



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی**

**سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور**

**نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نرم افزارهای ریاضیات**

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

# ایمان نخستین



دهم

یازدهم

دوازدهم

(کنکور)

طراح سوالات ریاضی قلم چی  
مدرس طرح کنکور مدارس گیلان  
(رشت، لاهیجان، لنگرود، رودسر و ...)

۰۹۱۱۱۴۳ ۶۷۶۴

 nakhostin\_math

 nakhostin\_math

## دامنه و برد تابع

سؤال ۱: اگر  $f = \{(a, -1), (2, 3), (4, b), (2, a-1), (b, 2)\}$  یک تابع باشد مجموع اعضای دامنه  $f$  کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

چون  $(2, 3), (2, a-1) \in f$  است پس:  $a-1=3 \Rightarrow a=4$

اگر  $a=4$  باشد داریم:  $f = \{(4, -1), (2, 3), (4, b), (b, 2)\}$

حال چون  $(4, b), (4, -1) \in f$  است پس باید باشد در نتیجه تابع  $f$  به صورت زیر است:

$$D_f = \{4, 2, -1\} \Rightarrow \text{مجموع اعضای دامنه} = 4 + 2 - 1 = 5$$

سؤال ۲: تعداد اعضای مجموعه برد تابع  $f = \{(3m-1, 2n), (6, 2), (2, 8), (6, m+1)\}$  کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به دو زوج مرتب  $(6, m+1), (6, 2)$  نتیجه می گیریم  $m+1=2$  پس  $m=1$  است. با جایگذاری مقدار  $m$  در تابع خواهیم داشت:

$$f = \{(2, 2n), (6, 2), (2, 8)\} \rightarrow \text{باید} \rightarrow 2n=8 \Rightarrow n=4 \Rightarrow f = \{(2, 8), (6, 2)\}$$

بنابراین برد تابع  $f$  برابر است با  $\{8, 2\}$  که دو عضو دارد.

سؤال ۳: تابع  $f = \{(3m+n-1, p+m+2), (p-m, n+2)\}$  را با دو عضو متمایز در نظر بگیرید. اگر

مجموع اعضای دامنه با مجموع اعضای برد برابر باشد کدام گزینه درست است؟

$$p-m \neq 4n-1 \quad (2)$$

$$p-m \neq 4n+1 \quad (1)$$

$$p-n \neq 4m+1 \quad (4)$$

$$p-n \neq 4m-1 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

دامنه تابع  $f$  به فرم  $\{3m+n-1, p-m\}$  و برد آن به فرم  $\{p+m+2, n+2\}$  می باشد بنابراین باید:

$$3m+n-1 \neq p-m \xrightarrow{m=5} 14+n \neq p-5 \Rightarrow p-n \neq 19 \xrightarrow{m=5} p-n \neq 4m-1$$

از طرفی با توجه به اینکه  $f$  تابع است پس مؤلفه های اول آن نباید با هم برابر باشند.

**سؤال ۴:** اگر تعداد اعضای دامنهٔ توابع  $f = \{(4, 3), (n, 1), (k, m-2)\}$  و  $g = \{(1, 5), (3, n+2), (1, m)\}$  با هم برابر ولی تعداد اعضای برد آنها متفاوت باشد  $m+n-k$  کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۷

پاسخ: گزینه ۱

$g$  یک تابع است پس از روی دو زوج مرتب  $(1, 5), (1, m)$  که متعلق به  $g$  هستن نتیجه می گیریم  $m = 5$  می باشد بنابراین خواهیم داشت:

$$f = \{(4, 3), (n, 1), (k, 3)\} \quad , \quad g = \{(1, 5), (3, n+2)\}$$

از طرفی تعداد اعضای دامنهٔ توابع  $f$  و  $g$  با هم برابر است و چون  $D_g = \{1, 3\}$  است، پس دامنهٔ تابع  $f$  هم باید دو عضو داشته باشد و چون  $f$  دارای سه زوج مرتب است پس دو تا از مقادیر ۴،  $n$  و  $k$  باید با هم مساوی باشند. وجود زوج های مرتب  $(k, 3), (4, 3)$  در  $f$  نشان می دهد که باید  $k = 4$  باشد و در این حالت  $R_f = \{3, 1\}$  خواهیم بود. ضمناً گفته شده تعداد اعضای برد  $f, g$  با هم فرق دارد، پس برد  $g$  باید تک عضوی باشد یعنی باید  $n+2 = 5$  باشد پس  $n = 3$  است و داریم:

$$m + n - k = 5 + 3 - 4 = 4$$

**سؤال ۵:** چند تابع از مجموعهٔ  $A = \{1, 2, 3\}$  به مجموعهٔ  $A$  وجود دارد که برد آن شامل عدد ۳ نباشد؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

چون تابع از مجموعهٔ  $A$  به مجموعهٔ  $A$  تعریف شده است پس شامل ۳ زوج مرتب با اعضای دامنهٔ ۱، ۲ و ۳ می باشد. پس حالت کلی این تابع به صورت زیر است:

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$

از طرفی چون این تابع از  $A$  به  $A$  تعریف شده است و برد تابع  $f$  شامل ۳ نیست. پس هر یک از اعداد  $a, b, c$  می توانند ۱ یا ۲ باشند. پس برای  $a$ ، ۲ حالت برای  $b$ ، ۲ حالت و برای  $c$  نیز ۲ حالت وجود دارد. در نتیجه در کل  $2 \times 2 \times 2 = 8$  تابع مختلف با این ویژگی وجود دارد. این توابع به صورت زیرند:

$$f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$$

$$f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2)\}$$

$$f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$$

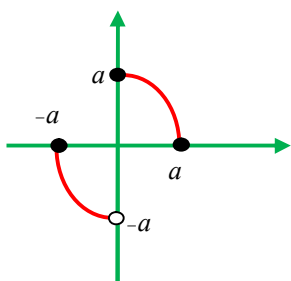
$$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$$

$$f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 2)\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$$

تذکره: وقتی می گوئیم تابع  $f$  از  $A$  به  $B$  تعریف شده است یعنی مجموعهٔ  $A$  دامنهٔ تابع است اما الزاماً مجموعهٔ  $B$  برد تابع  $f$  نیست بلکه برد تابع  $f$  باید زیرمجموعهٔ مجموعهٔ  $B$  باشد.



سؤال ۶: دامنه و برد تابع شکل زیر کدام است؟

(۱)  $R = \{0 \leq y \leq a\}, D = \{0 \leq x \leq a\}$

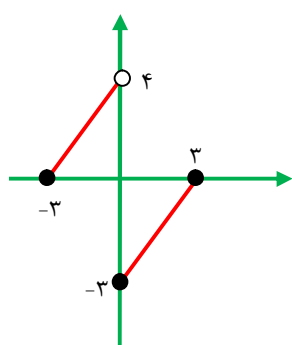
(۲)  $R = \{-a \leq y \leq a\}, D = \{-a \leq x < a\}$

(۳)  $R = \{-a \leq y \leq a\}, D = \{-a \leq x \leq a\}$

(۴)  $R = \{-a < y \leq a\}, D = \{-a \leq x \leq a\}$

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به نمودار تابع دامنه آن  $D = \{-a \leq x \leq a\}$  و برد آن  $R = \{-a < y \leq a\}$  است.



سؤال ۷: برد تابع  $f$  که نمودار آن در شکل زیر رسم شده کدام است؟

(۱)  $[-3, 4]$

(۲)  $[-3, 4)$

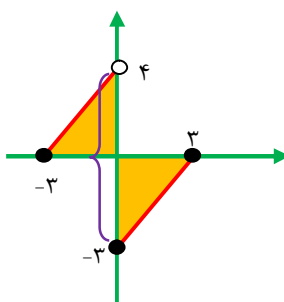
(۳)  $[-3, 3]$

(۴)  $[-4, 4)$

پاسخ: گزینه ۲

برای توابعی که نمودار آنها داده شده است، تصویر تمام نقاط نمودار روی محور  $y$  ها برد تابع را مشخص می کنند.

$$R_f = [-3, 4)$$



دقت کنید که عدد ۵ عضو برد تابع نیست.

سؤال ۸: اگر  $f(x) = 4 - 5x$  دارای دامنه  $[a, b]$  و برد  $[5, 19]$  باشد مقدار  $ab$  کدام است؟

(۴)  $\frac{3}{5}$

(۳)  $-\frac{3}{5}$

(۲)  $\frac{6}{5}$

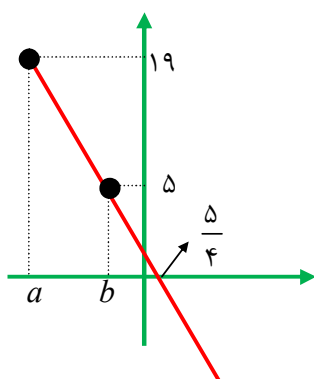
(۱)  $-\frac{6}{5}$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا خط  $y = 4 - 5x$  را رسم می کنیم:

اگر تابع  $f$  با دامنه  $[a, b]$  و برد  $[5, 19]$  باشد پس مطابق

شکل  $f(b) = 5, f(a) = 19$  است. در نتیجه:



$$\begin{cases} f(a) = 4 - 5a = 19 \Rightarrow 5a = -15 \Rightarrow a = -3 \\ f(b) = 4 - 5b = 5 \Rightarrow 5b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

در نتیجه  $ab = \frac{3}{5}$  است.

