

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

@riazisara

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

@riazisara.ir



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

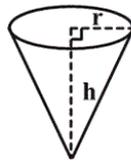
۸۶- نقطه $A(0, -1)$ روی دایره مثلثاتی به اندازه $\frac{14\pi}{3}$ رادیان در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند تا به نقطه A' برسد. حاصل ضرب طول و عرض نقطه A' کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۸۷- اگر شعاع چرخ جلوی یک تراکتور 30 cm و شعاع چرخ عقب آن 80 cm باشد، هنگامی که چرخ عقب 60° درجه می‌چرخد، چرخ جلو چند رادیان می‌چرخد؟

(۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\frac{8\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{9}$ (۴) $\frac{8\pi}{9}$

۸۸- در شکل زیر، یک کیف مخروطی نشان داده شده است. اگر شعاع قاعده مخروط $r = 3\text{ cm}$ و ارتفاع آن $h = 4\text{ cm}$ باشد، اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟



(۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{6\pi}{5}$ (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) $\frac{2\pi}{4}$

۸۹- اندازه زاویه‌ای که عقربه ساعت شمار بین دو زمان $2:25'$ و $3:45'$ طی می‌کند، چند رادیان است؟

(۱) $\frac{4\pi}{9}$ (۲) $\frac{\pi}{5}$ (۳) $\frac{2\pi}{5}$ (۴) $\frac{2\pi}{9}$

۹۰- در چهارضلعی محدب ABCD، کدام یک از روابط زیر همواره برقرار است؟

(۱) $\sin(\hat{A} + \hat{B}) = \sin(\hat{C} + \hat{D})$ (۲) $\cos(\hat{A} + \hat{B}) = \cos(\hat{C} + \hat{D})$
(۳) $\tan(\hat{A} + \hat{B}) = \tan(\hat{C} + \hat{D})$ (۴) $\cot(\hat{A} + \hat{B}) = \cot(\hat{C} + \hat{D})$

۹۱- اگر $\tan 1^\circ = a$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\cot 82^\circ + 2 \sin 51^\circ}{\tan 765^\circ + \cot 35^\circ}$ کدام است؟

(۱) $\frac{a}{a-1}$ (۲) $-a+1$ (۳) $-a$ (۴) $a-1$

۸۲- مقدار عبارت $\sin 24^\circ$ کدام است؟

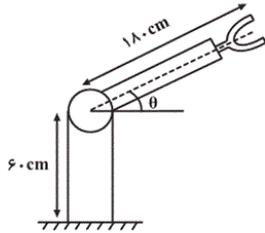
(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۹۳- اگر $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ و $\cos x = \frac{1-m}{2}$ باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (۲) $[0, \frac{1}{2}]$ (۳) $[-1, 0]$ (۴) $[0, 1]$

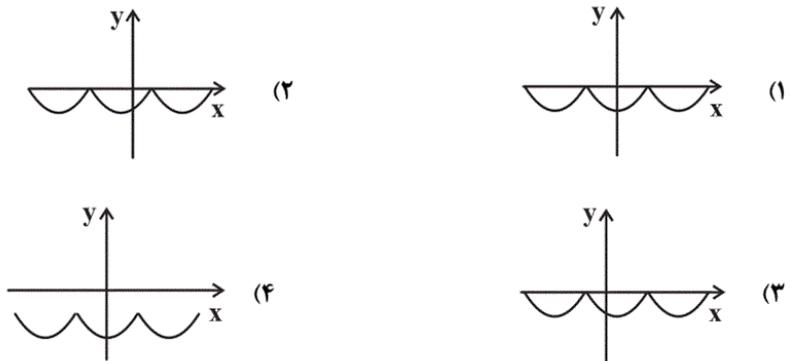
حسابان ۱، توابع مثلثاتی - ۲ سوال -

۹۴- در شکل روبه‌رو یک روبات صنعتی را که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد مشاهده می‌کنید. با توجه به مقادیر داده شده، کدام یک از توابع زیر ارتفاع نوک گیره روبات را از سطح زمین بر حسب سانتی‌متر نشان می‌دهد؟



- (۱) $y = 60 + 180 \tan \theta$
 (۲) $y = 60 + 180 \sin \theta$
 (۳) $y = 120 - 180 \sin \theta$
 (۴) $y = 120 - 180 \tan \theta$

۹۲- نمودار $y = -|\cos(x + \frac{\pi}{3})|$ شبیه کدام گزینه است؟



حسابان ۱، روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا - ۶ سوال -

۹۵- اگر $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{4}$ و a و b دو عدد طبیعی باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۹۶- بیشترین مقدار عبارت $(\sin x + \sin 2x)^2 + (\cos x + \cos 2x)^2$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۴

۹۷- اگر تساوی $\cos 4x = a \sin^4 x + b \sin^2 x + c$ به ازای هر مقدار x برقرار باشد، آن‌گاه \sqrt{abc} کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۴ (۳) -۸ (۴) ۴

۹۸- اگر $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2\sqrt{3}$ باشد، $\cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{2}$

۹۹- حاصل $2(\tan 15^\circ + \tan 75^\circ)$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۰۰- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}$ و $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه مقدار $\sin(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{13}$ (۲) $\frac{5}{13}$ (۳) $-\frac{12}{13}$ (۴) $-\frac{5}{13}$

حسابان ۱، تابع لگاریتمی و لگاریتم - ۲ سوال -

۸۳- اگر دامنه تابع $f(x) = \log_{a-1}(2x - b)$ برابر $(3, +\infty)$ و $f(\frac{15}{2}) = 2$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۱

۸۱- برد تابع $y = \log_3^x$ کدام است؟

- (۱) $[0, +\infty)$ (۲) $(0, +\infty)$ (۳) $[1, +\infty)$ (۴) \mathbb{R}

حسابان ۱، ویژگی های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی - ۲ سوال

۸۴- اگر $\log_3^{(3^a - 8)} = 2 - a$ باشد، حاصل $\log_{(4a+1)}^{(2a-1)}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -۱

۸۵- نیمه عمر یک ماده هسته‌ای دو برابر نیمه عمر ماده هسته‌ای X است. اگر نیمه عمر ماده X برابر T سال باشد پس از گذشت چند سال،

جرمی که از ماده X باقی می‌ماند $\frac{1}{8}$ جرمی است که از ماده مورد نظر باقی می‌ماند؟ (جرم‌های اولیه را یکسان فرض کنید).

- (۱) ۴T (۲) ۵T (۳) ۶T (۴) ۸T

هندسه ۲، تبدیل های هندسی - ۶ سوال

۱۲۱- کدام یک از تبدیل های زیر هیچ گاه نمی‌تواند تبدیل همانی باشد؟

- (۱) انتقال (۲) دوران (۳) تجانس (۴) بازتاب

۱۲۲- در یک تجانس، نقطه M' مجانس نقطه M و O مرکز تجانس است. اگر نقطه O بین نقاط M و M' قرار داشته و $\frac{OM}{OM'}$ عددی کوچک تر از یک باشد، نسبت این تجانس کدام عدد می تواند باشد؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۲۳- تحت یک تجانس، محیط یک مربع و تصویر آن به ترتیب برابر ۵ و ۶ است. اگر تحت همین تجانس، مساحت تصویر یک مستطیل ۲۴ باشد، مساحت مستطیل اولیه کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۲۰ (۴) $\frac{۵۰}{۳}$

۱۲۴- تصویر چندضلعی منتظمی در دوران با هر یک از زوایای ۸۴° و ۱۰۸° حول مرکزش بر خودش منطبق می شود. حداقل تعداد اضلاع این چندضلعی کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۶۰

۱۲۵- مثلث ABC با مساحت ۲۰ را با بردار \overrightarrow{AH} (ارتفاع وارد بر ضلع BC) انتقال می دهیم. اگر A' ، B' و C' به ترتیب انتقال یافته نقاط A ، B و C باشند، مساحت پنج ضلعی $ABB'C'C$ کدام است؟ (زاویه های مثلث ABC حاده هستند.)

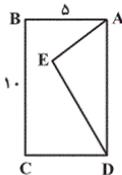
- (۱) ۴۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴) ۱۰۰

۱۲۶- مثلث قائم الزاویه ABC به اضلاع قائمه ۳ و ۴ واحد را حول رأس قائمه، ۹۰ درجه در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت دوران می دهیم تا مثلث $A'B'C'$ به دست آید. فاصله محل همرسی نیمسازهای داخلی دو مثلث از یکدیگر کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{۲}{۵}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{۳}{۵}$

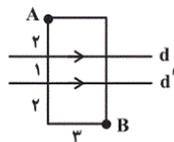
هندسه ی ۲، کاربرد تبدیل ها - ۴ سوال -

۱۲۷- نقطه E درون مستطیل $ABCD$ و به فاصله ۲ واحد از ضلع BC مفروض است. می خواهیم با استفاده از بازتاب و با شرط ثابت ماندن محیط، مساحت پنج ضلعی $ABCDE$ را افزایش دهیم. حداکثر مساحت آن کدام است؟



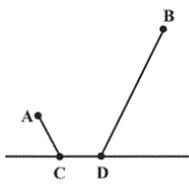
- (۱) ۱۵
(۲) ۳۵
(۳) ۶۵
(۴) ۸۵

۱۲۸- در شکل زیر، A و B دو رأس از یک مستطیل هستند. در حرکت از A به B ، اگر بخواهیم مسیر بین دو خط موازی d و d' عمود بر آن دو باشد، طول کوتاه ترین مسیر ممکن کدام است؟



- (۱) $۲ + ۳\sqrt{۲}$ (۲) $۱ + \sqrt{۳۴}$ (۳) ۷ (۴) ۶

۱۲۹- دو شهر A و B مطابق شکل زیر به فاصله ۱۰ کیلومتر از یکدیگر در یک طرف رودخانه ای قرار دارند. می خواهیم از A به B جاده ای بسازیم به طوری که ۳ کیلومتر آن کنار رودخانه باشد. اگر دو شهر A و B به ترتیب ۳ و ۹ کیلومتر از رودخانه فاصله داشته باشند، طول کوتاه ترین جاده ممکن کدام است؟



