

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

@riazisara

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

@riazisara.ir

ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

حسابان ۱، مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی - ۲ سوال -

۸۱- قدرنسبت و جمله اول یک دنباله هندسی به ترتیب از راست به چپ برابر ۲ و ۴ هستند. مجموع ۶ جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲۵۲
(۲) ۲۵۶
(۳) ۱۲۶
(۴) ۱۲۸

۸۲- در ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف زوج سه برابر مجموع جملات ردیف فرد است. نسبت جمله اول به قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) $-\frac{9}{2}$
(۲) $-\frac{7}{2}$
(۳) -۴
(۴) -۵

حسابان ۱، معادلات درجه دوم - ۳ سوال

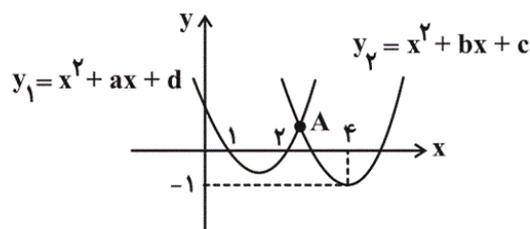
۸۳- اگر $x = \frac{1-a}{a}$ ریشه غیرصفر معادله $ax^2 + (3a+1)x + a - 1 = 0$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) ۲
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) -۱

۸۴- اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 3x - 2 = 0$ باشند، مقدار $\alpha^2 + 3\beta - 4$ کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۷
(۳) ۵
(۴) ۹

۸۷- در شکل مقابل طول نقطه A کدام است؟



- (۱) ۲/۸
(۲) ۲/۶
(۳) ۲/۴
(۴) ۲/۲

حسابان ۱، معادلات گویا و گنگ - ۲ سوال -

۸۵- علی به همراه دوستانش به یک موزه رفتند و پول بلیطشان روی هم ۲۰۰۰۰ تومان شد. اما هر کدام از دوستانش تصمیم گرفتند ۱۰۰۰ تومان اضافه پول بدهند تا علی پول خود را ندهد. تعداد همراهان علی چند نفر است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

۸۶- تعداد جواب‌های معادله $2 = \frac{3}{x^2 - 2x + 4} + \frac{5}{4x^2 - 8x + 9}$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

حسابان ۱، آشنایی با هندسه تحلیلی - سوال ۲۰ -

۸۸- اگر $A(1, 2)$ رأس مربعی باشد که معادله یک ضلع آن $0 = 1 - 3x + 4y$ است، مساحت مربع کدام است؟

(۱) ۲

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) ۴

(۴) ۱

۸۹- دو خط به معادلات $6x - 8y = -8$ و $4x + 3y = 5$ بر دایره‌ای به مرکز $O(2, 1)$ در نقاط A و B مماسند. اگر این دو خط در نقطه C با هم برخورد کنند، مساحت چهارضلعی $ACBO$ کدام است؟

(۱) $\frac{36}{25}$

(۲) $\frac{42}{25}$

(۳) ۱

(۴) $\frac{6}{5}$

حسابان ۱، انواع تابع - سوال ۳۰ -

۹۰- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{3 - [x]}$ کدام است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است).

(۱) $(0, 3]$

(۲) $(-\infty, 3]$

(۳) $(-\infty, 4)$

(۴) $(-\infty, 2)$

۹۵- در کدام یک از معادلات زیر، y تابعی از x است؟

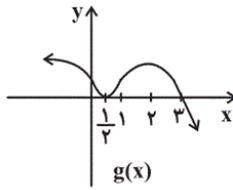
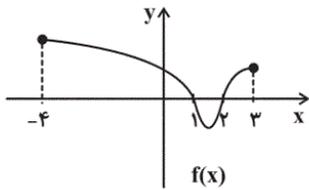
(۱) $|x| + \sqrt{y^2} = 2$

(۲) $y = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ |x^3 + 1|, & x \leq 0 \end{cases}$

(۳) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$

(۴) $y^2 + x^3 = 3$

۹۱- اگر نمودار دو تابع f و g به صورت زیر باشد، دامنه تابع $\frac{\sqrt{f}}{g}$ کدام است؟



(۱) $[-4, 3]$

(۲) $[-4, 1] \cup [2, 3]$

(۳) $([-4, 1] - \{\frac{1}{3}\}) \cup [2, 3]$

(۴) $([-4, 1] - \{\frac{1}{3}\}) \cup [2, 3)$

حسابان ۱، تابع نمایی - ۳ سوال -

۹۸- به ازای چند مقدار صحیح k ، تابع $f(x) = (-k^2 + 4k + 1)^x$ ، یک تابع نمایی است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۹۹- مجموعه جواب نامعادله $(\frac{2}{3})^{1+x} < (\frac{9}{4})^{2-x}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) همه اعداد طبیعی را شامل می شود.

۱۰۰- تابع $f(x) = \frac{x}{|x|} 2^x$ ، نیمساز ربع اول و سوم را در چند نقطه قطع می کند؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

هندسه ۲، تبدیل های هندسی - ۳ سوال -

۱۰۸- دایره $C(O, 3)$ را نسبت به خطی که از مرکز این دایره ۵ واحد فاصله دارد، بازتاب می دهیم. اگر حاصل این بازتاب، دایره C' باشد.

