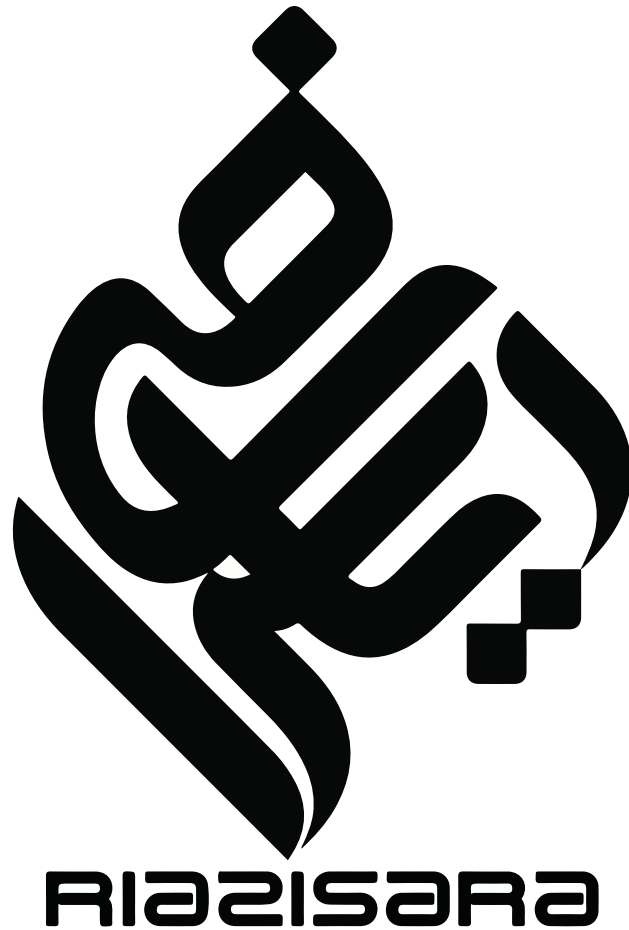




سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



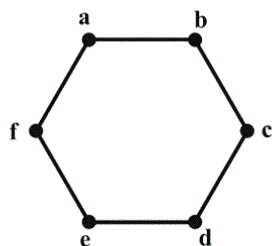
ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



ریاضیات گسسته دوازدهم، گراف و مدل سازی

۱۱۱- کدام یک از مجموعه‌های زیر، یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G در شکل مقابل نیست؟



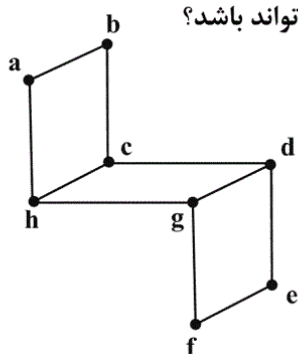
(۱) $A = \{a, d\}$

(۲) $B = \{b, f, d\}$

(۳) $C = \{b, c, f\}$

(۴) $D = \{d, e, f\}$

۱۱۲- مجموعه $\{a, c, x, y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای گراف مقابل است. x و y کدام گزینه می‌تواند باشد؟



(۱) f, e

(۲) g, e

(۳) g, f

(۴) d, f

۱۱۳- حداقل مقدار عدد احاطه‌گری یک گراف ۳-منتظم از مرتبه p و اندازه ۱۵ کدام است؟

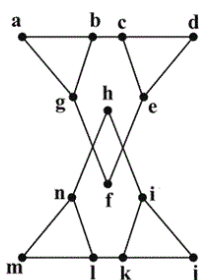
(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۵

(۳) ۴

۱۱۴- کدام یک از مجموعه‌های زیر، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف G در شکل زیر محسوب می‌شود؟



