

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

جبر و احتمال ، استدلال ریاضی - ۳ سوال

۱۳۸- به تصادف، m عدد از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ انتخاب شده است. اگر همواره تفاضل حداقل دو تا از اعداد انتخاب شده، برابر ۳ باشد، حداقل مقدار m کدام است؟

- ۱۱ (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴)

۱۳۵- از مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی، حداقل چند عدد انتخاب شود تا مطمئن باشیم حاصل جمع دست کم دو تای آنها فرد است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۱۳۶- کدام یک از اعداد زیر می‌تواند مثال نقضی برای حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت.» باشد؟

- ۱۴ (۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۳۹ (۴)

جبر و احتمال ، مجموعه ها - ۷ سوال

۱۳۷- اگر $A \subseteq B \subseteq C$ و تعداد اعضای این مجموعه‌ها برابر ۷، ۱۳ و ۲۲ باشد، تعداد اعضای مجموعه $A \cup (B \Delta C)$ کدام است؟

- ۱۴ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴)

۱۳۹- اگر A و B دو مجموعه باشند، آنگاه عبارت $(A \cup B) \Delta (A - B)$ همواره برابر کدام است؟

- A (۱) B (۲) $A \cap B$ (۳) $A \Delta B$ (۴)

۱۴۰- اگر A ، B و C سه مجموعه دلخواه باشند، آنگاه حاصل $(A \cup B \cup C) \cap (A' \cup B \cup C) \cap (B' \cup C)$ همواره برابر کدام است؟

- C (۱) B (۲) C' (۳) B' (۴)

۱۳۱- از رابطه $A \cup B = B \cap C$ برای سه مجموعه A ، B و C ، همواره چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

- $B \subseteq A \subseteq C$ (۱) $C \subseteq A \subseteq B$ (۲) $A \subseteq B \subseteq C$ (۳) $C \subseteq B \subseteq A$ (۴)

۱۳۲- برای هر عدد طبیعی n ، مجموعه $A_n = \{k + (-1)^k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq n\}$ تعریف شده است. مجموعه $\bigcap_{n=2}^5 A_n$ برابر

کدام است؟

- (۱) A_2 (۲) A_3 (۳) A_4 (۴) A_5

۱۳۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر با سایرین مساوی نیست؟

- (۱) $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| > 1\}$ (۲) $B = \{m \in \mathbb{Z} \mid \frac{2-m}{1+m} \leq 0\}$
 (۳) $C = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \neq m\}$ (۴) $D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 > 2m\}$

۱۳۴- برای سه مجموعه A ، B و C ، رابطه $(A - B) \subseteq (B \cap C)$ برقرار است. کدام رابطه الزاماً درست است؟

- (۱) $B = \emptyset$ (۲) $A \subseteq C$ (۳) $A \subseteq B$ (۴) $B \cap C = \emptyset$

ریاضی پایه، تابع - ۶ سوال -

۹۴- نمودار تابع $f(x) = 1 - |2x|$ را دو واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا تابع g به دست آید. فاصله

نقطه تلاقی این دو تابع از محور x ها کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۱

۹۵- اگر f تابعی خطی، $f(g(x)) = 6x^2 - 2x + 3$ و $g(f(x)) = 12x^2 - 14x + 6$ باشد، $f(2)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

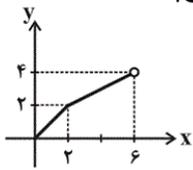
۹۶- اگر $f = \{(1, -2), (-1, 2), (3, 4), (0, 3)\}$ و $g = \{(0, -1), (1, 1), (-1, 2), (2, 0)\}$ باشد، حاصل $\frac{f^{-1}(2g)}{g+1}$ کدام است؟

- (۱) $\{(0, 0), (-1, 1)\}$ (۲) $\{(0, 0), (1, -1)\}$ (۳) $\{(1, -\frac{1}{2}), (-1, 1)\}$ (۴) $\{(1, \frac{-1}{2}), (-1, -1)\}$

۹۷- تابع $f(x) = (x+2)|x-1|$ در کدام بازه نزولی است؟

- (۱) $[-1, 1]$ (۲) $[1, 2]$ (۳) $[-2, \frac{1}{2}]$ (۴) $[-\frac{1}{2}, 1]$

۹۸- نمودار شکل زیر، تابع متناوب f را در یک دوره تناوب آن نشان می‌دهد. حاصل $f(۳۴) - f(۱۳)$ کدام است؟



(۱) صفر

(۲) ۲

(۳) -۲

(۴) ۴

۹۲- اگر $f = \{(۲, a^۲), (۲, ۹), (a, b-۱), (۳, ۵)\}$ یک تابع باشد، نمودار $\{(a, b)\}$ هایی که می‌توان در f قرار داد. $g = \{(a, b)\}$ به

کدام صورت است؟

(۲) یک نقطه

(۱) دو نقطه

(۴) دو خط

(۳) یک خط و یک نقطه خارج آن

ریاضی پایه ، پیوستگی - ۳ سوال

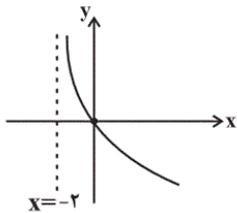
۹۹- نقطه $(۱, ۳)$ روی نمودار تابع نمایی $f(x) = a^x + b$ و نقطه $(۵, ۲)$ روی نمودار تابع $f^{-۱}$ قرار دارد. $f(-۱)$ کدام است؟

(۴) $\frac{۳}{۲}$

(۳) ۱

(۲) صفر

(۱) $\frac{۱}{۲}$



۱۰۰- شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = \log\left(\frac{1}{ax+b}\right)$ را نمایش می‌دهد. مقدار a کدام است؟

(۲) -۱

(۱) ۱

(۴) $-\frac{۱}{۲}$

(۳) $\frac{۱}{۲}$

۱۰۱- دو تابع $f(x) = \log_۲(x+۳)$ و $g(x) = \log_۲(۳x+۱)+۱$ در دو نقطه A و B متقاطع‌اند. شیب خط گذرنده از نقاط A و B کدام

است؟

(۴) ۴

(۳) ۲

(۲) $\frac{۱}{۲}$

(۱) $\frac{۱}{۴}$

ریاضی پایه ، الگو و دنباله - ۳ سوال

۸۱- اگر $A = \sqrt[۳]{\frac{۸}{\sqrt[۳]{۱۶}}}$ باشد، حاصل $A^{-۳}$ کدام است؟

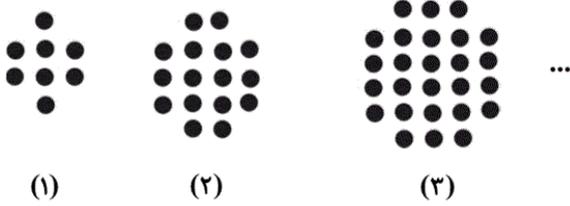
(۴) ۲

(۳) $\frac{۱}{۲}$

(۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

(۱) $\sqrt{۲}$

۸۳- مطابق الگوی زیر، اگر تعداد دایره‌های شکل k م برابر با ۱۵۲ باشد، تعداد دایره‌های شکل $(k+2)$ م کدام است؟



- (۱) ۲۱۰
- (۲) ۲۰۲
- (۳) ۲۰۴
- (۴) ۲۰۶

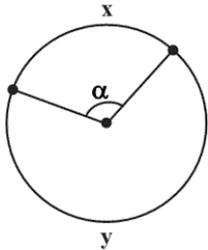
۸۵- اگر جملات اول، سوم و شصت و سوم یک دنباله حسابی غیر ثابت به ترتیب برابر با جملات اول، دوم و چهارم یک دنباله هندسی

باشند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) -۱۲
- (۲) ۳۰
- (۳) ۵
- (۴) ۶

ریاضی پایه ، مثلثات - ۹ سوال

۱۰۲- در دایره زیر، نسبت $\frac{y}{x}$ برابر ۲ است. $\cos(\alpha)$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $-\frac{1}{2}$
- (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

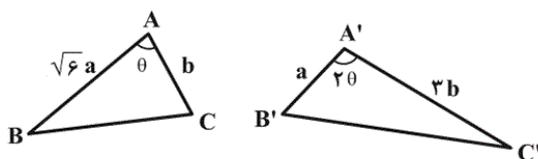
۱۰۳- اگر دو عبارت $a \sin(\frac{17\pi}{6}) + 4\sqrt{3} \tan(\frac{8\pi}{3})$ و $\sqrt{3} \cos(\frac{-11\pi}{6}) + 7 \cot(\frac{15\pi}{4})$ برابر باشند، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱۱
- (۲) ۱۲
- (۳) ۱۳
- (۴) ۱۴

۱۰۴- تابع $f(x) = \frac{x}{[\sin x]}$ به ازای چند عدد صحیح در بازه $[0, 2\pi]$ تعریف شده است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۰۵- اگر $\tan \theta = \sqrt{7}$ باشد، نسبت مساحت مثلث $A'B'C'$ به مساحت مثلث ABC کدام است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۲) $\sqrt{3}$
- (۳) ۳
- (۴) ۲

۱۰۶- اگر $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$ باشد، حاصل $\tan\alpha + \tan\beta$ کدام است؟ (همه عبارات تعریف شده هستند).