طول مماس مشترک داخلی دو دایره C و C' کدام است؟

(۱) ۴

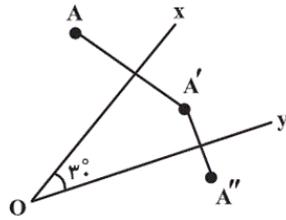
(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۰

۱۰۹- در شکل زیر A' بازتاب A نسبت به نیم خط Ox و A'' بازتاب A' نسبت به نیم خط Oy است. اگر $OA = 2$ باشد، مساحت

مثلث OAA'' کدام است؟



(۱) ۱

(۲) $\sqrt{3}$

(۳) ۳

(۴) $2\sqrt{3}$

۱۱۰- پاره خط $A'B'$ بازتاب پاره خط AB نسبت به خط d است. اگر فاصله نقطه A از خط d و نقطه B ، ۴ واحد باشد و راستای AB با

محور بازتاب زاویه 30° بسازد، مساحت چهارضلعی $ABB'A'$ کدام است؟ (A از B به محور بازتاب نزدیک تر است.)

(۲) $20\sqrt{3}$

(۱) $10\sqrt{3}$

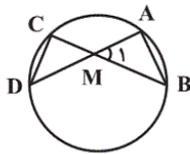
(۴) $40\sqrt{3}$

(۳) $30\sqrt{3}$

هندسه ۲، رابطه های طولی در دایره - سوال ۵ -

۱۰۳- در دایره شکل زیر، AB ضلع یک ده ضلعی منتظم و CD ضلع یک دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره است. اندازه زاویه M_1 چند

درجه است؟



(۱) ۳۰

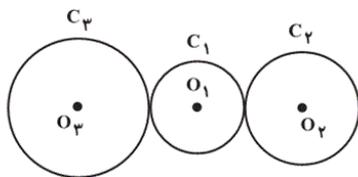
(۲) ۳۳

(۳) ۳۶

(۴) ۳۹

۱۰۴- مطابق شکل زیر، دایره $C_1(O_1, R)$ بر دو دایره $C_2(O_2, 2R)$ و $C_3(O_3, 3R)$ مماس خارج است. از نقطه O_1 دو مماس بر

دایره های C_2 و C_3 رسم می کنیم. نسبت مربعات طول های این دو مماس کدام است؟



(۱) $\frac{5}{7}$

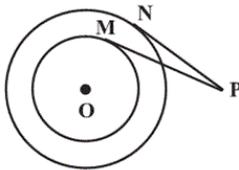
(۲) $\frac{4}{9}$

(۳) $\frac{9}{16}$

(۴) $\frac{3}{4}$

۱۰۵- در شکل زیر دو دایره با شعاع‌های $R = 3$ و $R' = 4$ ، دارای مرکز مشترک O هستند. از نقطه P دو مماس PM و PN بر این دو

دایره رسم شده است. اگر $PM = 3\sqrt{3}$ باشد، اندازه PN کدام است؟



(۱) $2\sqrt{3}$

(۲) ۴

(۳) $3\sqrt{2}$

(۴) $2\sqrt{5}$

۱۰۶- اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره، واسطه هندسی بین اندازه قطرهای آنها است. فاصله بین دورترین نقاط دو دایره کدام است؟

(۱) واسطه حسابی بین قطرهای دو دایره

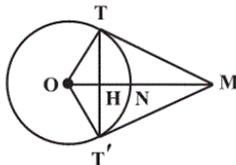
(۲) واسطه حسابی بین شعاع‌های دو دایره

(۳) مجموع قطرهای دو دایره

(۴) دو برابر مجموع قطرهای دو دایره

۱۰۱- در شکل زیر از نقطه M ، دو مماس MT و MT' بر دایره رسم شده است. اگر $MO = 6$ و H وسط ON باشد، شعاع دایره کدام

است؟



(۱) ۳

(۲) $2\sqrt{2}$

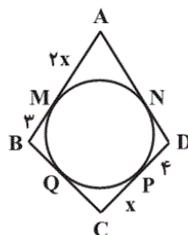
(۳) $2\sqrt{3}$

(۴) $3\sqrt{3}$

هندسه ۲، چندضلعی محاطی و محیطی - سوال ۲ -

۱۰۲- در شکل زیر اضلاع چهارضلعی $ABCD$ در نقاط M ، N ، P و Q بر دایره مماس هستند. اگر محیط چهارضلعی $ABCD$ برابر ۳۸

باشد، آن‌گاه طول ضلع BC کدام است؟



(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

۱۰۷- در مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع $\sqrt{3}$ ، فاصله مرکز دایره محاطی داخلی از مرکز هر یک از دایره‌های محاطی خارجی مثلث کدام

