائم بر بیضی به معادله‌ی $x^۲+۳y^۲-۸x=۰$ در نقطه‌ی برخورد آن بیضی با نیمساز ناحیه‌ی اول کدام است؟**

۱) -۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

حل: ابتدا نقطه‌ی برخورد بیضی با نیمساز ناحیه‌ی اول یعنی $y=x>۰$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}x^۲+۳y^۲-۸x=۰\\y=x>۰\end{cases}\xrightarrow{\text{معادله‌ی تقاطع}}x^۲+۳x^۲-۸x=۰\Rightarrow۴x^۲-۸x=۰\Rightarrow۴x(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \text{غ‌ق‌ق}\\x=۲ & \text{ق‌ق}\end{cases}$$

پس نقطه‌ی برخورد به صورت $M(۲,۲)$ می‌باشد.

$$m=y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۲x-۸}{۶y}\xrightarrow{M(۲,۲)}m=-\frac{۲(۲)-۸}{۶(۲)}=-\frac{-۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow m_{\text{قائم}}=-\frac{۱}{\frac{۱}{۳}}=-۳$$

سؤالات چهارگزینه‌ای

آزمون ۱ سؤالات کنکورهای سراسری و آزاد

بخش اول

۱. نقاط $A(۳,۳)$ و $B(-۱,۱)$ و $O(۰,۰)$ سه رأس یک مستطیل هستند. مساحت مستطیل چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ ۸۰)*

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۲. مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲,۵)$، $B(۳,۰)$ و $C(۰,۲)$، کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ـ ۹۲)*

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

۳. نقاط $A(۱,۲)$ و $B(-۵,۲)$ و $C(-۲,۵)$ سه رأس یک مربع هستند. مجموع طول و عرض رأس چهارم کدام است؟ *(آزاد پزشکی ـ ۸۶)*

۱) -۳ ۲) -۵ ۳) -۱ ۴) ۱

۴. اگر سه نقطه‌ی $(k,۲)$ و $(۰,k)$ و $(-۱,۰)$ روی یک خط راست باشند، k چه‌قدر است؟ *(آزاد پزشکی ـ ۸۵)*

۱) -۱ ۲) $۲,-۱$ ۳) $۱,-۲$ ۴) ۲

۵. به ازای کدام مقادیر a نقاط $(a,۳)$، $(۶,۴a+۱)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ـ ۸۵)*

۱) $-۲,\frac{۹}{۴}$ ۲) $-۲,\frac{۳}{۴}$ ۳) $-۲,\frac{-۳}{۴}$ ۴) $۲,\frac{-۹}{۴}$

۶. یک خط از دسته خطوط به معادله‌ی $(k+۱)y+۲kx-k+۱=۰$ بر خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(۲,-۱)$ و $B(۸,۳)$ عمود است، معادله‌ی آن خط کدام است؟ *(سراسری تجربی ـ ۸۰)*

۱) $۲y+۳x=۴$ ۲) $۲y+۳x=۱$ ۳) $۲y-۳x=-۵$ ۴) $۳y-۲x=-۵$

۷. نقطه‌ی $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ *(سراسری تجربی ـ ۹۰)*

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۳,۴)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۴,۳)$

۸. به ازای کدام مقدار a، سه خط به معادلات $y+۲x=۰$، $۲y+ax+۵=۰$ و $y+۳x=a$ متقارب‌اند؟ *(سراسری تجربی ـ ۸۸)*

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نشدنی

۹. فاصله‌ی مبدأ مختصات از نقطه‌ی ثابت که خط $mx+my+x-۱=۰$ از آن می‌گذرد، چه‌قدر است؟ *(آزاد پزشکی ـ ۸۰)*

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$

۱۰. معادله‌ی سه ضلع یک مثلث $x+y=۱$ و $y=۲x$ و $x=۱$ است، معادله‌ی خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟ *(سراسری تجربی ـ ۸۴)*

۱) $y=\frac{۲}{۳}$ ۲) $x=\frac{۲}{۳}$ ۳) $y+x=\frac{۲}{۳}$ ۴) $y+x=\frac{۱}{۳}$

۱۱. نقطه $A(۳,-۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $۲y-x=۵$ است. مساحت این مربع، کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ـ ۹۳)*

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۱۲. دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y+x=۶$ و $۲x-y=۷$ و یک رأس آن نقطه‌ی $A(۸,۵)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ـ ۹۰)*

