



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

۴۱- در یک دنباله هندسی نزولی با ۹ جمله، اگر مجموع جملات دنباله ۷ برابر مجموع جملات با شماره‌های مضرب ۳ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۴۲- به ازای کدام مقدار k ، یکی از ریشه‌های معادله $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-k}{x+1} = 1$ ، دو برابر معکوس ریشه دیگر است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۴۳- اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1+mx} - x^2$ بازه $(-\infty, 3-m]$ باشد، حاصل $2m-3$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{13}$ (۲) -۴ (۳) $-\sqrt{11}$ (۴) $1-\sqrt{5}$

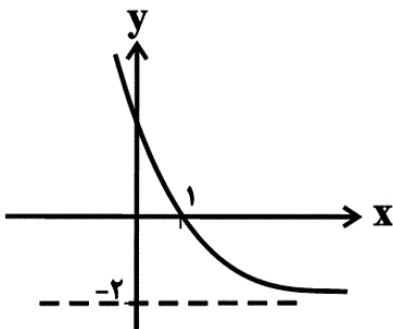
۴۴- اگر تابع $f = \{(a, -\log_4(1-a)), (3, 2a), (a, 1+\log_4 a), (4a, 4a-1)\}$ یک‌به‌یک باشد، چند مقدار برای a به دست می‌آید؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۵- اگر $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-1}$ و $(f^{-1} \circ \log)(x) = \frac{1}{x} f(x)$ باشد، ضابطه تابع g کدام است؟

- (۱) $g(x) = \frac{1}{-2x+5}$ (۲) $g(x) = \frac{1}{2x-3}$ (۳) $g(x) = \frac{2}{-2x+5}$ (۴) $g(x) = \frac{1}{-2x+3}$

۴۶- اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع $f(x) = 3^{-2x+b} + a$ باشد، مقدار b کدام است؟



- (۱) $\log_2 2$ (۲) $\log_2 18$ (۳) $\log_3 12$ (۴) $\log_3 18$

۴۷- مجموع جواب‌های معادله $\frac{1}{\log_2(x)+1} + \frac{\log_2(x)}{(\log_2 2x) \left(\log_2 \frac{x}{2} \right)} = 1$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۴۸- حاصل $\cos 5^\circ (\tan 2^\circ + \tan 7^\circ)$ کدام است؟

$\cos 2^\circ$ (۴)

$\sin 2^\circ$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۴۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{7x - 11\sqrt{x} - 6}{x^2 - 16}$ کدام است؟

$\frac{19\sqrt{2}}{64}$ (۴)

$\frac{17}{64}$ (۳)

$\frac{19\sqrt{2}}{32}$ (۲)

$\frac{17}{32}$ (۱)

۵۰- a کدام مقدار باشد تا تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2a} & ; -2 < x < a \\ 1 + \frac{a}{2} & ; x \geq a \end{cases}$ روی دامنه‌اش پیوسته باشد؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

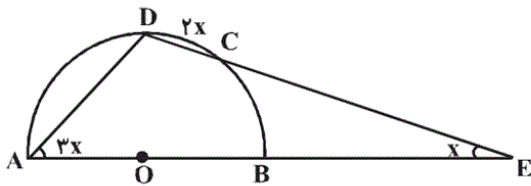
۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

بیازدهم: هندسه ۲ - ۱۰ سوال -

۵۱- در شکل زیر، AB قطر یک نیم‌دایره است. اگر $DC = 2x$ ، $\widehat{E} = x$ و $\widehat{A} = 3x$ باشد، x کدام است؟



30° (۱)

20° (۲)

15° (۳)

10° (۴)

۵۲- دو دایره $C(O, 3a-1)$ و $C'(O', a+5)$ فقط دارای یک مماس مشترک‌اند. اگر طول خط‌المرکزین این دو دایره $3a$ باشد،

مقدار a کدام است؟

$\frac{5}{6}$ (۲)

$\frac{6}{5}$ (۱)

$\frac{5}{7}$ (۴)

$\frac{7}{5}$ (۳)

