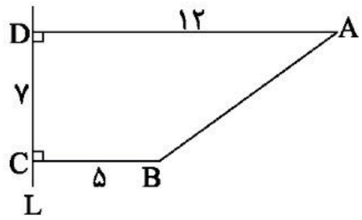
۱۰۱- در مثلث ABC، زاویهٔ A حاده است. اگر عمودمنصف‌های دو ضلع AC و AB یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند در این صورت زاویهٔ $B\hat{O}C$ همواره برابر کدام است؟

۱) $۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}\hat{A}$ ۲) $\hat{B}+\hat{C}$ ۳) $\frac{۱}{۲}(\hat{B}+\hat{C})$ ۴) $۲\hat{A}$

۱۰۲- در شکل زیر با کمک خط‌کش و پرگار، نقطهٔ O را چنان پیدا کرده‌ایم که از A و B به یک فاصله بوده و فاصلهٔ O از خط L برابر ۸ است. طول OA کدام می‌تواند باشد؟

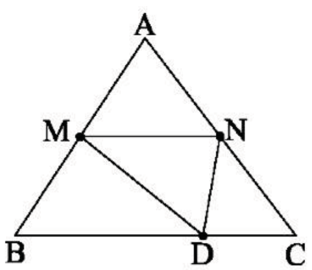


۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۱۰۳- در ذوزنقهٔ ABCD، نقاط E و F به‌ترتیب بر ساق‌های AD و BC چنان واقع‌اند که $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}=\frac{۲}{۳}$. اگر $۲AB=DC=۱۰$ باشد، اندازهٔ EF کدام است؟

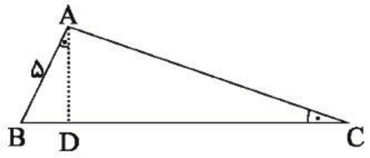
۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۶/۵ ۴) ۷/۵

۱۰۴- در مثلث ABC، M و N به‌ترتیب وسط‌های AB و AC می‌باشند و $\frac{DC}{BD}=\frac{۱}{۲}$ است. اگر مساحت مثلث BMD، برابر ۱۶ باشد، مساحت مثلث MDN کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۵

۱۰۵- در شکل زیر، $B\hat{A}D = \hat{C}$ ، $AB = ۵$ و محیط مثلث ABC ، سه برابر محیط مثلث ABD است. طول BC کدام است؟



۱) $۷/۵$ ۲) ۱۰

۳) $۱۲/۵$ ۴) ۱۵

۱۰۶- کدام مورد تعریف لوزی نمی‌تواند باشد؟

۱) متوازی‌الاضلاعی که یک قطر آن نیمساز است. ۲) چهارضلعی که اضلاعش برابرند.

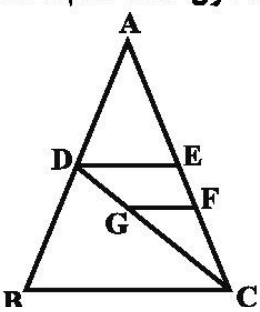
۳) متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش منصف یکدیگرند. ۴) چهارضلعی که قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

۱۰۷- در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ $(\hat{A} = \hat{D} = ۹۰^\circ)$، $CD = BC = ۲AB$ است. طول قطر BD چند برابر طول قاعدهٔ AB است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳

۱۰۸- در شکل زیر $DE \parallel FG \parallel BC$ و $FC = ۶$ است. اگر G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد، طول AC کدام است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۵

۳) ۱۸

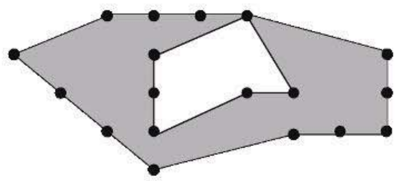
۴) ۲۱

۱۰۹- مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $ABC(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، با طول ساق ۴ مفروض است. از نقطهٔ M روی وتر BC، عمودهایی بر دو ساق مثلث رسم می‌کنیم. اگر قدرمطلق تفاضل طول دو عمود رسم شده برابر ۲ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ M از رأس A کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $\sqrt{۵}$