- (۱) ۱۸ (۲) ۱۶ (۳) ۱۵ (۴) ۱۳

۱۳۰- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۶ واحد، نقاط M و N را به ترتیب روی اضلاع AB و AC و به فاصله‌های ۳ و ۴ واحد از رأس A انتخاب می‌کنیم. اگر P نقطه دلخواهی روی ضلع BC باشد، کمترین مقدار $MP + NP$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ (۲) $3 + \sqrt{7}$ (۳) $\sqrt{31}$ (۴) ۵

حسابان ۱- سوالات موازی، رادیان - ۶ سوال -

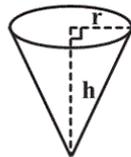
۱۰۹- نقطه $A(0, -1)$ روی دایره مثلثاتی به اندازه $\frac{14\pi}{3}$ رادیان در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند تا به نقطه A' برسد. حاصل ضرب طول و عرض نقطه A' کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۱۰- اگر شعاع چرخ جلوی یک تراکتور ۳۰cm و شعاع چرخ عقب آن ۸۰cm باشد، هنگامی که چرخ عقب ۶۰ درجه می‌چرخد، چرخ جلو چند رادیان می‌چرخد؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\frac{8\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{9}$ (۴) $\frac{8\pi}{9}$

۱۱۱- در شکل زیر، یک قیف مخروطی نشان داده شده است. اگر شعاع قاعده مخروط $r = 3\text{ cm}$ و ارتفاع آن $h = 4\text{ cm}$ باشد، اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟



- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{6\pi}{5}$ (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) $\frac{3\pi}{4}$

۱۱۲- اگر طول عقربه دقیقه‌شمار یک ساعت رومیزی، ۳ سانتی‌متر باشد، طول کمانی که انتهای این عقربه در ۲۰ ثانیه طی می‌کند، چند سانتی‌متر است؟

- (۱) $\frac{\pi}{90}$ (۲) $\frac{\pi}{30}$ (۳) 30π (۴) 90π

۱۱۳- اندازه زاویه‌ای که عقربه ساعت‌شمار بین دو زمان $2:25'$ و $3:45'$ طی می‌کند، چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{4\pi}{9}$ (۲) $\frac{\pi}{5}$ (۳) $\frac{2\pi}{5}$ (۴) $\frac{2\pi}{9}$

۱۱۴- محیط قطاعی به زاویه مرکزی 135° و شعاع ۸ سانتی‌متر، به اندازه چند سانتی‌متر بیشتر از 6π می‌باشد؟

- (۱) ۸ (۲) $8 + 2\pi$ (۳) $16 + 2\pi$ (۴) ۱۶

حسابان ۱- سوالات موازی، نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا - ۵ سوال -

۱۱۵- حاصل $\cos\left(\frac{13\pi}{2}\right) + \sin\left(\pi \cos\left(\frac{118\pi}{3}\right)\right)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۱۶- در چهارضلعی محدب ABCD، کدام یک از روابط زیر همواره برقرار است؟

$\cos(\hat{A} + \hat{B}) = \cos(\hat{C} + \hat{D})$ (۲)

$\sin(\hat{A} + \hat{B}) = \sin(\hat{C} + \hat{D})$ (۱)

$\cot(\hat{A} + \hat{B}) = \cot(\hat{C} + \hat{D})$ (۴)

$\tan(\hat{A} + \hat{B}) = \tan(\hat{C} + \hat{D})$ (۳)

۱۱۷- حاصل عبارت $\frac{\sin(-18^\circ) + \cos 108^\circ}{1 + \sin 72^\circ + \cos 72^\circ}$ با فرض $\sin 18^\circ = \frac{3}{5}$ کدام است؟

$\frac{4}{5}$ (۴)

$-\frac{3}{8}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$-\frac{2}{3}$ (۱)

۱۰۲- مقدار عبارت $\sin 24^\circ$ کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

۱۱۹- اگر $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ و $\cos x = \frac{1-m}{2}$ باشد، حدود m کدام است؟

$[0, 1]$ (۴)

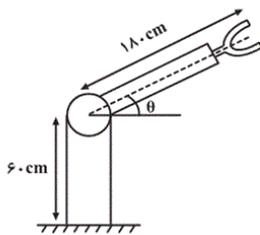
$[-1, 0]$ (۳)

$[0, \frac{1}{2}]$ (۲)

$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (۱)

حسابان ۱- سوالات موازی، توابع مثلثاتی - ۲ سوال

۱۲۰- در شکل روبه‌رو یک روبات صنعتی را که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد مشاهده می‌کنید. با توجه به مقادیر داده شده، کدام یک از



توابع زیر ارتفاع نوک گیره روبات را از سطح زمین بر حسب سانتی‌متر نشان می‌دهد؟

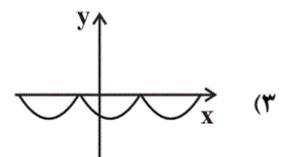
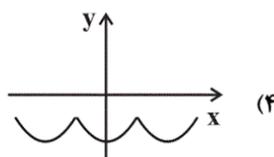
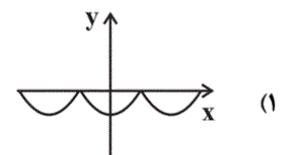
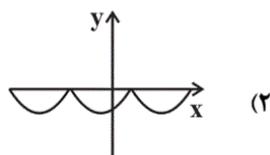
$y = 60 + 180 \tan \theta$ (۱)

$y = 60 + 180 \sin \theta$ (۲)

$y = 120 - 180 \sin \theta$ (۳)

$y = 120 - 180 \tan \theta$ (۴)

۱۱۸- نمودار $y = -|\cos(x + \frac{\pi}{3})|$ شبیه کدام گزینه است؟



۱۰۵ - اگر دامنه تابع $f(x) = \log_{a-1}(2x - b)$ برابر $(3, +\infty)$ و $f(\frac{15}{2}) = 2$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۱

۱۰۱ - برد تابع $y = \log_x^x$ کدام است؟

(۱) $[0, +\infty)$ (۲) $(0, +\infty)$ (۳) $[1, +\infty)$ (۴) \mathbb{R}

حسابان ۱ - سوالات موازي ، ویژگی های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی - ۵ سوال -

۱۰۶ - اگر $\log_3(3^a - 8) = 2 - a$ باشد، حاصل $\log_{\frac{2}{3}}(2a-1)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -۱

۱۰۷ - نیمه عمر یک ماده هسته‌ای دو برابر نیمه عمر ماده X است. اگر نیمه عمر ماده X برابر T سال باشد پس از گذشت چند سال، جرمی که از ماده X باقی می ماند $\frac{1}{8}$ جرمی است که از ماده مورد نظر باقی می ماند؟ (جرم های اولیه را یکسان فرض کنید).

(۱) $4T$ (۲) $5T$ (۳) $6T$ (۴) $8T$

۱۰۸ - اگر $\log_3^x = 27$ باشد، \log_3^x کدام می تواند باشد؟

(۱) $3\sqrt{3}$ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۹

۱۰۳ - اگر $\log(\sqrt{7}x - 1) + \log(x + 2) = 2$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{7}}(3x - 2)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۱۰۴ - حاصل عبارت $[\log_5^5 - \log_3^9]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است).

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۱

هندسه ۲ - سوالات موازي ، تبدیل های هندسی - ۶ سوال

۱۳۱ - کدام یک از تبدیل های زیر هیچ گاه نمی تواند تبدیل همانی باشد؟

(۱) انتقال (۲) دوران (۳) تجانس (۴) بازتاب

۱۳۲- در یک تجانس، نقطه M' مجانس نقطه M و O مرکز تجانس است. اگر نقطه O بین نقاط M و M' قرار

داشته و $\frac{OM}{OM'}$ عددی کوچک‌تر از یک باشد، نسبت این تجانس کدام عدد می‌تواند باشد؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۳۳- تحت یک تجانس، محیط یک مربع و تصویر آن به ترتیب برابر ۵ و ۶ است. اگر تحت همین تجانس، مساحت تصویر یک مستطیل ۲۴ باشد، مساحت مستطیل اولیه کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۲۰ (۴) $\frac{50}{3}$

۱۳۴- تصویر چندضلعی منتظمی در دوران با هر یک از زوایای 84° و 108° حول مرکزش بر خودش منطبق می‌شود. حداقل تعداد اضلاع این چندضلعی کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۶۰

۱۳۵- مثلث ABC با مساحت ۲۰ را با بردار \overline{AH} (ارتفاع وارد بر ضلع BC) انتقال می‌دهیم. اگر A' ، B' و C' به ترتیب انتقال یافته نقاط A ، B و C باشند، مساحت پنج‌ضلعی $ABB'C'C$ کدام است؟ (زاویه‌های مثلث ABC حاده هستند.)