سؤال ۹: اگر برد تابع  $f(x) = -2x - 1$  به صورت  $[-2, 3]$  باشد دامنه این تابع کدام است؟

(۱)  $[\frac{1}{2}, 2]$  (۲)  $[-2, -1]$  (۳)  $[-2, \frac{1}{2}]$  (۴)  $[-2, -\frac{1}{2}]$

پاسخ: گزینه ۳

$$y \in [-2, 3] \Rightarrow -2 \leq y \leq 3 \Rightarrow -2 \leq -2x - 1 \leq 3 \Rightarrow -2 + 1 \leq -2x - 1 + 1 \leq 3 + 1$$

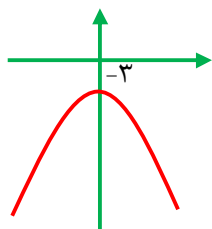
$$-1 \leq -2x \leq 4 \xrightarrow{\div (-2)} \frac{1}{2} \geq x \geq -2 \Rightarrow -2 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x \in \left[-2, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow D_f = \left[-2, \frac{1}{2}\right]$$

سؤال ۱۰: اگر  $f(x) = -3 - 4x^2$  با دامنه  $[-1, 2]$  دارای برد  $[a, b]$  باشد  $b - a$  کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۲۲ (۳) ۱۶ (۴) ۱۹

پاسخ: گزینه ۳



ابتدا نمودار تابع  $y = -4x^2 - 3$  را که یک سهمی است را رسم می‌کنیم:

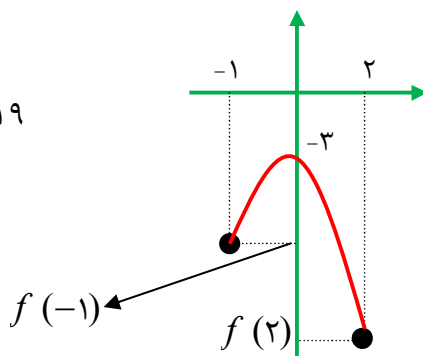
$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow y_{\text{رأس}} = f(0) = -3$$

با توجه به شکل اگر دامنه این تابع را در بازه  $[-1, 2]$  محدود کنیم نمودار این تابع به صورت مقابل است. با توجه به شکل برد این

تابع بازه  $[f(2), -3]$  است از طرفی:

$$f(2) = -4 \times 2^2 - 3 = -19$$

$$\Rightarrow R_f = [-19, -3]$$



در نتیجه  $b - a = 16$  است و  $b = -3, a = -19$  است.

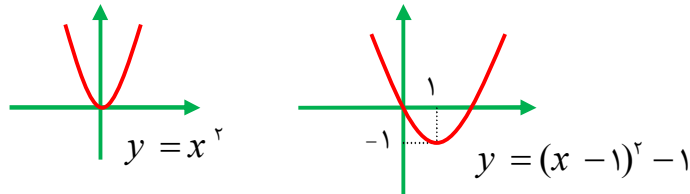
سؤال ۱۱:  $f: R \rightarrow R$  با ضابطه  $f(x) = x^2 - 2x$  کدام است.

- (۱)  $[0, +\infty)$  (۲)  $[2, +\infty)$  (۳)  $[-2, +\infty)$  (۴)  $[-1, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۴

راه حل اول: نمودار تابع را رسم می کنیم:

$$f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow f(x) = (x^2 - 2x + 1) - 1 \Rightarrow f(x) = (x - 1)^2 - 1$$



با توجه به شکل برد آن تابع بازه  $[-1, +\infty)$  است.

راه حل دوم:

$$f(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \xrightarrow{(x-1)^2 \geq 0} f(x) \geq -1$$

پس:  $R_f = [-1, +\infty)$

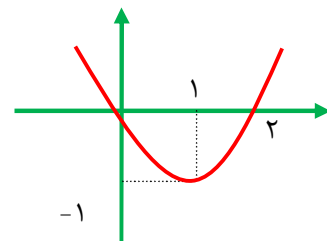
سؤال ۱۲: اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 4 \\ 4x - x^2 & x < 4 \end{cases}$   $f$  برد  $f$  چند عدد صحیح را شامل نمی شود؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

پاسخ: گزینه ۲

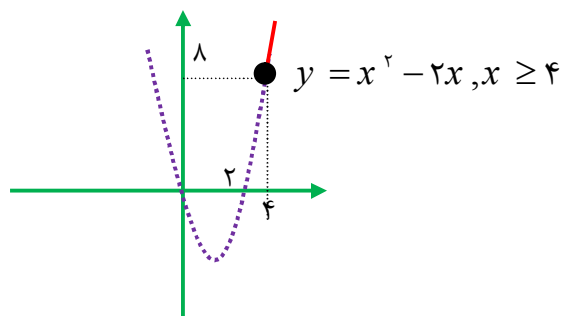
ابتدا نمودار تابع  $y = x^2 - 2x$  را رسم می کنیم:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y_{\text{رأس}} = 1 - 2 = -1$$



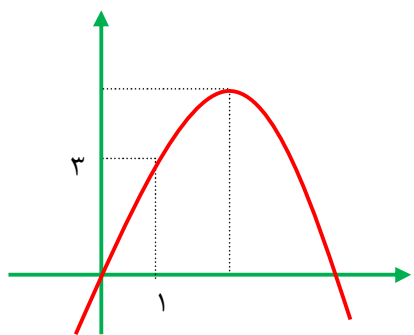
اگر  $x \geq 4$  باشد نمودار این تابع به صورت مقابل است:

$$\begin{cases} f(4) = 8 \\ y = x^2 - 2x & x \geq 4 \end{cases}$$

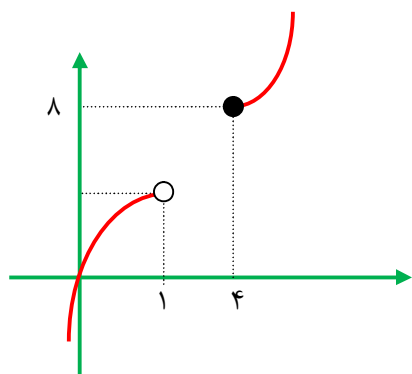
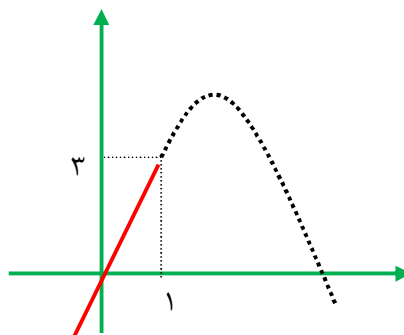


حال نمودار تابع  $y = 4x - x^2$  را در بازه  $x < 1$  رسم می‌کنیم.

$$y = -x^2 + 4x \Rightarrow x_{\text{رأس}} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow y_{\text{رأس}} = -4 + 8 = 4$$



$$\begin{matrix} x < 1 \\ f(1) = 3 \end{matrix}$$



پس نمودار کلی این تابع ۲ ضابطه ای به صورت مقابل است:  
با توجه به شکل برد این تابع شامل ۵ عدد صحیح ۳، ۴، ۵ و ۶ و ۷ نمی‌شود.

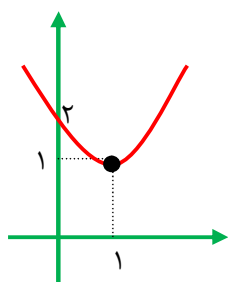
سؤال ۳: برد تابع قطعه ای  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & x \geq 0 \\ 3x + a & x < 0 \end{cases}$  مجموعه  $R$  است. حدود  $a$  کدام است؟

(۱)  $a \leq 2$       (۲)  $a \leq 1$       (۳)  $a \geq 2$       (۴)  $a \geq 1$

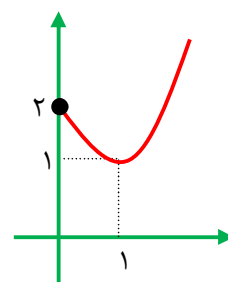
پاسخ: گزینه ۴

ابتدا تابع  $y = x^2 - 2x + 2$  را در بازه  $x \geq 0$  رسم می‌کنیم:

$$x_{\text{رأس}} = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y_{\text{رأس}} = 1^2 - 2 + 2 = 1$$

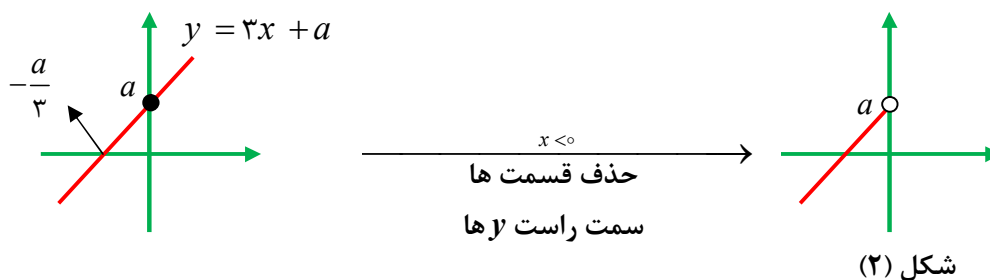


$x \geq 0$   
حذف قسمت‌ها  
سمت چپ y را

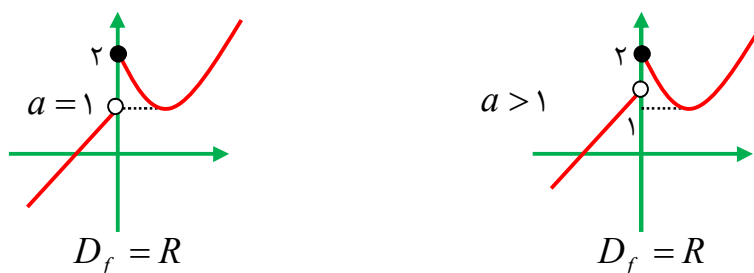


شکل (۱)

حال نمودار فضا  $y = 3x + a$  را در بازه  $x < 0$  رسم می‌کنیم:



با توجه به آن که تابع  $f$  اجتماع مجموعه نقاط شکل (۱) و (۲) است پس لازم است  $a \geq 1$  باشد تا برد تابع  $f$ ،  $R$  باشد:



سؤال ۱۴: برد تابع  $y = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$  چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

(۴) بی شمار

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۲

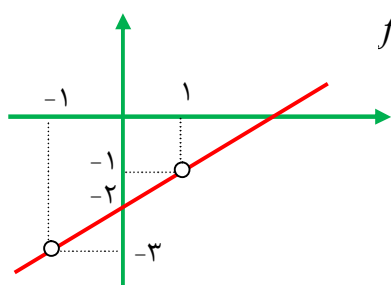
ابتدا دامنه تابع را به دست می‌آوریم و سپس با توجه به دامنه عبارت را ساده و برد تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 1} \quad D_f = R - \{-1, 1\}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 1} = \frac{x^2(x - 2) - (x - 2)}{x^2 - 1} = \frac{(x - 2)(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$$

به شرط آنکه  $x \neq \pm 1$  باشد داریم:

$$f(x) = 2 - 2 \quad D_f = R - \{-1, 1\}$$



پس  $f$  یک تابع قطعی است که از دامنه آن دو عدد  $-1$  و  $1$  حذف

شده است در نتیجه از برد آن نیز مطابق شکل  $f(-1) = -3$ ،  $f(1) = -1$  نیز

حذف می‌شود:

$$D_f = R - \{-1, 1\}$$

$$R_f = R - \{-1, -3\}$$

تذکر: به یاد داشته باشید تعیین دامنه قبل از ساده کردن ضابطه تابع و تعیین برد بعد از ساده کردن ضابطه و با در نظر گرفتن دامنه تابع انجام می پذیرد.