۵۳- اگر طول قاعده‌های یک دوزنقه محاطی و محیطی، برابر ۲ و ۸ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

۲۰ (۲)

۱۶ (۱)

۴۰ (۴)

۳۲ (۳)

۵۴- مساحت سطح محصور بین مثلثی به اضلاع ۲۵، ۲۴ و ۷ و دایره‌ی محاطی داخلی آن کدام است؟ ($\pi = ۳$)

۵۴ (۱)

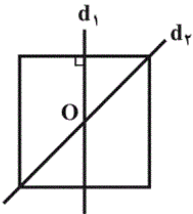
۵۷ (۲)

۶۰ (۳)

۶۳ (۴)

۵۵- بازتاب مربع شکل زیر را ابتدا نسبت به خط d_1 و سپس بازتاب شکل حاصل را نسبت به خط d_2 رسم می‌کنیم. تبدیلی که

مربع اولیه را به آخرین شکل تصویر می‌کند، چند نقطه‌ی ثابت تبدیل دارد؟ (O مرکز مربع است)



(۱) صفر

(۲) بی‌شمار

(۳) ۱

(۴) ۲

۵۶- اگر G مرکز ثقل مثلث ABC و مساحت محصور بین مثلث و تصویر آن تحت انتقال با بردار \overrightarrow{BG} برابر ۶ واحد مربع باشد،

مساحت مثلث ABC کدام است؟

۳۶ (۱)

۴۲ (۲)

۴۸ (۳)

۵۴ (۴)

۵۷- نقطه‌ی P روی ضلع AB از مربع $ABCD$ به‌گونه‌ای قرار دارد که $AP = ۵$ و $BP = ۷$ است. از بین مثلث‌هایی که دو رأس آن

B و P و رأس دیگر آن روی قطر AC باشد، حداقل محیط ممکن کدام است؟

۱۶ (۱)

۱۸ (۲)

۲۰ (۳)

۲۲ (۴)

۵۸- در مثلث ABC ، $BC = ۸$ و $\hat{A} = ۱۲^\circ$ و $AC = \frac{۸\sqrt{۶}}{۳}$ است. اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محیطی مثلث چقدر است؟

۸ $\sqrt{۲}$ (۱)

۴ $\sqrt{۲}$ (۲)

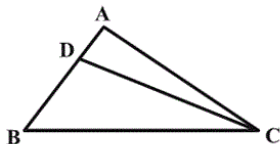
$\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$ (۳)

$\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$ (۴)

۵۹- در مثلث ABC، $AB = 8$ ، $AC = 4$ و $BC = 9$ است. طول نیمساز زاویه داخلی A کدام است؟

- (۱) $\sqrt{14}$
 (۲) ۴
 (۳) $3\sqrt{2}$
 (۴) $2\sqrt{5}$

۶۰- در شکل زیر اگر $AD = 1$ ، $BD = 3$ ، $CD = 5$ و $BC = 7$ باشد، آنگاه مساحت مثلث ABC کدام است؟



- (۱) $5\sqrt{3}$
 (۲) $\frac{21\sqrt{3}}{4}$
 (۳) $6\sqrt{3}$
 (۴) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$

بیازدهم: آمار و احتمال - ۱۰ سوال

۶۱- گزاره $[(q \Rightarrow p) \Rightarrow q] \wedge [p \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$ هم‌ارز منطقی با کدام یک از گزاره‌های زیر است؟

- (۱) T
 (۲) p
 (۳) q
 (۴) $p \wedge q$

۶۲- مجموعه $A_i = \{-i, \dots, 0, \dots, i\}$ ، $(i \in \mathbb{N})$ در مجموعه اعداد صحیح تعریف شده است. چند مجموعه مانند X وجود دارد به گونه‌ای که $A_3 \subseteq X \subseteq A_7$ باشد؟

- (۱) ۸
 (۲) ۱۶
 (۳) ۱۲۸
 (۴) ۲۵۶

۶۳- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، حاصل عبارت $(A' - B') \cup (A - B) \cup [(A \cup B') \cap B]$ همواره کدام است؟