(۱) $\{b, e, l, k\}$

(۲) $\{a, d, f, n, k\}$

(۳) $\{e, g, n, i\}$

(۴) $\{c, g, h, m, j\}$

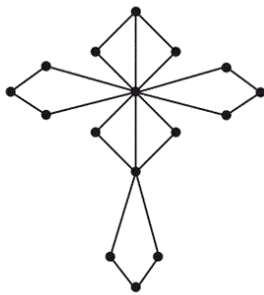
۱۱۵- عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)



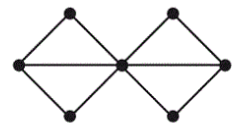
۱۱۶- کدام یک از گراف‌های زیر، مجموعه احاطه‌گر مینیمم یکتا دارد؟

P_5 (۱)

C_5 (۲)



(۴)



(۳)

۱۱۷- یک گراف ۴-منتظم از مرتبه ۶، چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال دارد؟

۶ (۱)

۹ (۲)

۱۰ (۳)

۱۵ (۴)

۱۱۸- گراف P_6 چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال دارد؟

۷ (۱)

۸ (۲)

۶ (۳)

۹ (۴)

۱۱۹- در گراف G ، $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ ، $N_G(a) = N_G(b) = N_G(c)$ و $N_G(d) = N_G(e) = N_G(f)$ است. اگر G یک گراف تهی

نباشد، چند γ -مجموعه دارد؟

۳ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

۹ (۴)

۱۲۰- فرض کنید a و b دو رأس از یک گراف مرتبه ۹ باشند. اگر $\deg(a) = ۴$ و $N_G[b]$ دارای ۴ عضو باشد، آنگاه حداقل و حداکثر

چند رأس این گراف توسط رؤس a و b احاطه نمی‌شوند؟

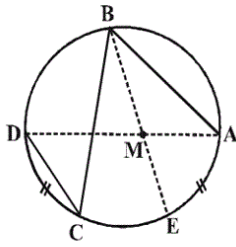
۴-۰ (۱)

۳-۰ (۲)

۳-۱ (۳)

۴-۱ (۴)

۱۲۶- در شکل زیر، اگر $AB = ۶$ ، $BC = ۸$ ، $CD = ۳$ و $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ باشد، اندازه AM کدام است؟



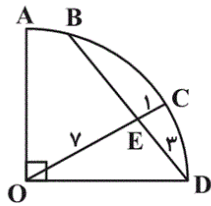
(۱) ۲

(۲) ۲/۲۵

(۳) ۲/۵

(۴) ۲/۷۵

۱۲۷- در شکل زیر، ربع دایره‌ای به مرکز O رسم شده است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، طول BE چند واحد است؟



(۲) ۴

(۱) $\frac{7}{3}$

(۴) ۵

(۳) $\frac{14}{3}$

۱۲۸- دو دایره به شعاع‌های ۴ و $\frac{10}{5}$ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایره کوچک‌تر، مماسی بر دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این

قطعه مماس کدام است؟

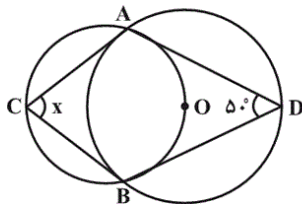
(۴) ۱۰

(۳) $4\sqrt{6}$

(۲) $4\sqrt{5}$

(۱) ۸

۱۲۹- در شکل زیر، دایره‌ای به مرکز O دایره دیگر را در نقاط A و B قطع کرده است. زاویه x چند درجه است؟



(۱) ۵۰°

(۲) ۶۰°

(۳) ۷۰°

(۴) ۸۰°

۱۳۰- دوزنقه متساوی‌الساقینی بر یک دایره به شعاع $\sqrt{3}$ محیط است. اگر نسبت قاعده‌های این دوزنقه $\frac{1}{3}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

(۴) $۸\sqrt{3}$

(۳) ۱۲

(۲) ۸

(۱) $4\sqrt{3}$

۱۳۱- در نمودار میله‌ای گروه‌های خونی O، AB، B و A، ارتفاع هر میله به ترتیب نصف میله بعدی است. اگر تعداد افراد مورد بررسی