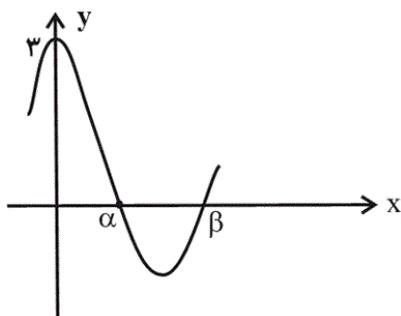
(۲) $\cos\alpha$

(۱) $\frac{1}{\sin\beta}$

(۴) $\frac{1}{\cos\alpha}$

(۳) $\sin\beta$

۱۰۷- شکل زیر بخشی از نمودار تابع $f(x) = a + 2\cos x$ است. با توجه به شکل مقدار β کدام است؟



(۱) $\frac{2\pi}{3}$

(۲) $\frac{3\pi}{4}$

(۳) $\frac{4\pi}{3}$

(۴) $\frac{5\pi}{3}$

۱۰۸- تعداد جواب‌های معادله $(\sin x + \cos x)^2 = \cos 4x$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۷

(۱) ۵

۱۰۹- مجموع جواب‌های معادله $\cos 5x + 2\cos 3x + 2\cos x = 0$ در بازه $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ کدام است؟

(۲) $\frac{9\pi}{10}$

(۱) $\frac{7\pi}{10}$

(۴) $\frac{11\pi}{10}$

(۳) $\frac{3\pi}{5}$

۱۱۰- حاصل $\tan^2\left(2\sin^{-1}\frac{1}{3}\right)$ کدام است؟

(۲) $\frac{17}{49}$

(۱) $\frac{32}{49}$

(۴) $\frac{49}{32}$

(۳) $\frac{49}{17}$

۸۲- نمودار $y = |2x + 1| - 3$ در کدام بازه پائین محور x ها قرار می‌گیرد؟

- (۱) $(-2, 1)$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(-3, 0)$ (۴) $(1, 3)$

۸۶- اگر مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $5x^4 - 3x^2 + ax - 1$ بر $x + 1$ برابر 7 باشد، a کدام است؟

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7

۸۷- اگر α یک جواب معادله $x^2 + 4x - 3 = 0$ باشد، حاصل $P = (\alpha + 1)(\alpha + 4)(\alpha - 3)$ کدام است؟

- (۱) -18 (۲) -15 (۳) -16 (۴) -12

۸۸- اگر α و β جواب‌های معادله $x(2x + 1) = 2$ و $\frac{1}{\alpha^2}$ و $\frac{1}{\beta^2}$ جواب‌های معادله $4x^2 + kx + 4 = 0$ باشند، k کدام است؟

- (۱) 7 (۲) 5 (۳) -9 (۴) $-\frac{1}{4}$

۸۹- یک سهمی محور x ها را در نقاط به طول‌های 1 و 5 قطع می‌کند و رأس آن روی $y = |x - 1| - 4$ است. اگر خط $y = k$ ($k \in \mathbb{Z}, k < 0$)، سهمی را در دو نقطه قطع کند، فاصله این دو نقطه کدام است؟

- (۱) 8 (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) 4 (۴) $\sqrt{2}$

۹۰- خودرویی مسافت 120 کیلومتری بین دو شهر را به صورت رفت و برگشت طی کرده است، به طوری که سرعت متوسط برگشت 20 کیلومتر بر ساعت از سرعت متوسط رفت بیش‌تر و زمان برگشت 18 دقیقه از زمان رفت کم‌تر بوده است. سرعت متوسط رفت بر حسب کیلومتر بر ساعت کدام است؟

- (۱) 72 (۲) 80 (۳) 60 (۴) 85

۹۱- فاصله نقاط برخورد نمودارهای دو تابع $y = |x - 1|$ و $y = \sqrt{x + 1}$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{8}$ (۴) $\sqrt{10}$

۸۴- در یک دنباله هندسی، جمله یازدهم 60 واحد از جمله اول بیش‌تر و مجموع 10 جمله اول 20 است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

۹۳- برد تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + 1 - x$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, \frac{1}{4}]$ (۲) $[0, +\infty)$ (۳) $(-\infty, \frac{1}{2}]$ (۴) $(-\infty, 1]$

آمار و مدل سازی - ۱۰ سوال

۱۱۱- در داده‌های آماری جدول زیر، درصد فراوانی نسبی داده‌هایی که در فاصله (۱۷، ۱۳] قرار دارند، برابر ۲۰ است. تعداد داده‌هایی که در دسته به مرکز ۱۹ قرار دارند، کدام است؟

مرکز دسته	۷	۱۱	۱۵	۱۹	۲۳
فراوانی تجمعی	۵	۹	x	۲۱	۲۵

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۱۲- در داده‌های آماری ۱۵، ۱۵، ۱۴، ۱۳، ۱۲، ۶، ۸، ۳، ۵، ۲۳، ۹، میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم، کدام است؟

- (۱) ۱۰/۵ (۲) ۹ (۳) ۱۱/۲ (۴) ۹/۴

۱۱۳- جدول زیر مربوط به فراوانی تجمعی داده‌ی دسته‌بندی شده است. در نمودار دایره‌ای مربوط به این داده‌ها، زاویه مرکزی دسته به مرکز ۲۰ کدام است؟

مرکز دسته	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
فراوانی تجمعی	۱	۳	۶	۱۰	۱۶

- (۱) ۲۲۵° (۲) ۱۸۰° (۳) ۱۳۵° (۴) ۹۰°

۱۱۴- اعداد مقابل اختلاف از میانگین ۵ داده آماری را نشان می‌دهند. واریانس این داده‌ها کدام است؟

$$x_i - \bar{x} : 3, -4, a, 5, -2$$

- (۱) ۱۲/۶ (۲) ۱۱/۶ (۳) ۱۲/۴ (۴) ۱۱/۴

۱۱۵- داده‌های نمودار ساقه و برگ زیر، اعداد طبیعی دو رقمی هستند. اگر این داده‌ها را با نمودار جعبه‌ای نشان دهیم، میانگین داده‌های داخل جعبه، کدام است؟

ساقه	برگ				
	۳	۶	۹	۵	۵
	۱	۱	۲	۵	۸

- (۱) ۲۳/۵ (۲) ۲۴/۲۵ (۳) ۱۸/۵ (۴) ۲۲

۱۱۶- میانگین تعدادی داده آماری مثبت غیریکسان برابر با ۵ است. اگر هر یک از این داده‌ها را در ۳ ضرب کرده و سپس اعداد حاصل را با ۵ جمع کنیم تا داده‌های جدید به دست آید، آنگاه نسبت ضریب تغییرات داده‌های جدید به ضریب تغییرات داده‌های اولیه کدام است؟

- (۱) ۰/۷۵ (۲) ۰/۸ (۳) ۰/۸۵ (۴) ۰/۹

۱۱۷- جدول فراوانی تجمعی داده آماری به صورت زیر است. اگر فراوانی نسبی دسته وسط ۲۰ درصد باشد، مساحت زیر نمودار چند بر فراوانی این داده‌ها کدام است؟

مرکز دسته	۲	۴	۶	۸	۱۰
فراوانی تجمعی	۳	۵	۸	۱۴	a

- (۱) ۸۰ (۲) ۴۰ (۳) ۳۰ (۴) ۱۵

۱۱۸- انحراف معیار ۸ داده آماری برابر ۰/۹ است. دو داده که هر دو با میانگین این ۸ داده برابرند به آنها افزوده می‌شود. واریانس ۱۰ داده حاصل کدام است؟

- (۱) ۰/۷۲ (۲) ۰/۶۴۸ (۳) ۰/۷۶ (۴) ۰/۶۱۲

۱۱۹- اگر به داده‌های جدول زیر ۱۲ داده بیافزاییم، در نمودار دایره‌ای داده‌های جدید، زاویه متناظر با دسته ۷، 32° افزایش می‌یابد. چند داده به دسته

مرکز دسته	۱	۳	۵	۷
فراوانی	۴	۶	۳	۵

آخر افزوده شده است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۱۲۰- مجموع ۱۰ داده آماری برابر با ۲۰ و مجموع مربعات آن‌ها برابر با ۲۰۰ است. به هر کدام از این داده‌ها ۲ واحد می‌افزاییم، ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

- ۰/۵ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

هندسه ۱، هندسه و استدلال - ۱ سوال

۱۲۲- در مثلث ABC ، $\hat{A} = \hat{C} = 80^\circ$ و نقطه D داخل مثلث و روی عمودمنصف ضلع AB ، طوری واقع شده است که $\hat{ADB} = 110^\circ$.