- (۱) A
 (۲) B
 (۳) $A \cup B$
 (۴) $A \cup B'$

۶۴- اگر فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $P(a) = 6P(b) = 3P(c) = 2P(d)$ باشد، P(d) کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{8}$
 (۲) $\frac{1}{4}$
 (۳) $\frac{3}{8}$
 (۴) $\frac{5}{8}$

۶۵- در یک مسابقه تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند، $\frac{6}{10}$ و این احتمال برای مرتضی $\frac{3}{10}$ است. اگر هر کدام از آنها یک بار به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه محمد به هدف بزند به شرط اینکه بدانیم حداقل یک تیر به هدف اصابت کرده، چقدر است؟

- (۱) $\frac{5}{6}$
 (۲) $\frac{6}{9}$
 (۳) $\frac{6}{11}$
 (۴) $\frac{3}{9}$

- ۶۶- دو ظرف یکسان داریم که در اولی ۶ گوی آبی و ۳ گوی قرمز و در دومی ۳ گوی آبی و ۵ گوی قرمز وجود دارد. یک ظرف را به تصادف انتخاب کرده و از آن، گویی بیرون می‌آوریم. اگر این گوی آبی باشد، با کدام احتمال از ظرف اول انتخاب شده است؟
- (۱) $0/48$ (۲) $0/54$ (۳) $0/60$ (۴) $0/64$

- ۶۷- در داده‌های آماری ۱۵، ۱۴، ۱۳، ۱۲، ۶، ۸، ۳، ۵، ۲۳، ۹، میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم کدام است؟

(۱) $10/5$ (۲) ۹ (۳) $11/2$ (۴) $9/4$

- ۶۸- میانگین و انحراف معیار ۱۳ داده آماری به ترتیب برابر ۶ و ۲ است. اگر داده‌های ۵، ۵ و ۸ را از این داده‌ها حذف کنیم، واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

(۱) $4/2$ (۲) $4/4$ (۳) $4/5$ (۴) $4/6$

- ۶۹- کدام یک از موارد زیر در مورد نمونه‌گیری‌های خوشه‌ای و طبقه‌ای نادرست است؟

- (۱) نمونه‌گیری خوشه‌ای، هزینه و زمان را نسبت به نمونه‌گیری طبقه‌ای کاهش می‌دهد.
- (۲) در نمونه‌گیری خوشه‌ای، همه واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب شده را به‌عنوان نمونه در نظر می‌گیریم.
- (۳) در نمونه‌گیری خوشه‌ای بهتر است ویژگی مورد بررسی درون خوشه‌ها تفاوت بیشتری داشته باشد.
- (۴) همواره اندازه طبقات در نمونه‌گیری طبقه‌ای برابر یکدیگر است.

- ۷۰- از جامعه $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ یک نمونه ۶ تایی انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این نمونه، میانگین جامعه را دقیقاً درست برآورد می‌کند؟

(۱) $\frac{1}{28}$ (۲) $\frac{3}{28}$ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۴۱ - گزینه «۱»

(میلاد سجادی لاریجانی)

جملات دنباله هندسی با شماره مضرب ۳ عبارت‌اند از a_3, a_6, a_9 ، پس

داریم:

$$S'_r = \frac{a_1 q^r (1 - (q^r)^r)}{1 - q^r} = \frac{a_1 q^r (1 - q^9)}{1 - q^r}$$

$$\Rightarrow \frac{S_9}{S'_r} = \frac{\frac{a_1(1 - q^9)}{1 - q}}{\frac{a_1 q^r (1 - q^9)}{1 - q^r}} = \frac{1 - q^r}{q^r (1 - q)}$$

$$= \frac{(1 - q)(1 + q + q^2)}{(1 - q)(q^r)} = 7 \Rightarrow 1 + q + q^2 = 7q^r$$

$$\Rightarrow 6q^r - q - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=25} \begin{cases} q_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2} \\ q_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ غرق}$$

قدر نسبت دنباله هندسی نزولی در بازه $(0, 1)$ باید قرار بگیرد.