است؟

(۲) $2\sqrt{3}$

(۱) ۲

(۴) $4\sqrt{3}$

(۳) ۴

آمار و احتمال، آشنایی با منطق ریاضی - سوال ۲ -

۱۱۴- اگر p و q گزاره‌های دلخواه و r یک گزاره درست باشد، نقیض کدام یک از گزاره‌های زیر فقط دارای یک ارزش است؟

$$(r \vee p) \Rightarrow q \quad (۱)$$

$$(r \wedge p) \Rightarrow q \quad (۲)$$

$$(\sim r \wedge p) \Rightarrow q \quad (۳)$$

$$(\sim r \vee p) \Rightarrow q \quad (۴)$$

۱۱۵- کدام گزاره سوری زیر درست است؟ (P مجموعه اعداد اول است و $k \in \mathbb{Z}$)

$$\forall x \in \mathbb{R} : \tan x \times \cot x = 1 \quad (۱)$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x(x+1) = 2k \quad (۲)$$

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 = 0 \quad (۳)$$

$$\forall x \in P : x \neq 2k \quad (۴)$$

آمار و احتمال، مبانی احتمال - ۱ سوال -

۱۱۷- از بین مضارب دو رقمی عدد ۳، یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد انتخاب شده بر ۷ بخش پذیر است ولی زوج نیست؟

$$\frac{1}{33} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{30} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{15} \quad (۳)$$

آمار و احتمال، مجموعه - زیر مجموعه - ۱ سوال -

۱۱۳- اگر $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{1, 2\}$ و $C = \{\{1, 2\}\}$ باشند، آنگاه کدام دسته از روابط زیر همگی درست هستند؟

$$B \subseteq C \text{ و } B \in A, B \subseteq A \quad (۱)$$

$$B \not\subseteq C \text{ و } B \in A, B \subseteq A \quad (۲)$$

$$B \not\subseteq C \text{ و } B \notin A, B \subseteq A \quad (۳)$$

$$B \not\subseteq C \text{ و } B \in A, B \not\subseteq A \quad (۴)$$

آمار و احتمال، احتمال غیر هم شانس - ۳ سوال -

۱۲۰- اگر $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ فضای نمونه یک آزمایش تصادفی و $A = \{a, b, c\}$ ، $B = \{a, c\}$ و $C = \{a, c, f\}$ سه

پیشامد باشند به طوری که $P(A) = \frac{5}{12}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(C) = \frac{3}{8}$ ، آن گاه احتمال پیشامد $D = \{d, e\}$ کدام است؟

$$\frac{1}{8} \quad (2) \qquad \frac{11}{24} \quad (1)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4) \qquad \frac{5}{24} \quad (3)$$

۱۱۸- فضای نمونه یک آزمایش تصادفی و $A = \{b, c\}$ و $B = \{a, b, d\}$ دو پیشامد هستند. اگر $P(a)$ ، $P(b)$ ،

$P(c)$ و $P(d)$ ، با همین ترتیب یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۳ تشکیل دهند، حاصل $\frac{P(A \cap B')}{P(A')}$ کدام است؟

$$\frac{9}{28} \quad (2) \qquad \frac{9}{31} \quad (1)$$

$$\frac{12}{31} \quad (4) \qquad \frac{3}{7} \quad (3)$$

۱۱۱- زوجی به آزمایشگاه رفته و آزمایش خون داده‌اند. پس از آزمایش معلوم شد یکی از آن‌ها نوعی بیماری خونی

دارد. اگر احتمال این نوع بیماری خونی در آقایان سه برابر خانم‌ها باشد، چقدر احتمال دارد که خانم سالم باشد؟

$$\frac{1}{3} \quad (2) \qquad \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (4) \qquad \frac{3}{4} \quad (3)$$

آمار و احتمال ، پیشامدهای مستقل و وابسته - ۱ سوال

۱۱۲- سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد آن باشد که سکه هر سه بار مشابه بیاید، آن گاه پیشامد A با چه تعداد از پیشامدهای

زیر ناسازگار است؟

B : سکه زوج بار رو بیاید.

C : تعداد رو بیشتر از پشت باشد.

D : سکه اول پشت آمده باشد.

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

آمار و احتمال ، قوانین اعمال بین مجموعه ها (جبرمجموعه ها) - ۲ سوال

۱۱۹- برای دو مجموعهٔ ناتهی A و B ، رابطهٔ $A - [B \cup (A - B')] = A$ برقرار است. کدام یک از روابط زیر همواره درست است؟ (U)

مجموعهٔ مرجع است.)

$$A \subseteq B \quad (۱)$$

$$B \subseteq A \quad (۲)$$

$$A \cup B = U \quad (۳)$$

$$B - A = B \quad (۴)$$

۱۱۶- اگر $A = \{a + 3b, 2, 2a - 3b\}$ ، $B = \{-2, 5, c - 1\}$ و $A \times B = B \times A$ باشد، آن‌گاه بیشترین مقدار abc کدام است؟

$$4 \quad (۱)$$

$$-3 \quad (۲)$$

$$12 \quad (۴)$$

$$-6 \quad (۳)$$

-۸۱

(سیدسروش کریمی مداحی)

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q برابر

$$\text{با } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ است، پس:}$$

$$S_6 = a_1 \frac{(q^6 - 1)}{(q - 1)} \Rightarrow S_6 = 4 \times \frac{63}{1} = 252$$