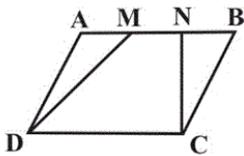
زاویه حاده بین نیمساز زاویه داخلی C با پاره خط AD ، چند درجه است؟

- ۵۰ (۱) ۵۵ (۲) ۶۰ (۳) ۶۵ (۴)

هندسه ۱، مساحت و قضیه ی فیثاغورس - ۴ سوال

۱۲۳- در شکل زیر، چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع و دو نقطه M و N روی ضلع AB هستند. اگر نسبت مساحت ذوزنقه $MNCD$ به

مساحت متوازی‌الاضلاع برابر $\frac{2}{3}$ باشد. نسبت اندازه MN به اندازه AB کدام است؟



- $\frac{2}{3}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲)

- $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

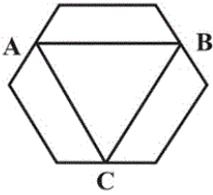
۱۲۴- با رسم ارتفاع وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، دو مثلث قائم‌الزاویه ایجاد می‌شود که مساحت یکی از آن‌ها، دو برابر دیگری

است. طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه اولیه، چند برابر طول کوتاه‌ترین ضلع آن است؟

- ۲ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{3}$ (۴)

۱۲۵- مطابق شکل زیر، رئوس مثلث ABC بر وسط اضلاع یک شش ضلعی منتظم قرار دارند. نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت

شش ضلعی کدام است؟



$\frac{1}{2}$ (۲)

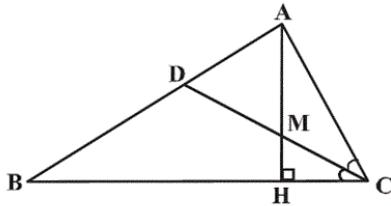
$\frac{3}{8}$ (۱)

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳)

۱۲۶- مطابق شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع AH و نیمساز CD در نقطه M متقاطع‌اند. اگر مثلث AMD

متساوی‌الاضلاع و $CD = 8$ باشد، اندازه AH کدام است؟



$6/2$ (۲)

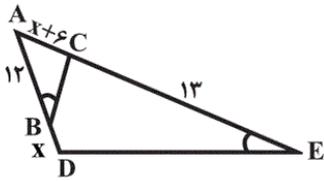
۶ (۱)

$5/5$ (۴)

۵ (۳)

هندسه ۱، تشابه - ۲ سوال -

۱۲۶- اگر در شکل روبه‌رو $\hat{A}BC = \hat{E}$ ، آنگاه مساحت مثلث ABC چه کسری از مساحت مثلث ADE است؟



$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{16}{49}$ (۱)

$\frac{9}{25}$ (۴)

$\frac{9}{64}$ (۳)

۱۲۷- در دوزنقه قائم‌الزاویه‌ای، طول قاعده بزرگ و ساق بزرگ هر دو برابر ۳ واحد و طول ساق کوچک، $\sqrt{5}$ واحد است. مساحت این

دوزنقه، چند برابر مساحت مثلثی است که از برخورد امتداد ساق‌های این دوزنقه، در خارج آن ایجاد می‌شود؟

۸ (۴)

۶ (۳)

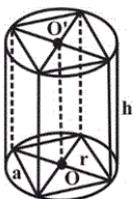
۱۲ (۲)

۹ (۱)

هندسه ۱، شکل‌های فضایی - ۳ سوال -

۱۲۸- در شکل زیر مکعب مستطیل مربع‌القاعده به ضلع a در استوانه قائمی به شعاع قاعده r محاط است. حجم استوانه چند برابر

حجم مکعب مستطیل است؟



$\frac{\sqrt{2}}{2} \pi$ (۲)

$\frac{\pi}{3}$ (۱)

$\sqrt{2} \pi$ (۴)

$\frac{\pi}{2}$ (۳)

۱۲۹- قاعده‌های یک منشور قائم، مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی به ضلع a هستند. اگر مساحت جانبی این منشور با مجموع

مساحت‌های دو قاعده برابر باشد، حجم این منشور چه کسری از a^3 است؟

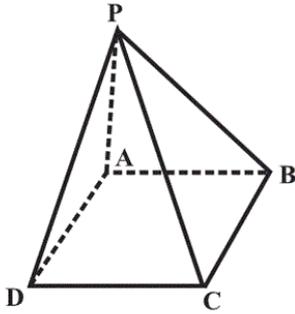
$$\frac{1}{3} (۴)$$

$$\frac{1}{4} (۳)$$

$$\frac{1}{6} (۲)$$

$$\frac{1}{8} (۱)$$

۱۳۰- مطابق شکل، P رأس هرمی است که قاعده آن مربعی به طول ضلع ۴ است. اگر یال PA بر صفحه قاعده عمود بوده و طول



بزرگ‌ترین یال این هرم برابر ۹ باشد، آنگاه حجم هرم کدام است؟

$$۳۲ (۲)$$

$$\frac{۱۳۰}{۳} (۱)$$

$$\frac{۱۱۲}{۳} (۴)$$

$$۳۹ (۳)$$

۱۳۸ -

(مهرداد ملوندی)

بر اساس شرط مسئله، این مجموعه را به ۳ زیرمجموعه افراز می‌کنیم. دقت کنید در هر کدام از این مجموعه‌ها، تفاضل هر دو عدد متوالی برابر ۳ است.

$$\{1, 4, 7, 10, 13\}$$

$$\{2, 5, 8, 11, 14\}$$

$$\{3, 6, 9, 12, 15\}$$

اگر ۹ عددی که با خط تیره مشخص شده‌اند از این ۳ زیرمجموعه انتخاب شوند، آنگاه شرط مسئله برقرار نخواهد بود. چنانچه حداقل ۱۰ عدد به تصادف از مجموعه مذکور انتخاب کنیم آنگاه حداقل ۴ تا از آنها به یکی از این زیرمجموعه‌ها تعلق داشته و با توجه به اصل لانه کبوتری، تفاضل دو تا از آنها برابر ۳ خواهد بود.

(ببرواهمال - استدلال ریاضی؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴

۳

۲

۱

۱۳۵ -

(مهمد علی نادرپور)

مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ را به دو مجموعه $\{2, 4, 6, 8\}$ و $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ افراز می‌کنیم. برای آن که حاصل جمع دو عدد صحیح، فرد باشد باید یکی از دو عدد زوج و دیگری فرد باشد. پس اگر ۶ عضو انتخاب شود (یعنی تمام اعداد فرد با یک عدد زوج) حاصل جمع دست کم دو عضو فرد می‌شود.

(ببرواهمال - استدلال ریاضی؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴

۳

۲

۱

$$۱۴ = ۲ + ۳ + ۴ + ۵$$

$$۲۴ = ۷ + ۸ + ۹$$

$$۳۹ = ۱۲ + ۱۳ + ۱۴$$

در حالت کلی اعداد به فرم ۲^n ($n \in \mathbb{N}$) از جمله ۳۲ را نمی‌توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت.

(پیرواحتمال - استدلال ریاضی: مشابه مثال ۶ صفحه ۲۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

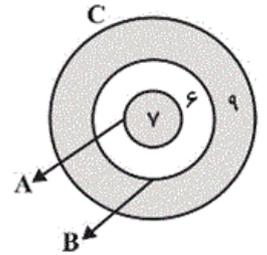
(مهرداد ملوندی)

با توجه به فرض، نمودار ون روبه‌رو را رسم می‌کنیم:

$$B \subseteq C \Rightarrow \begin{cases} B \cup C = C \\ B \cap C = B \end{cases}$$

$$\Rightarrow B \Delta C = (B \cup C) - (B \cap C) = C - B$$

$$\Rightarrow A \cup (B \Delta C) = A \cup (C - B) \quad (*)$$



مطابق نمودار و رابطه (*), ناحیه هاشورخورده موردنظر است که ۱۶ عضو دارد.

(پیرواحتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۴)

۴

۳ ✓

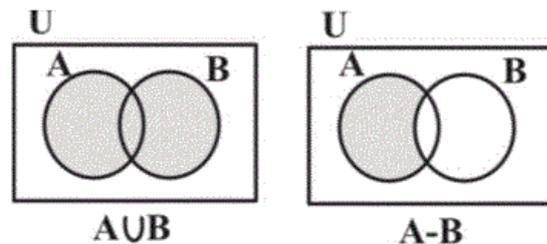
۲

۱

(مهمربنا دلورنژاد)

با توجه به تعریف $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ و نمودارهای ون رسم

شده، حاصل عبارت مذکور برابر است با:



$$(A \cup B) \Delta (A - B) =$$

$$[(A \cup B) - (A - B)] \cup [(A - B) - (A \cup B)] = B \cup \emptyset = B$$

(پیرواحتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مهرداد ملوندی)

$$\begin{aligned}
 & [A \cup (B \cup C)] \cap [A' \cup (B \cup C)] \cap (B' \cup C) \\
 &= [(\underbrace{A \cap A'}_{\emptyset}) \cup (B \cup C)] \cap (B' \cup C) \\
 &= (B \cup C) \cap (B' \cup C) = (\underbrace{B \cap B'}_{\emptyset}) \cup C = C
 \end{aligned}$$

(جبر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کاظم باقرزاده)

$$\begin{aligned}
 A \cup B = B \cap C &\Rightarrow \begin{cases} A \cup B \subseteq B \xrightarrow{A \subseteq A \cup B} A \subseteq B \\ A \cup B \subseteq C \xrightarrow{B \subseteq A \cup B} B \subseteq C \end{cases} \\
 &\Rightarrow A \subseteq B \subseteq C
 \end{aligned}$$

(جبر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(مهد علی نادرپور)

$$\begin{aligned}
 \bigcap_{n=2}^5 A_n &= A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \\
 &= \{0, 3\} \cap \{0, 2, 3\} \cap \{0, 2, 3, 5\} \cap \{0, 2, 3, 4, 5\} = \{0, 3\} = A_2
 \end{aligned}$$

(جبر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\begin{aligned} \text{گزینه «۱» : } |m| > 1 &\Rightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \Rightarrow A = Z - \{-1, 0, 1\} \\ \text{گزینه «۲» : } \frac{2-m}{1+m} \leq 0 &\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} m \geq 2 \\ m < -1 \end{cases} \Rightarrow B = Z - \{-1, 0, 1\} \\ \text{گزینه «۳» : } m^3 \neq m &\Rightarrow m^3 - m \neq 0 \Rightarrow m(m-1)(m+1) \neq 0 \\ &\Rightarrow C = Z - \{-1, 0, 1\} \\ \text{گزینه «۴» : } m^2 > 2m &\Rightarrow m^2 - 2m > 0 \Rightarrow m(m-2) > 0 \\ &\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow D = Z - \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

(جبر و احتمال - مجموعه‌ها: مشابه تمرین ۱۰ صفحه ۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهرداد ملوندی)

$$\begin{aligned} \begin{cases} (A-B) \subseteq (B \cap C) \\ (B \cap C) \subseteq B \end{cases} &\Rightarrow (A-B) \subseteq B \quad (*) \\ \text{از طرفی : } (A-B) \cap B = \emptyset &\xrightarrow{(*)} A-B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B \end{aligned}$$

(جبر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مسئله مصطفی ابراهیمی)

$$g(x) = 1 - |2(x+2)| - 1 = -|2x+4|$$

برای پیدا کردن نقاط برخورد توابع f و g ، آنها را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم:

$$1 - |2x| = -|2x+4|$$

$$x \geq 0: 1 - 2x = -(2x+4) \Rightarrow 1 - 2x = -2x - 4 \Rightarrow 1 = -4 \quad \text{غ ق ق}$$

$$-2 \leq x < 0: 1 - (-2x) = -(2x+4) \Rightarrow 1 + 2x = -2x - 4$$

$$\Rightarrow 4x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{4} \quad \text{ق ق}$$

$$x < -2: 1 - (-2x) = 2x+4 \Rightarrow 1+2x = 2x+4 \Rightarrow 1=4 \quad \text{غ ق ق}$$

طول نقطه برخورد $x = -\frac{5}{4}$ است. فاصله نقطه برخورد از محور x ها در

واقع همان قدر مطلق عرض آن نقطه است.

$$f\left(-\frac{5}{4}\right) = 1 - \left|2\left(-\frac{5}{4}\right)\right| = 1 - \left|-\frac{5}{2}\right| = -\frac{3}{2}$$

بنابراین فاصله نقطه برخورد از محور x ها برابر $\frac{3}{2}$ است.

(مسئله بان - تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(f(x)) &= \frac{6}{a} f^2(x) + \frac{3-b}{a} - \frac{2}{a} f(x) \\ &= \frac{6}{a} (ax+b)^2 - \frac{2}{a} (ax+b) + \frac{3-b}{a} = 12x^2 - 14x + 6 \\ \Rightarrow \begin{cases} 6ax^2 = 12x^2 \Rightarrow a = 2 \\ 12bx - 2x = -14x \Rightarrow b = -1 \end{cases} \\ \Rightarrow f(x) &= 2x - 1 \Rightarrow f(2) = 3 \end{aligned}$$

(مسئله بان - تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

برای پیدا کردن $2g$ باید عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم:

$$2g = \{(0, -2), (1, 2), (-1, 4), (2, 0)\}$$

$$g+1 = \{(0, 0), (1, 2), (-1, 3), (2, 1)\}$$

$$f^{-1} = \{(-2, 1), (2, -1), (4, 3), (3, 0)\}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(2g) = \{(0, 1), (1, -1), (-1, 3)\}$$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(2g)}{g+1} = \left\{ \underbrace{(0, \frac{1}{-1})}, (1, \frac{-1}{2}), (-1, 1) \right\} = \left\{ (1, \frac{-1}{2}), (-1, 1) \right\}$$

تعریف نشده

(مسابان - تابع: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۳ و ۱۹ تا ۹۲)

۴

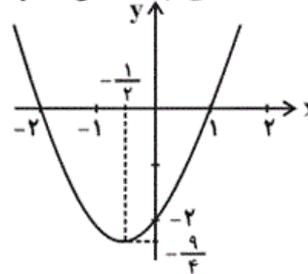
۳ ✓

۲

۱

$$f(x) = (x+2)|x-1| = \begin{cases} (x+2)(x-1) & ; x \geq 1 \\ -(x+2)(x-1) & ; x < 1 \end{cases}$$

نمودار تابع $g(x) = (x+2)(x-1)$ به شکل زیر است:

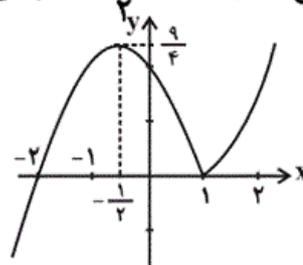


توجه کنید که رأس سهمی در نقطه $(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$ قرار دارد. حال اگر بخواهیم

نمودار تابع f را رسم کنیم، برای $x \geq 1$ باید $g(x)$ را رسم کرده و برای

$x < 1$ تابع $-g$ را رسم کنیم، بنابراین تابع f به صورت زیر خواهد شد:

با توجه به شکل، نمودار تابع در بازه $[-\frac{1}{2}, 1]$ نزولی است.



