



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

۲۱۱- اگر x و y دو عدد حقیقی نامنفی باشند، در اثبات نامساوی $x^2 + y^2 \geq x^2y + xy^2$ به روش بازگشتی، به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟

$$\begin{aligned} (x+y)^2(x-y) &\geq 0 \quad (۱) \\ (x-y)^2(x^2+y^2) &\geq 0 \quad (۲) \\ (x-y)^2(x+y) &\geq 0 \quad (۳) \\ (x^2+y^2)(x+y) &\geq 0 \quad (۴) \end{aligned}$$

۲۱۲- چند عدد صحیح مانند n وجود دارد که به ازای آن رابطه $n^2 - 2n \mid m$ برای هر $m \in \mathbb{Z}$ برقرار باشد؟

$$\begin{aligned} (۱) \text{ صفر} & \quad (۲) \quad ۱ \\ (۳) \quad ۲ & \quad (۴) \quad ۳ \end{aligned}$$

۲۱۳- اگر m عددی طبیعی باشد، در این صورت حاصل $([2m^3, 6m^7], [12m^9, 4m^5])$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (۱) \quad 12m^9 & \quad (۲) \quad 4m^5 \\ (۳) \quad 2m^3 & \quad (۴) \quad 6m^7 \end{aligned}$$

۲۱۴- اگر باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر 7 و 9 به ترتیب 5 و 4 باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم این عدد بر 63 کدام است؟

$$\begin{aligned} (۱) \quad ۱۷ & \quad (۲) \quad ۲۳ \\ (۳) \quad ۴۰ & \quad (۴) \quad ۴۶ \end{aligned}$$

۲۱۵- باقی‌مانده تقسیم 3^{45} بر 29 کدام است؟

$$\begin{aligned} (۱) \quad ۲ & \quad (۲) \quad ۳ \\ (۳) \quad ۲۶ & \quad (۴) \quad ۲۷ \end{aligned}$$

۲۱۶- اگر دو عدد $(4a-6)$ و $(7a+2)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(2a-1)$ کدام است؟

$$(۱) \quad ۱ \quad (۲) \quad ۳ \quad (۳) \quad ۵ \quad (۴) \quad ۷$$

۲۱۷- چند عدد طبیعی به صورت $\overline{2x35y}$ وجود دارد که بر 99 بخش پذیر باشد؟

$$(۱) \quad ۱ \quad (۲) \quad ۲ \quad (۳) \quad ۳ \quad (۴) \quad ۴$$

۲۱۸- چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد که 6 برابر آن‌ها به علاوه 9 بر 15 بخش پذیر باشد؟

$$(۱) \quad ۱۰ \quad (۲) \quad ۱۵ \quad (۳) \quad ۱۸ \quad (۴) \quad ۲۰$$

۲۱۹- به چند طریق می‌توان ۹۲ کیلو آرد را در بسته‌های ۳ و ۵ کیلویی بسته‌بندی کرد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۲۰- اگر $a \equiv 18$ و $b \equiv 12$ باشد، آنگاه معادلهٔ سیالته $ax + by = c$ به ازای کدام مقدار c همواره دارای جواب است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴) ۲۸

دوازدهم: حسابان ۲ - ۱۰ سوال

۱۹۱- در تابع $y = |2x - 1|$ ، ابتدا طول نقاط را نصف می‌کنیم (انقباض افقی) و سپس تابع را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

نمودار تابع جدید در بازهٔ (α, β) از نمودار اولیه پایین‌تر است. بیشترین مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{5}{3}$

۱۹۲- تابع $f(x) = |2x - 4| - |x + 1|$ در کدام بازه صعودی است؟

- (۱) $(-2, -1)$ (۲) $(-1, 0)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $(2, 4)$

۱۹۳- اگر $m \in [a, b]$ باشد، تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & ; x < 1 \\ x^2 - (2m - 1)x + 2 & ; 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 + 2 & ; x > 3 \end{cases}$ اکیداً صعودی است. حداکثر $b - a$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۹۴- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x - 1$ و $x + 2$ به ترتیب ۵ و -1 باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x^2 + x - 2$ کدام است؟