(مسئله ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۴ تا ۶)

۴

۳

۲

۱

-۸۲

(میثم بهرامی بویا)

اگر قدرنسبت دنباله حسابی d باشد، دنباله جملات ردیف فرد دارای

جمله اول a_1 و قدرنسبت $2d$ و دنباله جملات ردیف زوج دارای جمله اول

a_2 و قدرنسبت $2d$ هستند، پس داریم:

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \frac{5}{2} [2a_1 + 4(2d)]$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = \frac{5}{2} [2a_2 + 4(2d)]$$

$$\frac{\frac{5}{2} [2a_2 + 8d]}{\frac{5}{2} [2a_1 + 8d]} = 3 \Rightarrow \frac{a_2 + 4d}{a_1 + 4d} = 3 \Rightarrow a_2 + 4d = 3a_1 + 12d$$

$$\underline{a_2 = a_1 + d} \rightarrow 2a_1 = -7d \Rightarrow \frac{a_1}{d} = -\frac{7}{2}$$

(مسئله ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳

۲

۱

(میثم بهرامی بویا)

$x = \frac{1-a}{a} = -\frac{c}{a}$ ریشه غیر صفر معادله است، پس ریشه دیگر $x = -1$ است.

$$ax^2 + (3a+1)x + a - 1 = 0 \xrightarrow{x=-1} a - 3a - 1 + a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = -2$$

(مسئله ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۷ تا ۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 3\alpha + 2$$

$$\alpha^2 + 2\beta - 4 = 3\alpha + 2 + 2\beta - 4$$

$$= 3\alpha + 2\beta - 2 = 3(\alpha + \beta) - 2 = 3 \times 3 - 2 = 7$$

(مسئله ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۷ تا ۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$y_1 = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

$$y_2 = (x-4)^2 - 1 = x^2 - 8x + 15$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی}} x^2 - 3x + 2 = x^2 - 8x + 15 \Rightarrow 5x = 13 \Rightarrow x = 2/5$$

(مسئله ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

(علی کردی)

اگر علی و همراهانش n نفر باشند و قیمت هر بلیط برابر x باشد، داریم:

$$nx = 20000$$

$$(n-1)(x+1000) = 20000 \Rightarrow (n-1)\left(\frac{20000}{n} + 1000\right) = 20000$$

$$\Rightarrow 20000 + 1000n - \frac{20000}{n} - 1000 = 20000$$

$$\Rightarrow 1000n^2 - 1000n - 20000 = 0 \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (n+4)(n-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 5 & \text{ق ق} \\ n = -4 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

چون علی و همراهانش ۵ نفر هستند، بنابراین تعداد همراهان علی برابر ۴ است.

(مسئله ۱- بیبر و معارله - صفحه‌های ۷ و ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

(پوانبش نیکنام)

$$\frac{3}{(x-1)^2 + 3} + \frac{5}{(2x-2)^2 + 5} = 2$$

هر یک از کسرها کوچک‌تر یا مساوی ۱ و مثبت می‌باشند. پس زمانی تساوی رخ می‌دهد که هر کسر برابر با ۱ باشد و این حالت زمانی میسر است که $x = 1$ باشد.

(مسئله ۱- بیبر و معارله - صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

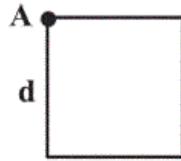
۳

۲ ✓

۱

(تقاسم کتابچی)

ضلع داده شده از رأس A عبور نکرده است، پس طول ضلع مربع برابر با فاصله رأس A از خط مذکور است:



$$3x + 4y - 1 = 0$$

$$d = \frac{|3 + 8 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\text{مساحت مربع} = d^2 = 4$$

(مسابان ۱- پیر و معارله - صفحه‌های ۳۳ و ۳۴)

۴

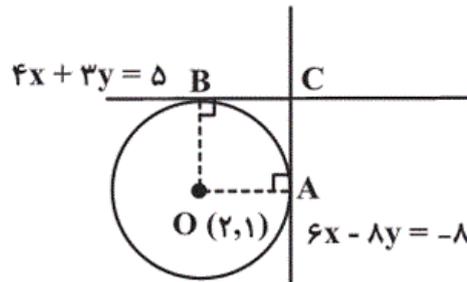
۳✓

۲

۱

(میشم بورامی بویا)

این دو خط بر هم عمودند (حاصل ضرب شیب‌ها ۱- است) پس شکل فرضی آن به صورت زیر خواهد بود.



با توجه به شکل، چهارضلعی حاصل مربع است و ضلع مربع برابر با فاصله مرکز دایره از یکی از خطوط است، بنابراین:

$$\text{ضلع مربع} : r = \frac{|4(2) + 3(1) - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{6}{5}$$

$$\text{مساحت مربع} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}$$

(مسابان ۱- پیر و معارله - صفحه‌های ۳۱، ۳۳ و ۳۴)

۴

۳

۲

۱✓

-۹۰

(فرشاد فرامرزی)

از آنجا که فرجهٔ رادیکال زوج است، عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

$$3 - [x] \geq 0 \rightarrow [x] \leq 3 \rightarrow x < 4 \rightarrow D_f = (-\infty, 4)$$

(مسئله‌بان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸ و ۴۹ تا ۵۳)

۴

۳✓

۲

۱

-۹۵

(علی کردی)

گزینهٔ «۱»: به ازای $x = 0$ دو مقدار ۲ و -۲ برای y به دست می‌آید.