(مسابان - تابع: صفحه‌های ۷۶ تا ۱۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

تابع f را در یک دوره تناوب آن می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}x + 1 & ; 2 \leq x < 6 \end{cases}$$

از طرفی برای تابع متناوب f با دوره تناوب T داریم:

$$f(x + kT) = f(x) \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(34) = f(4 + 5 \times 6) = f(4) = 3 \\ f(13) = f(1 + 2 \times 6) = f(1) = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f(34) - f(13) = 3 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow f(34) - f(13) = 3 - 1 = 2$$

(مسئله - تابع: صفحه های ۹۶ تا ۹۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$a = 3 : f = \{(2, 9), (2, 9), (3, b-1), (3, 5)\}$$

$$\Rightarrow (3, b-1) = (3, 5) \Rightarrow b-1 = 5 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow (a, b) = (3, 6)$$

$$a = -3 : f = \{(2, 9), (2, 9), (-3, b-1), (3, 5)\}$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

نقطه $(1, 3)$ روی نمودار f و نقطه $(5, 2)$ روی نمودار f^{-1} است. از گزاره دوم نتیجه می شود که نقطه $(2, 5)$ نیز روی نمودار f قرار دارد.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = a + b = 3 \\ f(2) = a^2 + b = 5 \end{cases}$$

$$a^2 + b - a - b = 5 - 3$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1) = 0 \begin{cases} \text{غ ق } a = -1 \\ a = 2 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2^x + 1 \Rightarrow f(-1) = 2^{-1} + 1 = \frac{3}{2}$$

(ریاضیات ۲ - توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه های ۱۶ تا ۹۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = \log\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \log(ax+b)^{-1} = -\log(ax+b)$$

تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد.

$$y(0) = 0 \Rightarrow -\log(b) = 0 \Rightarrow b = 1$$

به علاوه دامنه تابع $x > -2$ است یعنی به ازای $x = -2$ عبارت داخل لگاریتم باید برابر صفر باشد.

$$y = -\log(ax+1) \xrightarrow{x=-2} -2a+1=0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

(ریاضیات ۲ - توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۱۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

دو ضابطه را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$f(x) = g(x)$$

به جای ۱، \log_4^4 و به جای $\log_4^4(x+3)$ ، $\log_4^4(x+3)^2$ قرار می‌دهیم. داریم:

$$\log_4^4(x+3)^2 = \log_4^4(3x+1) + \log_4^4$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 12x+4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

با جای گذاری x های بدست آمده در یکی از ضابطه‌ها، مختصات نقاط A و B به صورت $A(1,2)$ و $B(5,3)$ به دست می‌آید.

$$\Rightarrow B \text{ و } A : m_{AB} = \frac{3-2}{5-1} = \frac{1}{4}$$

(ریاضیات ۲ - توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$A = \left(\frac{2^3}{\sqrt{2^4}}\right)^{10} = (2^{\frac{3-4}{2}})^{10} = 2^{\frac{5}{2} \times 10} = 2^6$$

$$\Rightarrow A^{-3} = 2^6 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ریاضیات ۲ - الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

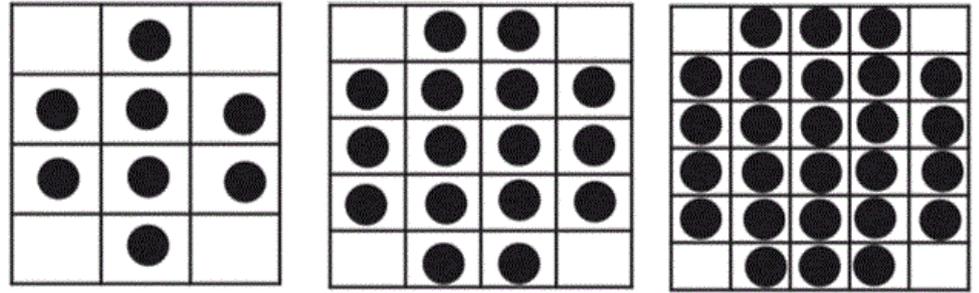
۴

۳

۲ ✓

۱

شکل‌ها را می‌توانیم به صورت زیر ببینیم:



پس جمله n ام این الگو دارای $(n+2)(n+3) - 4$ دایره است.

$$a_n = (n+2)(n+3) - 4 \Rightarrow a_n = n^2 + 5n + 2$$

$$a_k = 152 \Rightarrow k^2 + 5k + 2 = 152 \Rightarrow k^2 + 5k - 150 = 0$$

$$\Rightarrow (k+15)(k-10) = 0 \begin{cases} \text{غ ق ک } k = -15 \\ \text{ق ک } k = 10 \end{cases}$$

پس تعداد دایره‌های شکل $(k+2)$ ام برابر است با:

$$a_{k+2} = a_{12} = 12^2 + 5(12) + 2 = 206$$

(ریاضیات ۲- الگو و دنباله: صفحه‌های ۲ تا ۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\Rightarrow \frac{aq(q-1)(q+1)}{60} = \frac{a(q-1)}{2} \xrightarrow{q \neq 1} q^2 + q = 30$$

$$\Rightarrow q^2 + q - 30 = 0 \Rightarrow (q+6)(q-5) = 0 \Rightarrow q = 5 \text{ یا } q = -6$$

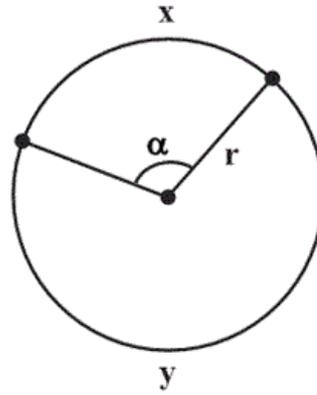
(ریاضیات ۲- الگو و دنباله: صفحه‌های ۶ تا ۱۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



با توجه به دایره بالا داریم:

$$x = r\alpha; y = r(2\pi - \alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{r(2\pi - \alpha)}{r\alpha} = \frac{2\pi - \alpha}{\alpha} = 2$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

(ریاضیات ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی شهرابی)

$$a \sin\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) + 4\sqrt{3} \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{3} \cos\left(-2\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 7 \cot\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow a \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 4\sqrt{3} \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 7 \cot\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right) + 4\sqrt{3}(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 7(-1)$$

$$\xrightarrow{\times 2} a - 24 = 3 - 14 \Rightarrow a = 13$$

(ریاضیات ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تابع در مجموعه $[\pi, 2\pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ تعریف نشده است. زیرا $0 \leq \sin x < 1$ می‌باشد و مخرج صفر می‌شود و در بازه $(\pi, 2\pi)$ تعریف شده است، چون $0 < \sin x < 1$ است و مخرج برابر -1 خواهد بود. بنابراین دامنه تابع در

فاصله مورد نظر برابر است با: $(\pi, 2\pi) \cup \{\frac{\pi}{2}\}$

در این فاصله اعداد صحیح $x = 4$ ، $x = 5$ و $x = 6$ قرار دارند.

(ریاضیات ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(\sqrt{6}a)(b)\sin\theta$$

$$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2}(a)(3b)\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}(a)(3b)\sin 2\theta}{\frac{1}{2}(\sqrt{6}a)(b)\sin\theta} = \frac{3ab(2\sin\theta\cos\theta)}{\sqrt{6}ab\sin\theta}$$

$$= \sqrt{6}\cos\theta$$

از طرفی طبق رابطه $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ ، $\cos\theta$ به سادگی به دست می‌آید:

$$\tan\theta = \sqrt{7} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

θ باید در ربع اول قرار گیرد، در غیر این صورت 2θ نمی‌تواند زاویه یک مثلث باشد.

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ریاضیات ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سعید علم‌پور)

$$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

(مسئله‌ها - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

 α و β جواب‌های معادله $1 + 2 \cos x = 0$ هستند.

$$1 + 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

در مقادیر مثبت x ، اولین جایی که کسینوس $-\frac{1}{2}$ می‌شود در $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ودومین جا هم در $\beta = \frac{4\pi}{3}$ است.پس β که دومین ریشه است، برابر $\frac{4\pi}{3}$ می‌شود.

(مسئله‌ها - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

(مسین اسفینی)

$$(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x \Rightarrow 1 + \sin 2x = 1 - 2 \sin^2 2x$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 2x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x (2 \sin 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi \\ \left| \begin{array}{l} 2 \sin 2x + 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \quad (*) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$(*) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{11\pi}{12} \\ \left| \begin{array}{l} 2x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{-\pi}{6}\right) \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{7\pi}{12} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$k \in \mathbb{Z}$ است.

پس معادله داده شده، پنج جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد.

