



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

۱۳۱- برد تابع $f(x) = [x] + [-x]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۱) $\{1\}$

(۲) $\{0, -1\}$

(۳) $[0, 1)$

(۴) $\{1, 3\}$

۱۳۲- کدام جفت از توابع زیر با هم برابرند؟

(۱) $f(x) = x$ و $g(x) = \sqrt{x^2}$

(۲) $f(x) = |x-1|$ و $g(x) = (\sqrt{x-1})^2$

(۳) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1}$

(۴) $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$

۱۳۳- اگر مجموعه جواب نامعادله $|2x-1| \leq x+5$ به صورت $[a, b]$ باشد، حاصل ab کدام است؟

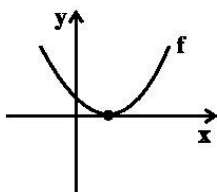
(۲) ۶

(۱) -۶

(۴) ۸

(۳) -۸

۱۳۴- اگر نمودار سهمی $f(x) = 2x^2 + bx + 9$ به صورت مقابل باشد، آن گاه $f(1)$ کدام است؟



(۱) ۲

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) ۳

۱۳۵- اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{-x^2 + ax + b}$ برابر $\{3\}$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۳ (۱)
- ۳ (۲)
- ۱۵ (۳)
- ۱۵ (۴)

۱۳۶- خط به معادله $x + y - 1 = 0$ بر دو دایره C_1 و C_2 به ترتیب با مرکزهای $O_1(2, 6)$ و $O_2(-1, 3)$ مماس است. نسبت مساحت دایره

بزرگ تر به دایره کوچک تر کدام است؟

- ۲۵ (۱)
- ۳۶ (۲)
- ۳۹ (۳)
- ۴۹ (۴)

۱۳۷- در کدام رابطه y تابعی بر حسب x است؟

$$|x+1| + |y-1| = 0 \quad (۲)$$

$$x = |y-1| \quad (۱)$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 1 = 0 \quad (۴)$$

$$x = y\sqrt[3]{y} \quad (۳)$$

۱۳۸- ریشه های معادله درجه دوم $2x^2 + ax + b = 0$ ، قرینه و معکوس ریشه های معادله $x^2 - 2x - 2 = 0$ هستند. حاصل $a + b$ کدام

است؟

- ۱ (۱)
- ۳ (۲)
- ۳ (۴)
- ۱ (۳)

۱۳۹- قرینه منحنی به معادله $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ نسبت به خط $y = x$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، ضابطه منحنی حاصل

کدام است؟

$g(x) = x^2 + 2x$ (۱)

$g(x) = x^2 - 1$ (۲)

$g(x) = x^2 - 2x$ (۳)

$g(x) = x^2 + 1$ (۴)

۱۴۰- مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{x^2 + 3x + 5} + 3x = 2\left(\frac{x^2}{3} + 2x + 1\right)$ کدام است؟

۱ (۱)

-۳ (۲)

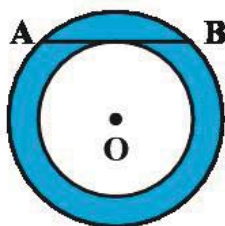
-۱ (۳)

۶ (۴)

یازدهم: هندسه ۲ - ۱۰ سوال

۱۴۱- در شکل زیر، دو دایره هم‌مرکزند و وتر AB بر دایره کوچک مماس است. اگر اندازه وتر AB برابر ۲۴

سانتی‌متر باشد، مساحت ناحیه بین دو دایره چند سانتی‌متر مربع است؟



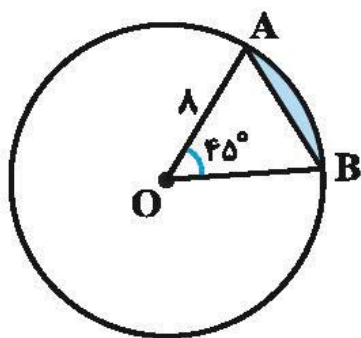
256π (۱)

144π (۲)

576π (۳)

324π (۴)

۱۴۲- در شکل زیر، مساحت ناحیه رنگی کدام است؟



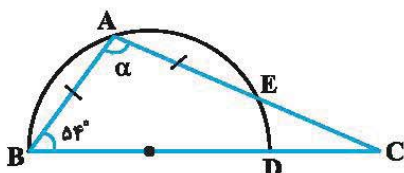
(۱) $۱۶\left(\frac{\pi}{۲} - \sqrt{۲}\right)$