📖 سؤال ۱۵: برد تابع  $y = \frac{3x-2}{x+5}$  کدام است؟

- (۱)  $R - \{-5\}$  (۲)  $R$  (۳)  $R - \{3\}$  (۴)  $R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

👉 پاسخ: گزینه ۳

یک روش حل این است که طرفین وسطین کنیم و  $x$  را بر حسب  $y$  بنویسیم و... اما یک راه کوتاه و سریعتر هم داریم ببینید:

◀◀ برد توابع با ضابطه  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  (با شرط  $c \neq 0$  و  $ad-bc \neq 0$ ) برابر است با:  $R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$

پس در اینجا می توان گفت:  $R_y = R - \{3\}$

📖 سؤال ۱۶: برد تابع  $y = \frac{4x^2}{x^2+1}$  کدام عدد زیر را شامل نمی شود؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳)  $\frac{7}{2}$  (۴)  $\frac{9}{2}$

👉 پاسخ: گزینه ۴

به روشی که برای تعیین برد این تابع استفاده کرده ام فوب دقت کنید:

$$y = \frac{4x^2}{x^2+1} \Rightarrow yx^2 + y = 4x^2 \Rightarrow y = x^2(4-y) \Rightarrow x^2 = \frac{y}{4-y}$$

$$\xrightarrow{x^2 \geq 0} \frac{y}{4-y} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq y < 4$$

از بین گزینه ها فقط گزینه (۴) (یعنی  $\frac{9}{2}$ ) در مجموعه برد قرار ندارد.

📖 سؤال ۱۷: برد تابع  $y = \frac{1}{4+\sqrt{x}}$  کدام است؟

- (۱)  $\left[0, \frac{1}{4}\right]$  (۲)  $\left(0, \frac{1}{4}\right]$  (۳)  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$  (۴)  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

👉 پاسخ: گزینه ۲

روش اول) می دانیم  $\sqrt{x} \geq 0$  و تابع  $y = \sqrt{x}$  همه اعداد بزرگتر یا مساوی صفر را ایجا می کند پس:

$$0 \leq \sqrt{x} \Rightarrow 4 \leq \sqrt{x} + 4$$

از طرفی می دانیم اگر  $a \geq b$  مثبت  $b, a$  باشد داریم  $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$  با توجه به مثبت بودن  $\sqrt{x} + 4$  و ۴ داریم:

$$4 \leq \sqrt{x} + 4 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{x} + 4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < f(x) \leq \frac{1}{4}$$

پس برد تابع  $f(x) = \frac{1}{4 + \sqrt{x}}$  بازه  $\left(0, \frac{1}{4}\right]$  است.

روش دوم اگر  $y = \frac{1}{4 + \sqrt{x}}$  باشد  $y$  را بر حسب  $x$  حساب می کنیم:

$$y = \frac{1}{4 + \sqrt{x}} \Rightarrow 4 + \sqrt{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{y} - 4 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1 - 4y}{y}$$

چون  $\sqrt{x} \geq 0$  است باید  $\frac{1 - 4y}{y} \geq 0$  باشد پس با تعیین علامت عبارت  $p = \frac{1 - 4y}{y}$  برد تابع  $f$  به دست می آید:

$$\frac{1 - 4y}{y} \geq 0 \quad \begin{array}{c|ccccccc} y & -\infty & 0 & & \frac{1}{4} & & +\infty \\ \hline p & - & \frac{0}{-} & + & \frac{0}{+} & - & \end{array} \Rightarrow y \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$$

پس برد تابع  $f$  بازه  $\left(0, \frac{1}{4}\right]$  است.

سؤال ۸: دامنه تابع به صورت  $y = \frac{x - 1}{2x^2 + ax + b}$  به صورت  $R - \{2\}$  می باشد حاصل  $a - b$  کدام است؟

۱۶ (۴)

-۱۶ (۳)

۸ (۲)

-۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

روش اول در تابع  $y = \frac{x - 1}{2x^2 + ax + b}$  نباید فرج کسر صفر باشد. مخرج کسر یک عبارت درجه دوم است. چون دامنه این تابع

$R - \{2\}$  است پس فقط عدد ۲ مخرج کسر را صفر می کند. در نتیجه مخرج یک ریشه دارد. از طرفی می دانیم یک عبارت درجه دوم

زمانی یک ریشه دارد که  $\Delta = 0$  باشد پس دو شرط زیر در مورد تابع مخرج برقرار است:

$$g(x) = 2x^2 + ax + b \Rightarrow \begin{cases} g(2) = 0 \Rightarrow 8 + 2a + b = 0 \\ \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = a^2 - 4b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -8 \Rightarrow b = -8 - 2a \\ a^2 - 4b = 0 \Rightarrow a^2 - 4(-8 - 2a) = 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 16a + 64 = 0$$

$$\Rightarrow (a + 8)^2 = 0 \Rightarrow a = -8$$

$$b = -8 - 2a \xrightarrow{a=-8} b = 8$$

$$\Rightarrow a - b = -8 - 8 = -16$$

روش دوم) چون تابع مفرج فقط یک ریشه ۲ دارد پس تابع مفرج ریشه مضاعف ۲ دارد و تجزیه آن به صورت  $g(x) = k(x-2)^2$  است. از طرفی چون ضریب  $x^2$  در تابع  $g$  برابر ۲ است، پس  $k=2$  است در نتیجه:  
 $g(x) = 2(x-2)^2 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2x^2 - 8x + 8$   
 از طرفی  $g(x) = 2x^2 + ax + 8$  است پس  $a = -8, b = 8, a - b = -16$  است.

سؤال ۱۹: دامنه تابع  $y = \frac{x+1}{2x^2 - 4x + a}$  به صورت  $R - \{b\}$  می باشد حاصل  $a+b$  کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

روش اول) در تابع  $y = \frac{x+1}{2x^2 - 4x + a}$  مفرج کسر نباید صفر باشد. چون دامنه تابع به صورت  $R - \{b\}$  است، پس مفرج کسر دارای یک ریشه  $b$  است. مفرج یک تابع درجه دوم است برای آنکه یک ریشه داشته باشد باید  $\Delta = 0$  باشد پس دو شرط زیر باید در مورد تابع مفرج برقرار باشد:

$$g(x) = 2x^2 - 4x + a \Rightarrow \begin{cases} g(b) = 0 \Rightarrow 2b^2 - 4b + a = 0 \\ \Delta = 0 \Rightarrow 16 - 8a = 0 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a=2} 2b^2 - 4b + 2 = 0 \xrightarrow{\div 2} b^2 - 2b + 1 = 0 \Rightarrow (b-1)^2 = 0 \Rightarrow b = 1$$

پس  $a+b=3$  است.

روش دوم) چون تابع مفرج فقط یک ریشه دارد و یک عبارت درجه دوم است، پس مفرج دارای ریشه مضاعف  $b$  است و تجزیه آن به صورت  $g(x) = k(x-b)^2$  است از طرفی چون ضریب  $x^2$  در مفرج برابر ۲ است پس  $k=2$  خواهد بود و در نتیجه:

$$g(x) = 2x^2 - 4x + a = 2(x-b)^2 \Rightarrow 2x^2 - 4x + a = 2x^2 - 4bx + 2b^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x + a = 2x^2 - 4bx + 2b^2$$

با توجه به آن که تساوی فوق همواره برقرار است باید:

$$\begin{cases} -4b = -4 \Rightarrow b = 1 \\ a = 2b^2 \xrightarrow{b=1} a = 2 \Rightarrow a+b = 3 \end{cases}$$

سؤال ۲۰: برای چند عدد صحیح  $m$  دامنه تعریف  $f(x) = \frac{1}{mx^2 - 4x + m}$  برابر  $R$  می باشد؟

۱ (۵) ۲ (۳) ۳ (بی شمار) ۴ (هیچ)

پاسخ: گزینه ۳

از آنجایی که باید دامنه تابع  $f, R$  باشد لازم است تابع مفرج ریشه نداشته باشد. از طرفی چون تابع مفرج یک تابع درجه دوم است، زمانی ریشه ندارد که  $\Delta < 0$  باشد پس:

$$mx^2 - 4x + m = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4m^2 < 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} 4 - m^2 < 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 2$$

پس اگر  $m \in R - [-2, 2]$  باشد مفرج ریشه ندارد و دامنه تابع تابع  $f$  برابر  $R$  است.

سؤال ۲۱: دامنه تابع  $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 4}$  شامل چند عدد طبیعی می باشد؟

- (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ۲

باید تابع زیر را دیگالی نامنفی باشد پس:

$$-x^2 + 4x - 4 \geq 0 \Rightarrow -x(x^2 - 4x + 4) \geq 0 \Rightarrow -x(x - 2)^2$$

$$p = -x(x - 2)^2$$

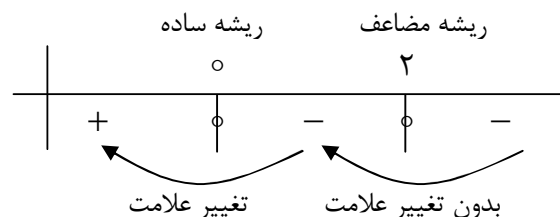
به کمک تعیین علامت عبارت  $p = -x(x - 2)^2$  داریم:

|             | ۰ | ۲ |   |
|-------------|---|---|---|
| $-x$        | + | - | - |
| $(x - 2)^2$ | + | + | + |
| $p$         | + | - | - |

$$\Rightarrow p \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup \{2\}$$

تذکر: البته می توانستیم به صورت ذهنی تشخیص دهیم که عبارت  $-x(x - 2)^2$  به ازای اعداد منفی، مثبت فواید شد و به ازای  $x = 0, x = 2$  برابر صفر می شود پس تنها عدد طبیعی عضو دامنه  $x = 2$  است.

تذکر: می توانیم عبارت  $p$  را به کمک روش سریع تعیین علامت کنیم یعنی با پیدا کردن ریشه های  $p$  (یعنی  $x = 0, x = 2$ ) و رسم جدول عددی بزرگتر از ۲ در  $p$  قرار دهیم و چون در  $x = 2$  ریشه مضاعف داریم زمانی که از  $+\infty$  به ۲ می رسم و از این ریشه عبور می کنیم علامت را تغییر ندهیم ولی چون  $x = 0$  ریشه ساده است با عبور از آن علامت عبارت را تغییر دهیم.