(مسئله‌ها - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

در بازه $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ، مقدار $0 < \sin x < 1$ است؛ بنابراین با ضرب طرفین معادله در $2 \sin x$ خواهیم داشت:

$$2 \sin x \cdot \cos 5x + 4 \sin x \cos 3x + 4 \sin x \cos x = 0$$

و با تبدیل ضرب به جمع داریم:

$$2 \times \frac{1}{2} [\sin 6x - \sin 4x] + 4 \times \frac{1}{2} [\sin 4x - \sin 2x] + 2 \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow \sin 6x + \sin 4x = 0 \Rightarrow \sin 6x = \sin(-4x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 6x = 2k\pi - 4x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} \xrightarrow{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)} x = \frac{\pi}{5}, x = \frac{2\pi}{5} \\ \sin 6x = 2k\pi + \pi + 4x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)} \text{جواب ندارد} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{3\pi}{5}$$

(مسئله - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

فرض می‌کنیم $\sin^{-1} \frac{1}{3} = \theta$ در نتیجه:

$$\sin \theta = \frac{1}{3} \xrightarrow{0 < \theta < \frac{\pi}{2}} \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan^2 \left(2 \sin^{-1} \frac{1}{3} \right) = \tan^2 (2\theta) = \left(\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \right)^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{7} \right)^2 = \frac{32}{49}$$

(مسئله - مثلثات: صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

باید مقادیر تابع منفی باشد:

$$\Rightarrow |2x+1| - 3 < 0 \Rightarrow |2x+1| < 3 \Rightarrow -3 < 2x+1 < 3$$

$$\Rightarrow -4 < 2x < 2 \Rightarrow -2 < x < 1$$

(ریاضیات ۲- توابع قاص - نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۳ تا ۷۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی یوسفی)

$$5x^4 - 3x^2 + ax - 1 = (x+1)Q(x) + R$$

چون مجموع ضرایب $Q(x)$ برابر ۷ است پس $Q(1) = 7$ ، در نتیجه:

$$x=1 \Rightarrow 5 - 3 + a - 1 = 2 \times 7 + R \Rightarrow a = 13 + R \quad (1)$$

$$x=-1 \Rightarrow 5 - 3 - a - 1 = 0 + R \Rightarrow 1 - a = R \quad (2)$$

$$a = 7$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

(حسابان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۶ تا ۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

(فریدون ساعتی)

 α جواب معادله است، یعنی در معادله صدق می‌کند.

$$\Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha + 4) = 3 \Rightarrow \alpha + 4 = \frac{3}{\alpha}$$

حال با جای‌گذاری در عبارت P داریم:

$$P = \frac{3}{\alpha}(\alpha + 1)(\alpha - 3) = \frac{3}{\alpha}(\alpha^2 - 2\alpha - 3)$$

از طرفی $\alpha^2 - 3$ نیز برابر -4α است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$P = \frac{3}{\alpha}(-4\alpha - 2\alpha) = \left(\frac{3}{\alpha}\right)(-6\alpha) = -18$$

(حسابان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

α و β جواب‌های معادله $2x^2 + x - 2 = 0$ هستند. لذا:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$$

از طرف دیگر $\frac{1}{\beta^2}$ و $\frac{1}{\alpha^2}$ جواب‌های معادله $4x^2 + kx + 4 = 0$ می‌باشند.

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = -\frac{k}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2(-1)}{(-1)^2} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} = -\frac{k}{4} \Rightarrow k = -9$$

(حسابان - تناسبان جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۴

۳✓

۲

۱

$$\Rightarrow \text{معادله سهمی: } y = \frac{1}{2}(x-1)(x-5)$$

چون عرض رأس سهمی $y = -2$ است، $k = -1$ خواهد بود که آن را با سهمی تلاقی می‌دهیم.

$$-1 = \frac{1}{2}(x-1)(x-5) \Rightarrow -2 = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0$$

قدرمطلق تفاضل جواب‌های این معادله، جواب مسأله خواهد بود.

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{36 - 28}}{1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(حسابان - تناسبان جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۴

۳

۲✓

۱

(سعید علم‌پور)

سرعت متوسط رفت را v در نظر می‌گیریم، به تبع آن سرعت متوسط برگشت $v + 20$ است. همچنین زمان رفت و زمان برگشت بر حسب ساعت به ترتیب برابر $\frac{120}{v}$ و $\frac{120}{v+20}$ است. زمان برگشت از زمان رفت ۱۸ دقیقه کمتر بوده است، یعنی:

$$\begin{aligned} \frac{120}{v} - \frac{120}{v+20} &= \frac{18}{60} = \frac{3}{10} \\ \Rightarrow 120 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+20} \right) &= \frac{3}{10} \\ \Rightarrow 40 \left(\frac{v+20-v}{v^2+20v} \right) &= \frac{1}{10} \\ \Rightarrow v^2 + 20v - 8000 &= (v+100)(v-80) = 0 \\ \xrightarrow{v>0} v &= 80 \text{ km/h} \end{aligned}$$

(حسابان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۴

۳

۲✓

۱

(مهمربمطفی ابراهیمی)

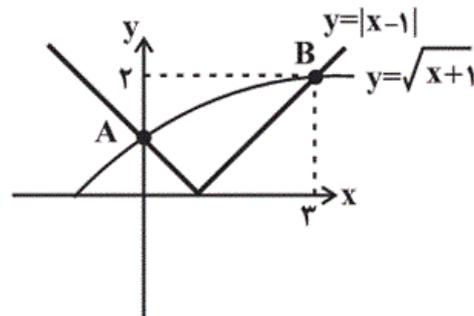
معادله $|x-1| = \sqrt{x+1}$ را حل می‌کنیم. با به توان ۲ رساندن طرفین معادله داریم:

$$x^2 - 2x + 1 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = x(x-3) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

نقاط برخورد این دو نمودار $(0,1)$ و $(3,2)$ هستند. فاصله این نقاط برابر است با:

$$\sqrt{(3-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

نمودارهای این دو تابع در شکل زیر رسم شده است:



(حسابان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات: فعالیت صفحه ۴۱)

۴✓

۳

۲

۱

(علی شهبازی)

$$a_{11} - a_1 = 60$$

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{\overbrace{a_1}^{a_{11}} q^{10} - a_1}{q - 1} = \frac{a_{11} - a_1}{q - 1}$$

$$20 = \frac{60}{q - 1} \Rightarrow q = 4$$

(مسابقان - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲ تا ۶)

۴

۳

۲

۱

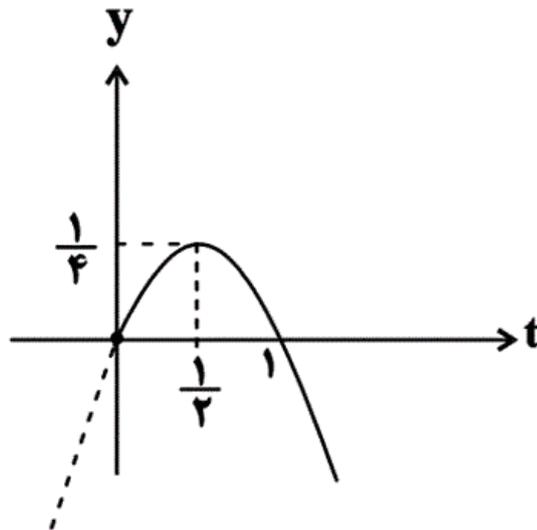
(عادل حسینی)

با تغییر متغیر $t = \sqrt{x-1}$ ضابطه تابع به صورت زیر در می‌آید:

$$y = t - t^2$$

برد سهمی فوق با دامنه $[0, +\infty)$ ، برابر برد تابع f است. این سهمی در

شکل زیر رسم شده است:



برد سهمی فوق و در نتیجه برد f برابر $(-\infty, \frac{1}{4}]$ است.

(مسابقان - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۴

۳

۲

۱

مرکز دسته $(13, 17)$ ، $\frac{13+17}{2} = 15$ است، پس ۲۰ درصد داده‌ها در

دسته به مرکز ۱۵ قرار دارند. از طرفی، فراوانی تجمعی دسته آخر، برابر

تعداد کل داده‌هاست، پس: $N = 25$. برای به دست آوردن فراوانی مطلق

دسته به مرکز ۱۵ (دسته سوم)، باید فراوانی تجمعی دسته قبل را از فراوانی

تجمعی آن کم کنیم:

$$f_3 = x - 9 \text{ : فراوانی مطلق دسته سوم}$$

$$\Rightarrow \text{فراوانی نسبی دسته سوم} = \frac{x-9}{25} = \frac{20}{100} \Rightarrow x-9 = 5$$

$$\Rightarrow x = 14$$

$$f_4 = 21 - x = 21 - 14 = 7 \text{ : فراوانی مطلق دسته چهارم}$$

(آمار و مدل‌سازی - دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم، چون تعداد کل داده‌ها برابر یازده است، پس میانه پنجم داده اول برابر چارک اول و میانه پنجم داده آخر برابر چارک سوم است.