(۲) $۱۶\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$

(۳) $۸\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$

(۴) $۳۲\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$

۱۴۳- در شکل زیر، $AB = AE$ و BD قطر نیم‌دایره است. زاویه α چند درجه است؟



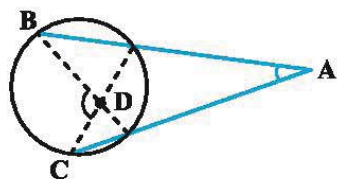
(۱) ۱۰۸

(۲) ۱۱۶

(۳) ۱۲۰

(۴) ۱۲۶

۱۴۴- در شکل زیر، $\hat{A} = ۲۷^\circ$ و $\hat{D} = ۷۱^\circ$ ، کمان BC چند درجه است؟



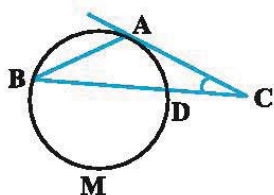
(۱) ۹۸

(۲) ۱۰۰

(۳) ۱۰۲

(۴) ۱۰۴

۱۴۵- در شکل زیر، مماس AC با وتر AB از دایره برابر است. اگر \widehat{DMB} برابر ۲۲۲ درجه باشد، زاویه C چند درجه است؟



(۱) ۲۱

(۲) ۲۲

(۳) ۲۳

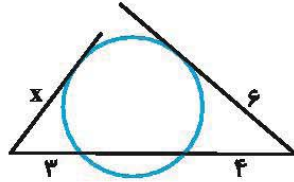
(۴) ۲۴

۱۴۶- از نقطه M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصله نقطه M تا نزدیک‌ترین

نقاط دایره $4(\sqrt{2}-1)$ باشد، فاصله مرکز دایره از وتر AB کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
 (۲) ۲
 (۳) $2\sqrt{2}$
 (۴) ۳

۱۴۷- در شکل زیر، اندازه x کدام است؟



- (۱) $3\sqrt{2}$
 (۲) $2\sqrt{5}$
 (۳) $2\sqrt{6}$
 (۴) ۵

۱۴۸- اگر بین شعاع‌های دو دایره و طول خط‌المركزین آن‌ها (d) روابط $r_1 + r_2 = \frac{2d}{4}$ و $r_1 - r_2 = \frac{d}{4}$ برقرار باشد، شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای

که به هر دو دایره مماس است کدام است؟

- (۱) $\frac{d}{4}$
 (۲) $\frac{d}{16}$
 (۳) $\frac{d}{2}$
 (۴) $\frac{d}{8}$

۱۴۹- بیش‌ترین فاصله بین نقاط دو دایره متخارج $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ برابر ۱۶ و طول خط‌المركزین دو دایره برابر ۱۰ است. طول مماس

مشترک داخلی این دو دایره کدام است؟

- (۱) ۴
 (۲) ۶
 (۳) ۸
 (۴) ۱۰

۱۵۰- در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{3}$ واحد، طول خط‌المركزین دو دایره محیطی و محاطی خارجی کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) $\frac{3}{2}$
 (۳) $\frac{5}{2}$
 (۴) ۳

۱۳۱- گزینه «۲»

(مبتنی نادرری)

می دانیم:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$R_f = \{0, -1\}$$

(مسابقه ۱- تابع - صفحه های ۴۹ تا ۵۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

برای برابری دو تابع، باید دامنه و ضابطه دو تابع با هم برابر باشند.

گزینه «۱»: ضابطه‌ها برابر نیستند:

$$f(x) = x \text{ و } g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$$

گزینه «۲»: ضابطه‌ها و دامنه‌ها برابر نیستند:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = |x-1| \\ D_f = \mathbb{R} \end{array} \right. \text{ و } \left\{ \begin{array}{l} g(x) = (\sqrt{x-1})^2 = x-1 \\ D_g : x \geq 1 \end{array} \right.$$

گزینه «۳»: دامنه‌ها برابر نیستند:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \\ D_f : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) = \sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - 1} \\ D_g : [1, +\infty) \cap [-1, +\infty) = [1, +\infty) \end{array} \right.$$

گزینه «۴»: ضابطه و دامنه دو تابع با هم برابرند:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 1 \\ D_f = \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = x^2 - 1 \\ D_g : \mathbb{R} \end{array} \right.$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۱ تا ۴۸)