سؤال ۲۲: دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{ax^2 - (a+1)x + 1}$  برابر  $R$  است. مقدار  $f(3)$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

چون دامنه تابع برابر  $R$  است، پس باید تابع زیر را دیگالی همواره نامنفی باشد. تابع زیر را دیگالی یک عبارت درجه دوم است. یک عبارت درجه دوم زمانی همواره نامنفی است که  $\Delta \leq 0, a > 0$  باشد در نتیجه:

$$g(x) = ax^2 - (a+1)x + 1 \rightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \rightarrow \text{همواره نامنفی}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = (a+1)^2 - 4a \leq 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)^2 \leq 0 \Rightarrow a=1 \\ a > 0 \end{cases}$$

تذکره: چون عبارت  $(a-1)^2$  به ازای  $a=1$  برابر صفر و به ازای بقیه اعداد مثبت است پس تنها جواب نامعادله  $(a-1)^2 \leq 0$ ،  $a=1$  است. اگر  $a=1$  باشد داریم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \Rightarrow f(3) = 2$$

سؤال ۱۳: اگر  $f(x) = \sqrt{x-a} + b$  به طوری که  $D_f = [2, +\infty)$  و  $R_f = [5, +\infty)$  مقدار  $f(18)$  کدام

است؟

۹ (۴)

۲۰ (۴)

۲۳ (۲)

۱۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

در تابع  $f$  باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد پس باید:

$$x - a \geq 0 \Rightarrow x \geq a \Rightarrow D_f = [a, +\infty)$$

با توجه به آن که دامنه تابع  $f$  بازه  $[2, +\infty)$  است پس  $a=2$  است پس داریم:  $f(x) = \sqrt{x-2} + b$ . از طرفی می

دانیم به ازای  $x \geq 2$  عبارت  $\sqrt{x-2}$  همواره بزرگتر یا مساوی صفر است (و همه اعداد نامنفی را ایجاد می کند) پس:

$$0 \leq \sqrt{x-2} \xrightarrow{+b} b \leq \sqrt{x-2} + b \Rightarrow b \leq f(x)$$

$$\Rightarrow R_f = [b, +\infty)$$

با توجه به آنکه برد تابع  $f$  بازه  $[5, +\infty)$  است پس  $b=5$  است و داریم:  $f(x) = \sqrt{x-2} + 5$  در نتیجه:

$$f(18) = \sqrt{18-2} + 5 = 9$$

سؤال ۱۴: برد تابع  $f(x) = (x + |x|) \sqrt{\frac{2-x}{x}}$  شامل چند عدد صحیح است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا دامنه تابع  $f$  را به دست می آوریم:

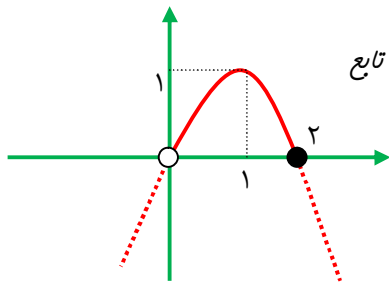
$$\frac{2-x}{x} \geq 0 \Rightarrow D_f = (0, 2]$$

$$\begin{array}{c} 0 \qquad 2 \\ - \quad | \quad + \quad | \quad - \\ \text{ت.ن} \end{array}$$

اگر  $0 < x \leq 2$  باشد داریم  $|x| = x$  در نتیجه:

$$f(x) = (x+x)\sqrt{\frac{2-x}{x}} = 2x\sqrt{\frac{2-x}{x}} \xrightarrow{x>0} f(x) = 2\sqrt{x^2 \times \frac{2-x}{x}}$$

$$= 2\sqrt{x(2-x)} \Rightarrow f(x) = 2\sqrt{-x^2 + 2x}$$



پس باید برد تابع  $f$  را به ازای  $0 < x \leq 2$  به دست آوریم تابع زیر رادیکال رد ضابطه تابع یک سهمی است پس ابتدا برد این سهمی را به ازای  $0 < x \leq 2$  به دست می آوریم:

$$g(x) = -2x^2 + 2x \Rightarrow x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\Rightarrow y_{\text{رأس}} = -1^2 + 2 = 1 \Rightarrow R_g = (-\infty, 1]$$

پس تابع  $g$  به ازای  $0 < x \leq 2$  مقادیر کوچکتر یا مساوی ۱ را ایجاد و وارد تابع  $f$  می کند. چون باید زیر رادیکال نامنفی باشد پس مقادیر بازه  $[0, 1]$  وارد  $f$  می شوند و جز آن ها به صورت بازه  $[0, 1]$  فواید بود:

$$0 \leq g(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{g(x)} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2\sqrt{g(x)} \leq 2$$

در نتیجه در بازه  $0 \leq x \leq 2$  برد تابع  $f$  بازه  $[0, 1]$  است پس برد تابع  $f$  شامل ۳ عدد صحیح ۰، ۱ و ۲ است.

سؤال ۲۵: دامنه تابع  $y = \sqrt[4]{|4-x|(9-x^2)}$  کدام است؟

- (۱)  $R - (-3, 3)$  (۲)  $[-3, 4] \cup \{-4\}$  (۳)  $[-3, 3]$  (۴)  $[-3, 3] \cup \{4\}$

پاسخ: گزینه ۴

باید  $0 \leq |4-x|(9-x^2)$  از آنجا که همواره  $|4-x| \geq 0$  و به ازای  $x = 4$  برابر صفر می شود پس  $x = 4$  یکی از جواب های نامعادله است و داریم:

$$|4-x| \times (9-x^2) \geq 0 \Rightarrow 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \rightarrow |x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

بزرگتر یا مساوی صفر

$$\Rightarrow D_f = [-3, 3] \cup \{4\}$$

سؤال ۲۶: دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{2x} - \sqrt{x+3}$  شامل چند عدد طبیعی نمی باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱

به خاطر وجود  $\sqrt{x+3}$  باید  $x+3 \geq 0$  باشد پس  $x \geq -3$  است از طرفی به خاطر وجود  $\sqrt{2x}$  باید  $2x \geq 0$  باشد بنابر این:

$$2x \geq \sqrt{x+3} \xrightarrow{x \geq 0} 4x^2 \geq x+3 \Rightarrow 4x^2 - x - 3 \geq 0$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & -3 & & 1 & \\ + & | & - & | & + \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \text{یا} \\ x \leq -3 \end{cases} \xrightarrow{x \geq 0} x \geq 1$$

سؤال ۲۷: برد تابع  $y = \sqrt{17-x^2}$  شامل چند عدد صحیح است؟

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$y$  را با یک رادیکال با فرجه زوج مساوی شده پس  $y \geq 0$  از طرفی:

$$y^2 = 17 - x^2 \Rightarrow x^2 = 17 - y^2 \xrightarrow{x^2 \geq 0} 17 - y^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow y^2 \leq 17 \rightarrow \text{بجز} \rightarrow |y| \leq \sqrt{17} \Rightarrow -\sqrt{17} \leq x \leq \sqrt{17}$$

چون گفتیم باید  $y \geq 0$  پس برد تابع برابر می شود با  $y \in [0, \sqrt{17}]$  که شامل اعداد صحیح  $0, 1, 2, 3, 4$  است.

سؤال ۲۸: برد تابع  $y = \sqrt{2 - \sqrt{4-x}}$  کدام است؟

[۰, \sqrt{2}] (۴)

[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] (۳)

[۰, \sqrt{2}] (۲)

(۰, \sqrt{2}] (۱)

پاسخ: گزینه ۴

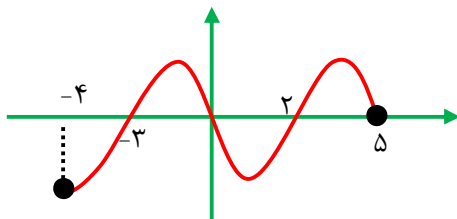
اولاً  $y \geq 0$  است (چون  $y$  مساوی شده با یک رادیکال با فرجه زوج) از طرفی:

$$y = \sqrt{2 - \sqrt{4-x}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y^2 = 2 - \sqrt{4-x} \Rightarrow \sqrt{4-x} = 2 - y^2$$

چون  $\sqrt{4-x} \geq 0$  پس داریم:

$$2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 2 \rightarrow \text{بجز} \rightarrow |y| \leq \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \xrightarrow{\cap (y \geq 0)} 0 \leq y \leq \sqrt{2}$$

سؤال ۲۹: اگر نمودار تابع  $f$  شکل مقابل باشد دامنه تعریف  $y = \sqrt{\frac{-x}{f(x)}}$  شامل چند عدد صحیح است؟



۶ (۱)

۵ (۲)

۳ (۳)

۷ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد یعنی  $\frac{-x}{f(x)} \geq 0$  در نتیجه به کمک تعیین علامت این عبارت داریم:

$$D_f = [-4, 5]$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -3, 0, 2, 5$$

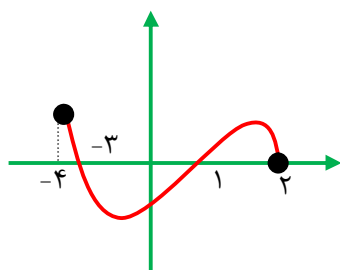
چون تابع  $f$  بالای محور  $x$  هاست.   
 چون تابع  $f$  زیر محور  $x$  هاست.

|                   |            |    |   |   |   |            |
|-------------------|------------|----|---|---|---|------------|
|                   | -۴         | -۳ | ۰ | ۲ | ۵ |            |
| $f(x)$            | تعریف نشده | -  | ۰ | + | ۰ | تعریف نشده |
| $-x$              | +          | +  | + | ۰ | - | -          |
| $\frac{-x}{f(x)}$ | تعریف نشده | -  | + | + | - | تعریف نشده |

$$\frac{-x}{f(x)} \geq 0 \rightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 2)$$

پس دامنه تابع  $y = \sqrt{\frac{-x}{f(x)}}$  شامل سه عدد صحیح ۱، -۱ و -۲ است.

