

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)



<https://t.me/riazisara>

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

حسابان ۱- سطح ۱، مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

۴۱- حاصل عبارت $(1-x+x^2-\dots+x^6)(1+x+x^2+\dots+x^6)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

- | | |
|---------|---------|
| ۱۲۷ (۲) | ۱۲۸ (۱) |
| ۲۵۵ (۴) | ۲۵۶ (۳) |

حسابان ۱- سطح ۱، معادلات درجه دوم

۴۲- اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 4x - 6 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha$ کدام است؟

- | | |
|---------|---------|
| ۲۴ (۲) | -۲۴ (۱) |
| -۳۰ (۴) | ۳۰ (۳) |

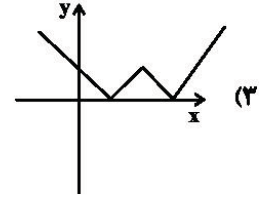
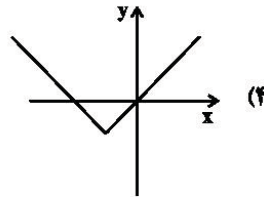
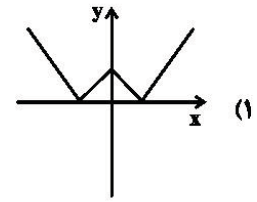
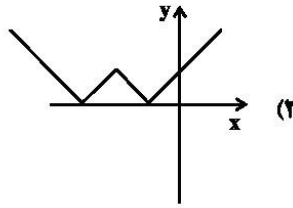
حسابان ۱- سطح ۱، معادلات گویا و گنگ

۴۳- معادله $\sqrt{2} = 0$ $\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-1}$ چند جواب دارد؟

- | | |
|---------|-------|
| ۲ (۲) | ۱ (۱) |
| صفر (۴) | ۳ (۳) |

حسابان ۱- سطح ۱، قدر مطلق و ویژگی های آن

۴۴- نمودار تابع $f(x) = ||x+2|-1|$ شبیه کدام است؟



حسابان ۱- سطح ۱، **اشنایی با هندسه تحلیلی**

۴۵- خط $2x + 3y - 2 = 0$ معادله یک ضلع مربع و نقطه $A(1, -1)$ مختصات یک رأس آن است. مساحت مربع کدام است؟

(۲) $\frac{2}{\sqrt{11}}$

(۱) $\frac{3}{\sqrt{13}}$

(۴) $\frac{9}{13}$

(۳) $\frac{4}{11}$

حسابان ۱- سطح ۱، **انواع توابع**

۴۶- در چه تعداد از معادله‌های زیر y تابعی از x است؟

(الف) $x^2 + y^2 = 9$

(ب) $y^2 + x = 7$

(پ) $x = |y| + 2$

(ت) $|y| + (x-2)^2 = 0$

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) صفر

(۳) ۳

۴۷- اگر مجموعه جواب معادله $2[x] = 6$ را A و مجموعه جواب معادله $[2x + 1] = 8$ را B بنامیم، $A \cap B$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء

صحیح است)

(۲) $(\frac{3}{5}, 4)$

(۱) $[3, 4)$

(۴) $[\frac{3}{5}, 4)$

(۳) $[3, \frac{3}{5})$

حسابان ۱- سطح ۱، اعمال روی توابع -

۴۸- اگر دامنه تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x-2}$ بازه $(1, 2]$ باشد، دامنه تابع f^{-1} کدام است؟

(۲) $(0, 2]$

(۱) $[-1, 2]$

(۴) $[0, 2]$

(۳) $[-1, 2]$

۴۹- اگر $f(x) = 2 - 3x$ و $(fog)(x) = 7x - 3$ ، ضابطه تابع g کدام است؟

(۲) $\frac{7}{3}x - \frac{5}{3}$

(۱) $-\frac{7}{3}x + \frac{5}{3}$

(۴) $-\frac{5}{3}x - \frac{7}{3}$

(۳) $\frac{5}{3}x + \frac{7}{3}$

حسابان ۱- سطح ۱، تابع نمایی

۵۰- نیمه عمر یک ماده ۴۸ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۰۲۴ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی از این ماده که پس از ۲۴۰ سال باقی مانده چند

میلی‌گرم است؟

(۲) ۲۵۶

(۱) ۵۱۲

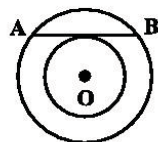
(۴) ۳۲

(۳) ۱۲۸

هندسه ۲- سطح ۱، مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره -

۵۱- در شکل زیر دو دایره هم‌مرکز هستند. اگر اندازه وتری از دایره بزرگ‌تر که بر دایره کوچک‌تر مماس است، برابر ۶ باشد، مساحت ناحیه بین