۳, ۵, ۶, ۸, ۹, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۵, ۲۳

چارک سوم چارک اول

پس داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم، عبارتند از:

۸, ۹, ۱۲, ۱۳, ۱۴

$$\Rightarrow \text{میانگین} = \frac{۸+۹+۱۲+۱۳+۱۴}{۵} = \frac{۵۶}{۵} = ۱۱/۲$$

(آمار و مدل‌سازی - شاقص‌های مرکزی: صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۵)

۴

۳

۲

۱

$$\Rightarrow \text{زاویه مرکزی دسته چهارم} : \alpha_4 = \frac{f_4}{n} \times 360^\circ = \frac{4}{16} \times 360^\circ = 90^\circ$$

(آمار و مدل‌سازی - نمودارها و تحلیل داده‌ها: صفحه‌های ۹۲ تا ۹۵)

۴

۳

۲

۱

مجموع اختلاف از میانگین‌ها همواره صفر است، پس:

$$۳ - ۴ + a + ۵ - ۲ = ۰ \Rightarrow a = -۲$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{۹ + ۱۶ + ۴ + ۲۵ + ۴}{۵}$$

$$= \frac{۵۸}{۵} = ۱۱\frac{۳}{۵}$$

(آمار و مدل‌سازی - شافص‌های پراکنندگی: صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۱۳, ۱۶, ۱۹, ۲۰, ۲۱, ۲۲, ۲۵, ۲۵, ۲۸, ۳۱, ۳۵, ۳۶

چون تعداد داده‌ها ۱۲ است، پس میانه (چارک دوم)، برابر میانگین داده‌های

$$\text{ششم و هفتم است: } Q_2 = \frac{22 + 25}{2} = 23.5$$

چارک اول، برابر میانه شش داده اول است، پس برابر است با میانگین

$$\text{داده‌های سوم و چهارم: } Q_1 = \frac{19 + 20}{2} = 19.5$$

چارک سوم، برابر میانه شش داده دوم است، پس برابر است با میانگین

$$\text{داده‌های نهم و دهم: } Q_3 = \frac{28 + 31}{2} = 29.5$$

داده‌هایی که از چارک اول بزرگ‌تر و از چارک سوم کوچک‌تر هستند، داخل

جعبه قرار می‌گیرند و میانگین آن‌ها برابر است با:

$$\frac{20 + 21 + 22 + 25 + 25 + 28}{6} = \frac{141}{6} = 23.5$$

(آمار و مدل‌سازی - شافص‌های مرکزی: صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

از آن‌جا که $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ ، پس:

$$\frac{CV_{3x+5}}{CV_x} = \frac{\frac{3\sigma_x}{3\bar{x}+5}}{\frac{\sigma_x}{\bar{x}}} = \frac{3\bar{x}}{3\bar{x}+5} = \frac{3 \times 5}{3 \times 5 + 5} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0.75$$

(آمار و مدل‌سازی - شافص‌های پراکنندگی: صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۵۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تعداد کل داده‌ها برابر فراوانی تجمعی دسته آخر یعنی برابر a است.

فراوانی مطلق هر دسته، برابر تفاضل فراوانی تجمعی دسته ماقبل از فراوانی

$$\frac{8-5}{a} \times 100 = 20 \Rightarrow a = 15$$

تجمعی آن دسته است، پس:

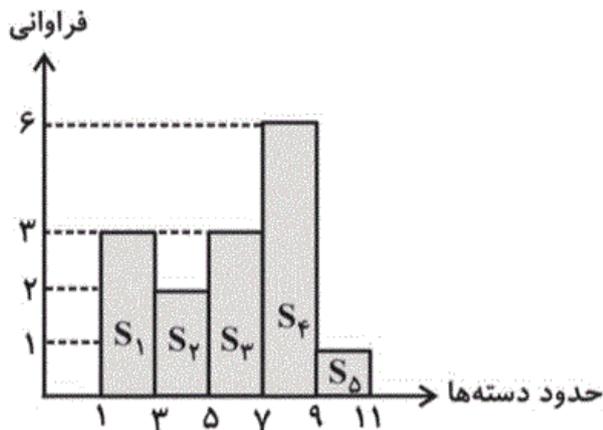
طول دسته‌ها برابر تفاضل بین مرکزهای دو دسته متوالی است،

$$C = 4 - 2 = 2.$$

با توضیحات بالا، به جدول و نمودار مستطیلی زیر می‌رسیم، از آنجا که مساحت

زیرنمودار مستطیلی و زیرنمودار چندبر فراوانی با هم برابر است، داریم:

دسته‌ها	۱-۳	۳-۵	۵-۷	۷-۹	۹-۱۱
فراوانی مطلق	۳	۲	۳	۶	۱



$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = (3 + 2 + 3 + 6 + 1) \times 2 = 30$$

تذکر: اگر N تعداد کل داده‌ها و C طول دسته‌ها باشد، آنگاه

مساحت زیر نمودار مستطیلی برابر $N \times C$ است. پس بدون رسم

جدول و نمودار مستطیلی داریم:

$$S = N \times C = 15 \times 2 = 30$$

(آمار و مدل‌سازی - نمودارها و تحلیل داده‌ها: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)

۴

۳✓

۲

۱

با افزودن دو داده که هر دو برابر میانگین هستند، میانگین ۱۰ داده حاصل،
با میانگین ۸ داده قبلی برابر خواهد بود. با توجه به این
که $X_9 = \bar{X}$ و $X_{10} = \bar{X}$ ، داریم:

$$\begin{aligned} n = 10 \Rightarrow \sigma^2 &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{10} \left(\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - \bar{x})^2 + (\bar{x} - \bar{x})^2 \right) \\ &= \frac{1}{10} (6/48 + 0 + 0) = 0/648 \end{aligned}$$

(آمار و مدل سازی - شافص های پراکنده: صفحه های ۱۴۸ تا ۱۵۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مهرداد ملونری)

۱۱۹

$32^\circ + \text{زاویه قدیم} = \text{زاویه جدید}$

اگر تعداد کل داده ها برابر N باشد، زاویه متناظر با دسته i ام در نمودار

دایره ای برابر است با $\alpha_i = \frac{f_i}{N} \times 360^\circ$. اگر تعداد داده هایی که به دسته

آخر اضافه شده است را x در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \frac{5+x}{18+12} \times 360^\circ &= \left(\frac{5}{18} \times 360^\circ \right) + 32^\circ \\ \Rightarrow 12(5+x) &= 132 \Rightarrow 5+x=11 \Rightarrow x=6 \end{aligned}$$

(آمار و مدل سازی - نمودارها و تحلیلها: صفحه های ۹۲ تا ۹۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\bar{x} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{1}{n} \sum x_i^2 \right) - \bar{x}^2 \Rightarrow \sigma_x^2 = \frac{1}{10} \times 2000 - 2^2 = 16$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{16} = 4$$

اگر به تمامی داده‌ها ۲ واحد اضافه کنیم، به میانگین داده‌ها ۲ واحد

افزوده می‌شود ولی انحراف معیار داده‌ها تغییر نمی‌کند.

$$\Rightarrow CV_{x+2} = \frac{\sigma_{x+2}}{x+2} = \frac{\sigma_x}{\bar{x}+2} = \frac{4}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$$

(آمار و مدل‌سازی - شافص‌های پراکنندگی: صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۸)

 ۴

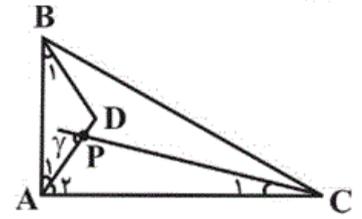
 ۳

 ۲

 ۱

(مسئله فابیلو)

$$\hat{A} = 2\hat{C} = 80^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 80^\circ \\ \hat{C} = 40^\circ \end{cases}$$



$$\Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 60^\circ$$

چون نقطه D روی عمود منصف AB واقع است، پس $AD = DB$ ، یعنی

مثلث ABD متساوی الساقین است و $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ، بنابراین:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{180^\circ - \hat{ADB}}{2} = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = 35^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{A} - \hat{A}_1 = 80^\circ - 35^\circ = 45^\circ$$

$$\hat{C}_1 = \frac{\hat{C}}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$

$$\hat{ACP} \text{ زاویه خارجی } \gamma = \hat{A}_2 + \hat{C}_1 = 45^\circ + 20^\circ = 65^\circ$$