سؤال ۳۰: شکل مقابل نمودار تابع  $y = f(x)$  است. دامنه تابع  $\sqrt{xf(x)}$  کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۲)



(۱)  $[-3, 2]$

(۲)  $[0, 2]$

(۳)  $[-4, -3] \cup [1, 2]$

(۴)  $[-3, 0] \cup [1, 2]$

پاسخ: گزینه ۴

$xf(x) \geq 0$  زیر رادیکال قرار گرفته پس باید  $xf(x) \geq 0$  که برای این امر باید  $x$ ،  $f(x)$  هم علامت یا لاکل یکی صفر باشد:

|         |    |    |   |   |   |
|---------|----|----|---|---|---|
| $x$     | -۴ | -۳ | ۰ | ۱ | ۲ |
| $xf(x)$ | -  | ۰  | + | - | ۰ |
|         |    | ج  | ج | ج | ج |

$\Rightarrow D_f = [-3, 0] \cup [1, 2]$

سؤال ۳۱: در برد تابع  $f(x) = x + 7 + \frac{1}{x+3}$  چند عدد صحیح قرار ندارد؟

(۴) ۵

(۳) ۳

(۲) ۴

(۱) ۲

پاسخ: گزینه ۳

روش اول) می دانیم اگر  $a > 0$  باشد  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  و اگر  $a < 0$  باشد  $a + \frac{1}{a} \leq -2$  است (سعی کنید این مطلب را اثبات

کنید) با توجه به این مطلب اگر  $a + \frac{1}{a} \leq -2$  باشد داریم:  $a = x + 3 > 0$

$$x + 3 + \frac{1}{x+3} \geq 2 \xrightarrow{+4} x + 7 + \frac{1}{x+3} \geq 6$$

$$x + 3 + \frac{1}{x+3} \leq -2 \xrightarrow{+4} x + 7 + \frac{1}{x+3} \leq 2 \text{ اگر } 0 < a = x + 3 \text{ باشد داریم:}$$

پس برد تابع  $f$  به صورت  $(-\infty, 2] \cup [6, \infty)$  است که شامل ۳ عدد صحیح ۵، ۴ و ۳ نیست.  
تذکره: در حالت کلی جمع هر عدد مثبت با معکوسش بزرگتر یا مساوی ۲ و جمع هر عدد منفی با معکوسش کوچکتر یا مساوی -۲ است.

$$\begin{cases} a > 0: a + \frac{1}{a} \geq 2 \\ a < 0: a + \frac{1}{a} \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2$$

روش دوم

$$y = x + 3 + \frac{1}{x+3} + 4 \Rightarrow y - 4 = x + 3 + \frac{1}{x+3} \Rightarrow |y - 4| \geq 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - 4 \geq 2 \\ y - 4 \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 6 \\ y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow R_y = R - (2, 6)$$

سؤال ۳۲: برد تابع  $y = x + 4 + \frac{1}{x+1}$  کدام است؟

- (۱)  $R - (1, 5)$  (۲)  $[5, +\infty)$  (۳)  $R - [1, 5]$  (۴)  $(-\infty, 1]$

پاسخ: گزینه ۱

$$y = x + 4 + \frac{1}{x+1} \Rightarrow y - 3 = x + 1 + \frac{1}{x+1} \xrightarrow{\left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2} |y - 3| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} y - 3 \geq 2 \\ y - 3 \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 5 \\ y \leq 1 \end{cases}$$

در نتیجه برد تابع برابر است با:  $R_y = R - (1, 5)$

سؤال ۳۳: برد تابع  $y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$  کدام است؟ (تجربی خارج ۸۹)

- (۱)  $[3\sqrt{2}, +\infty)$  (۲)  $[\sqrt{3}, +\infty)$  (۳)  $[2, +\infty)$  (۴)  $[4, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۳

یک کم مقوره تابع را تغییر می دهیم:

$$y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

حالا فرض کنیم  $\sqrt{x^2 + 1} = a$  پس تابع به شکل  $a + \frac{1}{a}$  می باشد و چون  $a$  مثبت است پس  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  می باشد.  
یعنی  $y \geq 2$  و در نتیجه  $R_y = [2, +\infty)$  است.

## تست دامنه و برد تابع

سؤال ۱: اگر  $f(-1) + 2f(-6) - f(2) = 9$  باشد مجموعه برد تابع  $f = \{(-1, 2m+1), (2, 3-m), (-6, 2)\}$

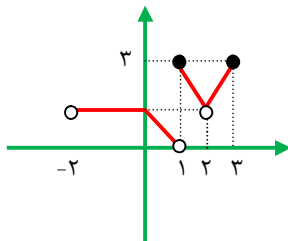
برابر کدام است؟

- (۱)  $\{5, -1, 2\}$  (۲)  $\{1, -5, 2\}$  (۳)  $\{-5, -1, 2\}$  (۴)  $\{5, 1, 2\}$

سؤال ۲: تابع  $f$  را به صورت  $f = \{(x, y) \mid -2 \leq x < 4, x \in \mathbb{Z}, y = x^2\}$  در نظر بگیرید. برد تابع شامل چند

عضو است؟

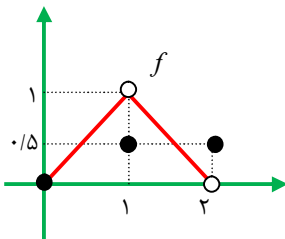
- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶



سؤال ۳: دامنه تابع زیر کدام است؟

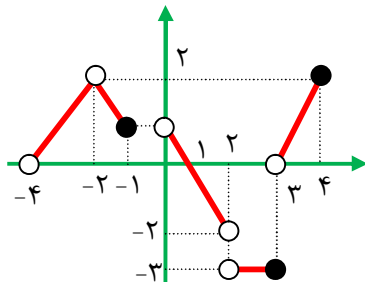
- (۱)  $[-2, 3]$   
(۲)  $(-2, 3)$   
(۳)  $(-2, 3]$   
(۴)  $(-2, 2) \cup (2, 3]$

سؤال ۴: با توجه به نمودار تابع  $f$  در شکل زیر دامنه و برد این تابع به ترتیب از راست به چپ کدام اند؟



- (۱)  $R = \{0 \leq x \leq 1\}, D = \{0 \leq x < 2\}$   
(۲)  $R = \{0 \leq x \leq 1\}, D = \{0 \leq x \leq 2\}$   
(۳)  $R = \{0 \leq x < 1\}, D = \{0 < x \leq 2\}$   
(۴)  $R = \{0 \leq x < 1\}, D = \{0 \leq x \leq 2\}$

سؤال ۵: اگر برد و دامنه تابع زیر را به ترتیب با  $R$  و  $D$  نشان دهیم مجموعه  $R - D$  شامل چند عدد صحیح است؟



- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) صفر

سؤال ۶: اگر برد تابع خطی  $f(x) = -6x + 4$  مجموعه  $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$  باشد دامنه آن کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, \frac{2}{3})$  (۲)  $(-\infty, -\frac{2}{3})$  (۳)  $(\frac{2}{3}, +\infty)$  (۴)  $(-\frac{2}{3}, +\infty)$

سؤال ۷: اگر دامنه تابع  $f(x) = 2x - 1$  بازه  $[3, +\infty)$  و دامنه تابع  $g(x) = \frac{1}{3}x + 3$  بازه  $(-\infty, 3]$  باشد

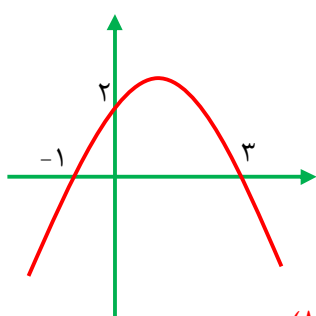
اجتماع برد توابع  $f$  و  $g$  کدام است؟

- (۱)  $Z$  (۲)  $R$  (۳)  $R - \{5\}$  (۴)  $R - (4, 5)$

سؤال ۸: اگر دامنه تابع  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  بازه  $(-1, 5)$  باشد برد این تابع کدام است؟

- (۱)  $(-1, 8)$  (۲)  $[0, 9]$  (۳)  $[0, 9]$  (۴)  $[-1, 8)$

سؤال ۹: اگر نمودار سهمی  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد برد تابع  $y = 2f(x) + 1$  کدام است؟



- (۱)  $\left(-\infty, \frac{14}{3}\right]$  (۲)  $\left(-\infty, \frac{17}{3}\right]$

- (۳)  $\left(-\infty, \frac{16}{3}\right]$  (۴)  $\left(-\infty, \frac{19}{3}\right]$

سؤال ۱۰: برد رابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$  کدام است؟ (تجربی خارج ۸۹)

- (۱)  $R$  (۲)  $(0, +\infty)$  (۳)  $[0, +\infty)$  (۴)  $(-\infty, 0)$

سؤال ۱۱: برد تابع  $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -3 & x < 0 \end{cases}$  کدام است؟

- (۱)  $[0, +\infty)$  (۲)  $[-3, +\infty)$  (۳)  $[0, +\infty) \cup \{-3\}$  (۴)  $R$

سؤال ۱۲: برد تابع با ضابطه  $h(x) = \begin{cases} -2x - 3, & x < 1 \\ x - 4, & 1 \leq x \leq 2 \\ x + 2, & 2 < x \end{cases}$  کدام است؟

- (۱)  $R$  (۲)  $(-5, +\infty)$  (۳)  $(-5, 4)$  (۴)  $[-3, 4)$

سؤال ۱۳: نمودار تابع های  $f(x) = -2x + 3$  با دامنه  $(-\infty, 1]$  و  $g(x) = 2x - 5$  با دامنه  $\{2, 3, 4\}$  را در

یک دستگاه مختصات رسم می کنیم. کدام گزینه در مورد شکل حاصل صحیح است؟

(۱) تابعی با برد  $[-1, +\infty)$  می باشد.

(۲) تابعی است که مقدار آن به ازای  $x = 1$  می تواند برابر ۱ یا برابر ۳ باشد.

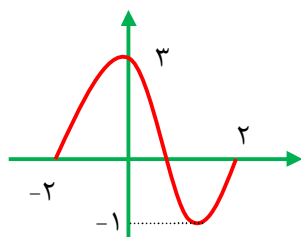
(۳) نمودار تابع محور  $x$  ها را در نقطه ای به طول ۲ قطع می کند.

(۴) تابعی با دامنه  $\{2, 3, 4\} \cup (-\infty, 1]$  است.