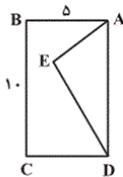
- (۱) ۴۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴) ۱۰۰

۱۳۶- مثلث قائم‌الزاویه ABC به اضلاع قائمه ۳ و ۴ واحد را حول رأس قائمه، ۹۰ درجه در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا مثلث $A'B'C'$ به دست آید. فاصله محل هم‌رسی نیم‌سازهای داخلی دو مثلث از یکدیگر کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{5}$

هندسه ۲- سوالات موازی، کاربرد تبدیل ها - ۴ سوال

۱۳۷- نقطه E درون مستطیل $ABCD$ و به فاصله ۲ واحد از ضلع BC مفروض است. می‌خواهیم با استفاده از بازتاب و با شرط ثابت ماندن محیط، مساحت پنج‌ضلعی $ABCDE$ را افزایش دهیم. حداکثر مساحت آن کدام است؟



- (۱) ۱۵
(۲) ۳۵
(۳) ۶۵
(۴) ۸۵

۱۳۸- اگر A' مجانس A به مرکز O و نسبت $k=3$ و A'' مجانس A' به مرکز A و نسبت $k=\frac{3}{2}$ باشد، نسبت تجانسی به مرکز O که A

را به A'' تصویر می‌کند، کدام است؟

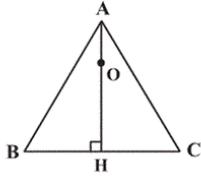
- (۱) ۴ (۲) $\frac{9}{2}$ (۳) ۵ (۴) $\frac{11}{2}$

۱۳۹- مجانس یک مستطیل به مرکز نقطه برخورد قطرهای مستطیل و نسبت $\frac{1}{5}$ را رسم کرده‌ایم. اگر مساحت بین مستطیل و مجانس آن ۴۸

باشد، مساحت مستطیل اولیه کدام است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۴۸ (۳) ۵۰ (۴) ۹۶

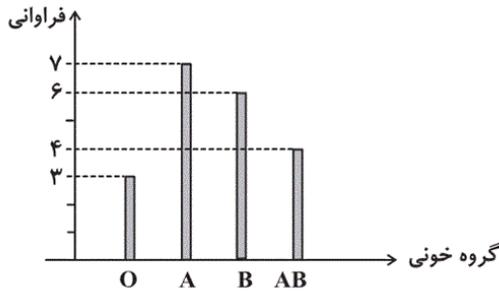
۱۴۰- نقطه O روی ارتفاع AH از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۶ واحد قرار دارد و $AO = \frac{1}{3}AH$. اگر مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانسی به مرکز O و نسبت $k = -1$ باشد، مساحت ناحیه مشترک مثلث ABC و تصویرش کدام است؟



- (۱) $\sqrt{3}$
- (۲) $2\sqrt{3}$
- (۳) $3\sqrt{3}$
- (۴) $4\sqrt{3}$

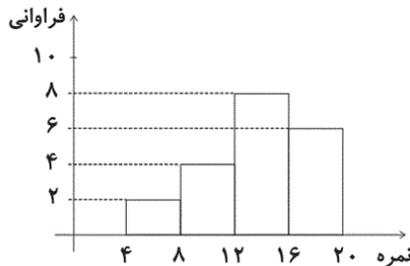
آمار و احتمال، توصیف و نمایش داده ها - سوال ۳ -

۱۴۱- نمودار میله‌ای مربوط به گروه خونی دانش‌آموزان یک کلاس به صورت زیر است. در نمودار دایره‌ای متناظر، زاویه مرکزی نظیر گروه خونی B، چند درجه است؟



- (۱) ۷۲
- (۲) ۱۰۸
- (۳) ۹۰
- (۴) ۱۲۶

۱۴۲- نمودار بافت‌نگاشت مربوط به نمرات دانش‌آموزان یک کلاس به شکل زیر است. نمره چند درصد از دانش‌آموزان در بازه $[۱۶, ۸)$ قرار دارد؟ (دسته بین a و b روی نمودار شامل بازه $[a, b)$ است.)



- (۱) ۴۰
- (۲) ۵۰
- (۳) ۶۰
- (۴) ۷۰

۱۴۳- در یک نمودار دایره‌ای، زاویه متناظر با یکی از داده‌ها، ۴۵ درجه است. اگر فراوانی این داده بدون تغییر فراوانی سایر داده‌ها دو برابر شود، زاویه مربوط به آن داده در نمودار دایره‌ای جدید، چند درجه است؟

- (۱) ۶۰
- (۲) ۹۰
- (۳) ۷۵
- (۴) ۸۰

آمار و احتمال، احتمال شرطی - سوال ۴ -

۱۴۴- در جعبه‌ای ۴۰ درصد از لامپ نوع A و ۶۰ درصد از لامپ نوع B وجود دارد. اگر احتمال خرابی لامپ‌های A و B به ترتیب ۲ درصد و ۵ درصد باشد، احتمال آن که لامپ انتخابی از این جعبه خراب باشد، کدام است؟

- (۱) $0/038$
- (۲) $0/042$
- (۳) $0/048$
- (۴) $0/056$

۱۴۵- در جعبه‌ای ۱۰ لامپ موجود است که ۴ تا از آن‌ها معیوب هستند. به تصادف و به‌طور متوالی و بدون جای‌گذاری این لامپ‌ها را آزمایش کرده تا اولین لامپ معیوب پیدا شود. با کدام احتمال در آزمایش سوم، اولین لامپ معیوب پیدا می‌شود؟

- (۱) $\frac{1}{9}$
- (۲) $\frac{1}{6}$
- (۳) $\frac{2}{9}$
- (۴) $\frac{4}{27}$

۱۴۷- زلزله‌ای در سه استان A، B و C رخ داده که در ۵۰ درصد شهرهای استان A، ۷۵ درصد شهرهای استان B و تمامی شهرهای استان C به ثبت رسیده است. اگر به تصادف یکی از این سه استان را انتخاب کرده و مشاهده کنیم که زلزله در یکی از شهرهای آن ثبت شده، با کدام احتمال در تمامی شهرهای دیگر آن استان نیز به ثبت رسیده است؟

- (۱) $\frac{2}{9}$
 (۲) $\frac{1}{3}$
 (۳) $\frac{4}{9}$
 (۴) $\frac{3}{4}$

۱۴۸- در پرتاب دو تاس، مجموع اعداد ظاهر شده عددی مربع کامل است. احتمال آن که عدد تاس اول بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{4}{7}$
 (۳) $\frac{5}{7}$
 (۴) $\frac{5}{8}$

آمار و احتمال، پیشامدهای مستقل و وابسته - سوال ۳ -

۱۴۹- اگر A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر، $P(A \cap B) = 0/2$ و $P(A \cap B') = 0/3$ باشد، آنگاه $P(A \cup B)$ کدام است؟

- (۱) $0/4$ (۲) $0/5$ (۳) $0/6$ (۴) $0/7$

۱۵۰- در پرتاب یک تاس، احتمال وقوع هر عدد زوج دو برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. این تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر زوج بیاید، دو سکه و اگر فرد بیاید، سه سکه پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال در پرتاب سکه‌ها، تعداد «رو»ها از تعداد «پشت»ها بیشتر است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۴۶- احتمال قبولی علی و کیارش در امتحان ریاضی به ترتیب $0/6$ و $0/7$ است. احتمال این که دقیقاً یکی از این دو نفر در امتحان ریاضی قبول شوند، کدام است؟

- (۱) $0/46$ (۲) $0/44$ (۳) $0/42$ (۴) $0/40$

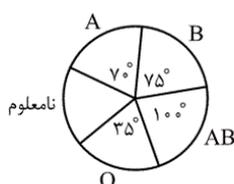
آمار و احتمال - گواه، توصیف و نمایش داده‌ها - سوال ۳ -

۱۵۱- دانش‌آموزان یک مدرسه با سال تولد یکسان را وزن کشی کرده و عدد صحیح وزن آنان را یادداشت کرده‌ایم. چند درصد آن‌ها وزن کم‌تر از ۵۰ دارند؟

وزن	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱
تعداد	۸	۹	۱۲	۱۵	۶	۵

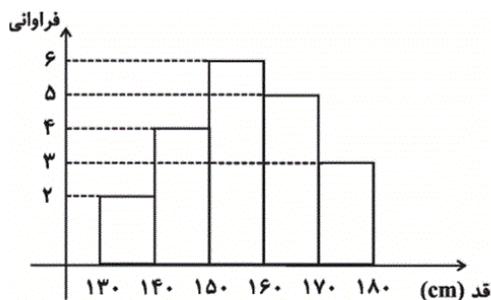
- (۱) ۷۲ (۲) ۷۵ (۳) ۷۸ (۴) ۸۰

۱۵۲- نمودار دایره‌ای زیر، متناسب با تعداد کارکنان سازمانی با گروه خونی متمایز است که گروه خونی ۳۲ نفر از آنان تعیین نشده است. حداقل چند نفر از کارکنان این سازمان، دارای گروه خونی B هستند؟



- (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۶ (۴) ۴۰

۱۵۳- نمودار زیر، مربوط به قد دانش آموزان یک کلاس است. اگر دانش آموز جدیدی با قد ۱۶۴ سانتی متر به کلاس اضافه شود، فراوانی نسبی دسته وسط چگونه تغییر می کند؟



(۱) $\frac{1}{28}$ کم می شود.

(۲) $\frac{1}{30}$ زیاد می شود.

(۳) $\frac{1}{70}$ کم می شود.

(۴) تغییر نمی کند.

آمار و احتمال - گواه ، احتمال شرطي - ۴ سوال -

۱۵۴- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $A \subseteq B$ و $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{3}{4}$ ، آن گاه $P(B|A')$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{5}{8}$

(۱) $\frac{3}{8}$

(۳) $\frac{7}{12}$

۱۵۵- در کیسه ای ۷ مهره سفید و ۴ مهره سیاه وجود دارد. مهره ای به تصادف از این کیسه خارج کرده و کنار می گذاریم. حال دو مهره دیگر با هم به تصادف خارج می کنیم، اگر مهره اول که کنار گذاشته شد سفید باشد با چه احتمالی دو مهره اخیر نیز سفید هستند؟

(۲) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{3}{11}$

(۱) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{6}$

۱۵۶- در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبه اول ۴ عدد و در جعبه دوم ۳ عدد لامپ معیوب اند. از اولی ۸ و از دومی ۶ لامپ به تصادف برداشته و در جعبه جدید قرار می دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است؟

(۲) $\frac{19}{105}$

(۴) $\frac{8}{35}$

(۱) $\frac{17}{105}$

(۳) $\frac{6}{35}$

۱۵۷- یک دسته کارت، شامل ۶ کارت سفید و ۵ کارت سیاه و دسته دیگر شامل ۹ کارت سفید است. یکی از دسته ها را به تصادف انتخاب و از آن دو کارت خارج می کنیم. اگر هر دو کارت سفید باشند، احتمال آن که از دسته اول انتخاب شده باشند، کدام است؟

(۲) $\frac{3}{14}$

(۴) $\frac{3}{11}$

(۱) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{5}{16}$

۱۵۸- یک فضای نمونه متشکل از ۴ برآمد a, b, c, d است. اگر $P(\{a, b\}) = \frac{1}{3}$ و $P(\{a, c\}) = \frac{1}{3}$ و پیشامدهای $\{a, b\}$ و $\{a, c\}$ از هم

مستقل باشند، احتمال رخداد پیشامد $\{c\}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

۱۵۹- در مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر پیشامد A فرد بودن عدد انتخاب شده، پیشامد B مضرب ۳

بودن عدد و پیشامد C اول بودن آن عدد باشد، کدام درست است؟

(۲) A و C مستقل‌اند.