۱) ۷/۲ ۲) ۹/۶ ۳) ۱۱/۴ ۴) ۱۲/۸

۱۳. دو نقطه بر خط به معادله‌ی $y=x-1$ قرار دارند که فاصله‌ی این نقاط از خط به معادله‌ی $2x-3y=5$، برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه، کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۸۹)

۱) $-15,9$ ۲) $-15,11$ ۳) $-11,15$ ۴) $11,-9$

۱۴. فاصله‌ی دو خط به معادلات $y=\sqrt{3}x+2$ و $\sqrt{3}y-3x+6=0$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ـ ۸۸)

۱) $2-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}-1$ ۳) $\sqrt{3}+1$ ۴) $2+\sqrt{3}$

۱۵. دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x-2y=3$ و $y=x+1$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۹۲)

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{9}{8}$ ۳) $\frac{25}{8}$ ۴) $\frac{25}{4}$

۱۶. فاصله‌ی خطی که دو نقطه‌ی $A(0,0)$ و $B(1,1)$ را به هم وصل می‌کند، از خطی که دو نقطه‌ی $C(1,3)$ و $D(2,4)$ را به هم وصل می‌کند کدام است؟ (آزاد پزشکی ـ ۸۲)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

آزمون ۲ سؤالات سنجش و گزینه دو

بخش اول

۱. نقاط $A(1,0)$، $B(4,2)$ و $C(a,-a)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a، مثلث ABC در رأس A قائمه و متساوی‌الساقین است؟ (سنجش ـ ۸۴)

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۳

۲. دو نقطه‌ی $A(2a,a)$ و $B(a+3,a-4)$ دو رأس از مثلثی هستند. میانه‌ی نظیر رأس C منطبق بر خط $y=5$ می‌باشد. طول مختصات وسط AB کدام است؟ (سنجش ـ ۸۴)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۳. منحنی تابع $y=f(x)$ خطی است گذرا بر دو نقطه‌ی $(0,a)$ و $(a,0)$، ضابطه‌ی تابع $(fof)(x)$ برابر کدام است؟ (سنجش ـ ۸۴)

۱) 0 ۲) a ۳) x ۴) ax

۴. نقطه‌ی $(2,-1)$ مرکز مربع و معادله‌ی یک ضلع آن به صورت $4x-3y=a$ می‌باشد. به ازای کدام مقدار a، مساحت مربع ۱۶ واحد مربع است؟ (سنجش ـ ۸۵)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۵. خط به معادله‌ی $(m+3)x+(2m-1)y=7$ به ازای هر مقدار m از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرد. فاصله‌ی آن نقطه‌ی ثابت از نقطه‌ی $(1,-1)$ کدام است؟ (سنجش ـ ۸۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{5}$

۶. سه خط به معادلات $x+y=2$، $x-y=0$ و $y=-1$ مثلثی ساخته‌اند. مساحت آن کدام است؟ (سنجش ـ ۸۴)

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

۷. مثلث ABC با سه رأس $A(1,4)$، $B(-2,-2)$ و $C(4,2)$ مفروض است. معادله‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع BC کدام است؟ (تمرین کتاب)

۱) $y+2x=2$ ۲) $3x-y=2$ ۳) $x=1$ ۴) $y=1$

۸. دو نقطه‌ی $A(1,-2)$ و $B(-3,0)$ دو سر قطری از یک مربع‌اند. مساحت مربع کدام است؟ (سنجش ـ ۸۳)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۹. سه نقطه‌ی $(3,5)$، $(-1,-3)$ و $(a,2a-1)$ در یک راستا می‌باشند، a کدام است؟ (سنجش ـ ۸۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) هر مقدار حقیقی ۴) نشدنی

۱۰. خطی که محور xها را در نقطه‌ای به طول $-\frac{۳}{۲}$ قطع کند و از نقطه‌ی $(۱,۵)$ بگذرد، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (سنجش ـ ۸۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱. به ازای کدام مقدار a دو خط به معادلات $y = x\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}(y+a)+x=۰$ بر هم عمودند؟ (سنجش ـ ۸۲)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار a

۱۲. به ازای کدام مقدار m دو خط به معادلات $(m+۱)x+my=۳$ و $(۱+۳m)y=۵-۳mx$ موازی‌اند؟ (سنجش ـ ۸۲)

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳. اضلاع مثلثی منطبق بر سه خط به معادلات $۲y+x=۸$ ، $۳y+x=۴$ و $y=۲x-۱$ هستند، نوع مثلث کدام است؟ (سنجش ـ ۸۵)