۷۵ نفر باشند، در نمودار دایره‌ای آن‌ها، اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه کدام است؟

- | | |
|----------|----------|
| 108° (2) | 73° (1) |
| 168° (4) | 144° (3) |

۱۳۲- به داده‌های ۱، ۱، ۳، ۴، ۴، ۶، ۸، ۸، ۸، ۱۲، ۱۳، ۱۶، کدام داده‌ها اضافه شوند تا میانگین داده‌ها، دو واحد افزوده شود؟

- | | |
|------------|------------|
| 19, 23 (2) | 14, 31 (1) |
| 18, 22 (4) | 13, 28 (3) |

۱۳۳- اختلاف بین چارک سوم و مد در داده‌های ۲۰، ۱۴، ۱۱، ۵، ۷، ۲۰، ۱۷، ۶، ۲۰، ۵، ۷، ۱۹، ۱۲، ۱۲، ۷، ۲۰ کدام است؟

- | | |
|--------|--------|
| 10 (2) | 11 (1) |
| 2 (4) | 3 (3) |

۱۳۴- اگر واریانس داده‌های $4z-2$ ، $5y+1$ ، 6 و $3x-9$ برابر صفر باشد، میانۀ داده‌های y^2 ، $3-2z$ ، $x+1$ و $x-y$ کدام است؟

- $$\begin{array}{ll} \mathfrak{F}(\mathfrak{Y}) & \mathfrak{Y}/\Delta(1) \\ \mathfrak{Y}(\mathfrak{F}) & \mathfrak{Y}/\Delta(\mathfrak{Y}) \end{array}$$

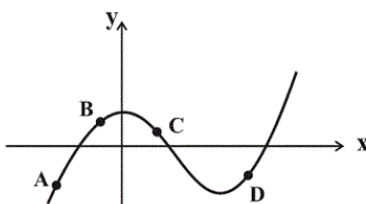
۱۳۵- فرض کنید سن افرادی که در یک روز سوار اتوبوس شده‌اند به صورت ۳۲،۵۹،۲۶،۵۳،۷۴،۱۷،۴۵،۲۳،۶۴،۵۱،۶۱ باشد. اگر سن این

افراد را به وسیلهٔ یک نمودار جعبه‌ای نمایش دهیم، میانگین داده‌های داخل جعبه کدام است؟

- | | |
|----------|--------|
| ५७/६ (५) | ५७ (१) |
| ५८/५ (५) | ५८ (३) |

حسابان دوازدهم ، مشتق

۸۱- شکل زیر مربوط به نمودار تابع $y = f(x)$ است. در چند نقطه از نقاط مشخص شده روی نمودار، رابطه $\frac{f}{f'} > 0$ برقرار است؟

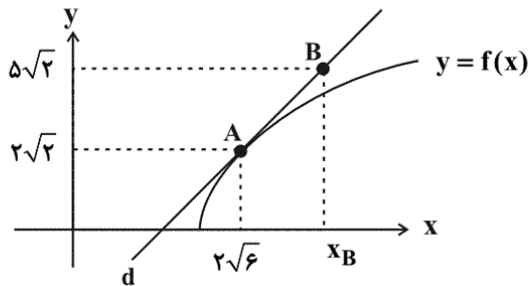


- 1 (1)
 2 (2)
 3 (3)
 4 (4)

۸۲- اگر $f(x) = [x] + [-x]$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{3}{2})}{x - \frac{3}{2}}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

۸۳- در شکل زیر خط d در نقطه A بر نمودار تابع f مماس است. اگر $f'(2\sqrt{6}) = \sqrt{3}$ باشد، طول نقطه B کدام است؟



(۱) $2\sqrt{6} + 1$

(۲) $4\sqrt{6}$

(۳) $3\sqrt{6}$

(۴) $2\sqrt{6} + 2$

۸۴- اگر در تابع $f(x) = 2x^2 - ax + b$ داشته باشیم: $f'(0) + f'(4) = 0$ ، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) ۸ (۴) ۴