گزینهٔ «۲»: به ازای $x = 0$ دو مقدار صفر و ۱ برای y به دست می‌آید.

گزینهٔ «۳»: یک تابع است، زیرا:

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, y = -1$$

گزینهٔ «۴»: به ازای $x = -1$ دو مقدار ۲ و -۲ برای y به دست می‌آید.

(مسئله‌بان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۸ و ۴۹)

۴

۳✓

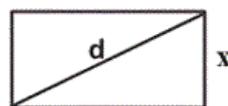
۲

۱

-۹۲

(قاسم کتابچی)

$$2x + 4$$



$$\begin{cases} \text{عرض} = x \\ \text{طول} = 2x + 4 \end{cases}$$

بنابراین طول قطر مستطیل برابر است با:

$$d^2(x) = x^2 + (2x + 4)^2 = 5x^2 + 16x + 16$$

$$d(x) = \sqrt{5x^2 + 16x + 16}$$

(مسئله‌بان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

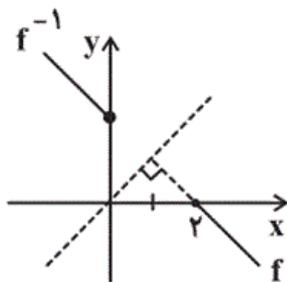
۴

۳

۲

۱✓

نمودار f^{-1} قرینه نمودار f نسبت به $y = x$ است. با استفاده از روش ترسیم داریم:



مشاهده می‌کنیم دامنه f^{-1} بازه $(-\infty, 0]$ است که $x=0$ تنها عدد صحیح غیر منفی در دامنه‌اش می‌باشد.

(مسابان ۱- ترکیبی- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸ و ۵۴ تا ۶۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی کردی)

$$\left\{ \begin{array}{l} D_f : \forall x - a \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{a}{3} \Rightarrow D_f = \left[\frac{a}{3}, +\infty \right) \\ D_g = \mathbb{R} - \left\{ \frac{b}{2} \right\} \end{array} \right.$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} = \left[\frac{1}{3}, +\infty \right) - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

$$= \left[\frac{a}{3}, +\infty \right) - \left\{ \frac{b}{2} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow a=1 \\ \frac{b}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow b=3 \end{array} \right. \Rightarrow a+b=4$$

(مسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۴ تا ۴۸ و ۶۳ تا ۶۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

(میثم بهرامی جویرا)

$$f^{-1}(2x+3) = g(x+1) \Rightarrow f(f^{-1}(2x+3)) = f(g(x+1))$$

$$\Rightarrow 2x+3 = f(g(x+1)) \xrightarrow{x=1} (f \circ g)(2) = 5$$

(مسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲ و ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(امیر هوشنگ فمسه)

ابتدا ضابطه $g(x)$ را بدست می‌آوریم.

$$g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} \Rightarrow y = \frac{x+1}{2} \Rightarrow 2y-1 = x \Rightarrow g(x) = 2x-1$$

$$g(a) = 2a-1 \Rightarrow (f \circ g)(a) = f(2a-1) = g(2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2a-1} = 2 \times 2 - 1 \Rightarrow 2a-1 = 9 \Rightarrow a = 5$$

(مسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲ و ۶۶ تا ۷۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

برای پیدا کردن دامنه $\frac{\sqrt{f}}{g}$ باید شرطهای زیر برقرار باشد:

$$D_{\frac{\sqrt{f}}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g ; f(x) \geq 0, g(x) \neq 0\}$$

$$\left. \begin{array}{l} D_f : [-4, 3] \\ D_g : \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow D_f \cap D_g = [-4, 3]$$

با توجه به این که باید $f(x) \geq 0$ باشد، بنابراین بازه $(1, 2)$ از $[-4, 3]$

حذف می شود. همچنین با توجه به این که باید $g(x) \neq 0$ باشد، اعداد $\frac{1}{2}$ و

۳ نیز حذف خواهند شد. بنابراین دامنه به صورت زیر است:

$$D_{\frac{\sqrt{f}}{g}} = ([-4, 1] - \{\frac{1}{2}\}) \cup [2, 3]$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه های ۴۴ تا ۴۸ و ۶۳ تا ۶۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

برای آن که تابع $f(x) = a^x$ بیانگر یک تابع نمایی باشد، باید داشته باشیم: $a > 0$ و $a \neq 1$. بنابراین:

$$\left\{ \begin{array}{l} -k^2 + 4k + 1 > 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5} \\ -k^2 + 4k + 1 \neq 1 \Rightarrow -k^2 + 4k \neq 0 \Rightarrow k(-k + 4) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq 4 \end{cases} \end{array} \right.$$

تنها اعداد صحیحی که در شرایط بالا صدق می کنند، ۱، ۲ و ۳ هستند.