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین ۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) متساوی‌الاضلاع

۱۴. نقطه‌ی تلاقی ارتفاع‌های مثلث با سه رأس $(۰,۳)$ ، $(۳,۰)$ و $(۴,۳)$ کدام است؟ (سنجش ـ ۸۲)

۱) $(۱,۲)$ ۲) $(۲,۱)$ ۳) $(۳,۲)$ ۴) $(۲,۳)$

۱۵. نقاط $A(۱,-۲)$ ، $B(۰,۱)$ و $C(۴,۷)$ رأس‌های یک مثلث‌اند، اندازه‌ی ارتفاع AH کدام است؟ (سنجش ـ ۸۲)

۱) $\frac{۳}{\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{۷}{\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{۷}{\sqrt{۱۳}}$ ۴) $\frac{۹}{\sqrt{۱۳}}$

۱۶. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو خط به معادلات $۲y+x=۱$ و $۳y-۴x=۱۸$ ، از خط به معادله‌ی $x=۱$ چه‌قدر است؟ (سنجش ـ ۸۴)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۷. نقطه‌ی $A(۰,-۲)$ رأس مربعی است که معادله‌ی یک ضلع آن $y+\sqrt{۳}x=۴$ است. محیط مربع کدام است؟ (سنجش ـ ۸۵)

۱) ۱۶ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۶

۱۸. فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $y=ax+b$ برابر ۱ واحد است. اگر این خط از نقطه‌ی $(۱,۲)$ گذشته باشد، a کدام است؟ (سنجش ـ ۸۷)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

آزمون ۳ آزمون جامع فصل ۱۰

بخش اول

۱. اگر دو خط به معادلات $y+ax=۲$ و $y=-۳x+b$ متقارن نسبت به محور yها باشند. $a+b$ کدام است؟ (سنجش – ۸۹)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۳

۲. نقاط $O(۰,۰)$ و $A(۰,۳)$ و $B(\sqrt{۳},۶)$ سه رأس یک مثلث‌اند طول ارتفاع مثلث نظیر ضلع AB کدام است؟ (سنجش – ۸۹)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۴

۳. ضلع مربعی منطبق بر خط $۲y-x=۳$ و نقطهٔ $A(۰,۴)$ یک رأس آن است. مساحت مربع کدام است؟ (سنجش – ۸۹)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۶

۴. مساحت مثلثی با سه رأس $C(۷,۳),B(-۱,۲),A(۵,۶)$ کدام است؟ (سنجش – ۹۰)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۵. فاصله دو خط به معادلات $۳y-۴x+۵=۰$ و $y=\frac{۴}{۳}x+۱$ کدام است؟ (سنجش – ۹۰)

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۸

۶. نقطه $A(-۱,۳)$ مرکز مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $۳x-۲y=۴$ می‌باشد، مساحت این مربع کدام است؟ (سنجش - ۹۰)

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۴۸ ۴) ۵۲

۷. دو ضلع یک مربع بر دو خط به معادلات $۲x+\sqrt{۵}y=۳$ و $۵y+۲\sqrt{۵}x=۰$ قرار دارند. محیط این مربع چه‌قدر است؟ (گزینه دو - ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸. اضلاع یک مثلث بر خطوط $AB: x+y=۳$، $AC: y=۳x-۱$ و $BC: ۳x-۴y=۱$ قرار دارند. طول ارتفاع AH از این مثلث چه‌قدر است؟ (گزینه دو - ۹۱)

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۸

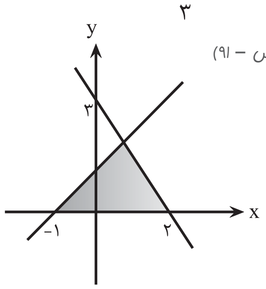
۹. دو نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم وجود دارند که از خط $x+۲y=۰$ به فاصله‌ی $۲\sqrt{۵}$ هستند. اگر این دو نقطه را A و B بنامیم، مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟ نقطه‌ی C روی محور yها به عرض ۳ است. (گزینه دو - ۹۱)

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) $\frac{۱۹۰}{۳}$ ۴) $\frac{۹۵}{۳}$

۱۰. مساحت ناحیه سایه زده در شکل مقابل کدام است؟ (سنجش - ۹۱)