(۱) A و B مستقل‌اند.

(۴) پیشامدهای A, B و C دو به دو وابسته‌اند.

(۳) B و C مستقل‌اند.

۱۶۰- ظرفی شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. مهره‌ای از آن خارج کرده و پس از مشاهده رنگ آن، به جعبه برمی‌گردانیم و مجدداً

مهره‌ای خارج می‌کنیم. احتمال آن که فقط یک‌بار مهره سفید بیرون آمده باشد، کدام است؟

$$\frac{2}{15} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{12}{25} \quad (۴)$$

$$\frac{6}{25} \quad (۳)$$

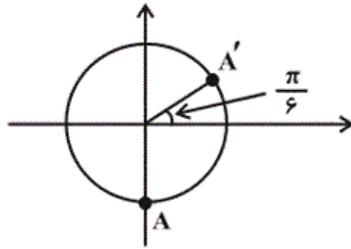
-۸۶

(علی کردی)

نقطه $A(0, -1)$ انتهای کمان زاویه مربوط به $\theta = \frac{-\pi}{2}$ روی دایره

مثلثاتی است. زاویه نهایی دوران یافته برابر است با:

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{14\pi}{3} = \frac{25\pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{6}$$



$$\begin{cases} x_{A'} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_{A'} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x_{A'} y_{A'} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۸۷

(مهدی طاهری)

$$\theta = \frac{L}{r}$$

θ : زاویه برحسب رادیان

r : شعاع

L : کمان

رادیان $60 = \frac{\pi}{3}$ درجه

از آن جا که کمان و مسافت طی شده توسط دو چرخ یکسان است، داریم:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{L}{80} \Rightarrow L = \frac{80\pi}{3} \text{ cm}$$

$$\theta_2 = \frac{80\pi}{30} = \frac{8\pi}{9} \text{ رادیان}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

(یاسین سپهر)

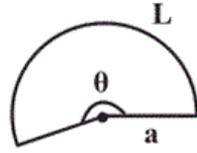
رابطه بین یک زاویه مانند θ بر حسب رادیان و طول کمان L روبه‌رو به

آن در یک دایره به شعاع a به صورت $\theta = \frac{L}{a}$ می‌باشد. در شکل

گستردهٔ مخروط، ابتدا باید مقدار a یعنی شعاع قطاع و سپس طول کمان

را به دست آوریم. شعاع قطاع برابر با $a = \sqrt{r^2 + h^2}$ و طول کمان برابر

با محیط قاعدهٔ مخروط می‌باشد.



$$a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow a = 5 \text{ cm}$$

$$L = 2\pi r \Rightarrow L = 6\pi \text{ cm}$$

$$\theta = \frac{L}{a} = \frac{6\pi}{5} \text{ رادیان}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(میثم بهرامی بویا)

هر 12×60 دقیقه، عقربهٔ ساعت‌شمار 360° درجه را طی می‌کند، پس در هر

دقیقه به اندازهٔ $\frac{360^\circ}{12 \times 60}$ درجه که همان 0.5° درجه است، دوران می‌کند.

$$3:45'$$

$$\underline{-2:25'}$$

$$1:20' \Rightarrow 80 \text{ دقیقه}$$

$$80 \times 0.5 = 40 \text{ درجه}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{40}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{9} \text{ رادیان}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

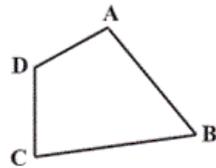
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در چهارضلعی محدب ABCD داریم:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 360^\circ - (\hat{C} + \hat{D})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(\hat{A} + \hat{B}) = -\sin(\hat{C} + \hat{D}) \\ \cos(\hat{A} + \hat{B}) = \cos(\hat{C} + \hat{D}) \\ \tan(\hat{A} + \hat{B}) = -\tan(\hat{C} + \hat{D}) \\ \cot(\hat{A} + \hat{B}) = -\cot(\hat{C} + \hat{D}) \end{cases}$$

پس تنها گزینه «۲» همواره برقرار است.

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(میثم بهرامی بویا)

$$\cot 82^\circ = \cot(72^\circ + 10^\circ) = \cot 10^\circ = \cot(9^\circ + 1^\circ) = -\tan 1^\circ$$

$$\sin 51^\circ = \sin(36^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ = \sin(18^\circ - 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 765^\circ = \tan(72^\circ + 4^\circ) = \tan 4^\circ = 1$$

$$\cot 35^\circ = \cot(36^\circ - 1^\circ) = -\cot 1^\circ$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی شهبازی)

از آنجا که $\sin(18^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ داریم:

$$\sin 24^\circ = \sin(18^\circ + 6^\circ) = -\sin 6^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

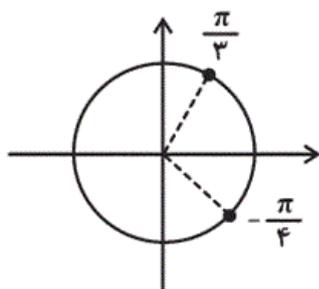
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مطابق دایره مثلثاتی داریم:



$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} \leq \cos x \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1-m}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1-m \leq 2$$

$$\Rightarrow -1 \leq m \leq 0$$

(مسایان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۹۲ تا ۱۰۴)

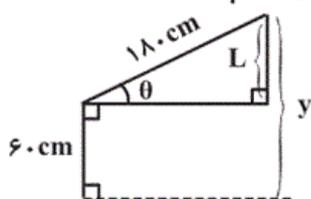
۴

۳ ✓

۲

۱

ابتدا وضعیت روبات را به صورت زیر مدل‌سازی می‌کنیم:



$$y = 60 + L$$

$$\sin \theta = \frac{L}{180} \Rightarrow L = 180 \cdot \sin \theta$$

$$\Rightarrow y = 60 + 180 \cdot \sin \theta$$

(مسایان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

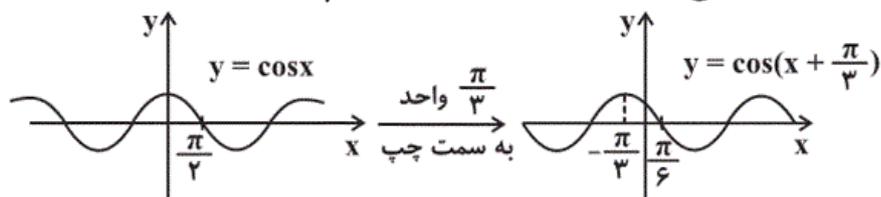
۴

۳

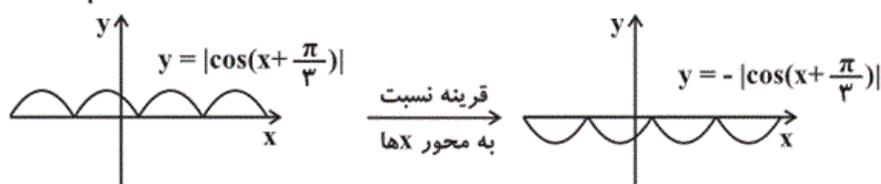
۲ ✓

۱

از انتقال نمودار تابع $y = \cos x$ استفاده می‌کنیم:



حال قسمت‌های زیر محور X ها را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم:



(مسایان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

(علی شهبازی)

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$a + b = 6 + 2 = 8$$

پس:

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$A = (\sin^2 x + \sin^2 2x) + (\cos^2 x + \cos^2 2x)$$

$$+ 2(\sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x)$$

$$= 2 + 2 \cos(2x - x) = 2 + 2 \cos x$$

حال با توجه به این که $-1 \leq \cos x \leq 1$ داریم $-2 \leq 2 \cos x \leq 2$ در نتیجه $0 \leq 2 + 2 \cos x \leq 4$. بنابراین بیشترین مقدار A برابر ۴ می‌باشد.

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

(فریدون ساعتی)

می‌دانیم $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ ، بنابراین:

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2(2 \sin x \cos x)^2$$

$$= 1 - 2(4 \sin^2 x \cos^2 x) = 1 - 8 \sin^2 x (1 - \sin^2 x)$$

$$= 1 - 8 \sin^2 x + 8 \sin^4 x = a \sin^4 x + b \sin^2 x + c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -8 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow abc = -64 \Rightarrow \sqrt[3]{abc} = -4$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مهرداد ملونری)

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2 \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(مسایان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

(میثم بهرامی جوینا)

$$2(\tan 15^\circ + \tan 75^\circ) \xrightarrow{\tan 75^\circ = \cot 15^\circ} 2(\tan 15^\circ + \cot 15^\circ)$$

$$= 2\left(\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}\right) = 2 \times \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ}$$

$$= 2 \times \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = 2 \times \frac{1}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 8$$

(مسایان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(حسین نیری پور)

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{13}\right)^2 \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{13}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{12}{13}$$

$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \cos 2\alpha < 0$$

$$\cos 2\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}$$

۴

۳

۲ ✓

۱

دامنه تابع f عبارت است از:

$$2x - b > 0 \Rightarrow x > \frac{b}{2} \xrightarrow{x > 3} \frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = 6$$

بنابراین $f(x) = \log_{a-1}(2x - 6)$ ، لذا:

$$f\left(\frac{15}{2}\right) = \log_{a-1}\left(2\left(\frac{15}{2}\right) - 6\right) = 2 \Rightarrow \log_{a-1}(9) = 2$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} a-1 = 3 \Rightarrow a = 4 & \text{ق ق} \\ a-1 = -3 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 10$$

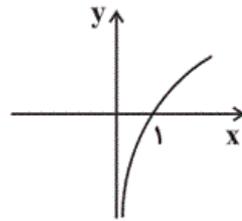
(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