(مسئله ۱ - جبر و معادله: صفحه‌های ۲ تا ۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-k}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - (x-2)(x-k)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + (k+2)x - 2k}{x^2 - x - 2} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = (k+4)x - 2k + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - (k+5)x + 2k - 3 = 0$$

یکی از ریشه‌های معادله بالا، ۲ برابر معکوس ریشه دیگر است، یعنی اگر

یکی از ریشه‌ها α باشد، دیگری $\frac{2}{\alpha}$ است، پس حاصل ضرب آن‌ها برابر ۲

خواهد شد.

$$P = \frac{c}{a} = 2 \Rightarrow 2k - 3 = 2 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

۴ ✓

۳

۲

۱

$$D_f : 1 + mx \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \Rightarrow 1 \geq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \text{ غ ق ق} \\ m > 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{m} \\ m < 0 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{m} \end{cases}$$

با توجه به دامنه داده شده، حالت دوم ($m > 0$) نیز قابل قبول نیست، پس داریم:

$$m < 0, -\frac{1}{m} = 3 - m \Rightarrow m^2 - 3m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \xrightarrow{m < 0} m = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow 2m - 3 = -\sqrt{13}$$

(مسئله ۱ - تابع: صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

شرط تابع بودن آن است که اگر $x_1 = x_2$ باشد، باید $y_1 = y_2$ باشد و یا $x_1 \neq x_2$ باشد.

شرط یک‌به‌یک بودن آن است که به ازای هر $x_1 \neq x_2$ داشته باشیم $y_1 \neq y_2$.

$$\Rightarrow -\log_f(1-a) = 1 + \log_f a \Rightarrow \log_f a + \log_f(1-a) = -1$$

$$\Rightarrow \log_f(a - a^2) = -1 \Rightarrow a - a^2 = \frac{1}{f} \Rightarrow a^2 - a + \frac{1}{f} = (a - \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

به دلیل وجود دو زوج مرتب (۱ و ۲) و (۱ و ۳) حال به ازای $a = \frac{1}{2}$ شرط

یک‌به‌یک بودن تابع را بررسی می‌کنیم.

$$a = \frac{1}{2} : f = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \log_f^2 \right), (3, 1), \left(\frac{1}{2}, \log_f^2 \right), (2, 1) \right\}$$

به ازای هیچ مقداری از a تابع f یک‌به‌یک نخواهد بود.

(مسئله ۱ - تابع: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا وارون تابع $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{2x}{x-1} \Rightarrow xy - y = 2x \Rightarrow xy - 2x = y$$

$$\Rightarrow x(y-2) = y \Rightarrow x = \frac{y}{y-2} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x-2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(g(x)) = \frac{1}{x} f(x) \Rightarrow \frac{2g(x)}{g(x)-1} = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x-2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{2g(x)}{g(x)-1} = \frac{1}{x-2}$$

$$2xg(x) - 4g(x) = g(x) - 1 \Rightarrow 2xg(x) - 5g(x) = -1$$

$$\Rightarrow g(x)(2x-5) = -1 \Rightarrow g(x) = \frac{-1}{2x-5} = \frac{1}{-2x+5}$$

(مسائل ۱ - تابع: صفحه‌های ۵۷ تا ۶۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

نمودار داده شده، نمودار $y = 3^{-2x+b}$ است که ۲ واحد به پائین منتقل شده است، پس $a = -2$ است.

$$f(1) = 0 \Rightarrow 3^{-2+b} - 2 = 0 \Rightarrow 3^{-2+b} = 2$$

$$\log 3^{-2+b} = \log 2 \Rightarrow (-2+b) \log 3 = \log 2$$

$$\Rightarrow -2+b = \frac{\log 2}{\log 3} = \log_3 2 \Rightarrow b = 2 + \log_3 2 = \log_3 9 + \log_3 2$$

$$\Rightarrow b = \log_3 18$$

(مسئله ۱ - توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۷۲ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\frac{1}{\log_7^x + 1} + \frac{\log_7^x}{(1 + \log_7^x)(\log_7^x - 1)} = 1 \xrightarrow{\log_7^x = t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t+1} + \frac{t}{t^2-1} = \frac{2t-1}{t^2-1} = 1$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow \log_7 x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ t = 2 \Rightarrow \log_7 x = 2 \Rightarrow x = 49 \end{array} \right\} \rightarrow \text{مجموع جوابها} = 5$$

هر دو جواب قابل قبول هستند بنابراین مجموع جوابها برابر ۵ است.