۳) ۲ ۴) $\sqrt{۱۰}$

۱۱۰- اختلاف مساحت دو چندضلعی شبکه‌ای زیر برابر ۱۶ / ۵ است. تعداد نقاط درونی چندضلعی بزرگ‌تر، چقدر از تعداد نقاط درونی چندضلعی کوچک‌تر، بیش‌تر است؟



۱) ۱۱

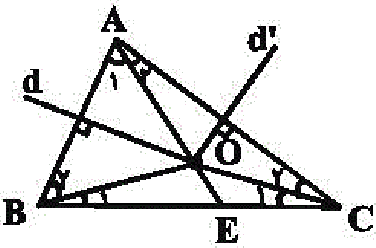
۲) ۱۲

۳) ۱۳

۴) ۱۴

۱۰۱- گزینهٔ «۴» (محمدابراهیم گیتی‌زاده)

هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:



AB عمودمنصف ضلع $d \Rightarrow OA = OB \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۲$

AC عمودمنصف ضلع $d' \Rightarrow OA = OC \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C}_۲$

اگر مطابق شکل، امتداد پاره‌خط OA، ضلع BC را در نقطهٔ E قطع کند، آنگاه:

$$B\hat{O}C = B\hat{O}E + C\hat{O}E = (\hat{A}_۱ + \hat{B}_۲) + (\hat{A}_۲ + \hat{C}_۲)$$

$$\Rightarrow B\hat{O}C = ۲\hat{A}_۱ + ۲\hat{A}_۲ = ۲(\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲) = ۲\hat{A}$$

توجه کنید که چون $\hat{A}$ حاده است، نقطهٔ O درون مثلث می‌افتد.

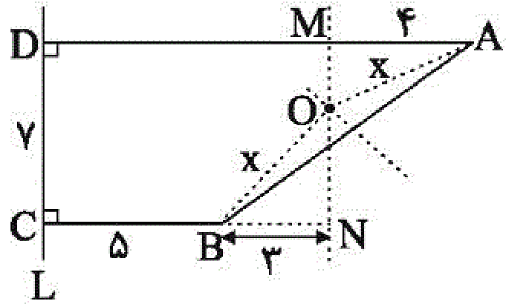
اگر $\hat{A}$ منفرجه باشد آنگاه نقطهٔ O خارج مثلث قرار دارد که در آن صورت داریم: $B\hat{O}C = ۳۶۰^\circ - ۲\hat{A}$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال، صفحه‌های ۱۳، ۱۴، ۱۸ و ۱۹)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

۱۰۲- گزینهٔ «۳» (محمد هتران)

چون O از A و B به یک فاصله است، پس روی عمودمنصف AB قرار دارد و چون O از خط L به فاصلهٔ ۸ می‌باشد، پس روی خطی موازی با L قرار دارد. برخورد این دو خط همان نقطهٔ O است، باتوجه به شکل داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \Delta AMO: x^{۲} = ۱۶ + OM^{۲} \\ \Delta BNO: x^{۲} = ۹ + ON^{۲} = ۹ + (۷ - OM)^{۲} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} OM^{۲} - (۷ - OM)^{۲} + ۷ = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۴OM - ۴۲ = ۰$$

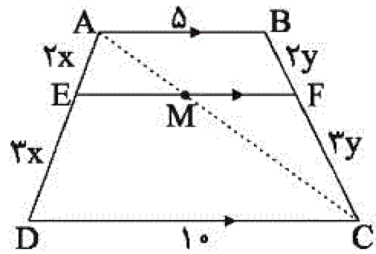
$$\Rightarrow OM = ۳ \Rightarrow OA = OB = x = ۵$$