۸۵- اگر $f(x) = mx[3x] - 2$ و $f'(\frac{3}{2}) = 2m + 1$ باشد، مقدار m کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -۲

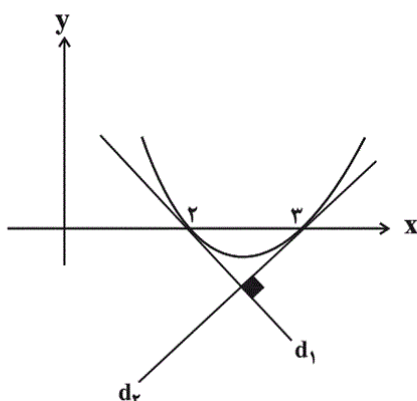
۸۶- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x\sqrt{x+4}$ در نقطه $x = 0$ ، از کدام نقطه عبور می‌کند؟

- (۱) $(\frac{1}{2}, 2)$ (۲) $(-\frac{1}{2}, 1)$ (۳) $(\frac{1}{2}, -1)$ (۴) $(-\frac{1}{2}, -1)$

۸۷- به ازای کدام مقدار k مشتق تابع $f(x) = x^3 - kx$ در $x = 1$ برابر صفر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) -۲

۸۸- در شکل زیر، خطوط عمود بر هم d_1 و d_2 در $x = 2$ و $x = 3$ مماس روی محور x ها بر نمودار تابع f هستند. اگر

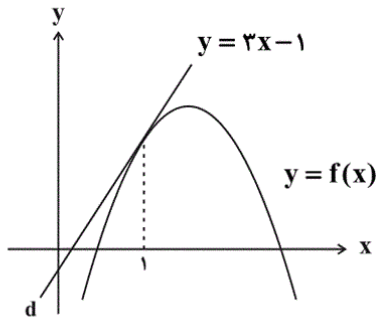


حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{f(x)}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^3 - 8}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{36}$ (۲) $-\frac{1}{4}$

(۳) $-\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{1}{16}$

۸۹- خط d در نقطه $x=1$ بر نمودار تابع f مماس است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x))^3 - 4f(x)}{x-1}$ کدام است؟



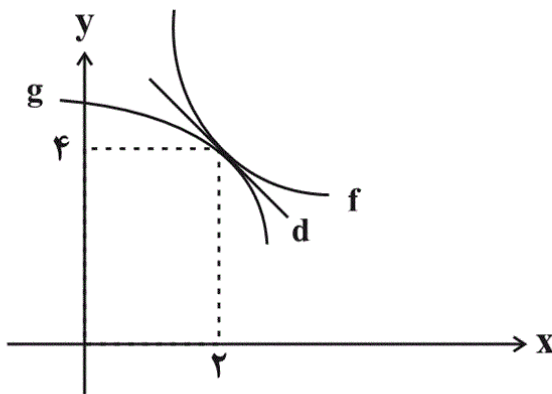
(۱) ۲۴

(۲) ۱۲

(۳) ۴۸

(۴) ۳۶

۹۰- خط d در نقطه $x=2$ بر نمودار تابع های f و g مماس است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-4}{2h} = -3$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2-h)-4}{3h}$ کدام است؟



است؟

(۱) -۲

(۲) ۲

(۳) ۶

(۴) -۶

هندسه ۳- دوازدهم، آشنایی با مقاطع مخروطی

۱۰۱- اگر نقاط $F(1,8)$ و $F'(1,2)$ کانون های یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{1}{3}$ باشند، آنگاه مجموع فواصل هر نقطه دلخواه واقع بر این

بیضی از دو کانون کدام است؟

(۴) ۲۴

(۳) ۱۸

(۲) ۱۲

(۱) ۹

۱۰۲- فاصله دو کانون یک بیضی از یکدیگر ۱۰ واحد و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. اگر M نقطه ای درون صفحه این

بیضی و مجموع فاصله های نقطه M از دو کانون بیضی برابر ۱۲ واحد باشد، آنگاه M کجا قرار دارد؟

(۲) روی بیضی

(۱) درون بیضی

(۴) هر سه حالت امکان پذیر است.