(مسئله ۱ - توابع نمایی و لگاریتم: صفحه‌های ۱۷ تا ۹۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\cos 5^\circ \cdot \left(\frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} + \frac{\sin 7^\circ}{\cos 7^\circ} \right)$$

$$= \cos 5^\circ \cdot \left(\frac{\sin 2^\circ \cos 7^\circ + \sin 7^\circ \cos 2^\circ}{\cos 2^\circ \cos 7^\circ} \right)$$

$$= \cos 5^\circ \cdot \left(\frac{\sin(2^\circ + 7^\circ)}{\cos 2^\circ \sin 2^\circ} \right) = \frac{\cos 5^\circ \times \sin 9^\circ}{\frac{1}{2} \sin 4^\circ} = \frac{2 \sin 4^\circ}{\sin 4^\circ} = 2$$

(مسئله ۱ - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{7x - 11\sqrt{x} - 6}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)}{(x-4)(x+4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(x+4)} = \frac{17}{4 \times 8} = \frac{17}{32}$$

(مسئله ۱ - ص ۵ و پیوستگی: صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کیا مقدس نیاک)

۵۰ - گزینه «۱»

چون $D_f = (-2, +\infty)$ است، مقادیری که برای a به دست می‌آید، باید

در این بازه باشد.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \frac{3}{2a} \\ f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1 + \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2a} = 1 + \frac{a}{2} \Rightarrow 3 = 2a + a^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a-1)(a+3) = 0 \xrightarrow{a > -2} a = 1$$

(مسئله ۱ - ص ۵ و پیوستگی: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\widehat{E} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} - \widehat{BC} = 2x \quad (1)$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{DC} + \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{DC} + \widehat{BC} = 6x \xrightarrow{\widehat{DC} = 2x} \widehat{BC} = 4x \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \widehat{AD} = 6x$$

$$\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{BC} = 180^\circ \Rightarrow 12x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x = 15^\circ$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۷)

۴

۳ ✓

۲

۱



فقط در حالتی دو دایره دارای یک مماس مشترک اند که مماس درون باشند،

در این حالت $d = |R - R'|$ است. بنابراین داریم:

$$|(3a - 1) - (a + 5)| = 3a \Rightarrow |2a - 6| = 3a$$

$$\begin{cases} 2a - 6 = 3a \Rightarrow a = -6 & \text{غلق} \\ 2a - 6 = -3a \Rightarrow 5a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{5} \end{cases}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$x + x = 2 + 8 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

$$h^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow h = 4$$

$$S = \frac{(2+8) \times 4}{2} = 20$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۴

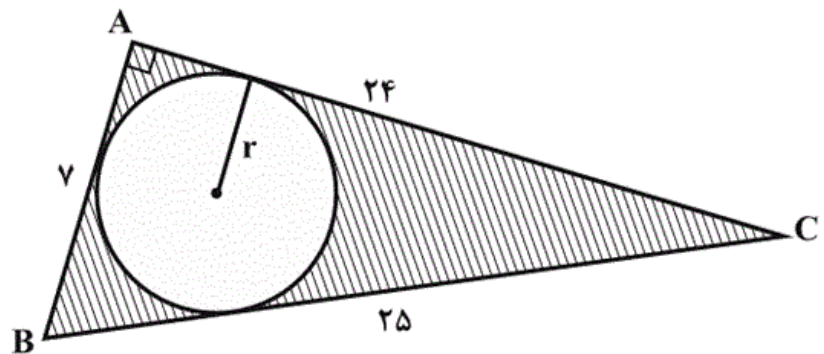
۳

۲ ✓

۱

۵۴- گزینه «۲»