نمودار تابع $y = \log_7^x$ را رسم می‌کنیم:

$$\Rightarrow R_y = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$y = \log_7^x$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

اگر $\log_c^x = b$ باشد، آن گاه $x = c^b$. بنابراین:

$$\log_3^{3^a-8} = 2-a \Rightarrow 3^a-8 = \frac{3^2}{3^a} \xrightarrow{t=3^a}$$

$$t-8 = \frac{9}{t} \Rightarrow t^2-8t-9=0 \Rightarrow \begin{cases} t=9=3^a \Rightarrow a=2 \\ t=-1 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\log_{(2a-1)}^{(4a+1)} \xrightarrow{a=2} \log_9^3 = \frac{1}{2}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۸۰ تا ۸۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

رابطه نیمه عمر:

m_0 : جرم اولیه m : جرم باقی مانده T : نیمه عمر

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_0}{m_0} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{8}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}} \Rightarrow \frac{t}{T} = 3 \Rightarrow t = 3T$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۸۸ تا ۹۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۲۱

(رعیع مشتاق نظم)

تحت بازتاب نسبت به یک خط، تنها تصویر نقاط واقع بر آن خط ثابت می‌ماند و تصویر سایر نقاط صفحه بر خود آن‌ها منطبق نیست، پس بازتاب هیچ‌گاه نمی‌تواند تبدیل همانی باشد. انتقال با بردار صفر، دوران با زاویه 36° (یا مضارب آن) و تجانس با نسبت $k = 1$ ، تبدیل همانی هستند.

(هندسه ۲ - صفحه ۴۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۲۲

(یاسین سپهر)

چون نقطه O یعنی مرکز تجانس بین دو نقطه M و M' است، پس تجانس معکوس است، یعنی نسبت تجانس عددی منفی است.

$$\frac{OM}{OM'} < 1 \Rightarrow \frac{OM'}{OM} > 1 \Rightarrow |k| > 1$$



بنابراین در بین گزینه‌ها، تنها $k = -2$ قابل قبول است.

(هندسه ۲ - صفحه ۴۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۲۳

(معصومه اکبری صفت)

نسبت محیط‌های دو مربع، برابر نسبت تجانس است، پس $k = \frac{6}{5}$. اگر مساحت مستطیل اولیه و مساحت تصویر آن را به ترتیب با S و S' نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{S'}{S} = k^2 \Rightarrow \frac{24}{S} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow S = \frac{25 \times 24}{36} = \frac{50}{3}$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۴۵ تا ۴۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

هر چندضلعی منتظم قابل محاط شدن در یک دایره است. اگر A و B دو رأس متوالی این چندضلعی و $\hat{AOB} = \alpha$ باشد، آن گاه ۸۴ و ۱۰۸ هر دو مضربی از α هستند، یعنی α مقسوم علیه مشترک ۸۴ و ۱۰۸ است. با توجه به این که ب م م دو عدد ۸۴ و ۱۰۸، برابر ۱۲ است، پس حداکثر مقدار α برابر 12° بوده

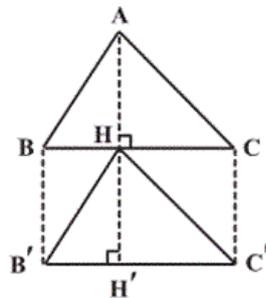
۴

۳

۲✓

۱

انتقال تبدیلی طولپاست، بنابراین $S_{HB'C'} = S_{ABC} = 20$ است. از طرفی انتقال یافته هر پاره خط موازی و مساوی با آن پاره خط است، بنابراین چهارضلعی های $ABB'H$ و $ACC'H$ متوازی الاضلاع هستند. هر متوازی الاضلاع توسط هر یک از قطرهای آن، به دو مثلث هم مساحت تقسیم می شود، بنابراین داریم:



$$\left. \begin{aligned} S_{BB'H} &= S_{ABH} \\ S_{CC'H} &= S_{ACH} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow S_{BB'H} + S_{CC'H} = S_{ABH} + S_{ACH} = S_{ABC} = 20$$

بنابراین مساحت پنج ضلعی $ABB'C'C$ برابر است با:

$$S_{ABB'C'C} = 3S_{ABC} = 3 \times 20 = 60$$

(هندسه ۲- صفحه های ۴۰ و ۴۱)

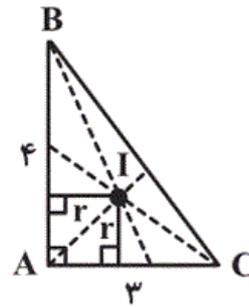
۴

۳

۲✓

۱

محل همرسی نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث، مرکز دایره محاطی داخلی مثلث بوده و از سه ضلع آن به یک فاصله است. داریم:



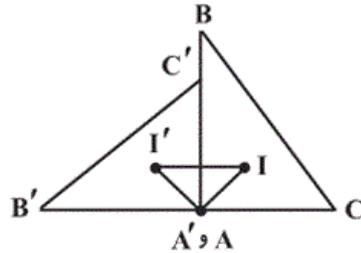
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2} \times 3 \times 4}{3 + 4 + 5} = 1 \Rightarrow AI = \sqrt{2}$$

حالا دوران یافته مثلث ABC به اندازه ۹۰ درجه در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت حول رأس A را رسم می‌کنیم. از آنجا که دوران طولپا است، داریم:

$$A'I' = AI = \sqrt{2}$$

$$II' = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2 \quad \text{از طرفی } \hat{IAI'} = 90^\circ \text{، بنابراین:}$$



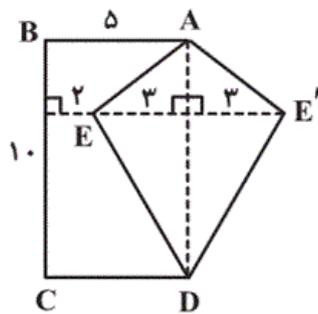
(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۴

۳

۲

۱ ✓



$$S_{AED} = \frac{1}{2} \times 3 \times 10 = 15$$

بازتاب نقطه E نسبت به ضلع AD را به دست می‌آوریم. با توجه به طولپایی بازتاب داریم:

$$S_{AE'D} = S_{AED} = 15 \Rightarrow S_{ABCDE'} = S_{ABCD} + S_{AE'D}$$

$$= 5 \times 10 + 15 = 65$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

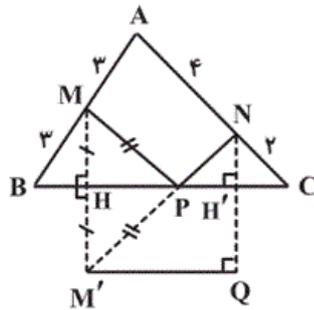
۴

۳ ✓

۲

۱

هر زاویه مثلث متساوی الاضلاع، 60° درجه است. بنابراین:



$$\Delta MHB : MH = MB \times \sin 60^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta MHB : BH = MB \times \cos 60^\circ = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Delta NH'C : NH' = NC \times \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Delta NH'C : CH' = NC \times \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر (طبق مسئله هرون)، ابتدا بازتاب نقطه M نسبت به ضلع BC را به دست می‌آوریم (نقطه M') و سپس این نقطه را به نقطه N وصل می‌کنیم. محل تلاقی پاره‌خط $M'N$ و ضلع BC ، همان نقطه مورد نظر (نقطه P) است. مطابق شکل داریم:

$$M'H = MH = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow QH' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow NQ = NH' + QH' = \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$M'Q = HH' = BC - (BH + CH') = 6 - \left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{7}{2}$$

$$M'N = \sqrt{NQ^2 + M'Q^2} = \sqrt{\frac{75}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{31}$$

$$MP + NP = M'P + NP = M'N$$

$$\Rightarrow MP + NP = \sqrt{31}$$

(هندسه ۲ - صفحه ۵۴)

۴

۳ ✓

۲

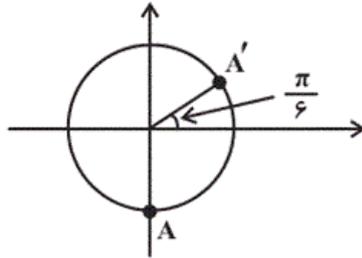
۱

(علی کردی)

نقطه $A(0, -1)$ انتهای کمان زاویه مربوط به $\theta = \frac{-\pi}{2}$ روی دایره

مثلثاتی است. زاویه نهایی دورانی یافته برابر است با:

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{14\pi}{3} = \frac{25\pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{6}$$



$$\begin{cases} x_{A'} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_{A'} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x_{A'} y_{A'} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(مسایان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳

۲✓

۱

(مهروی طاهری)

$$\theta = \frac{L}{r}$$

θ : زاویه برحسب رادیان

r : شعاع

L : کمان

رادیان $60 = \frac{\pi}{3}$ درجه

از آنجا که کمان و مسافت طی شده توسط دو چرخ یکسان است، داریم:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{L}{80} \Rightarrow L = \frac{80\pi}{3} \text{ cm}$$

$$\theta_2 = \frac{80\pi}{30} = \frac{80\pi}{90} = \frac{8\pi}{9} \text{ رادیان}$$

(مسایان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴✓

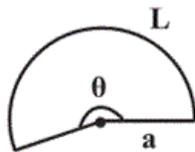
۳

۲

۱

(یاسین سپهر)

رابطه بین یک زاویه مانند θ بر حسب رادیان و طول کمان L روبه‌رو به آن در یک دایره به شعاع a به صورت $\theta = \frac{L}{a}$ می‌باشد. در شکل گستردهٔ مخروط، ابتدا باید مقدار a یعنی شعاع قطاع و سپس طول کمان را به دست آوریم. شعاع قطاع برابر با $a = \sqrt{r^2 + h^2}$ و طول کمان برابر با محیط قاعدهٔ مخروط می‌باشد.



$$a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow a = 5 \text{ cm}$$

$$L = 2\pi r \Rightarrow L = 6\pi \text{ cm}$$

$$\theta = \frac{L}{a} = \frac{6\pi}{5} \text{ رادیان}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