- (۱) $3x + 2$ (۲) $3x - 2$ (۳) $2x + 3$ (۴) $2x - 3$

۱۹۵- دوره تناوب تابع $y = \sin x \sqrt{1 + \cos 2x}$ کدام است؟

(۲) $\frac{\pi}{2}$

(۱) π

(۴) 2π

(۳) $\frac{3\pi}{2}$

۱۹۶- اگر T دوره تناوب تابع $f(x) = \left| \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} \right|$ باشد، یکنوایی این تابع در بازه‌های $(0, \frac{T}{4})$ و $(\frac{T}{4}, T)$ به ترتیب چگونه است؟

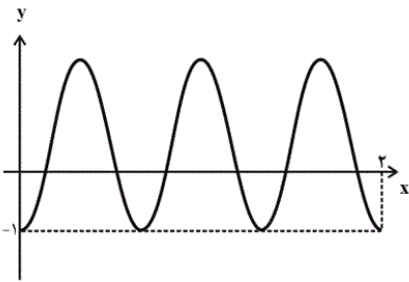
(۲) نزولی، نزولی

(۱) صعودی، صعودی

(۴) صعودی، نزولی

(۳) نزولی، صعودی

۱۹۷- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos b\pi x$ را نمایش می‌دهد. بیشترین مقدار تابع کدام است؟



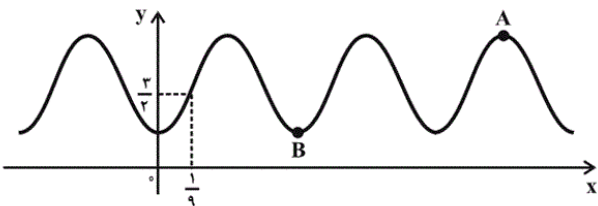
(۱) ۶

(۲) ۵

(۳) ۴/۵

(۴) ۵/۵

۱۹۸- اگر نمودار تابع $f(x) = 1 + a \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$ به صورت زیر باشد، شیب خط گذرنده از نقاط A و B کدام است؟



(۱) ۱

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) ۲

(۴) $\frac{5}{2}$

۱۹۹- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ در $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۴) $\frac{7\pi}{3}$

(۳) $\frac{3\pi}{7}$

(۲) $\frac{3\pi}{4}$

(۱) $\frac{4\pi}{3}$

۲۰۰- کامل ترین جواب کلی معادله $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$ (k ∈ Z) کدام است؟

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۲)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۱)

$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$ (۴)

$k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳)

دوازدهم: هندسه ۳ - ۱۰ سوال

۲۰۱- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $\begin{cases} -i & i > j \\ i + j & i = j \\ -j & i < j \end{cases}$ تعریف شده باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

-۲ (۲)

صفر (۱)

-۶ (۴)

-۴ (۳)

۲۰۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ b & c \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه به ازای کدام مقدار b، ماتریس AB یک ماتریس اسکالر است؟

-۱ (۲)

۱ (۱)

$-\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۲۰۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A^7 کدام است؟

-۸ (۲)

۸ (۱)

-۷ (۴)

۷ (۳)

۲۰۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ y & -1 \end{bmatrix}$ دو ماتریس تعویض پذیر باشند، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

-۳ (۲)

۳ (۱)

$\frac{1}{3}$ (۴)

$-\frac{1}{3}$ (۳)

۲۰۵- اگر $A = \begin{bmatrix} a+2 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & a+1 \\ -a & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه به ازای کدام مقادیر a ، ماتریس $2A - B$ وارون پذیر نیست؟

- (۱) $-\frac{2}{5}, 1$
 (۲) $\frac{2}{5}, 1$
 (۳) $\frac{2}{5}, -1$
 (۴) $-\frac{2}{5}, -1$

۲۰۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $3A^{-1} - 2B^{-1}$ کدام است؟

- (۱) -10
 (۲) -5
 (۳) 5
 (۴) 10

۲۰۷- به ازای چند مقدار m ، دستگاه معادلات $\begin{cases} (m-3)x + 3y = m \\ 4x + (m+1)y = 2 \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد؟