۱) ۲/۴ ۲) ۲/۷

۳) ۳/۲ ۴) ۴/۶



۱۱. خطی با شیب مثبت m از نقطه $(-۲,۳)$ گذشته و محورهای مختصات را در A و B قطع می‌کند. به ازای کدام مقدار m مساحت مثلث OAB (O مبدأ مختصات) ۱۲ واحد است؟ (سنجش - ۹۱)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۲. نقطه $O(۲,۳)$ مرکز مربعی که نقطه $A(۵,-۱)$ یک رأس آن است. مساحت این مربع کدام است؟ (سنجش - ۹۳)

۱) ۲۵ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۵۰

۱۳. مساحت مثلثی با سه رأس $(۳,۷),(-۱,۲),(۵,۴)$ کدام است؟ (سنجش - ۹۳)

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

سؤالات چهارگزینه ای

آزمون ۱ سؤالات کنکورهای سراسری و آزاد

بخش دوم

۱. نقطه‌ی $(a,۲a)$ مرکز دایره‌ی گذرنده بر دو نقطه‌ی $(۲,۱)$ و $(-۱,۴)$ است. شعاع این دایره کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۲. شعاع دایره‌ای که از دو نقطه‌ی $(۰,۰)$ و $(۳,۱)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادله‌ی $y=۲x$ باشد، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۶)

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶

۳. دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(۰,۱)$ و $(۳,۰)$ گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت $x-y=۲$ است. شعاع این دایره کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)*

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

۴. دایره‌ای، محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۵)*

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

۵. طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه‌ی $A(-۱,۰)$ و $B(۳,۰)$ و $C(۰,-۳)$ می‌گذرد، کدام است؟ *(سراسری تجربی - ۸۲)*

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

۶. شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(۲,۱)$ و $(-۲,۴)$ و $(۰,۰)$ می‌گذرد، کدام است؟ *(سراسری تجربی - ۹۱)*

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

۷. شعاع دایره گذرا بر سه نقطه $(۰,۰)$، $(۲,۱)$ و $(۲,-۱)$ برابر کدام است؟ *(سراسری تجربی - ۹۳)*

۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۳}$

۸. به ازای چند مقدار m نمودار تابع $x^۲+y^۲=m(m^۲-۱)x^۲+۲m-۱$ نمایش یک دایره است؟ *(آزاد پزشکی - ۸۲)*

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، منحنی به معادله‌ی $۲x^۲+(a^۲-۷)y^۲+۴y+a=۰$ یک دایره است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۵)*

۱) $\{-۳\}$ ۲) $\{۳\}$ ۳) $\{-۳,۳\}$ ۴) ϕ

۱۰. به ازای کدام مقدار a دایره‌ی به معادله‌ی $x^۲+y^۲-۲x+۴y+a=۰$ بر خط به معادله‌ی $x+۳y=۰$ مماس است؟ *(سراسری تجربی - ۸۵)*

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۵

۱۱. به ازای کدام مقدار m، خط به معادله‌ی $y=mx+۲$ بر دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x=۳$ مماس است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۱)*

۱) $۰,-\frac{۴}{۳}$ ۲) $۰,\frac{۴}{۳}$ ۳) $۱,-\frac{۴}{۳}$ ۴) $۱,\frac{۲}{۳}$

۱۲. دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(۲,۰)$ و $(-۲,۰)$ گذشته و بر خط به معادله‌ی $y=۱$ مماس است. شعاع این دایره کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۸)*

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۱۳. دایره به مرکز $(۲,۰)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله‌ی $y=۱$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟ *(سراسری تجربی - ۸۶)*

۱) ۱ و ۳ ۲) ۰ و ۴ ۳) $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۵}{۲}$ ۴) $۲-\sqrt{۲}$ و $۲+\sqrt{۲}$

۱۴. دایره‌ای به مرکز $(۲,-۱)$ و مماس بر خط به معادله‌ی $x-y=۱$، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟ *(سراسری تجربی - ۹۵)*

۱) ۳ و ۱ ۲) ۴ و ۱ ۳) ۳ و ۲ ۴) ۴ و ۱/۵

۱۵. معادله‌ی دایره‌ای که مرکزش روی خط $y=۲x+۲$ و در ربع سوم بر هر دو محور مماس باشد، کدام است؟ *(آزاد پزشکی - ۹۰)*

۱) $x^۲+۴x+y^۲+۴y-۴=۰$ ۲) $x^۲+۴x+y^۲+۴y+۴=۰$

۳) $x^۲+۴x+y^۲-۱۲=۰$ ۴) $x^۲-۴x+y^۲-۴y+۴=۰$

۱۶. دایره‌ای از نقطه‌ی $(-۱,۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره‌ی بزرگ‌تر کدام است؟ *(سراسری تجربی - ۹۰)*