سؤال ۱۴: اگر  $f(x) = |x+1| - 2$  و دامنه  $f$  بازه  $[1, 3]$  باشد آنگاه برد تابع  $f$  کدام است؟

- (۱)  $[0, 2]$  (۲)  $[0, 1]$  (۳)  $[1, 2]$  (۴)  $[1, 3]$

سؤال ۱۵: نمودار تابع  $f$  به شکل زیر است چند عدد صحیح هم در دامنه و هم در برد تابع قرار دارند؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

سؤال ۱۶: اگر دامنه توابع زیر برابر با مجموعه اعداد فرد یک رقمی باشد برد کدام تابع اعضای متمایز کمتری دارد؟

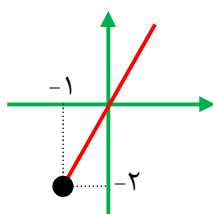
(۱)  $y = x + 2$  (۲)  $y = x^2 - 4x$

(۳)  $y = |x+1| - 3$  (۴) تعداد اعضای متمایز برد هر سه گزینه یکسان است.

سؤال ۱۷: دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{3-x}}$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

سؤال ۱۸: نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. دامنه تابع  $y = \sqrt{2-f(x)}$  کدام است؟



(۱)  $[-1, 2]$

(۲)  $[-1, \infty)$

(۳)  $(-\infty, 1]$

(۴)  $[-1, 1]$

سؤال ۱۹: دامنه و برد تابع  $y = \sqrt{-x^3}$  با دامنه و برد کدام تابع زیر برابر است؟

(۱)  $y = -x\sqrt{x}$  (۲)  $y = -x\sqrt{-x}$  (۳)  $y = x\sqrt{-x}$  (۴)  $y = x\sqrt{x}$

سؤال ۲۰: برد تابع  $t = \sqrt{8+2x-x^2}$  به صورت  $[a, b]$  است حاصل  $b-a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

سؤال ۲۱: چند عدد صحیح و منفی در برد تابع  $y = x - 8\sqrt{x}$  قرار دارند؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

سؤال ۲۲: دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 8x + 15}{-x^2 - 2}}$  کدام است؟

- (۱)  $R - (3, 5)$  (۲)  $(5, +\infty)$  (۳)  $[3, 5] - \{4\}$  (۴)  $[3, 5]$

سؤال ۲۳: بزرگترین بازه ای که تابع  $f(x) = \sqrt{\frac{(3-x)(3-\cos x)}{x+2}}$  روی آن تعریف شده است برابر کدام

است؟

- (۱)  $(2, 3)$  (۲)  $(-2, 3)$  (۳)  $(-2, 3]$  (۴)  $(-3, -2)$

سؤال ۲۴: دامنه تعریف تابع  $f(x) = (2x^2 - x^4 + 3)^{-\frac{1}{2}}$  شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

سؤال ۲۵: دامنه تابع  $y = \frac{\sqrt{x} + 2}{x\sqrt{x} + 2}$  کدام است؟

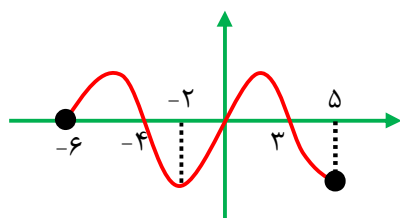
- (۱)  $[0, +\infty) - \{1\}$  (۲)  $[1, +\infty)$  (۳)  $[0, +\infty)$  (۴)  $R - [-1, 0]$

سؤال ۲۶: برد تابع  $y = \sqrt{4x^2 - 4x + 2}$  کدام است؟

- (۱)  $[2, +\infty)$  (۲)  $[1, +\infty)$  (۳)  $[0, 1]$  (۴)  $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

سؤال ۲۷: نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل است. دامنه تابع  $y = \sqrt{xf(x)}$  شامل چند عدد صحیح

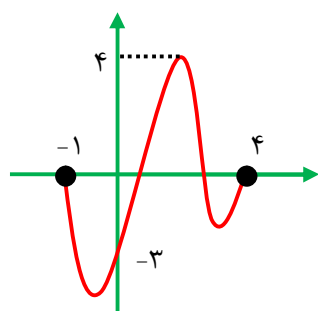
است؟



- (۱) ۸  
(۲) ۹  
(۳) ۱۰  
(۴) ۱۱

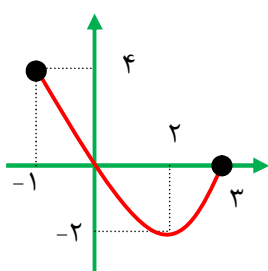
سؤال ۲۸: اگر نمودار تابع  $f$  شکل مقابل باشد دامنه و برد تابع  $g(x) = 3 - f(x)$  به ترتیب بازه  $[a, b]$  و بازه

$[c, d]$  می باشند.  $ac - bd$  کدام است؟



- (۱) -۲۰  
(۲) -۲۳  
(۳) -۲۶  
(۴) -۲۲

سؤال ۲۹: اگر نمودار تابع  $f$  به صورت روبه رو باشد دامنه تابع  $y = \frac{3}{\sqrt{2+f(x)}}$  شامل چند عدد صحیح است؟



- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) ۵

## پاسخنامه تست دامنه و برد تابع

۱- پاسخ: گزینه ۴

با توجه به تابع  $f = \{(-1, 2m+1), (2, 3-m), (-6, 2)\}$  داریم:

$$f(2) - f(-6) + 2f(-1) = (4-m) - (2) + 2(2m+1) = 3-m-2+4m+2 \\ = 3m+3=9 \Rightarrow 3m=6 \Rightarrow m=2$$

با جایگذاری  $m=2$  خواهیم داشت:

$$f = \{(-1, 5), (2, 1), (-6, 2)\} \Rightarrow f \text{ برد تابع: } R_f = \{5, 1, 2\}$$

۲- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا شروع می کنیم به نوشتن عضوهای دوتایی تابع  $f$  گفته شده  $-2 \leq x < 4$  و  $x$  عددی صحیح است یعنی  $x$  می تواند

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3 \text{ باشد ضمناً } y = x^2 \text{ است پس داریم:} \\ f = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\} \Rightarrow f_{\text{بر}} = \{4, 1, 0, 9\}$$

بنابراین برد تابع شامل چهار عضو است.

۳- پاسخ: گزینه ۲

تصویر نمودار تابع روی محور  $x$  ها دامنه تابع است. در این سوال توجه کنید که نقطه ای به طول  $x=2$  به صورت توافقی است و جزو دامنه تابع نیست.

$$\text{دامنه: } (-2, 3] - \{2\} = (-2, 2) \cup (2, 3]$$

۴- پاسخ: گزینه ۴

$$f \text{ دامنه: } D = \{0 \leq x \leq 2\}$$

$$f \text{ برد: } R = \{0 \leq x < 1\}$$

۵- پاسخ: گزینه ۲

تصویر نمودار بر روی محور  $y$  ها برابر با برد تابع و تصویر آن بر روی محور  $x$  ها برابر با دامنه تابع است پس:

$$R = (-3, 2] \cup \{-2\}$$

$$D = (-4, -2) \cup (-2, -1] \cup (0, 2) \cup (2, 4]$$

$$\text{پس: } R - D = (-1, 0) \cup \{2\}$$

 $R - D$  شامل دو عدد صحیح (عدد صفر و ۲) است.

۶- پاسخ: گزینه ۱

طبق برد تابع داریم:

$$y > 0 \Rightarrow -6x + 4 > 0 \Rightarrow -6x > -4 \\ \Rightarrow x < \frac{4}{6} \Rightarrow x < \frac{2}{3} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$$

## ۷- پاسخ: گزینه ۴

نمودار توابع  $f, g$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

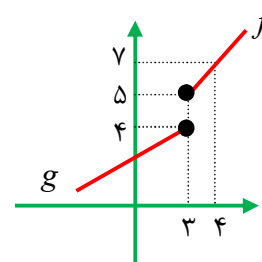
$$f(x) = 2x - 1, \quad D_f = [3, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x + 3, \quad D_g = (-\infty, 3]$$

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | ۳ | ۴ |
| $f$ | ۵ | ۷ |

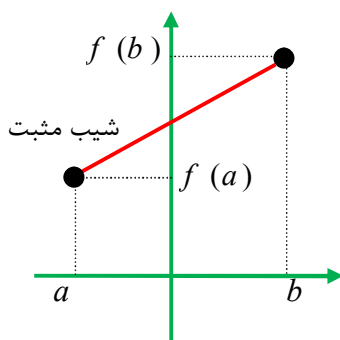
  

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | ۰ | ۳ |
| $g$ | ۳ | ۴ |

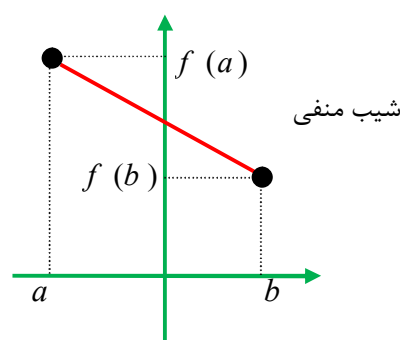


با توجه به رسم نمودار توابع  $f, g$  در یک دستگاه اجتماعی برد دو تابع  $f, g$  برابر است با:  $R - (4, 5)$

تذکر: اگر ضابطه یک تابع قطعی باشد و شیب آن مثبت باشد مطابق شکل (۱) اگر دامنه آن  $[a, b]$  باشد برد آن  $[f(a), f(b)]$  و اگر شیب آن منفی باشد برد آن مطابق شکل (۲)،  $[f(b), f(a)]$  خواهد بود.



شکل (۱)



شکل (۲)

## ۸- پاسخ: گزینه ۴

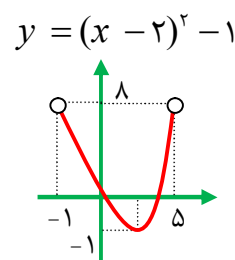
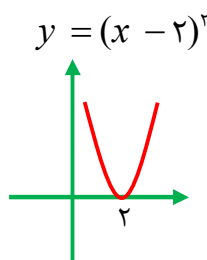
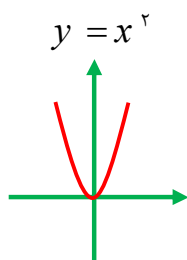
با رسم نمودار سهمی و مشخص کردن دامنه تابع برد تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x - 2)^2 - 1$$

$$f(-1) = (-1 - 2)^2 - 1 = 8$$

$$f(5) = (5 - 2)^2 - 1 = 8$$

با استفاده از انتقال نمودار تابع  $y = x^2$  داریم:



پس برد تابع  $f$  برابر با  $[-1, 8]$  است.