- (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) بی‌شمار

۲۰۸- اگر $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه سطر اول ماتریس A کدام است؟

- (۱) $[-2 \quad -5]$
 (۲) $[-2 \quad 5]$
 (۳) $[2 \quad -5]$
 (۴) $[2 \quad 5]$

۲۰۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A| + |B|$ کدام است؟

- (۱) صفر
 (۲) ۱۲
 (۳) ۱۸
 (۴) ۲۲

۲۱۰- اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $|A| |A^{-1}|$ کدام است؟

۱ (۱)

۴ (۲)

۱۶ (۳)

۶۴ (۴)

۲۱۱- گزینه «۳»

(عمیدرضا امیری)

$$x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2 \Leftrightarrow (x^3 - x^2y) + (y^3 - xy^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-y) - y^2(x-y) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 - y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x-y)(x+y) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \geq 0$$

چون x و y هر دو نامنفی هستند، پس رابطه اخیر بدیهی است و اثبات به طریق بازگشتی کامل می‌شود.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۶ تا ۸)

۴

۳

۲

۱

۲۱۲- گزینه «۲»

(عمیدرضا امیری)

می‌دانیم هر عدد صحیح بر اعداد ۱ و -۱ بخش پذیر است، بنابراین داریم:

$$n^2 - 2n = 1 \Rightarrow n^2 - 2n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1 \pm \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$n^2 - 2n = -1 \Rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \Rightarrow (n-1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1 \in \mathbb{Z}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۴

۳

۲

۱

۲۱۳- گزینه «۴»

(عمیدرضا امیری)

می‌دانیم اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $a|b$ ، آنگاه $(a,b) = a$ و $[a,b] = b$ است، بنابراین داریم:

$$2m^3 | 6m^7 \Rightarrow [2m^3, 6m^7] = 6m^7$$

$$4m^5 | 12m^9 \Rightarrow [4m^5, 12m^9] = 12m^9$$

$$6m^7 | 12m^9 \Rightarrow (6m^7, 12m^9) = 6m^7$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۴

۳

۲

۱

طبق قضیه تقسیم داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a = 7k + 5 \xrightarrow{\times 9} 9a = 63k + 45 \\ a = 9k' + 4 \xrightarrow{\times 7} 7a = 63k' + 28 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{تفاضل} \\ \rightarrow 2a = 63(k - k') + 17 \end{array}$$

طرف راست تساوی به دست آمده باید عددی زوج باشد، پس $k - k'$ لزوماً عددی فرد است و در نتیجه داریم:

$$2a = 63(2q + 1) + 17 \Rightarrow 2a = 63 \times 2q + 80$$

$$\xrightarrow{+2} a = 63q + 40$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

(امیرحسین ابومحبوب)

$$\begin{array}{l} 3^3 \equiv 27 \equiv -2 \pmod{29} \xrightarrow{\text{به توان } 5} 3^{15} \equiv (-2)^5 \equiv -32 \equiv -3 \pmod{29} \\ 3 \xrightarrow{\text{به توان } 3} 3^3 \equiv (-3)^3 \equiv -27 \equiv 2 \pmod{29} \end{array}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مسعود رویشی)

$$7a + 2 \equiv 4a - 6 \pmod{10} \Rightarrow 3a \equiv -8 \equiv -18 \pmod{10} \xrightarrow{(3,10)=1} a \equiv -6 \equiv 4 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 2a \equiv 8 \pmod{10} \Rightarrow 2a - 1 \equiv 7 \pmod{10}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: مشابه تمرین ۱۰ صفحه ۲۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

اگر عددی بر ۹۹ بخش پذیر باشد، آنگاه بر ۹ و ۱۱ بخش پذیر است، بنابراین داریم:

$$\overline{2x35y} \equiv 2 + x + 3 + 5 + y \equiv x + y + 10 \equiv 0 \Rightarrow x + y \equiv -10 \equiv 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ x + y = 17 \end{cases}$$

$$\overline{2x35y} \equiv y - 5 + 3 - x + 2 \equiv y - x \equiv 0 \Rightarrow x \equiv y \Rightarrow x = y$$