دو دایره کدام است؟



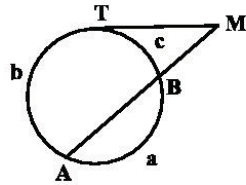
(۱) 4π

(۲) 9π

(۳) 16π

(۴) 36π

۵۳- در شکل زیر $\widehat{AB} = a$ ، $\widehat{AT} = b$ و $\widehat{BT} = c$ است. اگر $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{2}$ باشد، اندازه زاویه M کدام است؟



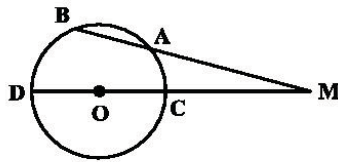
(۱) 25°

(۲) 30°

(۳) 35°

(۴) 40°

۵۴- در شکل زیر اگر $AM = 9$ ، $AB = 7$ و $OM = 13$ باشد، اندازه شعاع دایره کدام است؟ (O مرکز دایره است.)



(۱) ۴

(۲) $4/5$

(۳) ۵

(۴) ۶

هندسه ۲- سطح ۱، رابطه های طولی در دایره -

۵۵- دو دایره $C(O, 2m-1)$ و $C'(O', 1)$ با خط‌المركزين $d = OO' = 1$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار m ، دو دایره C و C' متقاطع هستند؟

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) ۱

(۴) ۲

(۳) ۲

۵۶- اگر طول مماس مشترک‌های خارجی و داخلی دو دایره به ترتیب ۱۲ و ۸ باشد، حاصل ضرب اندازه شعاع‌های این دو دایره کدام است؟

(۲) ۲۰

(۱) ۱۵

(۴) ۴۰

(۳) ۳۰

هندسه ۲- سطح ۱، چند ضلعي محاطي و محيطي -

۵۷- شعاع دایره محاطی داخلی مثلثی که طول ارتفاع‌های وارد بر اضلاع آن ۳، ۴ و ۶ باشد، کدام است؟

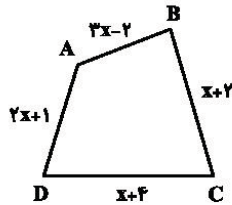
(۲) $\frac{3}{4}$

(۱) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{4}{3}$

(۳) $\frac{3}{2}$

۵۸- به ازای کدام مقدار x ، چهارضلعی $ABCD$ در شکل زیر، یک چهارضلعی محیطی است؟

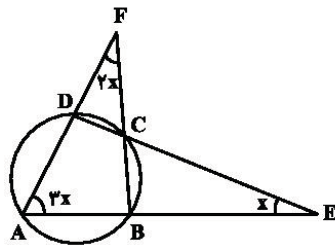


- ۱ (۱)
- ۱/۵ (۲)
- ۲ (۳)
- ۲/۵ (۴)

۵۹- اندازه هر ضلع شش ضلعی منتظم محاط در یک دایره چند برابر اندازه هر ضلع شش ضلعی منتظم محیط بر آن دایره است؟

- ۱/۲ (۱)
- ۱/۳ (۲)
- ۲/۳ (۳)
- ۱/۴ (۴)

۵۲- در شکل زیر، اندازه x کدام است؟

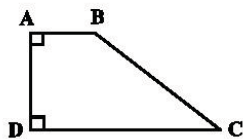


- ۱۰° (۱)
- ۱۵° (۲)
- ۲۰° (۳)
- ۲۵° (۴)

هندسه ۲ - سطح ۱، تبدیل های هندسی

۶۰- دوزنقه قائم الزاویه $ABCD$ در شکل زیر را نسبت به خطی موازی با ضلع AD بازتاب می دهیم. شیب چه تعداد از اضلاع تصویر این

دوزنقه در بازتاب با شیب اضلاع متناظر آنها در دوزنقه $ABCD$ برابر است؟



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

آمار و احتمال - سطح ۱، دامنه ی متغیر گزاره نما

۶۱- دامنه متغیر گزاره‌های زیر، مجموعه اعداد طبیعی است. مجموعه جواب کدام یک از این گزاره‌ها نامتناهی است؟

$$(1) \quad x \text{ بین } 5 \text{ و } 6 \text{ است.} \quad (2) \quad \frac{3x-1}{2} < 5$$

$$(3) \quad x^2 < 100 \quad (4) \quad \frac{1}{x} < \frac{1}{5}$$

آمار و احتمال - سطح ۱، ترکیب گزاره -

۶۲- اگر p, q و r سه گزاره دلخواه باشند، آنگاه گزاره $\sim r \Rightarrow [(p \vee \sim p) \Rightarrow (q \wedge \sim q)] \Rightarrow \sim r$ هم‌ارز کدام یک از گزاره‌های زیر است؟