(هندسه ۱ – ترسیم‌های هندسی و استدلال، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

$\boxed{۴}$ $\boxed{۳}$✓ $\boxed{۲}$ $\boxed{۱}$

۱۰۳- گزینهٔ «۲» (رسول محسنی‌منش)

A را به C وصل می‌کنیم. طبق قضیهٔ تالس داریم:



$$\Delta ADC : EM \parallel DC \Rightarrow \frac{EM}{DC} = \frac{AE}{AD} = \frac{۲x}{۵x}$$

$$\Rightarrow \frac{EM}{۱۰} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow EM = ۴$$

$$\Delta ABC : MF \parallel AB \Rightarrow \frac{MF}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{۳y}{۵y}$$

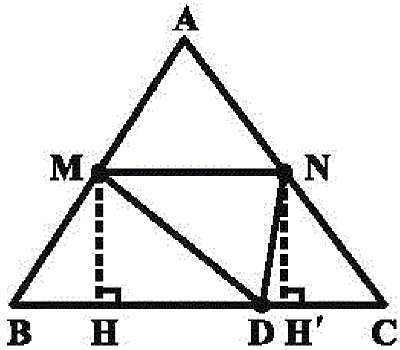
$$\Rightarrow \frac{MF}{۵} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow MF = ۳$$

پس $EF = EM + MF = ۷$ است.

(هندسه ۱ - قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$✓ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

۱۰۴- گزینهٔ «۱» (سیرسروش کریمی مراحی)



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=۱\Rightarrow MN\parallel BC\Rightarrow \frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۲}\quad (۱)$$

$$\frac{DC}{BD}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}}\frac{BC}{BD}=\frac{۳}{۲}\quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow \frac{MN}{BC}\times\frac{BC}{BD}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{MN}{BD}=\frac{۳}{۴}$$

چون دو پاره‌خط MN و BC موازی یکدیگرند، پس داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{MND}}}{S_{\overset{\Delta}{BMD}}}=\frac{MN}{BD}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{MND}}}{۱۶}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MND}}=۱۲$$

(هندسه ۱ – قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۵- گزینهٔ «۴» (رضا عباسی‌اصل)

$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{B}\\ \hat{C}=B\hat{A}D\end{cases}\xrightarrow{(\text{ز ز})}\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{ABD}$$

$$\Rightarrow\frac{\text{محیط }(ABC)}{\text{محیط }(ABD)}=\frac{BC}{AB}=k$$

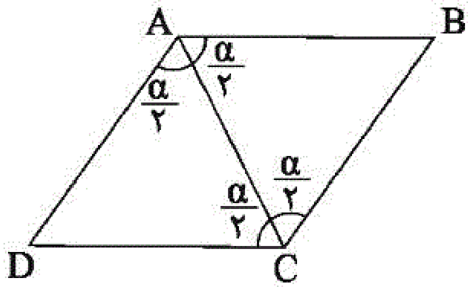
$$\Rightarrow ۳=\frac{BC}{۵}\Rightarrow BC=۱۵$$

(هندسه ۱ – قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱ و ۳۵ تا ۳۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۶- گزینهٔ «۳» *(علی فتح‌آبادی)*

در همهٔ متوازی‌الاضلاع‌ها، قطرها منصف یکدیگرند. بنابراین گزینهٔ «۳» ویژگی جدیدی به متوازی‌الاضلاع اضافه نمی‌کند و نمی‌تواند تعریف لوزی باشد.



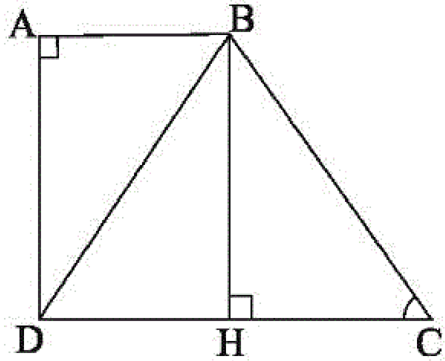
گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴»، دقیقاً از ویژگی‌های لوزی هستند.