با توجه به روابط به دست آمده تنها حالت ممکن آن است که $x = y = 4$ باشد، یعنی تنها یک عدد با مشخصات موردنظر وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴

۳

۲

۱

$$6x + 9 \equiv 0 \Rightarrow 6x \equiv -9 \equiv -24 \xrightarrow[\text{gcd}(6,9)=3]{\div 6} x \equiv -4 \equiv 1$$

$$\Rightarrow x = 5k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$10 \leq 5k + 1 \leq 99 \Rightarrow 9 \leq 5k \leq 98 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 2 \leq k \leq 19$$

$$\Rightarrow \text{تعداد مقادیر } k = (19 - 2) + 1 = 18$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ مشابه تمرین ۱۷ - صفحه ۳۰)

۴

۳

۲

۱

اگر تعداد بسته‌های ۳ و ۵ کیلویی را به ترتیب با x و y نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$3x + 5y = 92 \Rightarrow 5y \equiv 92 \Rightarrow -y \equiv -1$$

$$\Rightarrow y \equiv 1 \Rightarrow y = 3k + 1 (k \in \mathbb{Z})$$

$$3x + 5(3k + 1) = 92 \Rightarrow 3x = -15k + 87 \Rightarrow x = -5k + 29$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow -5k + 29 \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{29}{5} \\ y \geq 0 \Rightarrow 3k + 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

از آنجا که k عددی صحیح است، تنها مقادیر $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ قابل قبول هستند، یعنی به ۶ طریق می‌توان این بسته‌بندی را انجام داد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$a \equiv 18 \xrightarrow{6|30} a \equiv 18 \equiv 0 \Rightarrow 6 | a \quad (1)$$

$$b \equiv 12 \xrightarrow{6|42} b \equiv 12 \equiv 0 \Rightarrow 6 | b \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 6 | (a, b)$$

معادله سیاله $ax + by = c$ در صورتی دارای جواب است که $(a, b) | c$. بنابراین با توجه به رابطه به دست آمده $6 | c$ که در بین گزینه‌ها تنها عدد ۲۴ مضرب ۶ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا ضابطه تابع جدید را به دست می آوریم:

$$y = |2x - 1| \xrightarrow{\text{طول نقاط نصف شود}} y = |4x - 1|$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به سمت چپ}} y = |4(x + 1) - 1| = |4x + 3|$$

با حل نامعادله $|4x + 3| < |2x - 1|$ بازه (α, β) را تعیین می کنیم:

$$|4x + 3| < |2x - 1| \xrightarrow{\text{توان}^2} (4x + 3)^2 < (2x - 1)^2$$

$$\Rightarrow (4x + 3)^2 - (2x - 1)^2 < 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (4x + 3 - 2x + 1)(4x + 3 + 2x - 1) < 0$$

$$\Rightarrow (2x + 4)(6x + 2) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 < x < -\frac{1}{3} \Rightarrow \beta - \alpha = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}$$

(مسئله ۲- تابع: صفحه های ۱ تا ۱۲)