(1) T (2) F (3) $p \vee q$ (4) r

آمار و احتمال - سطح ۱، ترکیب دو گزاره

۶۳- نقیض گزاره $(\exists x \in \mathbb{R}; x^2 = 2) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0)$ کدام است؟

(1) $(\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \neq 2) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$
 (2) $(\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \neq 2) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$
 (3) $(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \neq 2) \vee (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$
 (4) $(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \neq 2) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$

آمار و احتمال - سطح ۱، مجموعه - زیر مجموعه

۶۴- اگر دو مجموعه $A = \{3, x + 2y, 3\}$ و $B = \{3, x - 2y, -1\}$ مساوی یکدیگر باشند، حاصل $x + y$ کدام است؟

(1) -1 (2) صفر (3) 1 (4) 2

۶۵- کدام یک از حالت‌های زیر افزای برای مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ است؟

(1) $\{a, c, e\}, \{b\}, \{d\}$ (2) $\{a, b, c, d\}, \{e\}, \{f\}, \{\}$
 (3) $\{a, f\}, \{b, c\}, \{d, e, f\}$ (4) $\{c, d, e\}, \{a\}, \{b, f\}$

۶۶- اگر A, B و C سه مجموعه دلخواه باشند، حاصل $(A - B) \cup (A - C) \cup (A \cap B \cap C)$ همواره برابر کدام مجموعه است؟

(1) A (2) $B \cap C$ (3) A' (4) $B' \cap C'$

۶۷- اگر $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 10\}$ و $B = \{2^x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 2\}$ باشد، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $A^2 - B^2$ کدام است؟

(1) 16 (2) 22 (3) 64 (4) 128

آمار و احتمال - سطح ۱، مبانی احتمال

۶۸- اگر A, B و C سه پیشامد باشند، آنگاه پیشامد آن‌که A رخ دهد ولی هیچ یک از پیشامدهای B و C رخ ندهند، معادل کدام است؟

(1) $A - (B \cup C)$ (2) $A - (B \cap C)$
 (3) $A \cup B' \cup C'$ (4) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

۶۹- اگر $P(A - B) = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ و A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آن‌گاه مقدار $P(B - A)$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{5}{12}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

آمار و احتمال - سطح ۱، احتمال غیر هم شانس

۷۰- محمد، علی و رضا در یک مسابقه شرکت کرده‌اند. اگر احتمال برد علی دو برابر احتمال برد رضا و احتمال برد محمد $\frac{1}{3}$ احتمال برد رضا باشد، آن‌گاه احتمال برد علی در این مسابقه کدام است؟ (مسابقه تنها یک برنده از میان این سه شرکت‌کننده دارد.)

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{2}{5}$ (۱)

۴۱- گزینه «۲»

(مشابه سؤال ۱۸ صفحه ۹ کتاب پرتکرار)

دلیل انتخاب: یک سؤال خلاقانه از مبحث مجموع جملات دنباله هندسی است. این سؤال جزو سؤالات دشوار امتحانات مدارس است.

یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت x و یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت $-x$ داریم که باید مجموع هفت جمله ابتدایی هر یک را حساب کرده و در هم ضرب کنیم:

$$\begin{aligned} & (1 + x + x^2 + \dots + x^6)(1 - x + x^2 + \dots + x^6) \\ &= \left(\frac{1-x^7}{1-x}\right)\left(\frac{1-(-x)^7}{1-(-x)}\right) = \frac{(1-x^7)(1+x^7)}{(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{1-x^{14}}{1-x^2} \quad \frac{x=\sqrt{2}}{\quad} \quad \frac{1-(\sqrt{2})^{14}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-2^7}{1-2} \\ &= 2^7 - 1 = 128 - 1 = 127 \end{aligned}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۴ تا ۶)

۴

۳

۲

۱

دلیل انتخاب: روابط بین ریشه‌های معادله درجه دوم از مباحث مهم کتاب حسابان ۱ است که در امتحانات مدارس و کنکور، مشابه این سؤال بسیار تکرار شده است.

ابتدا حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 6 = 0$ را حساب می‌کنیم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{6}{1} = -6$$

عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -6 \times (4) = -24$$

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۸ و ۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

دلیل انتخاب: هدف از انتخاب این سؤال آشنایی دانش‌آموزان با حل معادله گنگ با استفاده از به توان رساندن طرفین معادله است. دانش‌آموزان باید دقت کنند که جواب نهایی را حتماً در معادله امتحان کنند.

ابتدا عبارت‌های رادیکالی مجهول را به طرفین تساوی معادله منتقل می‌کنیم و سپس طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{3x-1} = 2\sqrt{x+1} - \sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$3x-1 = 4(x+1) + 2 - 4\sqrt{2x+2}$$

$$\Rightarrow x+7 = 4\sqrt{2x+2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 + 14x + 49 = 16(2x+2)$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x + 17 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=17 \end{cases}$$

هر دو جواب به دست آمده در معادله صدق می‌کنند و قابل قبول هستند.