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۷۲ تا ۷۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{2-x} < \left(\frac{2}{3}\right)^{1+x} \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{4-2x} < \left(\frac{2}{3}\right)^{1+x}$$

$$\rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-4} < \left(\frac{2}{3}\right)^{1+x}$$

از آنجا که $0 < \frac{2}{3} < 1$ ، برای برقراری نامساوی فوق باید داشته باشیم:

$$2x - 4 > 1 + x \rightarrow x > 5$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله شامل اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ نیست.

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

-۱۰۰

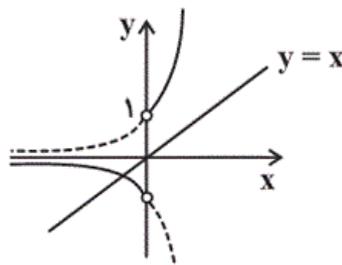
(مسعود درویشی)

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. تابع $f(x) = \frac{x}{|x|} 2^x$ را می‌توان به

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & , x > 0 \\ -2^x & , x < 0 \end{cases}$$

صورت تابع دو ضابطه‌ای نوشت که به

صورت زیر رسم می‌شود.



با توجه به نمودار واضح است که تابع f ، خط $y = x$ را در یک نقطه با طول منفی قطع می‌کند. دقت داشته باشیم که به ازای مقادیر مثبت،

نمودار تابع $y = 2^x$ همواره بالاتر از خط $y = x$ قرار می‌گیرد.

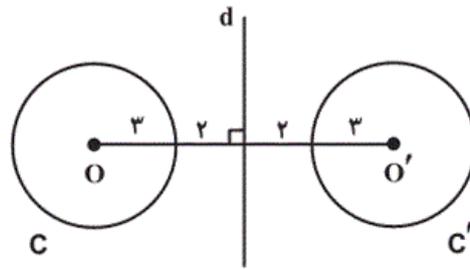
(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



بازتاب تبدیلی طولیا است، پس شعاع دایره C' نیز برابر ۳ است. از طرفی مطابق شکل طول خط‌المركزین دو دایره برابر ۱۰ است، در نتیجه داریم:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2}$$

$$= \sqrt{10^2 - (3 + 3)^2} = \sqrt{64} = 8$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

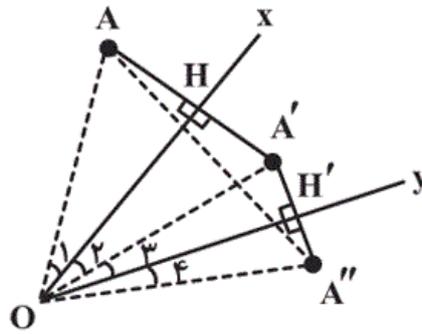
۴

۳ ✓

۲

۱

(مسعود درویشی)



بازتاب تبدیلی طولی است و طول پاره‌خطها و اندازه زاویه‌ها را ثابت نگه می‌دارد، بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} OA = OA' \\ OA' = OA'' \end{array} \right\} \Rightarrow OA = OA''$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \end{array} \right\} \Rightarrow \angle AOA'' = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2 \times 3^\circ = 6^\circ$$

مثلث OAA'' متساوی‌الاضلاع است، زیرا $OA = OA''$

و $\angle AOA'' = 6^\circ$ است. بنابراین داریم:

$$S_{OAA''} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times OA^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها - صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

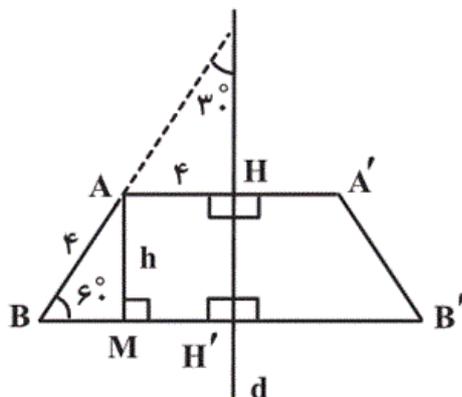
۴

۳

۲ ✓

۱

از آنجا که AA' و BB' هر دو بر محور بازتاب عمودند، با هم موازی هستند. از طرفی بازتاب تبدیلی طولی است، پس $AB = A'B'$ و در نتیجه چهارضلعی $ABB'A'$ دوزنقه متساوی الساقین است. پس داریم:



$$h = AB \sin 6^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$AA' = 2AH = 8$$

$$BM = AB \cos 6^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow BH' = 6 \Rightarrow BB' = 2BH' = 12$$

$$S_{ABB'A'} = \frac{(AA' + BB')h}{2} = \frac{(8 + 12) \times 2\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

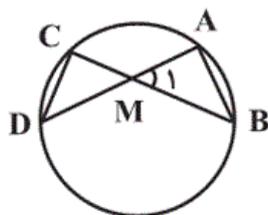
۴

۳

۲ ✓

۱

هر n ضلعی منتظم محاط در دایره، آن را به n کمان مساوی تقسیم می‌کند. بنابراین داریم:



$$\widehat{AB} = \frac{36^\circ}{10} = 3.6^\circ$$

$$\widehat{CD} = \frac{36^\circ}{12} = 3^\circ$$

$$\hat{M}_1 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} = \frac{3.6^\circ + 3^\circ}{2} = 3.3^\circ$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۱۵، ۱۶ و ۲۸)