۴ ✓

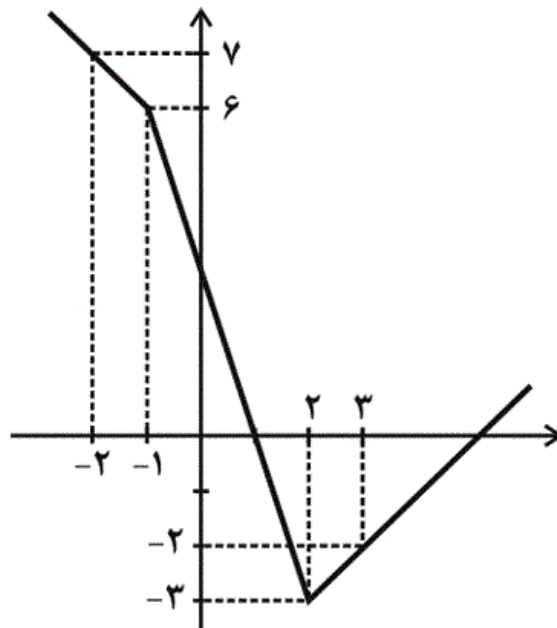
۳

۲

۱

ریشه های قدرمطلق

		↗	↖	
x	-2	-1	2	3
y	7	6	-3	-2



تابع f در بازه $(2, +\infty)$ و تمام زیر مجموعه هایش صعودی (اکید) است. پس جواب گزینه «۴» یعنی بازه $(2, 4)$ است.

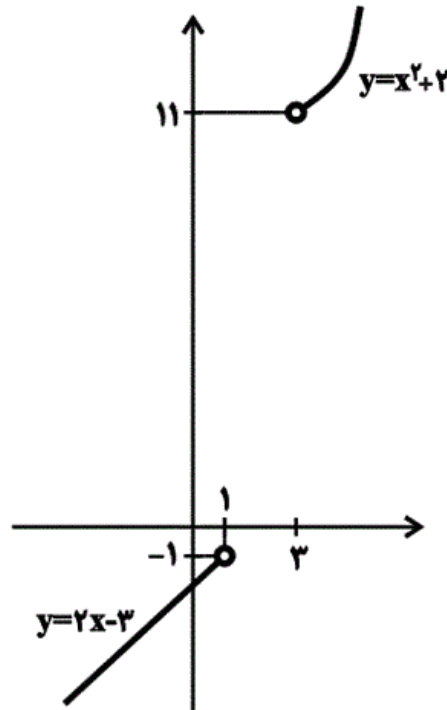
(مسئله ۲- تابع: صفحه های ۱۵ تا ۱۸)

۴ ✓

۳

۲

۱



نمودار تابع f به ازای $x < 1$ و $x > 3$ به صورت مقابل است. برای این سه سهمی در بازه $[1, 3]$ اکیداً صعودی باشد، باید شروط زیر برقرار باشند. اولاً: طول رأس سهمی کوچکتر یا مساوی ۱ باشد.

$$\frac{2m-1}{2} \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{3}{2}$$

ثانیاً: $-1 \leq f(1) \Rightarrow -1 \leq 4 - 2m \Rightarrow m \leq \frac{5}{2}$

ثالثاً: $f(3) \leq 11 \Rightarrow 14 - 6m \leq 11 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq m$

و از اشتراک ۳ شرط به دست می‌آید: $m \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

۴

۳

۲ ✓

۱

داریم:

$$f(x) = (x-1)q_1(x) + 5 \Rightarrow f(1) = 5$$

$$f(x) = (x+2)q_2(x) - 1 \Rightarrow f(-2) = -1$$

$f(x)$ را بر $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت

را $q(x)$ می‌نامیم. درجه باقی‌مانده از درجه مقسوم‌علیه $(x^2 + x - 2)$

کمتر است. پس درجه باقی‌مانده باید ۱ باشد:

$$f(x) = (x^2 + x - 2)q(x) + ax + b$$

$$f(1) = a(1) + b = a + b = 5$$

$$f(-2) = a(-2) + b = -2a + b = -1 \Rightarrow a = 2, b = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = (x^2 + x - 2)q(x) + 2x + 3 \Rightarrow r(x) = 2x + 3$$

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۴

۳ ✓

۲

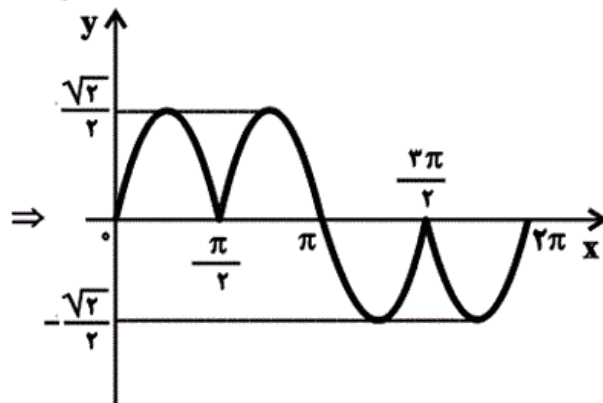
۱

$$y = \sin x \sqrt{1 + \cos 2x} = \sin x \sqrt{2 \cos^2 x} = \sqrt{2} \sin x |\cos x|$$