(رضا عباسی اصل)



مثلث مفروض قائم‌الزاویه است، زیرا:

$$25^2 = 24^2 + 7^2$$

در مثلث ABC داریم:

$$S = \frac{1}{2} \times 7 \times 24 = 84$$

$$P = \frac{7 + 24 + 25}{2} = 28$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{84}{28} = 3$$

$$\text{مساحت محصور} = S_{\Delta ABC} - S_{\text{دایره}} = 84 - \pi \times 3^2 \xrightarrow{\pi=3}$$

$$= 57$$

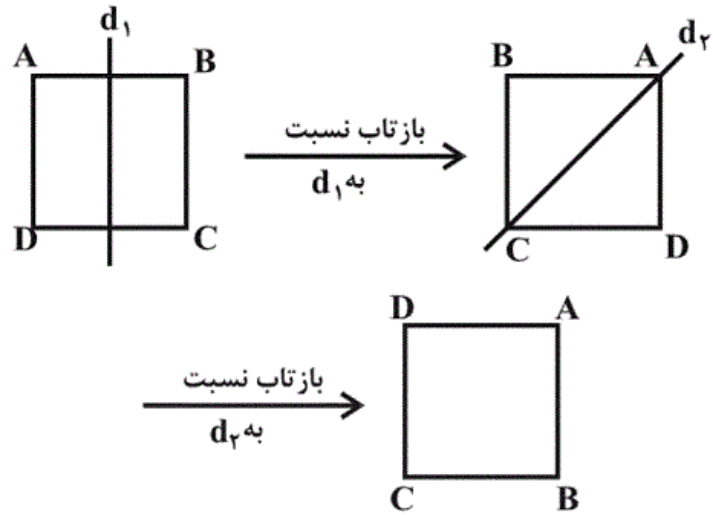
(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

۳

۲ ✓

۱



در واقع مربع نسبت به دو خط متقاطع بازتاب یافته است، پس مطابق شکل، مربع به اندازه دو برابر زاویه بین دو خط یعنی به اندازه 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران یافته است. در نتیجه تنها نقطه ثابت تبدیل، مرکز دوران (محل برخورد خطوط d_1 و d_2 یعنی مرکز مربع) است.

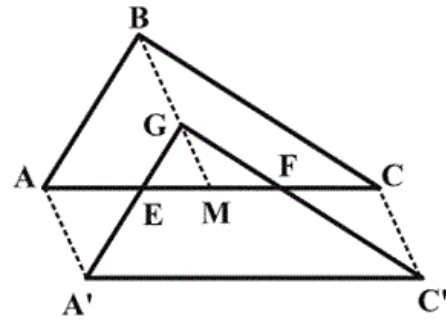
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰ و ۴۵)

۴

۳ ✓

۲

۱



انتقال یافته یک خط با آن خط موازی است، پس مثلث‌های ABC و EGF به حالت تساوی زاویه‌هایشان متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{S_{EGF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{GM}{BM}\right)^2 \Rightarrow \frac{6}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = 54$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

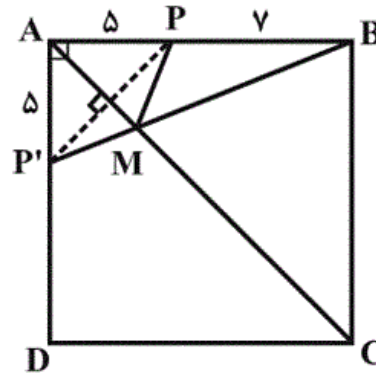
۴

۳

۲

۱

اگر رأس دیگر مثلث را M فرض کنیم، برای یافتن نقطه M به طوری که محیط مثلث PBM حداقل باشد، باید کمترین مقدار $PM + BM$ را پیدا کنیم. (مقدار $PB = 7$ مشخص است.) برای این کار از روش هرون کمک می‌گیریم. نقطه P را نسبت به AC بازتاب داده و P' می‌نامیم. نقطه M محل برخورد $P'B$ با AC است.