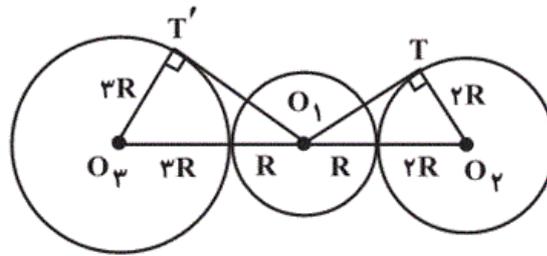
۴

۳

۲ ✓

۱

(امیر حسین ابومحبوب)



$$\Delta O_1 T O_2 : O_1 T^2 = O_1 O_2^2 - O_2 T^2 = 9R^2 - 4R^2 = 5R^2$$

$$\Delta O_1 T' O_3 : O_1 T'^2 = O_1 O_3^2 - O_3 T'^2 = 16R^2 - 9R^2 = 7R^2$$

$$\frac{O_1 T^2}{O_1 T'^2} = \frac{5R^2}{7R^2} = \frac{5}{7}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳

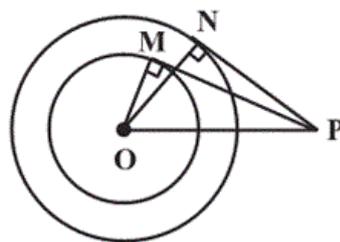
۲

۱ ✓

(مسعود درویشی)

می‌دانیم خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است،

بنابراین داریم:



$$\Delta OMP : OP^2 = OM^2 + PM^2 = 9 + 27 = 36$$

$$\Delta ONP : PN^2 = OP^2 - ON^2 = 36 - 16 = 20$$

$$\Rightarrow PN = 2\sqrt{5}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

اگر شعاع‌های دو دایره، R و R' باشند، آن‌گاه داریم:

$$TT' = \sqrt{(2R)(2R')} \Rightarrow \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{4RR'}$$

$$\Rightarrow d^2 - (R - R')^2 = 4RR' \Rightarrow d^2 = (R - R')^2 + 4RR'$$

$$\Rightarrow d^2 = R^2 + 2RR' + R'^2 = (R + R')^2 \Rightarrow d = R + R'$$

بنابراین دو دایره، مماس خارج هستند و فاصله دورترین نقاط دو دایره

برابر است با مجموع قطرهای آن‌ها

۴

۳✓

۲

۱

(مماس فتران)

-۱۰۱

می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج دایره با هم برابرند. بنابراین $MT = MT'$ ، از طرفی $OT = OT'$ است، پس نقاط M و O روی عمودمنصف پاره‌خط TT' واقع‌اند؛ یعنی OM عمودمنصف پاره‌خط TT' است و در نتیجه بر آن عمود است. بنابراین TH ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه OTM است و داریم:

$$OT^2 = OH \times OM \Rightarrow R^2 = \frac{R}{2} \times 6 \Rightarrow R = 3$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۴

۳

۲

۱✓

در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر است، بنابراین در چهارضلعی ABCD،
 $AB + CD = AD + BC$ است و در نتیجه داریم:

$$ABCD \text{ محیط} = 2(AB + CD) = 2(3x + 7) = 38$$

$$\Rightarrow 3x + 7 = 19 \Rightarrow x = 4$$

می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده از یک نقطهٔ خارج دایره بر آن دایره برابر یکدیگرند، پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} BQ = BM = 3 \\ CQ = CP = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow BC = BQ + CQ = 7$$

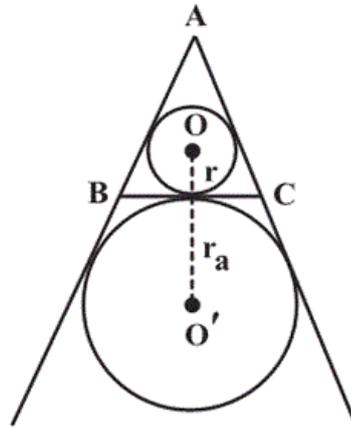
(هندسه ۲- دایره- صفحه ۲۷)

۴

۳

۲ ✓

۱



مطابق شکل، فاصله مرکز دایره محاطی داخلی یک مثلث متساوی الاضلاع از مرکز دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC، برابر $OO' = r + r_a$ است که r شعاع دایره محاطی داخلی و r_a شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC است. اگر P و S به ترتیب مساحت و نصف محیط مثلث متساوی الاضلاع ABC باشند، آن گاه داریم:

$$OO' = r + r_a = \frac{S}{P} + \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - a}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{2\sqrt{3}}{3}a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = 2$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱ ✓

-۱۱۴

(احسان فیراللهی)

در صورتی که ارزش گزاره r درست باشد، ارزش گزاره گزینۀ «۳» به انتفای مقدم همواره درست است و جدول ارزش آن فقط دارای یک حالت است و در نتیجه ارزش نقیض این گزاره نیز همواره نادرست است.
(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات- صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

 ۴

 ۳ ✓

 ۲

 ۱

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: رابطه داده شده، برای هر x برقرار نیست، به عنوان مثال

اگر $x = \frac{\pi}{2}$ باشد، $\tan \frac{\pi}{2}$ تعریف نشده و رابطه بی‌معنی است.