با رسم شکل دوره تناوب تعیین می‌شود.

$$y = \begin{cases} \sqrt{2} \sin x \cos x & ; 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\sqrt{2} \sin x \cos x & ; \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ -\sqrt{2} \sin x \cos x & ; \pi \leq x < \frac{3\pi}{2} \\ \sqrt{2} \sin x \cos x & ; \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x & ; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x & ; \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x & ; \pi \leq x < \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x & ; \frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi \end{cases}$$



با توجه به شکل $T = 2\pi$ می‌باشد.

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۴

۳

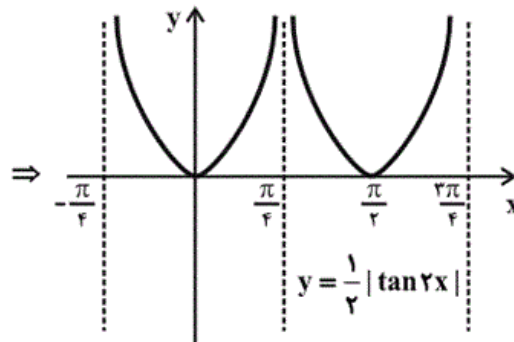
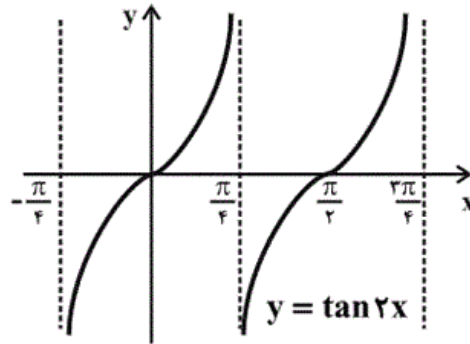
۲

۱

می‌دانیم $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ ، است بنابراین داریم:

$$f(x) = \left| \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} \right| = \left| \frac{1}{2} \tan 2x \right| = \frac{1}{2} |\tan 2x|$$

حال نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



از روی نمودار در می‌یابیم که دوره تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{2}$ است. بنابراین تابع در

بازۀ $(0, \frac{\pi}{4}) = (0, \frac{T}{2})$ صعودی و در بازۀ $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) = (\frac{T}{4}, T)$ نزولی است.

(مسئله ۲- تابع و مثلثات: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸ و ۱۴۲)

۴

۳

۲

۱

از روی نمودار واضح است که سه برابر دوره تناوب، برابر ۲ شده است. پس داریم:

$$۳T = ۲ \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|\pi} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow |b| = ۳$$

پس ضابطه تابع می‌تواند به صورت $y = a \pm ۳ \cos ۳\pi x$ باشد که چون در سمت راست $x = ۰$ تابع صعودی است، ضابطه $y = a - ۳ \cos ۳\pi x$ قابل قبول است.

حال چون کم‌ترین مقدار تابع برابر ۱- است، داریم:

$$a - ۳ = -۱ \Rightarrow a = ۲$$

$$\Rightarrow y_{\max} = a + ۳ = ۵$$

(مسایان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(جوانبش نیکنام)

$$f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + a \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2$$

ضابطه تابع $f(x) = 1 + 2 \sin^2 \frac{3\pi x}{2}$ را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$f(x) = 1 + 2 \sin^2 \frac{3\pi}{2} x = 1 + 2 \left(\frac{1 - \cos 3\pi x}{2} \right) = 2 - \cos 3\pi x$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}, \quad \max = 2 + |-1| = 3, \quad \min = 2 - |-1| = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مختصات A: } (2/\delta T, 3) = \left(\frac{5}{3}, 3\right) \\ \text{مختصات B: } (T, 1) = \left(\frac{2}{3}, 1\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{شیب خط: } m_{AB} = \frac{3-1}{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} = 2$$