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

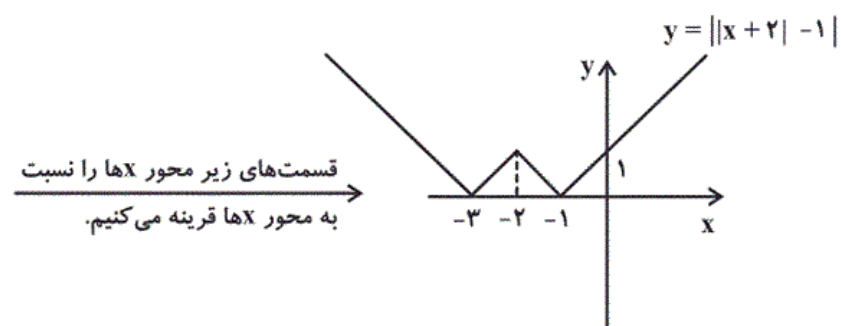
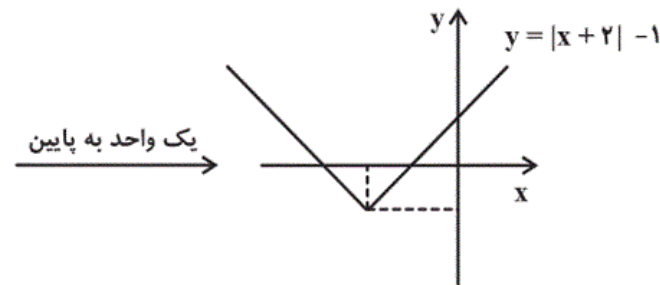
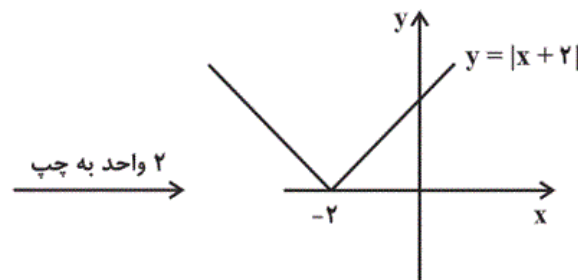
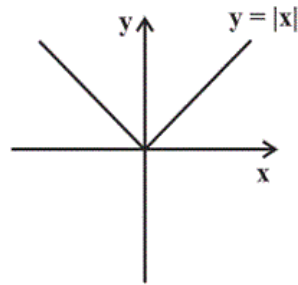
۳

۲ ✓

۱

دلیل انتخاب: رسم نمودار تابع $|f|$ با استفاده از نمودار تابع f ، از مباحث مهم حسابان است که هم به خودی خود سؤال‌های زیادی از آن در آزمون‌ها مطرح می‌شود و هم تسلط به آن به درک مباحث دیگری در کتاب‌های حسابان (۱) و حسابان (۲) کمک می‌کند.

با استفاده از انتقال نمودار $y = |x|$ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



۴

۳

۲✓

۱

۴۵- گزینه «۴» (مشابه سؤال ۱۰۵ صفحه ۱۶ کتاب پرتکرار)

دلیل انتخاب: هدف از انتخاب این سؤال آشنایی دانش آموزان با هندسه تحلیلی و به طور خاص محاسبه فاصله نقطه از خط است. تجسم هندسه سؤال برای حل کردن آن بسیار مهم است.

نقطه A در معادله خط صدق نمی کند، پس فاصله نقطه A از خط داده شده برابر با طول ضلع مربع است.

$$d = \frac{|2 \times 1 + 3(-1) - 2|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\text{مساحت مربع} = S = d^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{9}{13}$$

(مسایان ۱- جبر و معادله - صفحه های ۲۹ تا ۳۶)

۴✓

۳

۲

۱

۴۶- گزینه «۱»

(مشابه سؤال ۱۳۰ صفحه ۱۱ کتاب پر تکرار)

دلیل انتخاب: هدف از انتخاب این سؤال آشنایی با معادلات مربوط به توابع است. دانش آموزان باید با استفاده از مفهوم مثال نقض بتوانند معادلاتی که تابع نیستند را رد کنند.

الف) تابع نیست، چون مثلاً به ازای $x = 0$ دو مقدار ± 3 برای y پیدا می‌شود.

ب) تابع نیست، زیرا مثلاً به ازای $x = 0$ دو مقدار $\pm \sqrt{7}$ برای y یافت می‌شود.

پ) تابع نیست، با فرض $x = 4$ دو مقدار ± 2 برای y به دست می‌آید.