(هندسه ۱ - چند ضلعی‌ها، صفحه‌های ۵۹ و ۶۱)

۱	۲	۳ ✓	۴

۱۰۷- گزینهٔ «۱» *(امیرحسین ابومحبوب)*

از رأس B، عمود BH را بر قاعدهٔ CD رسم می‌کنیم.



چهارضلعی $ABHD$ مستطیل است و در نتیجه $DH = AB$. داریم:

$$DC = ۲AB \Rightarrow DH + CH = ۲AB$$

$$\Rightarrow CH = ۲AB - AB = AB$$

بنابراین ارتفاع BH در مثلث BCD، میانهٔ نظیر ضلع CD نیز می‌باشد،

پس این مثلث متساوی‌الساقین و در نتیجه $BD = BC = ۲AB$ است.

(هندسه ۱ – چندضلعی‌ها صفحه‌های ۶۱ تا ۶۳)

۱ ✓ | ۲ | ۳ | ۴

۱۰۸- گزینهٔ «۳» *(رضا عباسی‌اصل)*

نقطهٔ G محل همرسی میانه‌های مثلث است، پس $\frac{CG}{GD} = ۲$ و داریم:

$$\overset{\Delta}{DEC} : GF \parallel DE \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{CF}{EF} = \frac{CG}{GD} \Rightarrow \frac{۶}{EF} = ۲$$

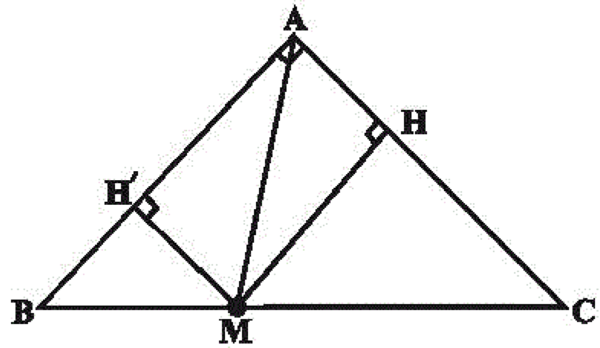
$$\Rightarrow EF = ۳ \Rightarrow EC = ۹$$

۱ | ۲ | ۳ ✓ | ۴

۱۰۹- گزینهٔ «۴» (مهرداد ملوندی)

مطابق شکل زیر، فرض می‌کنیم $MH > MH'$ باشد. در نتیجه داریم:

$$MH - MH' = ۲ \qquad (۱)$$



از طرفی اگر از نقطه‌ای روی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین، دو خط عمود بر دو ساق رسم کنیم تا آن‌ها را قطع کند، آنگاه مجموع طول پاره‌خط‌های ایجاد شده برابر طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث است، پس:

$$MH + MH' = ۴ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} MH = ۳, MH' = ۱$$

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM داریم:

$$\begin{cases} AM^۲ = AH^۲ + MH^۲ \\ AH = MH' = ۱ \end{cases} \Rightarrow AM^۲ = ۱^۲ + ۳^۲ = ۱۰$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{۱۰}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها، صفحهٔ ۶۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۰- گزینهٔ «۳» *(محمدطاهر شعاعی)*

تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی بزرگ‌تر را b و i و چندضلعی کوچک‌تر را b' و i' می‌نامیم. بنا به فرض داریم:

$$S - S' = (i + \frac{b}{۲} - ۱) - (i' + \frac{b'}{۲} - ۱)$$

$$\Rightarrow ۱۶/۵ = i - i' + \frac{۱۳}{۲} - \frac{۶}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۶/۵ = i - i' + ۳/۵ \Rightarrow i - i' = ۱۳$$

(هندسه ا- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