## ۹- پاسف: گزینه ۴

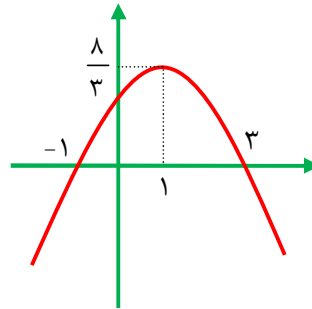
ابتدا باید ضابطه سهمی را به دست آوریم با توجه به شکل از دو راه زیر می توان ضابطه  $f$  را به دست آورد.  
روش اول) سهمی در دو نقطه به طول های  $-۱$  و  $۳$  با محور طول های برخورد کرده است پس  $x = ۳, x = -۱$  ریشه های سهمی هستند. در نتیجه در معادله سهمی عوامل  $x - ۳, x + ۱$  وجود دارد.

$$f(x) = a(x + 1)(x - 3)$$

در معادله فوق ضریب  $a$  برای آن است که هر عدد غیر صفری در عبارت  $(x - 3)(x + 1)$  ضرب شود، در مقدار ریشه های آن بی تاثیر است اما درجه عبارت را افزایش نمی دهد، پس باید  $a$  را تعیین کنیم. با توجه به شکل  $f(0) = 2$  است پس:

$$f(0) = 2 \Rightarrow a \times 1 \times -3 = 2$$

$$\Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$



در نتیجه:  $f(x) = -\frac{2}{3}(x + 1)(x - 3)$

با توجه به شکل  $x$  رأس سهمی برابر ۱ است، زیرا دو ریشه سهمی نسبت به محور تقارن سهمی متقارن اند که میانگین دو ریشه، همان مفتصات  $x$  رأس سهمی است پس  $y$  رأس برابر  $f(1)$  است.

$$f(1) = -\frac{2}{3} \times 2 \times -2 = \frac{8}{3}$$

پس با توجه به شکل سهمی برد این تابع بازه  $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$  است در نتیجه:

$$f(x) \leq \frac{8}{3} \xrightarrow{\times 2} 2f(x) \leq \frac{16}{3} \xrightarrow{+1} 2f(x) + 1 \leq \frac{19}{3}$$

در نتیجه برد تابع  $y = 2f(x) + 1$  بازه  $\left(-\infty, \frac{19}{3}\right]$  است.

روش دوم) می داریم صورت کلی یک تابع درجه دوم به صورت است با توجه به شکل داریم:

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 2 \Rightarrow c = 2 \\ f(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c = 0 \\ f(3) = 0 \Rightarrow 9a + 3b + c = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{c=2} \begin{cases} a - b = -2 \\ 9a + 3b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b = -6 \\ 9a + 3b = -2 \end{cases} \Rightarrow 12a = -8 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{a=-\frac{2}{3}} -\frac{2}{3} - b = -2 \Rightarrow b = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$$

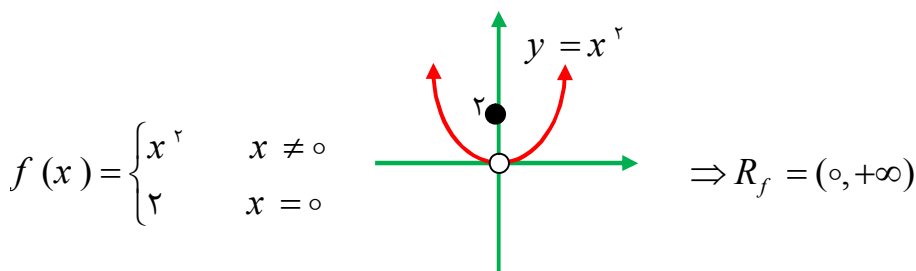
با توجه به آن که نمودار تابع  $f$  یک سهمی رو به پایین است پس برد آن بازه  $[-\infty, y]$  رأس سهمی را به دست می آوریم:

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = -1 \Rightarrow y_{\text{رأس}} = f(-1) = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 2 = \frac{8}{3} \Rightarrow f(x) \leq \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow 2f(x) \leq \frac{16}{3} \Rightarrow 2f(x) + 1 \leq \frac{19}{3}$$

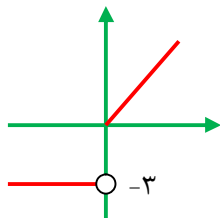
۱۰- پاسخ: گزینه ۲

با رسم نمودار به جواب می رسم:



۱۱- پاسخ: گزینه ۳

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -3 & x < 0 \end{cases} \text{ تابع}$$



طبق شکل می بینیم برای  $x \geq 0$  مقدار تابع در بازه  $[0, +\infty)$  تغییر می کند و در ضابطه دوم وقتی  $x < 0$  است مقدار تابع تنها عدد  $-3$  است. پس برد تابع عبارت است از:

$$R_f = [0, +\infty) \cup \{-3\}$$

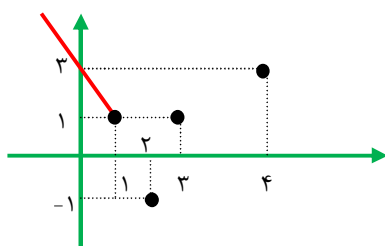
۱۲- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا برد تک تک ضابطه ها را حساب می کنیم:

$$\begin{cases} x < 1 \Rightarrow -2x > -2 \Rightarrow -2x - 3 > -5 \Rightarrow R_1 = (-5, +\infty) \\ 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq x - 4 \leq -2 \Rightarrow R_2 = [-3, -2] \\ x > 2 \Rightarrow x + 2 > 4 \Rightarrow R_3 = (4, +\infty) \end{cases}$$

$$R_h = R_1 \cup R_2 \cup R_3 = (-5, +\infty)$$

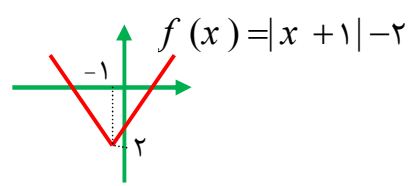
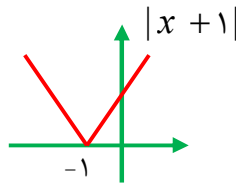
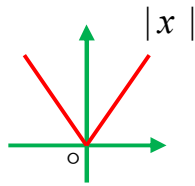
۱۳- پاسخ: گزینه ۴



با توجه به شکل حاصل از رسم نمودار توابع مورد نظر، چون هر قط موازی محور  $y$  ها، نمودار جدید را حداکثر در یک نقطه قطع می کند، نمودار یک تابع هست و محور را قطع نمی کند، همچنین مقدار این تابع به ازای  $x = 1$  برابر یک بوده و دامنه آن  $(-\infty, 1] \cup \{2, 3, 4\}$  و برد آن  $\{-1\} \cup [1, +\infty)$  است.

## ۱۴- پاسخ: گزینه ۱

با استفاده از انتقال نمودار تابع  $y = |x|$  نمودار تابع  $f(x) = |x+1| - 2$  را رسم می‌کنیم:

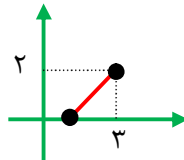


با توجه به دامنه  $D_f = [-1, 3]$  داریم:

$$y(1) = 0$$

$$y(3) = 2$$

$$\text{برد تابع: } R = [0, 2]$$



## ۱۵- پاسخ: گزینه ۲

$$f_{\text{دامنه}} = [-2, 2]$$

$$f_{\text{برد}} = [-1, 3]$$

$$f_{\text{برد}} = [-1, 3] \xrightarrow{\text{اعداد}} \{-1, 0, 1\}$$

## ۱۶- پاسخ: گزینه ۲

$$D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

با توجه به صورت سوال داریم:

برد تک تک توابع را می‌نویسیم:

$$\text{گزینه ۱} \quad y = x + 2$$

$$R = \{3, 5, 7, 9, 11\} \text{ عضو } 5$$

$$\text{گزینه ۲} \quad y = x^2 - 4x$$

$$R = \{-3, -3, 5, 21, 45\} \text{ عضو } 4$$

$$\text{گزینه ۳} \quad y = |x+1| - 3$$

$$R = \{-1, 1, 3, 5, 7\} \text{ عضو } 5$$

پس تعداد اعضای برد تابع گزینه (۲) از بقیه کمتر است.

## ۱۷- پاسخ: گزینه ۲

باید عبارت زیر را دیکال نامنفی باشد:

$$\frac{x+1}{3-x} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{aligned} x+1=0 &\Rightarrow x=-1 \\ 3-x=0 &\Rightarrow x=3 \end{aligned}$$

|                   | -1 | 3 |   |
|-------------------|----|---|---|
| $x+1$             | -  | + | + |
| $3-x$             | +  | + | - |
| $\frac{x+1}{3-x}$ | -  | + | - |

ت.ن

$$\Rightarrow x \in [-1, 3) \Rightarrow D_f = [-1, 3)$$

|    |   |
|----|---|
| -1 | 3 |
| -  | + |
| -  | - |

ت.ن

پس دامنه تابع  $f$  شامل ۴ عضو صحیح  $-1, 0, 1, 2$  است.

## ۱۸- پاسف: گزینه ۴

با توجه به شکل تابع  $f$  یک خط با دامنه  $[-1, \infty)$  است پس ابتدا ضابطه این تابع را به دست می آوریم. چون این خط از نقطه  $(-1, -2)$  و مبدأ مفضعات می گذرد. معادله آن به صورت  $y = 2x$  است:

$$\begin{cases} (0, 0) \in f \\ (-1, -2) \end{cases} \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{-2 - 0}{-1 - 0} = 2 \Rightarrow y = 2x$$

در نتیجه با شرط آن که  $x \geq -1$   $f(x) = 2x$  است در نتیجه:  $y = \sqrt{2 - f(x)} = \sqrt{2 - 2x}$

با فرض  $x \geq -1$  باید تابع زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$2 - 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$$

در نتیجه علاوه بر آن که  $x \geq -1$  است باید  $x \leq 1$  باشد پس  $-1 \leq x \leq 1$  است و در نتیجه دامنه تابع  $y = \sqrt{2 - f(x)}$  بازه  $[-1, 1]$  است.