با توجه به شکل داریم:

$$PM + BM = P'M + BM = P'B$$

$$\triangle BAP' : P'B^2 = \underbrace{AP'^2}_{5} + \underbrace{AB^2}_{12} \Rightarrow P'B = 13$$

$$\text{محیط مثلث } PBM = \underbrace{PM + BM}_{13} + \underbrace{PB}_7 = 20$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{8}{\sin 12^\circ} = 2R$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۴ ✓

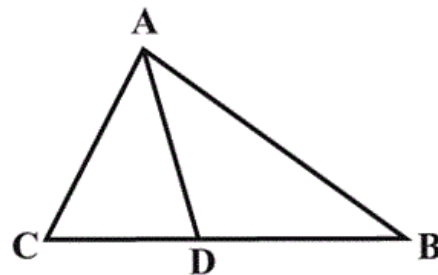
۳

۲

۱

۵۹- گزینه «۱»

(امیرمسین ابومحبوب)



طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{BD}{\underbrace{BD+CD}_{BC}} = \frac{2}{2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow BD = 6, CD = 3$$

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times CD = 8 \times 4 - 6 \times 3 = 32 - 18$$

$$\Rightarrow AD^2 = 14 \Rightarrow AD = \sqrt{14}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

طبق قضیه هرون برای مثلث BDC داریم:

$$P = \frac{3+5+7}{2} = \frac{15}{2}$$

$$S_{BDC} = \sqrt{\frac{15}{2} \left(\frac{15}{2} - 3 \right) \left(\frac{15}{2} - 5 \right) \left(\frac{15}{2} - 7 \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{15}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

با توجه به این که ارتفاع رسم شده از رأس C در دو مثلث ABC و

BDC یکسان است، پس نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر نسبت

قاعده‌های آنها است. داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BDC}} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{\frac{15\sqrt{3}}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow S_{ABC} = 5\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

۶۱ - گزینه «۳»

(مرتضی فهیم علوی)

طبق جدول ارزش گزاره‌ها، اگر $r \equiv [p \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$ و

$s \equiv [(q \Rightarrow p) \Rightarrow q]$ باشند، آنگاه داریم:

p	q	$q \Rightarrow p$	r	s	$r \wedge s$
د	د	د	د	د	د
د	ن	د	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن

همان‌طور که مشاهده می‌شود، گزاره مورد نظر هم‌ارز منطقی با گزاره q است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

از آن جایی که $n(A_i) = 2i + 1$ است، داریم:

$$n(A_3) = 7, n(A_7) = 15$$

مجموعه X لزوماً شامل تمام اعضای مجموعه A_3 است. همچنین مجموعه X می‌تواند شامل اعضای از مجموعه A_7 باشد که در مجموعه A_3 وجود ندارند. بنابراین تعداد مجموعه‌های ممکن برای X ، برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $A_7 - A_3$ است. با توجه به این که

$A_3 \subseteq A_7$ ، پس $A_7 - A_3$ دارای ۸ عضو در نتیجه $2^8 = 256$ زیرمجموعه است.
(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۵)

۴

۳

۲

۱

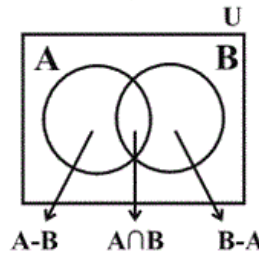
$$A' - B' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$$

$$(A \cup B') \cap B = (A \cap B) \cup (B' \cap B) = (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$$

$$(A' - B') \cup (A - B) \cup [(A \cup B') \cap B]$$

بنابراین داریم:

$$= (B - A) \cup (A - B) \cup (A \cap B) = A \cup B$$



(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۴

۳

۲

۱

$$P(\{a, d\}) = 3P(\{c, b, e\}) = 6P(a)$$

$$P(\{a, d\}) + P(\{c, b, e\}) = 1 \Rightarrow 6P(a) + 2P(a) = 1$$

$$\Rightarrow P(a) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(\{a, d\}) = \frac{6}{8}$$

$$P(d) = P(\{a, d\}) - P(a) = \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

۲

۱

۶۵- گزینه «۱»

(یاسین سپهر)

پیشامد آن که محمد به هدف بزند را A و پیشامد آن که مرتضی به هدف بزند را B در نظر می‌گیریم، بنابراین پیشامد این که حداقل یک تیر به هدف اصابت کند A ∪ B خواهد بود. داریم:

$$P(A | A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{0/6}{0/6 + 0/3 - 0/6 \times 0/3} = \frac{5}{6}$$

توجه داشته باشید که A و B مستقل از یکدیگر هستند.