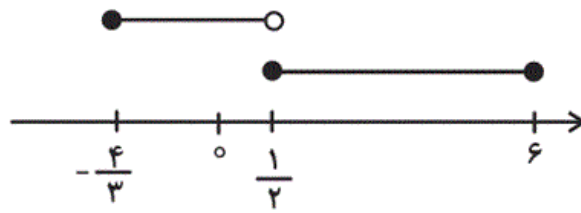
 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

$$|2x-1| \leq x+5 \begin{cases} \begin{array}{l} x \geq \frac{1}{2} \rightarrow 2x-1 \leq x+5 \Rightarrow x \leq 6 \\ \text{اشتراک با} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{array} \rightarrow [\frac{1}{2}, 6] \\ \begin{array}{l} x < \frac{1}{2} \rightarrow -2x+1 \leq x+5 \Rightarrow x \geq -\frac{4}{3} \\ \text{اشتراک با} \\ x < \frac{1}{2} \end{array} \rightarrow [-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}) \end{cases}$$



در آخر بین دو مجموعه جواب به دست آمده، اجتماع می‌گیریم:

$$[-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, 6] = [-\frac{4}{3}, 6] \Rightarrow a \times b = -\frac{4}{3} \times 6 = -8$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $a \quad b$

(حسابان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

طبق نمودار سهمی، $\Delta = 0$ و $b < 0$ است:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 144 = 0 \Rightarrow b^2 = 144 \xrightarrow{b < 0} b = -12$$

$$f(x) = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f(1) = 4 - 12 + 9 = 1$$

(حسابان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

از آنجا که عبارت $-x^2 + ax + b$ ، در همه نقاط به جز $x = 3$ منفی است پس جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-x^2 + ax + b$	-	0	-

بنابراین عبارت زیر رادیکال حتماً $-(x-3)^2$ است.

$$-x^2 + ax + b = -(x-3)^2 = -x^2 + 6x - 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -9 \end{cases} \Rightarrow a + b = -3$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

می‌دانیم اگر خطی بر دایره مماس باشد آن گاه شعاع دایره در نقطه تماس بر خط عمود است. بنابراین فاصله مرکز دایره تا خط مماس همان اندازه شعاع دایره است.

شعاع دایره C_1 به مرکز $O_1(2, 6)$:

$$r_1 = \frac{|1 \times 2 + 1 \times 6 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

شعاع دایره C_2 به مرکز $O_2(-1, 3)$:

$$r_2 = \frac{|1 \times (-1) + 1 \times 3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

چون $r_1 > r_2$ است، بنابراین C_1 دایره بزرگ‌تر است.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{مساحت دایره } C_1 : S_1 = \pi r_1^2 = \pi \left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{49\pi}{2} \\ \text{مساحت دایره } C_2 : S_2 = \pi r_2^2 = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{49\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 49$$

(مسئله ۱- پیر و معادله - صفحه‌های ۳۳ تا ۳۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

رابطه‌ای بیانگر یک تابع است که در آن به ازای هر x فقط یک y وجود داشته باشد. در گزینه ۱» به ازای $x = 1$ برای y دو جواب به دست می‌آید ($y = 2$, $y = 0$) و در واقع هر دو زوج مرتب $(1, 2)$ و $(1, 0)$ در رابطه گزینه ۱» صدق می‌کنند. بنابراین تابع نیست.

در گزینه ۳» به ازای $x = 1$ برای y دو جواب $y = 1$ و $y = -1$ به دست می‌آید و لذا تابع نیست.

در گزینه ۴» به ازای $x = 0$ داریم:

$$y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

و برای y دو جواب $y = 1$ و $y = -1$ به دست می‌آید و لذا تابع نیست.

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 2 = 0$ را α و β فرض کنیم، ریشه‌های

معادله $2x^2 + ax + b = 0$ برابر $-\frac{1}{\alpha}$ و $-\frac{1}{\beta}$ می‌باشد؛

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 2 \\ P = \alpha\beta = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S' &= -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = -\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) = -\left(\frac{2}{-2}\right) = 1 \\ P' &= \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow a + b = -2 - 1 = -3$$

(مسئله ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۷ تا ۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

قرینه یک منحنی مانند f نسبت به خط $y = x$ همان وارون تابع f است. لذا باید وارون تابع f را به دست آوریم و سپس آن را یک واحد به راست انتقال دهیم.

$$y = \sqrt{x+1} - 1 \Rightarrow y + 1 = \sqrt{x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (y+1)^2 = (\sqrt{x+1})^2$$

$$\Rightarrow y^2 + 2y + 1 = x + 1 \Rightarrow x = y^2 + 2y \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2x$$