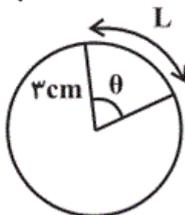
۳

۲ ✓

۱

(مهرداد ملونری)

زاویه طی شده برای عقربهٔ دقیقه‌شمار را بر حسب رادیان محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{3600}{20} = \frac{2\pi}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi \times 20}{3600} = \frac{\pi}{90} \text{ رادیان}$$

$$L = r\theta \Rightarrow L = 3 \times \frac{\pi}{90} = \frac{\pi}{30} \text{ سانتی‌متر}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(میثم بهرامی بویا)

هر ۱۲×۶۰ دقیقه، عقربه ساعت شمار ۳۶۰ درجه را طی می کند، پس در هردقیقه به اندازه $\frac{۳۶۰}{۱۲ \times ۶۰}$ درجه که همان $۰/۵$ درجه است، دوران می کند.

$$۳:۴۵'$$

$$\underline{-۲:۲۵'}$$

$$۱:۲۰' \Rightarrow ۸۰ \text{ دقیقه}$$

$$۸۰ \times ۰/۵ = ۴۰ \text{ درجه}$$

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۴۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۲\pi}{۹} \text{ رادیان}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه های ۹۲ تا ۹۷)

۴ ✓

۳

۲

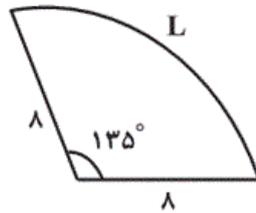
۱

(امیر هوشنگ فمسه)

با استفاده از رابطه $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$ می نویسیم:

$$\frac{۱۳۵}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۳\pi}{۴} \text{ رادیان}$$

اگر قطاع مورد نظر به شکل روبه رو باشد:



$$L = 8 \times \frac{۳\pi}{۴} = ۶\pi \text{ سانتی متر}$$

در نتیجه محیط قطاع، برابر $۱۶ + ۶\pi = ۲ \times ۸ + ۶\pi$ سانتی متر می باشد.

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه های ۹۲ تا ۹۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

(علی کردی)

$$\cos\left(\frac{۱۳\pi}{۲}\right) + \sin\left(\pi \cos\left(\frac{۱۱۸\pi}{۳}\right)\right)$$

$$= \cos\left(۶\pi + \frac{\pi}{۲}\right) + \sin\left(\pi \cos\left(۳۹\pi + \frac{\pi}{۳}\right)\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{۲} + \sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = ۰ - ۱ = -۱$$

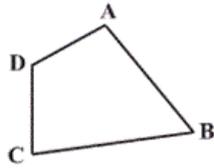
(مسابان ۱- مثلثات - صفحه های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳ ✓

۲

۱



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 360^\circ - (\hat{C} + \hat{D})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(\hat{A} + \hat{B}) = -\sin(\hat{C} + \hat{D}) \\ \cos(\hat{A} + \hat{B}) = \cos(\hat{C} + \hat{D}) \\ \tan(\hat{A} + \hat{B}) = -\tan(\hat{C} + \hat{D}) \\ \cot(\hat{A} + \hat{B}) = -\cot(\hat{C} + \hat{D}) \end{cases}$$

پس تنها گزینه «۲» همواره برقرار است.

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(یاسین سپهر)

-۱۱۷

$$\sin(-18^\circ) = -\sin 18^\circ = -0/3$$

$$\cos 108^\circ = \cos(90^\circ + 18^\circ) = -\sin 18^\circ = -0/3$$

$$\sin 738^\circ = \sin(720^\circ + 18^\circ) = \sin(2 \times 360^\circ + 18^\circ) = \sin 18^\circ = 0/3$$

$$\cos 72^\circ = \cos(90^\circ - 18^\circ) = \sin 18^\circ = 0/3$$

$$\frac{\sin(-18^\circ) + \cos 108^\circ}{1 + \sin 738^\circ + \cos 72^\circ} = \frac{-0/3 - 0/3}{1 + 0/3 + 0/3} = \frac{-0/6}{1/6} = \frac{-3}{8}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(علی شهبازی)

-۱۰۲

از آن جا که $\sin(18^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ داریم:

$$\sin 24^\circ = \sin(18^\circ + 6^\circ) = -\sin 6^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

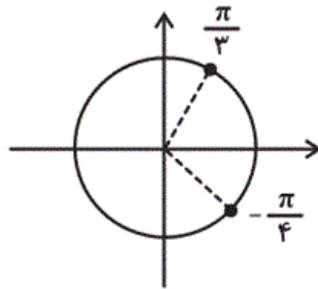
۴

۳

۲ ✓

۱

مطابق دایره مثلثاتی داریم:



$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} \leq \cos x \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1-m}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1-m \leq 2$$

$$\Rightarrow -1 \leq m \leq 0$$

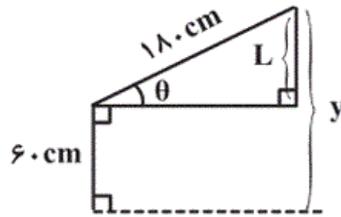
(مسئله ۱- مثلثات - صفحه های ۹۲ تا ۱۰۴)

۴

۳ ✓

۲

۱



$$y = 60 + L$$

$$\sin \theta = \frac{L}{180} \Rightarrow L = 180 \cdot \sin \theta$$

$$\Rightarrow y = 60 + 180 \cdot \sin \theta$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

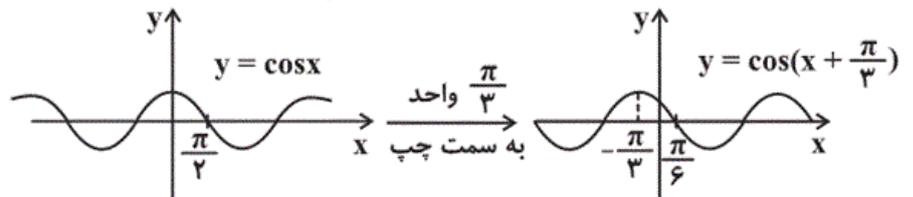
۴

۳

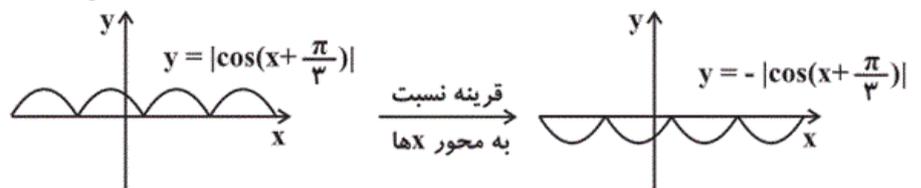
۲ ✓

۱

از انتقال نمودار تابع $y = \cos x$ استفاده می کنیم:



حال قسمت های زیر محور X ها را نسبت به این محور قرینه می کنیم:



(مسئله ۱- مثلثات - صفحه های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

دامنه تابع f عبارت است از:

$$2x - b > 0 \Rightarrow x > \frac{b}{2} \xrightarrow{x > 3} \frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = 6$$

بنابراین $f(x) = \log_{a-1}(2x - 6)$ ، لذا:

$$f\left(\frac{15}{2}\right) = \log_{a-1}\left(2\left(\frac{15}{2}\right) - 6\right) = 2 \Rightarrow \log_{a-1}(9) = 2$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} a-1 = 3 \Rightarrow a = 4 & \text{ق ق} \\ a-1 = -3 & \text{غ ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 10$$

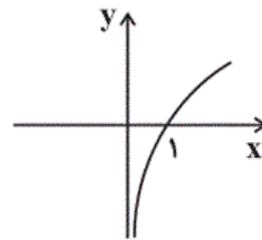
(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

نمودار تابع $y = \log_x^x$ را رسم می‌کنیم:

$$\Rightarrow R_y = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$y = \log_x^x$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

اگر $\log_c^x = b$ باشد، آن گاه $x = c^b$. بنابراین:

$$\log_3^{3^a - 8} = 2 - a \Rightarrow 3^a - 8 = \frac{3^2}{3^a} \xrightarrow{t=3^a}$$

$$t - 8 = \frac{9}{t} \Rightarrow t^2 - 8t - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 9 = 3^a \Rightarrow a = 2 \\ t = -1 & \text{غ ق} \end{cases}$$

$$\log_{(2a-1)}^{(4a+1)} \xrightarrow{a=2} \log_3^9 = \frac{1}{2}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۰۷

(امیر هوشنگ فمسه)

رابطه نیمه عمر: $m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

m_0 : جرم اولیه m : جرم باقی مانده T : نیمه عمر

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}}{m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2T}}} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2T}} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2T}} \Rightarrow \frac{t}{2T} = 3 \Rightarrow t = 6T$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۸۸ تا ۹۰)

۴

۳

۲

۱

-۱۰۸

(میثم بهرامی بویا)

از دو طرف تساوی، لگاریتم در پایه ۳ می گیریم:

$$\log_3^{\log_3^x} = \log_3^{27} \Rightarrow \log_3^x \times \log_3^x = 3$$

$$\Rightarrow \log_3^x = \sqrt{3} \text{ یا } \log_3^x = -\sqrt{3}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۸۰ تا ۸۸)

۴

۳

۲

۱

-۱۰۳

(سیدسروش کریمی مداحی)

از رابطه‌های $\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c$ و $\log a + \log b = \log ab$ استفاده می‌کنیم:

$$\log(\sqrt{x-1}) + \log(x+2) = 2 \Rightarrow \log(\sqrt{x-1})(x+2) = 2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x-1})(x+2) = 10^2 = 100 \Rightarrow \sqrt{x-1} + 13x - 102 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x-1})(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 & \text{ق ق} \\ x=-\frac{34}{7} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{7}}^{\sqrt{x-2}} \stackrel{x=3}{=} \log_{\sqrt{7}}^{\sqrt{1}} = \log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{\sqrt{1}} = 2 \log_{\sqrt{7}}^{\sqrt{1}} = 2$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۸)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

-۱۰۴

(فرشاد فرامرزی)

می‌دانیم اگر $a > 1$ و $x > y$ ، آن‌گاه $\log_a^x > \log_a^y$ ، پس:

$$5^2 < 50 < 5^3 \Rightarrow \log_5 5^2 < \log_5 50 < \log_5 5^3$$

$$\Rightarrow 2 < \log_5 50 < 3 \Rightarrow [\log_5 50] = 2$$

$$(\sqrt{3})^4 = 9 \Rightarrow \log_9^9 \sqrt{3} = 4$$

از طرفی:

$$[\log_5^{\log_9^9 \sqrt{3}}] = [\log_5^9 \sqrt{3}] = [\log_5^9] - 4 = 2 - 4 = -2$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱ ✓

-۱۳۱

(رمیم مشتاق نظم)

تحت بازتاب نسبت به یک خط، تنها تصویر نقاط واقع بر آن خط ثابت می‌ماند و تصویر سایر نقاط صفحه بر خود آن‌ها منطبق نیست، پس بازتاب هیچ‌گاه نمی‌تواند تبدیل‌همانی باشد. انتقال با بردار صفر، دوران با زاویه 360° (یا مضارب آن) و تجانس با نسبت $k=1$ ، تبدیل‌همانی هستند.