ت) تابع است، حاصل جمع دو عبارت نامنفی تنها در حالتی که هر دو عبارت صفر باشند، صفر می‌شود، پس:

$$|y| + (x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ |y| = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \{(2, 0)\} \Rightarrow$ تابع است

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۸ و ۴۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

۴۷- گزینه «۴»

(مشابه سؤال ۱۳۴ صفحه ۲۱ کتاب پر تکرار)

دلیل انتخاب: سؤال از مبحث جزء صحیح است که بعداً در محاسبه حد و پیوستگی و همچنین مشتق توابع بسیار از این مبحث استفاده خواهد شد.

هر یک از معادله‌ها را با استفاده از خواص جزء صحیح حل می‌کنیم:

$$2[x] = 6 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4 \Rightarrow A = [3, 4)$$

$$[2x+1] = 8 \Rightarrow 8 \leq 2x+1 < 9 \Rightarrow 7 \leq 2x < 8$$

$$\Rightarrow 3/5 \leq x < 4 \Rightarrow B = [3/5, 4)$$

$$A \cap B = [3/5, 4)$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

۴۸- گزینه «۳»

(مشابه سؤال ۱۶۹ صفحه ۲۴ کتاب پرتکرار)

دلیل انتخاب: این سؤال در امتحانات مدارس و همچنین کنکور بسیار رایج است و محاسبه برد توابع آشنا از جمله مباحث مهم حسابان است.

دامنه تابع f^{-1} همان برد تابع f است. پس برد تابع f را به دست می آوریم:

$$D_f = [2, 11) \Rightarrow 2 \leq x < 11 \Rightarrow 0 \leq x - 2 < 9$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{x-2} < 3 \Rightarrow -3 < -\sqrt{x-2} \leq 0$$

$$\Rightarrow -1 < 2 - \sqrt{x-2} \leq 2 \Rightarrow R_f = (-1, 2]$$

پس دامنه f^{-1} بازه $(-1, 2]$ است.

(مسایان ۱- تابع - صفحه های ۳۶ تا ۴۸ و ۵۴ تا ۶۲)

۴

۳

۲

۱

۴۹- گزینه «۱»

(مشابه سؤال ۱۹۹ صفحه ۲۶ کتاب پرتکرار)

دلیل انتخاب: سؤال از مبحث ترکیب توابع است که در امتحانات مدارس حتماً از آن سؤال می آید. در محاسبات جبری دانش آموزان باید دقت کافی را داشته باشند تا دچار اشتباه نشوند.

تابع $(f \circ g)(x)$ را تشکیل می دهیم و آن را با تابع داده شده مساوی قرار می دهیم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 - 3 \times g(x) = 7x - 3$$

$$\Rightarrow 3g(x) = -7x + 5 \Rightarrow g(x) = -\frac{7x}{3} + \frac{5}{3}$$

(مسایان ۱- تابع - صفحه های ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱

۵۰- گزینه «۴»

(مشابه سؤال ۲۹۰ صفحه ۳۵ کتاب پرتکرار)

دلیل انتخاب: از جمله سؤالات کاربردی در مبحث توابع نمایی، سؤالات نیمه عمر ماده هستند. سؤالات کاربردی از جمله سؤالات جذاب برای طراحان کنکور هستند.

چون نیمه عمر ماده ۴۸ سال است، پس بعد از هر ۴۸ سال نیمی از ماده

از بین می‌رود. طبق رابطه $A = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{48}}$ ، مقدار باقیمانده ماده را حساب

می‌کنیم:

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{48}} = 1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{240}{48}}$$

$$= 1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{2^{10}}{2^5} = 2^5 = 32 \text{ میلی‌گرم}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۴

۳

۲

۱

۵۱- گزینه «۲»

(مشابه سؤال ۱۵ کتاب پرتکرار هندسه ۲)

دلیل انتخاب: شناخت قضیه‌های مرتبط با وتر و کاربرد آن در حل مسئله

می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس:

$$AH = \frac{1}{2} AB = 3$$



$$\Delta OAH: AH^2 = OA^2 - OH^2 \Rightarrow OA^2 - OH^2 = 9$$

اگر مساحت ناحیه بین دو دایره را با S نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$S = \pi(OA)^2 - \pi(OH)^2 = \pi(OA^2 - OH^2) = 9\pi$$

(هندسه ۲- دایره - صفحه ۱۳)

۴

۳

۲

۱

۵۳- گزینه «۴»

(مشابه سؤال ۵۳ کتاب پرتکرار هندسه ۲)