حال باید $f^{-1}(x)$ را یک واحد به راست انتقال دهیم. بنابراین:

$$g(x) = f^{-1}(x-1) = (x-1)^2 + 2(x-1)$$

$$= x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 = x^2 - 1 \Rightarrow g(x) = x^2 - 1$$

(مسابقه ۱- تابع - صفحه‌های ۵۷ تا ۶۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$3\left(\frac{x^2}{3} + 2x + 1\right) = \sqrt{x^2 + 3x + 5} + 3x$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 3 - 3x = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 3 = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$$

با تغییر متغیر مناسب داریم:

$$x^2 + 3x + 3 = t \Rightarrow t = \sqrt{t+2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} t^2 = t+2$$

$$\Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t+1)(t-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ غیر قابل قبول، زیرا حاصل رادیکال با فرجه ۲ نباید منفی باشد.} \text{ ق ق}$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} = -3$$

(مسابان ۱- پیر و معارله - صفحه‌های ۷ تا ۹، ۱۳ و ۲۰ تا ۲۲)

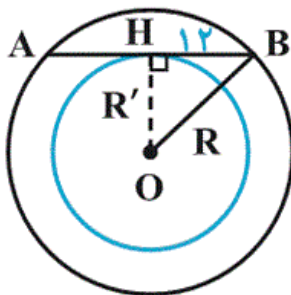
۴

۳

۲ ✓

۱

در مثلث قائم‌الزاویه OHB داریم:



$$R^2 - R'^2 = HB^2 = 144$$

$$\text{مساحت سطح بین دو دایره: } \pi R^2 - \pi R'^2 = 144\pi$$

(هندسه ۲ - صفحه ۱۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\text{AOB مساحت قطاع} = \frac{1}{8} \times \pi \times 8^2 = 8\pi$$

$$\text{OAB مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin(45^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت ناحیه هاشورخورده} = 8\pi - 16\sqrt{2} = 16\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\right)$$

(هندسه ۲ - صفحه ۱۲)

۴

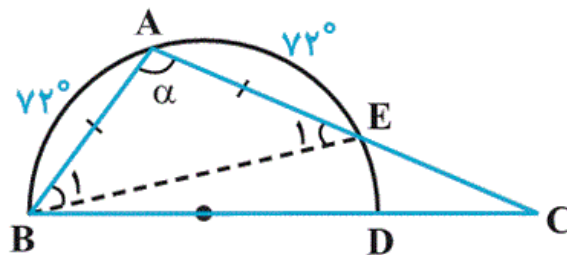
۳

۲

۱ ✓

(کتاب آبی)

۱۴۳ - گزینه «۱»



$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AED}}{2} \Rightarrow 54^\circ = \frac{\widehat{AED}}{2} \Rightarrow \widehat{AED} = 108^\circ$$

$$\widehat{AB} = \widehat{BAD} - \widehat{AED} \Rightarrow \widehat{AB} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$$

$$AB = AE \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AE} \Rightarrow \widehat{AE} = 72^\circ$$

$$\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$\triangle ABE: \alpha + \widehat{B}_1 + \widehat{E}_1 = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 2 \times 36^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 108^\circ$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\begin{cases} \hat{A} = \frac{x-y}{2} = 27^\circ \Rightarrow x-y = 54^\circ \\ \hat{D} = \frac{x+y}{2} = 71^\circ \Rightarrow x+y = 142^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x = 196^\circ \Rightarrow x = 98^\circ$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

 ۴

 ۳

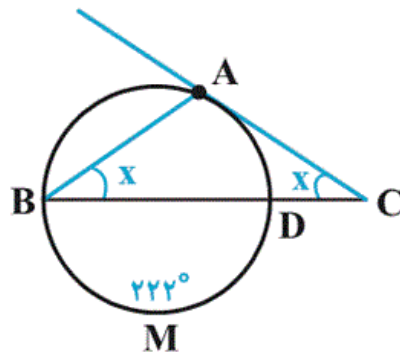
 ۲

 ۱

(کتاب آبی)

۱۴۵ - گزینه «۳»

در مثلث متساوی‌الساقین ABC با فرض $\hat{B} = \hat{C} = x$ داریم:



$$\hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 2x$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 4x$$

$$\widehat{AD} + \widehat{AB} + 222^\circ = 360^\circ \Rightarrow 6x = 138^\circ \Rightarrow x = 23^\circ$$