(هندسه ۲ - صفحه ۴۹)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

-۱۳۲

(یاسین سپهر)

چون نقطه O یعنی مرکز تجانس بین دو نقطه M و M' است، پس تجانس معکوس است، یعنی نسبت تجانس عددی منفی است.

$$\frac{OM}{OM'} < 1 \Rightarrow \frac{OM'}{OM} > 1 \Rightarrow |k| > 1$$



بنابراین در بین گزینه‌ها، تنها $k = -2$ قابل قبول است.

(هندسه ۲ - صفحه ۴۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۳۳

(معصومه اکبری صفت)

نسبت محیط‌های دو مربع، برابر نسبت تجانس است، پس $k = \frac{6}{5}$. اگر مساحت مستطیل اولیه و مساحت تصویر آن را به ترتیب با S' و S نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{S'}{S} = k^2 \Rightarrow \frac{24}{S} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow S = \frac{25 \times 24}{36} = \frac{50}{3}$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۴۵ تا ۴۹)

۴ ✓

۳

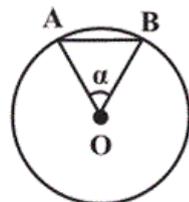
۲

۱

-۱۳۴

(امسان فیراللهی)

هر چندضلعی منتظم قابل محاط شدن در یک دایره است. اگر A و B دو رأس متوالی این چندضلعی و $\alpha = \widehat{AOB}$ باشد، آن گاه 84° و 108° هر دو مضربی از α هستند، یعنی α مقسوم‌علیه مشترک 84° و 108° است. با توجه به این که b م م دو عدد 84° و 108° ، برابر 12° است، پس حداکثر مقدار α برابر 12° بوده و در نتیجه داریم:



$$\min(n) = \frac{360^\circ}{12^\circ} = 30$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۴

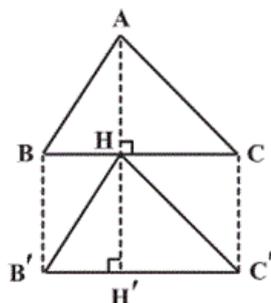
۳

۲ ✓

۱

(ریم مشتاق نظم)

انتقال تبدیلی طولی است، بنابراین $S_{HB'C'} = S_{ABC} = 20$ است. از طرفی انتقال یافته هر پاره خط موازی و مساوی با آن پاره خط است، بنابراین چهارضلعی های $ABB'H$ و $ACC'H$ متوازی الاضلاع هستند. هر متوازی الاضلاع توسط هر یک از قطرهای آن، به دو مثلث هم مساحت تقسیم می شود، بنابراین داریم:



$$\left. \begin{aligned} S_{BB'H} &= S_{ABH} \\ S_{CC'H} &= S_{ACH} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow S_{BB'H} + S_{CC'H} = S_{ABH} + S_{ACH} = S_{ABC} = 20$$

بنابراین مساحت پنج ضلعی $ABB'C'C$ برابر است با:

$$S_{ABB'C'C} = 3S_{ABC} = 3 \times 20 = 60$$

(هندسه ۲- صفحه های ۴۰ و ۴۱)

۴

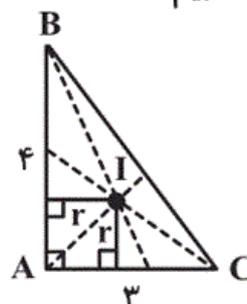
۳

۲ ✓

۱

(فرشاد فرامرزی)

محل همرسی نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث، مرکز دایره محاطی داخلی مثلث بوده و از سه ضلع آن به یک فاصله است. داریم:



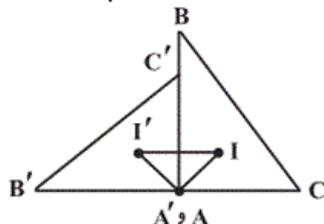
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2} \times 3 \times 4}{3 + 4 + 5} = 1 \Rightarrow AI = \sqrt{2}$$

حالا دوران یافته مثلث ABC به اندازه 90° درجه در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت حول رأس A را رسم می کنیم. از آنجا که دوران طولی است، داریم:

$$A'I' = AI = \sqrt{2}$$

$$II' = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2 \quad \text{از طرفی } \angle IAI' = 90^\circ \text{، بنابراین:}$$



(هندسه ۲- صفحه های ۴۲ و ۴۳)

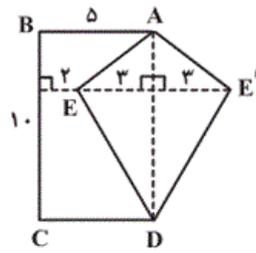
۴

۳

۲

۱ ✓

(فرشاد فرامرزی)



$$S_{AED} = \frac{1}{2} \times 3 \times 10 = 15$$

بازتاب نقطه E نسبت به ضلع AD را به دست می‌آوریم. با توجه به طولیابی بازتاب داریم:

$$S_{AE'D} = S_{AED} = 15 \Rightarrow S_{ABCDE'} = S_{ABCD} + S_{AE'D} \\ = 5 \times 10 + 15 = 65$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

۴

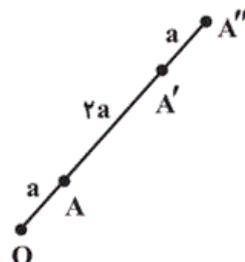
۳✓

۲

۱

(رضا عباسی اصل)

مطابق شکل داریم:



$$\frac{OA'}{OA} = 3 \Rightarrow OA' = 3OA \xrightarrow{OA=a} OA' = 3a \Rightarrow AA' = 2a$$

$$\frac{AA''}{AA'} = \frac{3}{2} \Rightarrow AA'' = \frac{3}{2} AA' = \frac{3}{2} (2a) = 3a$$

$$\Rightarrow A'A'' = a$$

حال نسبت تجانسی که مستقیماً A را روی A'' تصویر می‌کند، برابر

$$k = \frac{OA''}{OA} = \frac{4a}{a} = 4$$

است با:

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۵ تا ۴۹)

۴

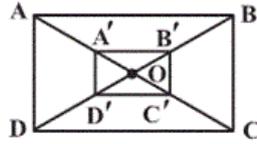
۳

۲

۱✓

اگر مساحت مستطیل اولیه را S بگیریم، در این صورت می‌دانیم که

مساحت تصویر مستطیل در این تجانس برابر $\frac{1}{25}S$ است. بنابراین داریم:



$$S - \frac{1}{25}S = 48 \Rightarrow \frac{24}{25}S = 48$$

$$\Rightarrow \frac{S}{25} = 2 \Rightarrow S = 50$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۴۵ تا ۴۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

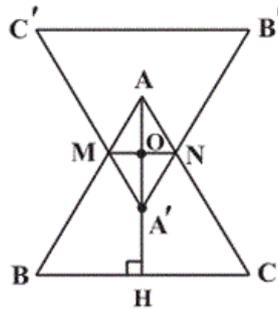
مثلث ABC و مجانس آن، یعنی مثلث $A'B'C'$ در شکل زیر رسم شده

است. از آنجا که تجانس شیب خط را حفظ می‌کند، $AB \parallel A'B'$

و $AC \parallel A'C'$ است. از طرفی AA' نیمساز زاویه داخلی A است،

بنابراین چهارضلعی $AMA'N$ لوزی می‌باشد. ارتفاع مثلث

متساوی‌الاضلاعی به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است. پس داریم:



$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} \Rightarrow AO = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} = \sqrt{3} \Rightarrow AA' = 2\sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{ON}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{ON}{\sqrt{3}} \Rightarrow ON = 1 \Rightarrow MN = 2$$

مساحت لوزی برابر با نصف حاصل ضرب طول قطرهای آن است. بنابراین:

$$S_{AMA'N} = \frac{1}{2} \times AA' \times MN = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۴۵ تا ۴۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۴۱

(نامر پوقادی)

تعداد کل دانش‌آموزان این کلاس ۲۰ نفر است، بنابراین فراوانی نسبی

مربوط به گروه خونی B، برابر $\frac{6}{20} = 0.3$ است و در نتیجه داریم:

$$B \text{ زاویه مرکزی گروه خونی } = 0.3 \times 360^\circ = 108^\circ$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۷۳ تا ۸۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۴۲

(نامر پوقادی)

$$\text{تعداد کل دانش‌آموزان کلاس} = 2 + 4 + 8 + 6 = 20$$

$$\text{تعداد دانش‌آموزان با نمره بین ۸ تا ۱۶} = 4 + 8 = 12$$

$$\text{درصد دانش‌آموزان با نمره بین ۸ تا ۱۶} = \frac{12}{20} \times 100 = 60\%$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۷۳ تا ۸۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۴۳

(امیرحسین ابومحبوب)

اگر تعداد اولیه داده موردنظر را برابر x و تعداد کل داده‌های اولیه را برابر n در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$\frac{x}{n} \times 36^\circ = 45^\circ \Rightarrow n = 8x$$