(هندسه ۱- هندسه و استرلاال: صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$S = S_{ABCD} = AB \times h$$

$$S' = S_{MNC D} = \frac{1}{2}(DC + MN) \times h = \frac{1}{2}(AB + MN) \times h$$

$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{AB + MN}{2AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AB + MN}{AB} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}$$

(هندسه ۱- مساحت و قفسه فیثاغورس، صفحه‌های ۴۳ و ۵۰)

 ۴

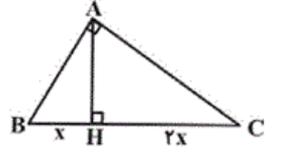
 ۳

 ۲

 ۱

(مسئله فایلو)

$$\frac{S_{ACH}}{S_{ABH}} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} AH \cdot CH}{\frac{1}{2} AH \cdot BH} = 2 \Rightarrow \frac{CH}{BH} = 2$$



پس با فرض $BH = x$ ، داریم: $CH = 2x$ ، همچنین:

$$\left\{ \begin{array}{l} AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow AB^2 = x(3x) = 3x^2 \Rightarrow AB = \sqrt{3}x \\ BC = 3x \end{array} \right.$$

$$\frac{\text{بزرگ‌ترین ضلع مثلث}}{\text{کوچک‌ترین ضلع مثلث}} = \frac{BC}{AB} = \frac{3x}{\sqrt{3}x} = \sqrt{3}$$

(هندسه ۱- مساحت و قضیه فیثاغورس؛ صفحه ۶۵)

 ۴

 ۳

 ۲

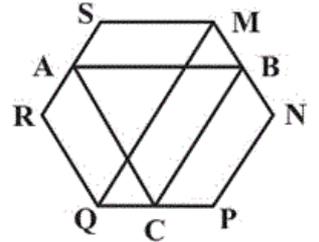
 ۱

نکته: با استفاده از قضیه تالس و عکس آن می‌توان اثبات کرد، خطی که اوساط اضلاع یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، موازی قاعده‌ها بوده و اندازه‌اش برابر میانگین اندازه دو قاعده است.

بنابر خواص شش ضلعی منتظم، چهارضلعی $MNPQ$ ذوزنقه است. و اگر طول ضلع شش ضلعی را a فرض کنیم، داریم:

$$BC = \frac{MQ + NP}{2} = \frac{2a + a}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9a^2 \sqrt{3}}{16}$$



$$S_1 = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} \text{ : مساحت شش ضلعی منتظم}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_1} = \frac{\frac{9a^2 \sqrt{3}}{16}}{\frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{8}$$

(هنر سه ۱- مساحت و قضیه فیثاغورس: صفحه‌های ۶۲ و ۶۳)

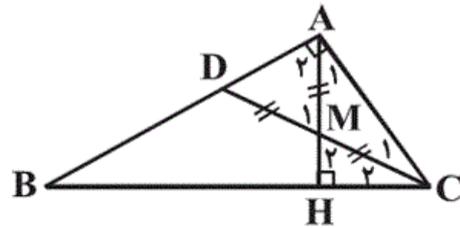
(تشابه: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)

۴

۳

۲

۱ ✓



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = 90^\circ - \hat{A}_2 = 30^\circ \\ \hat{M}_2 = \hat{M}_1 = 60^\circ \Rightarrow \hat{C}_2 = 90^\circ - \hat{M}_2 = 30^\circ \\ \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \hat{A}_1 = 30^\circ \Rightarrow AM = CM \quad (1) \end{array} \right.$$

$\Delta AMD \Rightarrow AM = MD$ (2) متساوی الاضلاع است.

$$(1), (2) \Rightarrow CM = MD = \frac{CD}{2} = 4$$

$$\Delta MHC: \hat{C}_2 = 30^\circ \Rightarrow MH = \frac{1}{2} MC = 2$$

$$AH = AM + MH = 4 + 2 = 6$$

(هندسه ۱- مساحت و قضیه فیثاغورس: صفحه ۶۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

(رضا بفسنده)

مثلث‌های ABC و AED ، به حالت تساوی زاویه‌ها با هم متشابه‌اند و لذا داریم:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{12}{x+19} = \frac{x+6}{12+x} \Rightarrow 12(12+x) = (x+19)(x+6)$$

$$\Rightarrow x^2 + 13x - 30 = 0 \Rightarrow (x+15)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -15 \text{ (غق)} \end{cases}$$

نسبت تشابه دو مثلث ABC و ADE برابر است با:

$$k = \frac{AB}{AE} = \frac{12}{2+19} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AED}} = k^2 = \frac{16}{49}$$

داریم:

(هندسه ۱- تشابه: صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

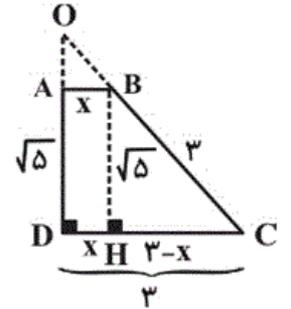
مطابق شکل، طول قاعده کوچک این دوزنقه را x در نظر می گیریم، داریم:

$$\begin{aligned} \Delta BCH \xrightarrow{\hat{H}=90^\circ} CH &= \sqrt{BC^2 - BH^2} \\ &= \sqrt{9 - 5} = 2 \Rightarrow 3 - x = 2 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

از طرفی دو مثلث OAB و ODC با هم متشابه اند، پس نسبت مساحت های

آنها برابر مجذور نسبت تشابه است:

$$\begin{aligned} \frac{S_{OAB}}{S_{ODC}} &= \left(\frac{AB}{DC}\right)^2 \xrightarrow{\frac{AB}{DC} = \frac{1}{3}} \frac{S_{OAB}}{S_{ODC}} = \frac{1}{9} \\ \Rightarrow \frac{S_{OAB}}{S_{ODC} - S_{OAB}} &= \frac{1}{9-1} \\ \Rightarrow \frac{S_{OAB}}{S_{ABCD}} &= \frac{1}{8} \Rightarrow S_{ABCD} = 8S_{OAB} \end{aligned}$$



(هندسه ۱- تشابه: صفحه های ۹۷ تا ۱۰۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\frac{V_{\text{(استوانه)}}}{V_{\text{(مکعب مستطیل)}}} = \frac{\pi r^2 h}{a^2 h} = \frac{\pi \left(\frac{1}{2}a\right)^2 h}{a^2 h} = \frac{\pi}{2}$$

(هندسه ۱- شکل های فضایی: صفحه های ۱۱۷ تا ۱۲۸)

 ۴

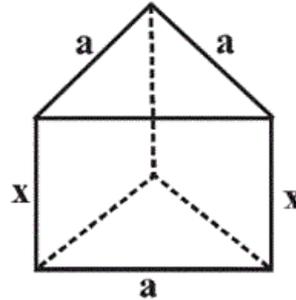
 ۳

 ۲

 ۱

مطابق شکل، مساحت هر یک از قاعده‌ها برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ و مساحت جانبی

منشور برابر $3ax$ است.



طبق فرض سؤال داریم:

$$3ax = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{6}a \quad (1)$$

$$V = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)x \quad \text{حجم منشور}$$

پس:

$$\xrightarrow{(1)} V = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right) = \frac{3}{24}a^3 = \frac{a^3}{8}$$

(هندسه ۱- شکل‌های فضایی: صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۸)

 ۴

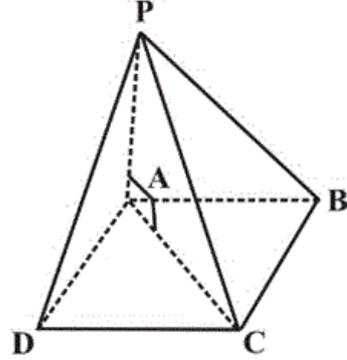
 ۳

 ۲

 ۱

$$AC = 4\sqrt{2} \text{ : قطر مربع } \Rightarrow \text{ ضلع مربع } = 4$$

با توجه به شکل، یال PC در بین یال‌های این هرم، بزرگ‌ترین طول را دارد، پس طبق فرض $PC = 9$.



در مثلث قائم‌الزاویه PAC طبق قضیه فیثاغورس، داریم:

$$PA = \sqrt{PC^2 - AC^2} = \sqrt{81 - 32} = 7$$

$$\text{حجم هرم } V = \frac{1}{3} PA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \times 7 \times 4^2 = \frac{112}{3}$$

(هندسه ۱- شکل‌های فضایی: صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۳۵)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