(هندسه ۲ - صفحه ۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$OA^2 = OH \cdot OM \Rightarrow OH = \frac{OA^2}{OM} = \frac{4^2}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

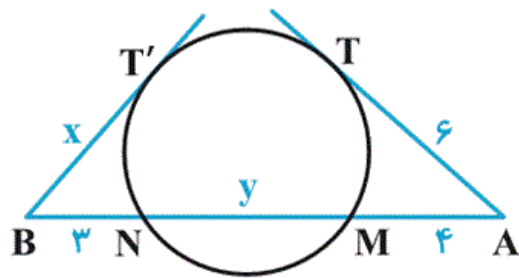
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به شکل، از هر یک از نقاط A و B، یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم شده است. با نوشتن روابط طولی در دایره داریم:



$$AT'^2 = AM \cdot AN \Rightarrow 6^2 = 4(4 + y) \Rightarrow y = 5$$

$$BT'^2 = BN \cdot BM \Rightarrow x^2 = 3(3 + 5) = 24 \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

 ۴

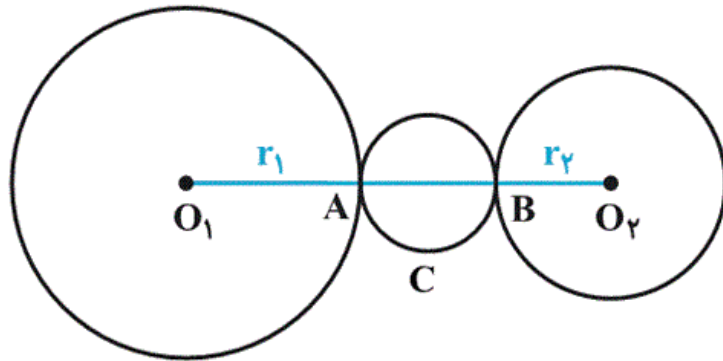
 ۳ ✓

 ۲

 ۱

از آن جا که $O_1O_2 = d > r_1 + r_2 = \frac{3d}{4}$ دو دایره متخارج اند، مطابق

شکل داریم:



$$AB = O_1O_2 - (r_1 + r_2) \Rightarrow AB = d - \frac{3d}{4} = \frac{d}{4}$$

دایره C به قطر AB، کوچک ترین دایره ای است که بر هر دو دایره

مماس است و شعاع آن برابر است با:

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{d}{8}$$

(هندسه ۲- صفحه ۲۰)

۴

۳

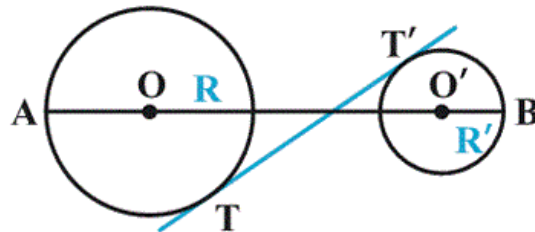
۲

۱

دورترین نقاط دو دایره متخارج $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ ، نقاط A و B در شکل زیر می‌باشد. در این صورت داریم:

$$AB = OO' + R + R' \Rightarrow 16 = 10 + R + R'$$

$$\Rightarrow R + R' = 6$$



طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر است با:

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

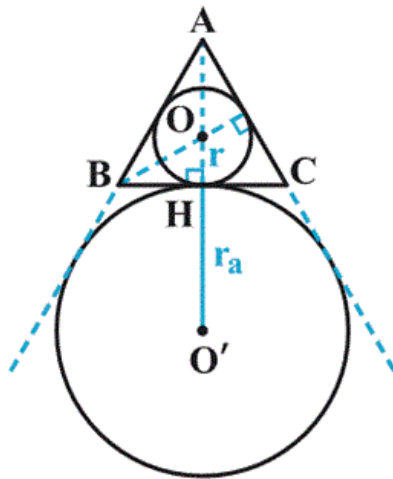
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

همان طور که می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع، نقطه هم‌رسی عمود منصف‌ها، همان نقطه هم‌رسی نیمسازهای داخلی است، پس مرکز دایره محاطی داخلی، همان مرکز دایره محیطی است (نقطه O در شکل زیر). پس مطابق شکل باید مجموع طول شعاع دایره محاطی داخلی و شعاع دایره محاطی خارجی را حساب کنیم:



$$r = OH = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \right) = \frac{\sqrt{3}}{6} a$$

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{3}{2} a - a} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

۴

۳

۲

۱ ✓