با دو برابر شدن تعداد این داده بدون تغییر فراوانی سایر داده‌ها، تعداد کل داده‌ها برابر $N = 8x + x = 9x$ خواهد بود و در نتیجه زاویه متناظر با این داده در نمودار دایره‌ای جدید برابر است با:

$$\frac{2x}{9x} \times 36^\circ = \frac{2}{9} \times 36^\circ = 8^\circ$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۷۳ تا ۸۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

اگر C پیشامد خراب بودن لامپ انتخابی باشد، آن گاه داریم:

$$P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)$$

$$= 0/4 \times 0/02 + 0/6 \times 0/05 = 0/008 + 0/03 = 0/038$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

برای این که سومین لامپ خارج شده اولین لامپ معیوب باشد، لازم است دو لامپ اول سالم باشند. در این صورت، اگر پیشامد مورد نظر را با A نمایش دهیم، داریم:

$$P(A) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 اولی دومی سومی
 سالم سالم معیوب

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(E) = P(A) \times P(E|A) + P(B) \times P(E|B) + P(C) \times P(E|C)$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{1}{3} \times 0/5 + \frac{1}{3} \times 0/75 + \frac{1}{3} \times 1 = 0/75 = \frac{3}{4}$$

تنها در استان C، زلزله در تمامی شهرها ثبت شده است، بنابراین طبق قاعدهٔ بیز داریم:

$$P(C|E) = \frac{P(C)P(E|C)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{9}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(نرا صالح پور)

در پرتاب دو تاس مجموع اعداد رو شده از ۲ تا ۱۲ است که مربع‌های کامل در این محدوده، ۴ و ۹ هستند. فضای نمونه اولیه $۶ \times ۶ = ۳۶$ عضو دارد. از فضای نمونه کاهش یافته برای حل مسئله استفاده می‌کنیم. می‌دانیم مجموع دو تاس، عددی مربع کامل ظاهر شده، پس داریم:

$$S = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\}$$

اگر A پیشامد آن باشد که تاس اول، حداقل ۳ آمده باشد، آن‌گاه داریم:

$$A = \{(3, 1), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{7}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

(امیر حسین ابومحبوب)

دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، پس پیشامدهای A و B' نیز مستقل از هم بوده و در نتیجه داریم:

$$P(A \cap B) = 0/2 \Rightarrow P(A)P(B) = 0/2 \quad (1)$$

$$P(A \cap B') = 0/3 \Rightarrow P(A)P(B') = 0/3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} P(A)P(B) + P(A)P(B') = 0/5$$

$$\Rightarrow P(A) \underbrace{(P(B) + P(B'))}_1 = 0/5 \Rightarrow P(A) = 0/5$$

$$P(A)P(B) = 0/2 \Rightarrow 0/5 \times P(B) = 0/2 \Rightarrow P(B) = 0/4$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/5 + 0/4 - 0/2 = 0/7$$

(آمار و احتمال - احتمال - مشابه تمرین ۱۲ صفحه ۷۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

در صورت پرتاب دو سکه، فضای نمونه دارای ۴ حالت است که تنها به ازای مجموعه $\{(r, r)\}$ ، تعداد رو بیشتر از پشت است. در صورت پرتاب سه سکه، فضای نمونه دارای ۸ حالت است که به ازای اعضای مجموعه $\{(r, r, r), (r, r, p), (r, p, r), (p, r, r), (r, r, r), (r, r, p), (r, p, r), (p, r, r)\}$ ، تعداد رو بیشتر از پشت است. اگر پیشامد بیشتر بودن تعداد رو را با A نمایش دهیم، داریم:

$$P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۴

۳

۲

۱

۱۴۶-

(نرا صالح پور)

چون قبولی علی و کيارش در امتحان ریاضی دو پیشامد مستقل هستند، پس در صورتی که پیشامدهای قبولی علی و کيارش را به ترتیب با A و B نمایش دهیم، پیشامدهای A و B' و همچنین پیشامدهای B و A' نیز مستقل هستند، بنابراین داریم:

$$P(A) = 0/6 \Rightarrow P(A') = 0/4$$

$$P(B) = 0/7 \Rightarrow P(B') = 0/3$$

$$P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A)P(B') + P(A')P(B)$$

$$= 0/6 \times 0/3 + 0/4 \times 0/7 = 0/46$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۴

۳

۲

۱

۱۵۱-

(کتاب آبی)

$$55 = 5 + 6 + 15 + 12 + 9 + 8 = \text{تعداد کل داده‌ها}$$

$$\text{درصد وزن‌های کم‌تر از ۵۰} = \frac{8 + 9 + 12 + 15}{55} \times 100$$

$$= \frac{44}{55} \times 100 = 80$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۷۴ تا ۷۶)

۴

۳

۲

۱

(کتاب آبی)

گروه نامعلوم را X می‌نامیم. می‌دانیم که مجموع تمام زاویه‌ها در نموداردایره‌ای 360° است، پس: $\alpha_X + \alpha_O + \alpha_{AB} + \alpha_B + \alpha_A = 360^\circ$

$$\Rightarrow \alpha_X + 35^\circ + 100^\circ + 75^\circ + 7^\circ = 360^\circ \Rightarrow \alpha_X = 8^\circ$$

اگر فراوانی دسته‌ها را با f و تعداد کل داده‌ها را با n نمایش دهیم، داریم:

$$\alpha_X = \frac{f_X}{n} \times 360^\circ \Rightarrow 8^\circ = \frac{32}{n} \times 360^\circ \Rightarrow n = 144 \quad \text{بنابراین:}$$

$$\alpha_B = \frac{f_B}{n} \times 360^\circ \Rightarrow 75^\circ = \frac{f_B}{144} \times 360^\circ \Rightarrow f_B = 30$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

(کتاب آبی)

$$\text{تعداد دانش‌آموزان} = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$$

$$\text{فراوانی نسبی دسته وسط قبل از اضافه شدن دانش‌آموز جدید} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

دانش‌آموز جدید یک واحد به فراوانی دسته چهارم و کل داده‌ها اضافه می‌کند و در فراوانی دسته وسط تاثیری ندارد.

$$\text{فراوانی نسبی دسته وسط بعد از اضافه شدن دانش‌آموز جدید} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

$$\text{تفاضل فراوانی‌های نسبی} = \frac{2}{7} - \frac{3}{10} = \frac{20 - 21}{70} = -\frac{1}{70}$$

یعنی فراوانی نسبی دسته وسط، $\frac{1}{70}$ کم می‌شود.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

با توجه به قوانین احتمال و فرمول احتمال شرطی داریم:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(B | A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow P(B | A') = \frac{\frac{9-4}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در حل مسائل شرطی فرض کنید شرط اجرا شده است و حال در فضای نمونه جدید مسئله را حل کنید. پس فرض کنید یک مهره سفید از این کیسه خارج شده است بنابراین در کیسه، ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه داریم که می‌خواهیم دو مهره با هم از آن خارج کنیم. اگر پیشامد سفید بودن این دو مهره را با A نمایش دهیم، داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر پیشامد معیوب بودن لامپ انتخابی را با A و پیشامدهای تعلق داشتن لامپ انتخابی به جعبه‌های اول و دوم را به ترتیب با B_1 و B_2 نمایش دهیم، آن گاه طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2)$$

$$= \frac{8}{14} \times \frac{4}{24} + \frac{6}{14} \times \frac{3}{15} = \frac{2}{21} + \frac{3}{35}$$

$$= \frac{10+9}{105} = \frac{19}{105}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۴

۳

۲✓

۱

اگر A_1 پیشامد انتخاب دسته اول، A_2 پیشامد انتخاب دسته دوم و W پیشامد انتخاب دو کارت سفید باشد، آن گاه:

$$P(A_1 | W) = \frac{P(A_1)P(W | A_1)}{P(A_1)P(W | A_1) + P(A_2)P(W | A_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}}{\frac{1}{2} \times \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} + \frac{1}{2} \times 1} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{15}{55}}{\frac{1}{2} \times \frac{15}{55} + \frac{1}{2}} = \frac{3}{14}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

۴

۳

۲✓

۱

(کتاب آبی)

$$S = \{a, b, c, d\}$$

$$P(\{a, b\}) = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{از هم مستقل اند}} P(\{a, b\} \cap \{a, c\}) = P(a) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{a, c\}) = \frac{1}{3}$$

$$P(\{a, c\}) = P(a) + P(c) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(c) = \frac{1}{6}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کتاب آبی)

اعضای این پیشامدها عبارت‌اند از:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{3, 6, 9\}$$

$$C = \{2, 3, 5, 7\}$$

در نتیجه:

$$A \cap B = \{3, 9\}$$

$$A \cap C = \{3, 5, 7\}$$

$$B \cap C = \{3\}$$

بنابراین:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{10} \neq P(A) \times P(B) = \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} \rightarrow A \text{ و } B \text{ وابسته‌اند}$$

$$P(A \cap C) = \frac{3}{10} \neq P(A) \times P(C) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{10} \rightarrow A \text{ و } C \text{ وابسته‌اند}$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{10} \neq P(B) \times P(C) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} \rightarrow B \text{ و } C \text{ وابسته‌اند}$$

(آمار و احتمال - احتمال - مشابه تمرین ۵ صفحه ۷۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

(کتاب آبی)

خارج کردن متوالی مهره‌ها، مستقل از یکدیگر هستند. فقط یک‌بار سفید یعنی این که یا در مرتبه اول سفید رؤیت شده است و در مرتبه دوم سیاه و یا برعکس. چون مهره را به کیسه برگردانیم، از تعداد آن‌ها در مرتبه بعدی کم نشده است.

$$P = (P(\text{اولی سیاه و دومی سفید}) + P(\text{اولی سفید و دومی سیاه}))$$

$$P = P(\text{اولی سفید}) \times P(\text{دومی سیاه}) + P(\text{اولی سیاه}) \times P(\text{دومی سفید})$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

(آمار و احتمال - احتمال - مشابه تمرین ۹ صفحه ۷۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