دلیل انتخاب: محاسبه اندازه کمان‌ها روی دایره و کاربرد رابطه

زاویه بین امتداد یک وتر و خط مماس بر دایره

طبق ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{2} = \frac{a+b+c}{3+4+2} = \frac{36^\circ}{9} = 4^\circ \Rightarrow \begin{cases} a = 12^\circ \\ b = 16^\circ \\ c = 8^\circ \end{cases}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2} = \frac{16^\circ - 8^\circ}{2} = 4^\circ$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۴

۳

۲

۱

۵۴- گزینه «۳»

(مشابه سؤال ۹۴ کتاب پرتکرار هندسه ۲)

دلیل انتخاب: استفاده از روابط طولی مربوط به دو وتر متقاطع در

خارج دایره

طبق روابط طولی برای وترهای متقاطع در خارج دایره داریم:

$$MA \times MB = MC \times MD$$

$$\Rightarrow MA(MA + AB) = (MO - OC)(MO + OD)$$

$$\Rightarrow 9(9 + 7) = (13 - R)(13 + R)$$

$$\Rightarrow 144 = 169 - R^2 \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه ۱۸)

۴

۳

۲

۱

دلیل انتخاب: شناخت حالت‌های متفاوت وضعیت دو دایره نسبت به هم و رابطه اندازه شعاع‌های دو دایره و طول خط‌المركزین در هر حالت

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ در صورتی متقاطع هستند که

$$|R - R'| < OO' < R + R'$$

$$OO' < R + R' \Rightarrow 1 < 2m - 1 + 1$$

$$\Rightarrow 2m > 1 \Rightarrow m > \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$|R - R'| < OO' \Rightarrow |2m - 1 - 1| < 1$$

$$\Rightarrow |m - 1| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < m - 1 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < m < \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$R > 0 \Rightarrow 2m - 1 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2} \quad (3)$$

اشتراک نامساوی‌های به دست آمده $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$ می‌شود که طبق

گزینه‌ها فقط $m = 1$ قابل قبول است.

(هندسه ۲- دایره- صفحه ۲۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

۵۶- گزینه «۲»

(مشابه سؤال ۱۴۶ کتاب پرتکرار هندسه ۲)

دلیل انتخاب: کاربرد روابط مربوط به طول مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره

فرض کنید شعاع‌های دو دایره برابر R و R' و طول خط‌المركزین دو دایره برابر d باشد. در این صورت داریم:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = ۸$$

$$\Rightarrow d^2 - (R + R')^2 = ۶۴ \quad (۱)$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = ۱۲$$

$$\Rightarrow d^2 - (R - R')^2 = ۱۴۴ \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow (d^2 - (R - R')^2) - (d^2 - (R + R')^2) = ۱۴۴ - ۶۴$$

$$\Rightarrow (d^2 - R^2 - R'^2 + 2RR') - (d^2 - R^2 - R'^2 - 2RR') = ۸۰$$

$$\Rightarrow 4RR' = ۸۰ \Rightarrow RR' = ۲۰$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

۵۷- گزینه «۴»

(مشابه سؤال ۱۸۴ کتاب پرتکرار هندسه ۲)

دلیل انتخاب: شناخت رابطه بین طول ارتفاع‌های یک مثلث و شعاع دایره محاطی داخلی آن مثلث و مشابهت با تمرین ۵ صفحه‌های ۲۹ و ۳۰ کتاب درسی

اگر r شعاع دایره محاطی داخلی و h_a, h_b, h_c طول ارتفاع‌های وارد بر اضلاع مثلث باشند، آن‌گاه داریم:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{4+3+2}{12} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵، ۲۶، ۲۹ و ۳۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

دلیل انتخاب: شناخت شرط محیطی بودن یک چهارضلعی

چهارضلعی ABCD محیطی است، بنابراین مجموع هر دو ضلع مقابل آن با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است.

$$AB + CD = AD + BC \Rightarrow 3x - 2 + x + 4 = 2x + 1 + x + 2$$

$$\Rightarrow 4x + 2 = 3x + 3 \Rightarrow x = 1$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

۵۹- گزینه ۴»

(مشابه سؤال ۲۱۶ کتاب پرتکرار هندسه ۲)

دلیل انتخاب: استفاده از روابط مربوط به طول اضلاع n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی یک دایره و مشابهت با تمرین ۷ صفحه ۳۰ کتاب درسی

اگر a و b به ترتیب طول اضلاع n ضلعی منتظم محاطی و محیطی دایره‌ای به شعاع r باشند، آن‌گاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} a &= 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \\ b &= 2r \tan \frac{180^\circ}{n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin \frac{180^\circ}{n}}{\tan \frac{180^\circ}{n}} = \frac{\sin \frac{180^\circ}{n}}{\frac{\sin \frac{180^\circ}{n}}{\cos \frac{180^\circ}{n}}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \cos \frac{180^\circ}{n} \xrightarrow{n=6} \frac{a}{b} = \cos \frac{180^\circ}{6} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه ۳۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