گزینه «۲»: حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی، زوج است، زیرا از هر دو عدد متوالی حتماً یکی زوج است.

گزینه «۳»: رابطه $x^2 + 2 = 0$ به ازای هیچ یک از اعداد حقیقی برقرار نمی‌شود؛ زیرا در صورتی که $x^2 + 2 = 0$ باشد، $x^2 = -2$ است که در مجموعه اعداد حقیقی جواب ندارد.

گزینه «۴»: تمام اعداد اول، اعداد فرد نیستند. عدد ۲، عددی زوج و اول است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$n(A) = \left[\frac{99}{21} \right] - \left[\frac{9}{21} \right] = 4 - 0 = 4$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{99}{42} \right] - \left[\frac{9}{42} \right] = 2 - 0 = 2$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{4}{30} - \frac{2}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

-۱۱۳

(مر تفضی فہیم علوی)

مجموعه B شامل دو عضو ۱ و ۲ است که هر دو به A تعلق دارند، پس $B \subseteq A$. مجموعه C شامل تنها یک عضو به صورت {۱, ۲} است، بنابراین $B \subseteq C$. از طرفی مجموعه A دارای عضوی به صورت {۱, ۲} است، پس $B \in A$.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - مشابه تمرین ۵ صفحه ۲۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۲۰

(نرا صالح پور)

$$\left. \begin{array}{l} P(C) = \frac{3}{8} \Rightarrow P(a) + P(c) + P(f) = \frac{3}{8} \\ P(B) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(a) + P(c) = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow P(f) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P(S) = 1 \Rightarrow \underbrace{P(a) + P(b) + P(c)}_{P(A) = \frac{5}{12}} + P(d) + P(e) + \underbrace{P(f)}_{\frac{1}{8}} = 1$$

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۱۸

(امسان فیراللهی)

اگر $P(a) = x$ باشد، آن گاه داریم:

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1$$

$$\Rightarrow x + 3x + 9x + 27x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{40}$$

$$A \cap B' = A - B = \{b, c\} - \{a, b, d\} = \{c\}$$

$$\frac{P(A \cap B')}{P(A')} = \frac{P(c)}{P(\{a, d\})} = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{1}{40} + \frac{27}{40}} = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{28}{40}} = \frac{9}{28}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

فرض کنید M پیشامد بیماری خونی آقا و W پیشامد بیماری خونی خانم باشد. در این صورت داریم:

$$\left. \begin{array}{l} P(M) = 3P(W) \\ P(M) + P(W) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 3P(W) + P(W) = 1$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(W) = \frac{1}{4} \\ P(M) = \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

$$P(W') = 1 - P(W) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

پیشامدهای مورد نظر عبارتند از:

$$A = \{(ر, ر, ر), (پ, پ, پ)\}$$

$$B = \{(پ, ر, ر), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ), (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (ر, پ, پ)\}$$

$$C = \{(ر, ر, ر), (پ, ر, ر), (ر, ر, پ), (پ, ر, پ), (ر, پ, ر), (پ, پ, ر)\}$$

$$D = \{(ر, ر, پ), (پ, ر, پ), (پ, پ, ر), (پ, پ, پ), (پ, ر, پ), (پ, پ, ر)\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود اشتراک پیشامد A با هر یک از پیشامدهای B ، C و D ناتهی است، پس پیشامد A با هیچ کدام از این سه پیشامد ناسازگار نیست.

(آمار و احتمال - احتمال - مشابه کار در کلاس صفحه ۴۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$A - [B \cup (A - B')] = A - \underbrace{[B \cup (A \cap B)]}_{\text{قانون جذب}} = A - B$$

بنابراین $A - B = A$ است و در نتیجه دو مجموعه A و B جدا از هم هستند؛ یعنی $A \cap B = \emptyset$ و در نتیجه $B - A = B$ است. به دلیل ناتهی بودن A و B ، قطعاً روابط $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ نادرست هستند و رابطه $A \cup B = U$ در حالت کلی برقرار نیست.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

-۱۱۶

(امسان فیراللهی)

اگر $A \times B = B \times A$ باشد، آن‌گاه $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ یا $A = B$ است. چون A و B مجموعه‌هایی ناتهی هستند، بنابراین $A = B$ در این صورت داریم:

$$c - 1 = 2 \Rightarrow c = 3$$

دو حالت زیر برای دو عضو دیگر این دو مجموعه امکان‌پذیر است:

حالت اول:

$$\begin{cases} a + 3b = 5 \\ 2a - 3b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow abc = 4$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} a + 3b = -2 \\ 2a - 3b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow abc = -3$$

بنابراین بیشترین مقدار abc ، برابر ۴ است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - مشابه تمرین ۵ صفحه ۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱ ✓