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶ و ۶۸)

۴

۳

۲

۱

$$P(A | C) = \frac{P(A)P(C | A)}{P(A)P(C | A) + P(B)P(C | B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{6}{9}}{\frac{1}{2} \times \frac{6}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{3}{16}} = \frac{1}{3} \times \frac{48}{25} = \frac{16}{25} = 0/64$$

توجه کنید که احتمال انتخاب هر ظرف برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱

۶۷- گزینه «۳»

(فرهاد وفایی)

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم، چون تعداد کل داده‌ها برابر یازده است، پس میانه پنج داده اول برابر چارک اول و میانه پنج داده آخر برابر چارک سوم است.

۳, ۵, ۶, ۸, ۹, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۵, ۲۳

↑

↑

چارک اول چارک سوم

پس میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم، برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{8 + 9 + 12 + 13 + 14}{5} = \frac{56}{5} = 11/2$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۴ تا ۸۷)

۴

۳

۲

۱

۶۸- گزینه «۴»

(مرتضی فهیم علوی)

میانگین داده‌های ۵، ۵ و ۸، برابر ۶ است، پس با حذف این ۳ داده، میانگین ۱۰ داده باقی‌مانده تغییر نکرده و برابر ۶ خواهد بود. واریانس ۱۳ داده اولیه

$$4 = \frac{\sum_{i=1}^{13} (x_i - 6)^2}{13} \Rightarrow \sum_{i=1}^{13} (x_i - 6)^2 = 52$$

برابر ۴ است، پس داریم:

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - 6)^2 + 2(5 - 6)^2 + (8 - 6)^2 = 52 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} (x_i - 6)^2 = 46$$

در نتیجه واریانس داده‌های باقی‌مانده برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - 6)^2}{10} = \frac{46}{10} = 4.6$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶ و ۹۳ تا ۹۵)

۴

۳

۲

۱

۶۹- گزینه «۴»

(امیرحسین ابومصوب)

برابری اندازه طبقات از ویژگی‌های نمونه‌گیری سیستماتیک است. در نمونه‌گیری طبقه‌ای، جامعه صرفاً به زیرجامعه‌های مجزا تقسیم می‌شود و از هر طبقه، یک نمونه تصادفی ساده انتخاب می‌گردد.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

۴

۳

۲

۱

(مرتضی فهیم علوی)

میانگین جامعه برابر است با: $\bar{x} = \frac{1+2+\dots+8}{8} = 4/5$

بنابراین اگر یک نمونه ۶ تایی میانگین را دقیق برآورد کند، باید میانگین نمونه برابر ۴/۵ باشد، در این صورت مجموع اعضای این نمونه برابر است با:

$$6 \times 4/5 = 27$$

و با توجه به اینکه مجموع تمامی اعضای جامعه برابر با $1+2+\dots+8=36$ است، می توان نتیجه گرفت که مجموع دو عضوی که در نمونه نمی باشند برابر با ۹ است. بنابراین این دو عضو حالات زیر را دارند:

$$\{1,8\}, \{2,7\}, \{3,6\}, \{4,5\}$$

تعداد کل نمونه های ۶ تایی برابر است با: $\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!2!} = 28$

بنابراین احتمال اینکه یک نمونه ۶ تایی میانگین جامعه را دقیق برآورد کند،

برابر است با: $P(A) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

(آمار و احتمال - آمار استنباطی: صفحه های ۱۱۸ تا ۱۲۰)

۴

۳ ✓

۲

۱