دلیل انتخاب: درک مفهوم چهارضلعی محاطی و استفاده از زاویه خارجی مثلث

Δ
 \widehat{CDE} زاویه خارجی است:

$$\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{A} + \widehat{E} = 3x + x = 4x$$

Δ
 \widehat{BCD} زاویه خارجی است:

$$\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{F} + \widehat{CDE} = 2x + 4x = 6x$$

چهارضلعی ABCD محاطی است، پس داریم:

$$\widehat{A} + \widehat{BCD} = 180^\circ \Rightarrow 3x + 6x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 9x = 180^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه ۲۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

دلیل انتخاب: شناخت حالت‌های ثابت ماندن شیب یک خط تحت یک بازتاب

بازتاب نسبت به یک خط در حالت کلی شیب خط را حفظ نمی‌کند، اما در صورتی که خط موازی محور بازتاب و یا عمود بر محور بازتاب باشد، شیب خط تحت بازتاب ثابت باقی می‌ماند. در این بازتاب ضلع AD موازی محور بازتاب و اضلاع AB و CD عمود بر محور بازتاب هستند، پس شیب این اضلاع پس از بازتاب با شیب اولیه آنها برابر است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

۶۱- گزینه «۴»

(مشابه سؤال کتاب پرتکرار آمار و احتمال)

دلیل انتخاب:

۱) آشنایی با مفهوم گزاره‌نما و دامنه متغیر و مجموعه جواب آن

۲) مشابهت با تمرین ۳ صفحه ۱۷ کتاب درسی

گزینه «۱»: عددی طبیعی بین ۵ و ۶ وجود ندارد، پس $S = \emptyset$ است.

گزینه «۲»:

$$\frac{3x-1}{2} < 5 \Rightarrow 3x-1 < 10 \Rightarrow 3x < 11 \Rightarrow x < \frac{11}{3}$$

$$S = \{1, 2, 3\}$$

$$x^2 < 100 \Rightarrow x < 10$$

گزینه «۳»:

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{معکوس}} x > 5$$

گزینه «۴»:

$$S = \{6, 7, 8, \dots\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود مجموعه جواب گزاره‌نمای گزینه «۴» نامتناهی است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات- صفحه‌های ۵ و ۶)

۴

۳

۲

۱

۶۲- گزینه «۱»

(مشابه سؤال ۲۴ کتاب پرتکرار آمار و احتمال)

دلیل انتخاب: شناخت قوانین گزاره‌ها و آشنایی با گزاره‌های همیشه

درست یا همیشه نادرست

ترکیب فصلی هر گزاره و نقیض آن، یک گزاره همیشه درست و ترکیب عطفی هر گزاره و نقیض آن، یک گزاره همیشه نادرست است. از طرفی یک ترکیب شرطی تنها در صورتی نادرست است که مقدم آن درست و تالی آن نادرست باشد. بنابراین داریم:

$$[\underbrace{(p \vee \sim p)}_T \Rightarrow \underbrace{(q \wedge \sim q)}_F] \Rightarrow \sim r \equiv \underbrace{(T \Rightarrow F)}_F \Rightarrow \sim r$$

$$\equiv \underbrace{F \Rightarrow \sim r}_T$$

انتقای مقدم

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات- صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۴

۳

۲

۱

دلیل انتخاب:

(۱) نقیض سور عمومی و وجودی

(۲) نقیض ترکیب‌های عطفی و فصلی

نقیض سور عمومی و وجودی به صورت زیر است:

$$\sim (\forall x ; P(x)) \equiv \exists x ; \sim P(x)$$

$$\sim (\exists x ; P(x)) \equiv \forall x ; \sim P(x)$$

یعنی در هنگام نقیض کردن گزاره‌های سوری، سورهای عمومی و وجودی به یکدیگر تبدیل شده و گزاره‌نما، نقیض می‌گردد. از طرفی طبق قانون دمورگان داریم:

$$\begin{cases} \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$$

با توجه به توضیحات فوق، نقیض گزاره صورت سؤال به شکل زیر است:

$$(\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 \neq 2) \vee (\exists x \in \mathbb{R} ; x^2 \leq 0)$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات- صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

(مشابه سؤال ۴۳ کتاب پرتکرار آمار و احتمال)

۶۴- گزینه «۲»

دلیل انتخاب:

(۱) شناخت شرایط تساوی دو مجموعه

(۲) مشابهت با تمرین ۷ صفحه ۲۵ کتاب درسی

دو مجموعه A و B در صورتی مساوی یکدیگرند که اعضای آنها نظیر به نظیر با یکدیگر برابر باشند. با توجه به این که عدد ۳ در هر دو مجموعه مشترک است، داریم:

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - 3y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ -x + 3y = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5y = -5 \Rightarrow y = -1$$

$$x + 2(-1) = -1 \Rightarrow x = -1 + 2 = 1 \Rightarrow x + y = 0$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

۶۵- گزینه «۴»

(مشابه سؤال ۷۲ کتاب پرتکرار آمار و احتمال)

دلیل انتخاب:

۱) درک مفهوم افراز یک مجموعه و شرایط زیرمجموعه‌ها در یک افراز

۲) مشابهت با تمرین ۱۳ صفحه ۲۵ کتاب درسی

زیرمجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_n یک افراز برای مجموعه A هستند، هرگاه:

$$(۱) \text{ به ازای } 1 \leq i \leq n, A_i \neq \emptyset.$$

$$(۲) \text{ اگر } 1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \text{ آن گاه } A_i \cap A_j = \emptyset.$$

$$(۳) \bigcup_{i=1}^n A_i = A$$

با توجه به تعریف فوق داریم:

گزینه «۱»: افراز نیست، چون f به هیچ کدام از زیرمجموعه‌ها تعلق ندارد.

گزینه «۲»: افراز نیست، چون یکی از زیرمجموعه‌ها تهی است.

گزینه «۳»: افراز نیست، چون اشتراک دو زیرمجموعه $\{a, f\}$ و $\{d, e, f\}$ تهی نیست.

گزینه «۴»: تمام شرایط افراز یک مجموعه را دارا می‌باشد، پس یک افراز است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه ۲۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

دلیل انتخاب: شناخت کامل قوانین جبر مجموعه‌ها از جمله

توزیع پذیری و دموورگان

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$(A - B) \cup (A - C) \cup (A \cap B \cap C)$$

$$= (A \cap B') \cup (A \cap C') \cup (A \cap B \cap C) \quad \text{تبدیل تفاضل به اشتراک}$$

$$= [A \cap (B' \cup C')] \cup (A \cap B \cap C) \quad \text{فاکتورگیری (عکس توزیع پذیری)}$$

$$= [A \cap (B \cap C)'] \cup [A \cap (B \cap C)] \quad \text{دمورگان}$$

$$= A \cap \underbrace{[(B \cap C)' \cup (B \cap C)]}_U \quad \text{فاکتورگیری (عکس توزیع پذیری)}$$

$$= A \cap U = A$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

دلیل انتخاب: شناخت ضرب دکارتی دو مجموعه و تفاضل دو ضرب

دکارتی از یکدیگر

طبق تعریف مجموعه‌های A و B داریم:

$$A = \{1, 2, 3\} \quad , \quad B = \{2^{-1}, 2^0, 2^1\} = \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$$

$$A^2 = A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$B^2 = B \times B = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, 2), (1, \frac{1}{2}), (1, 1), (1, 2), (2, \frac{1}{2}), (2, 1), (2, 2)\}$$

$$A^2 - B^2 = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

بنابراین مجموعه $A^2 - B^2$ دارای ۵ عضو و $2^5 = 32$ زیرمجموعه است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

۶۸- گزینه «۱»

(مشابه سؤال ۱۲۷ کتاب پر تکرار آمار و احتمال)

دلیل انتخاب: درک مفهوم رخ دادن یک پیشامد و توانایی ترجمه زبان گزاره‌ها به زبان مجموعه‌ها

اگر یک پیشامد رخ ندهد، آن گاه متمم آن رخ داده است، بنابراین پیشامد آن که A رخ دهد ولی B و C رخ ندهند، معادل است با:

$$A \cap B' \cap C' = A \cap (B' \cap C') = A \cap (B \cup C)' = A - (B \cup C)$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

۶۹- گزینه «۳»

(مشابه سؤال ۱۳۸ کتاب پر تکرار آمار و احتمال)

دلیل انتخاب: شناخت شرط ناسازگار بودن دو پیشامد و تاثیر آن بر روی تفاضل آن‌ها

دو پیشامد A و B ناسازگار هستند، پس

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ناسازگار A و B، $A \cap B = \emptyset$ است، بنابراین داریم:

$$P(A - B) = P(A) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\cdot} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + P(B)$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$P(B - A) = P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\cdot} = \frac{5}{12}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

دلیل انتخاب: درک مفهوم احتمال غیرهم‌شانس و شناخت فضای

نمونه در این آزمایش تصادفی

فرض کنید احتمال برد محمد در این مسابقه برابر x باشد. در این

صورت احتمال برد رضا برابر $3x$ و احتمال برد علی برابر $6x$ است. در

نتیجه داریم:

$$6x + 3x + x = 1 \Rightarrow 10x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{10}$$

$$P(\text{علی}) = 6 \times \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

 ۴

 ۳ ✓

 ۲

 ۱