## ۱۹- پاسف: گزینه ۲

چون باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد لازم است  $-x^3 \geq 0$  باشد پس  $x \leq 0$  فوادر بود از طرفی:

$$\sqrt{-x^3} = \sqrt{x^3 \times -x} = |x| \sqrt{-x}$$

چون باید  $x \leq 0$  باشد پس  $|x| = -x$  است و ضابطه تابع به صورت روبه رو است:

$$y = \sqrt{-x^3} = |x| \sqrt{-x} = -x \sqrt{-x}$$

چون تابع (۲) برابر تابع داده شده است پس دامنه و برد آنها یکسان است.

تذکر: دامنه تابع (۱) برابر  $[0, +\infty)$  است در نتیجه دامنه آن با تابع داده شده برابر نیست.

در تابع (۳) چون باید  $x \leq 0$  باشد دامنه آن  $(-\infty, 0]$  است اما اگر  $x \leq 0$  عبارت  $x \sqrt{-x} \leq 0$  است و برد آن شامل هیچ عدد مثبتی نیست در صورتی که برد تابع داده شده نامنفی است. در تابع (۴) نیز دامنه تابع  $[0, +\infty)$  است و با دامنه تابع داده شده برابر نیست.

## ۲۰- پاسف: گزینه ۳

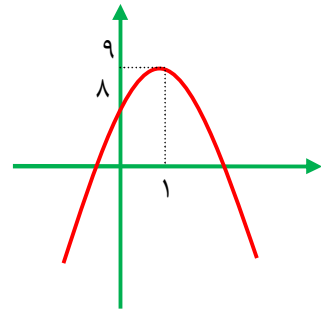
ابتدا برد تابع زیر رادیکال یعنی  $f(x) = 8 + 2x - x^2$  را که یک سهمی است به دست می آوریم. با توجه به آن که  $f$  یک سهمی رو به پایین است برد آن به صورت  $(-\infty, y]$  است پس  $y$  رأس را به دست می آوریم:

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow y_{\text{رأس}} = f(1) = 8 + 2 - 1 = 9$$

پس برد  $f$  به صورت بازه  $(-\infty, 9]$  است.

حال باید برد تابع  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  را به دست آوریم. چون تابع زیر رادیکال نامنفی باشد پس  $g$  مقادیر یاز برد  $f$  را می پذیرد که نامنفی باشد پس مقادیر بازه  $[0, 9]$  وارد تابع  $g$  بازه  $[0, 3]$  است. در نتیجه  $a = 0, b = 3$  است و داریم  $b - a = 3$ .

$$f(x) \leq 9 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{f(x)} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq g(x) \leq 3 \Rightarrow R_g = [0, 3]$$



تذکر: در سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  اگر  $a > 0$  باشد برد این تابع بازه  $\left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right)$  و اگر  $a < 0$  باشد برد آن به صورت  $\left(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right]$  است در این بازه ها  $\frac{-\Delta}{4a}$  همان  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$  یعنی  $y$  رأس سهمی است.

۲۱- پاسخ: گزینه ۳

می دانیم  $(\sqrt{x} - 4)^2 \geq 0$  پس:  $y = x - 8\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 4)^2 - 16$   
با توجه به آنکه  $(\sqrt{x} - 4)^2 \geq 0$  است پس:

$$(\sqrt{x} - 4)^2 = x - 8\sqrt{x} + 16$$

$$(\sqrt{x} - 4)^2 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 4)^2 - 16 \geq -16 \Rightarrow f(x) \geq -16$$

پس در برد تابع  $f$  اعداد صحیح منفی -۱ تا -۱۶ یعنی ۱۶ عدد صحیح منفی وجود دارند.

تذکر: چون تابع  $f$  می تواند تمام اعداد عضو بازه  $(-16, +\infty)$  را ایجاد کند برد این تابع بازه  $(-16, +\infty)$  است.

۲۲- پاسخ: گزینه ۴

فودتان داستان رادیکال با فرجه زوج را می دانید چون  $x^2 - 2$  همواره منفی است پس باید  $x^2 - 8x + 15$  همواره کوچکتر یا مساوی صفر باشد (تا زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد) بنابراین:

$$x^2 - 8x + 15 \leq 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 5) \leq 0 \rightarrow \text{تعیین علامت} \rightarrow 3 \leq x \leq 5 \Rightarrow D_f = [3, 5]$$

۲۳- پاسخ: گزینه ۳

می دانیم  $1 \leq \cos x \leq 1$  پس عبارت  $(3 - \cos x)$  همواره مثبت است بنابراین برای برقراری نامساوی

$$\frac{(3 - x)(3 - \cos x)}{x + 2} \geq 0 \text{ کافی است } \frac{3 - x}{x + 2} \geq 0 \text{ که با تعیین علامت آن به دست می آید: } -2 < x \leq 3$$

۲۴- پاسخ: گزینه ۳

$$\text{می گوید } f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^4 + 2x^2 + 3}} \text{ پس برای تعیین دامنه اش باید گفت:}$$

$$-x^4 + 2x^2 + 3 > 0 \xrightarrow{x^2=t} -t^2 + 2t + 3 > 0 \xrightarrow{\times(-1)} t^2 - 2t - 3 < 0$$

$$\Rightarrow (t-3)(t+1) < 0 \xrightarrow{\text{طبق جدول تعیین علامت}} -1 < t < 3$$

بنابراین  $-1 < x^2 < 3$  است. ( $x^2$  از  $-1$  همیشه بزرگتر است پس این قسمت همواره برقرار است) در نتیجه:

$$x^2 < 3 \rightarrow \text{بذر} \rightarrow |x| < \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \Rightarrow D_f = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \Rightarrow \text{اعداد صحیح نامنفی}$$

۲۵- پاسخ: گزینه ۳

$\sqrt{x}$  داریم پس باید  $x \geq 0$  باشد از طرفی تابع کسری است، پس باید ریشه های مخرج را از  $x \geq 0$  حذف کنیم:

$$x\sqrt{x} + 1 = 0 \Rightarrow x\sqrt{x} = -1 \quad (*)$$

می دانیم  $x \geq 0$  بنابراین تساوی (\*) هیچگاه برقرار نمی باشد در نتیجه مخرج ریشه ندارد و دامنه تابع برابر می شود با:

$$x \in [0, +\infty)$$

۲۶- پاسخ: گزینه ۳

ابتدا با مربع کامل کردن عبارت زیر، رادیکال ظاهر تابع را کمی عوض می کنیم:

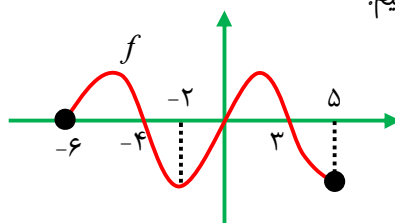
$$y = \sqrt{4x^2 - 4x + 1 + 1} = \sqrt{(2x-1)^2 + 1}$$

فوب شد حالا می گوییم  $(2x-1)^2 \geq 0$  پس  $(2x-1)^2 + 1 \geq 1$  و در نتیجه  $\sqrt{(2x-1)^2 + 1} \geq 1$  بنابراین:

$$R_y = [1, +\infty)$$

۲۷- پاسخ: گزینه ۲

برای مناسبه دامنه تابع  $y = \sqrt{xf(x)}$  باشد عبارت زیر، رادیکال نامنفی باشد یعنی  $xf(x) \geq 0$ . با توجه به شکل و به کمک جدول تعیین علامت این نامعادله را حل می کنیم:



$$\Rightarrow \begin{aligned} \text{ریشه های تابع } f &= -6, -4, 0, 3 \\ \text{دامنه تابع } f &= [-6, 5] \end{aligned}$$

تابع  $f$  زیر محور  $x$  ها است.      تابع  $f$  بالای محور  $x$  ها است.

|         |            |    |   |   |   |            |
|---------|------------|----|---|---|---|------------|
|         | -6         | -4 | 0 | 3 | 5 |            |
| $f(x)$  | تعریف نشده | +  | - | + | - | تعریف نشده |
| $x$     | -          | -  | - | 0 | + | +          |
| $xf(x)$ | تعریف نشده | -  | + | + | - | تعریف نشده |

$$xf(x) \geq 0 \Rightarrow [-4, 3] \cup \{-6\}$$

در نتیجه ۹ عدد صحیح عضو دامنه تابع  $y = \sqrt{xf(x)}$  است.

۲۸- پاسف: گزینه ۲

با توجه به شکل دامنه تابع  $f$  بازه  $[-1, 4]$  است. از طرفی دامنه تابع  $g(x) = 3 - f(x)$  همان دامنه تابع  $f$  است زیرا هیچ

محدودیت دیگر در دامنه تابع  $g$  وجود ندارد پس:  $D_g = [-1, 4]$

با توجه به شکل برد تابع  $f$  بازه  $[-3, 4]$  است در نتیجه اگر  $-3 \leq f(x) \leq 4$  باشد داریم:

$$\begin{aligned} -3 \leq f(x) \leq 4 &\xrightarrow{\times(-1)} -4 \leq -f(x) \leq 3 \xrightarrow{+3} -4 + 3 \leq 3 - f(x) \leq 3 + 3 \\ \Rightarrow -1 \leq \underbrace{3 - f(x)}_{g(x)} \leq 6 &\Rightarrow -1 \leq g(x) \leq 6 \end{aligned}$$

در نتیجه برد تابع  $f$  بازه  $[-1, 6]$  است پس:

$$D_g = [-1, 4] = [a, b] \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$R_g = [-1, 6] = [c, d] \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ d = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ac - bc = 1 - 24 = -23$$

۲۹- پاسف: گزینه ۳

$\sqrt{2+f(x)}$  در مخرج کسر قرار دارد پس باید  $2+f(x) > 0$  یعنی  $f(x) > -2$  پس

$f(x) > -2$  که با توجه به نمودار همواره این موضوع برقرار است (به جز در حالتی که  $x = 2$  باشد) بنابراین

$$D_y = [-1, 3] - \{2\} \text{ و در نتیجه اعداد صحیحی که در دامنه هستند این ها می شوند: } -1, 0, 1, 3 \text{ (یعنی چهار تا)}$$

# ایمان نخستین



دهم

یازدهم

دوازدهم

(کنکور)

طراح سوالات ریاضی قلم چی  
مدرس طرح کنکور مدارس گیلان  
(رشت، لاهیجان، لنگرود، رودسر و ...)

۰۹۱۱۱۴۳ ۶۷۶۴

 nakhostin\_math  
 nakhostin\_math