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۷. هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه‌ی $(-۲,۱)$ می‌گذرد. این دایره بر خط به معادله‌ی $y=x-۱$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟ *(سراسری تجربی - ۸۸)*

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۱۸. دو دایره به معادلات $x^2+y^2-2x+4y=13$ و $x^2+y^2+2x=1$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟ (سراسری تجربی - ۸۳)

۱) مماس داخل ۲) مماس خارج ۳) متقاطع ۴) متداخل

۱۹. دو دایره به معادلات $x^2+y^2-2x+6y=8$ و $x^2+y^2+8x-4y+12=0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟ (سراسری تجربی - ۸۷)

۱) مماس خارج ۲) مماس داخل ۳) متقاطع ۴) متخارج

۲۰. شعاع دایره به مرکز $(-2,2)$ و مماس خارج بر دایره $x^2+y^2-2x+4y+1=0$، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۳)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۴

۲۱. معادله‌ی وتر مشترک دو دایره به مرکز $(-1,2)$ و $(2,1)$ و به شعاع‌های مساوی ۲ واحد کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۴)

۱) $x=2y$ ۲) $y=3x$ ۳) $3y=2x$ ۴) $2y=3x$

۲۲. نقطه‌ی $M(x,y)$ بر روی بیضی به معادله‌ی $9y^2+4x^2-8x=8$ قرار دارد. مجموع فواصل نقطه‌ی M از دو کانون این بیضی کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۶)

۱) $\sqrt{6}$ ۲) ۳ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۶

۲۳. در بیضی به معادله‌ی $3x^2+4y^2-6x+4y=44$ فاصله‌ی یک کانون از دورترین رأس آن کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۴)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) $4+2\sqrt{3}$

۲۴. مساحت محدود به خطوط مماس بر منحنی به معادله‌ی $x^2+4y^2-4x=4$ در هر رأس کانونی و غیرکانونی آن، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۲۵. دورترین نقطه از بیضی به معادله‌ی $2x^2+y^2+4x-4y+2=0$ تا مرکز آن، به کدام مختصات است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۶)

۱) $(-1-\sqrt{2},2)$ ۲) $(-2,2+\sqrt{2})$ ۳) $(-1,4)$ ۴) $(-1,6)$

۲۶. بیضی به معادله‌ی $x^2+4y^2+ay+bx+c=0$، در نقطه‌ای به طول ۳ بر محور x ها مماس است و از نقطه‌ی $(-1,-2)$ می‌گذرد. خروج از مرکز آن کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۴)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۷. طول کوتاه‌ترین مماسی که از نقطه‌ی $A(3,1)$ بر نمودار $\frac{(x-1)^2}{4}+y^2=1$ رسم می‌شود کدام است؟ (آزادپزشکی - ۸۸)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۸. دو منحنی $x^2-4y=1$ و $\frac{x^2}{4}+16y^2=1$: (آزاد پزشکی - ۸۷)

۱) در چهار نقطه متقاطعند ۲) فقط در دو نقطه متقاطعند

۳) در دو نقطه متقاطع و در یک نقطه مماسند. ۴) فقط در یک نقطه مماسند.

۲۹. مختصات دو سر قطر کوچک یک بیضی $(-1,3)$ و $(-1,-1)$ است. اگر این بیضی از نقطه‌ی $(-4,2)$ بگذرد، خروج از مرکز آن کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۲)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۰. مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی $(3,6)$ و $(3,-2)$ و خروج از مرکز آن $\frac{1}{2}$ می‌باشد. این بیضی محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)

۱) $-1/5$ ۲) $-1/7$ ۳) $0/6$ ۴) $1/5$

۳۱. در بیضی به معادله‌ی $x^2+2y^2-2x=1$ اندازه وتری که از کانون بیضی بر قطر بزرگ آن عمود شود، کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۷)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{2}$

۳۲. در بیضی به معادله‌ی $۳x^۲ + ۴y^۲ = ۱۲$، یک خط از کانون بر قطر بزرگ آن عمود می‌کنیم تا بیضی را در A و B قطع کند. اندازه‌ی وتر AB کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۰)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳. شیب خط قائم بر بیضی به معادله‌ی $x^۲ + ۳y^۲ - ۸x = ۰$، در نقطه‌ی برخورد آن با نیمساز ناحیه‌ی اول و در این ناحیه، کدام است؟ (سراسری تجربی ـ ۸۱)

۱) -۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