(مسابن ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۴

۳

۲

۱

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \Rightarrow \sin x + \tan \frac{\pi}{3} \cos x = 1$$

$$\Rightarrow \sin x + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cos x = 1 \Rightarrow \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = 1$$

$$\Rightarrow 2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{11\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi + 3\pi}{6} = \frac{14\pi}{6} = \frac{7\pi}{3}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۴

۳

۲

۱

(عمید مام‌قارری)

۲۰۰ - گزینه «۴»

داریم:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۴

۳

۲

۱

طبق تعریف درایه‌های ماتریس A داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های A برابر است با:

$$(2 + 4 + 6) + 2 \times (-2) + 4 \times (-3) = 12 - 4 - 12 = -4$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$AB = \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-2 & 4a+1 \\ b-2c & 2b+c \end{bmatrix}$$

در یک ماتریس اسکالر، درایه‌های خارج قطر اصلی همگی صفر بوده و

درایه‌های واقع بر قطر اصلی برابر یکدیگرند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 4a+1=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{4} \\ b-2c=0 \Rightarrow c=\frac{b}{2} \\ 2a-2=2b+c \Rightarrow -\frac{1}{2}-2=2b+\frac{b}{2} \Rightarrow \frac{5b}{2}=-\frac{5}{2} \Rightarrow b=-1 \end{cases}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۲ و ۱۷ تا ۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2I$$

$$A^6 = (A^2)^3 = (-2I)^3 = -8I$$

$$A^7 = A^6 \times A = -8I \times A = -8A = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس A^7 برابر ۸ است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امیر وفائی)

۲۰۴- گزینه «۴»

دو ماتریس A و B تعویض پذیر هستند، بنابراین داریم:

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ y & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ y & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2+xy & 1-x \\ -6+2y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2x+2 \\ y-3 & xy-2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x = -2x+2 \Rightarrow x=1 \\ -6+2y = y-3 \Rightarrow y=3 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$2A - B = \begin{bmatrix} 2a+4 & 1 \\ 1 & 2a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & a+1 \\ -a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+2 & -a \\ a+1 & 2a-1 \end{bmatrix}$$

$$|2A - B| = 0 \Rightarrow (2a+2)(2a-1) - (-a)(a+1) = 0$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 2a + 4a - 2 + a^2 + a = 0 \Rightarrow 5a^2 + 3a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{2}{5} \end{cases}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 8 - 5 = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 5 - 3 = 2$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3A^{-1} - 2B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $3A^{-1} - 2B^{-1}$ برابر (-10) است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ در صورتی بی‌شمار جواب دارد که

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ باشد.}$$

داریم:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{m-3}{4} = \frac{3}{m+1} \Rightarrow (m-3)(m+1) = 12$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 12 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 = 0 \Rightarrow (m-5)(m+3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -3 \end{cases}$$

حال برای دو مقدار به دست آمده، شرط $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ را بررسی می‌کنیم:

$$m = 5 \Rightarrow \frac{3}{6} \neq \frac{5}{2} \quad \text{دستگاه جواب ندارد}$$

$$m = -3 \Rightarrow \frac{3}{-2} = \frac{-3}{2} \quad \text{دستگاه بی‌شمار جواب دارد}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه ۲۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

اگر $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه داریم:

$$BAC = D \Rightarrow B^{-1}(BAC)C^{-1} = B^{-1}DC^{-1} \Rightarrow A = B^{-1}DC^{-1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

طبق دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3 داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1+2+18) - (3+3+4) = 11$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2+18+1) - (4+3+3) = 11$$

$$|A| + |B| = 11 + 11 = 22$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

$$|A| = \begin{vmatrix} |A| & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = 4|A| - 12 \Rightarrow 3|A| = 12 \Rightarrow |A| = 4$$

$$\Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

ماتریس A^{-1} ماتریسی 2×2 است، بنابراین داریم:

$$|A| |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I_2| = 1 \Rightarrow 4 \times \frac{1}{4} = 1$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