(۳) بیرون بیضی

۱۰۳- نسبت فاصله های هریک از کانون های یک بیضی از دو سر قطر بزرگ آن برابر $\frac{3}{5}$ است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

(۲) $\frac{2}{5}$

(۱) $\frac{3}{5}$

(۴) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{3}$

۱۰۴- اگر بدنه داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی تابیده شود، آنگاه انعکاس نور چگونه است؟

- (۱) از مرکز بیضی عبور می‌کند.
 (۲) از کانون دیگر بیضی عبور می‌کند.
 (۳) مماس بر بیضی از آن خارج می‌شود.
 (۴) بر روی خودش بازتاب می‌یابد.

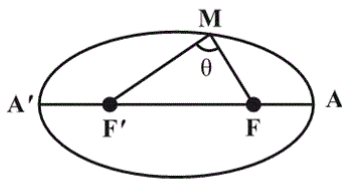
۱۰۵- اگر نقاط $F(9, -4)$ و $F'(-5, -4)$ کانون‌های یک بیضی و $M(4, 8)$ نقطه‌ای واقع بر این بیضی باشد، طول قطر کوچک بیضی کدام است؟

- (۱) ۷
 (۲) $7\sqrt{3}$
 (۳) ۱۴
 (۴) $14\sqrt{3}$

۱۰۶- فرض کنید F و F' کانون‌های یک بیضی به طول قطر بزرگ $3\sqrt{5}$ بوده و M نقطه‌ای روی این بیضی باشد به گونه‌ای که MF و MF' برهم عمودند. اگر $MF \times MF' = 10$ باشد، آنگاه فاصله دو کانون این بیضی کدام است؟

- (۱) ۵
 (۲) ۶
 (۳) $2\sqrt{5}$
 (۴) $\sqrt{15}$

۱۰۷- در بیضی شکل زیر، خروج از مرکز برابر $\frac{2}{3}$ و طول قطر بزرگ برابر ۹ است. اگر $MF' - MF = 1$ باشد، $\cos \theta$ کدام است؟



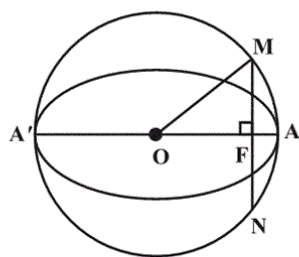
- (۱) $\frac{1}{8}$
 (۲) $\frac{1}{6}$
 (۳) $\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{1}{3}$

۱۰۸- شکل کدام یک از بیضی‌های زیر به دایره نزدیک‌تر است؟

- (۱) بیضی با مقادیر $a = 4$ و $b = 2$
 (۲) بیضی با مقادیر $b = 4$ و $c = 2$
 (۳) بیضی با مقادیر $a = 4$ و $c = 2$
 (۴) بیضی با مقادیر $b = c = 2$

۱۰۹- مطابق شکل زیر، قطر یک دایره بر قطر بزرگ یک بیضی منطبق است. از کانون F عمودی بر قطر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را

در نقاط M و N قطع کند. اگر $MN = 6$ و محیط مثلث OMF برابر ۱۲ باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



(۱) $\frac{1}{2}$

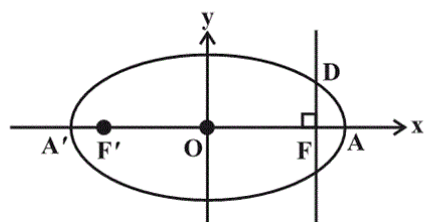
(۲) $\frac{3}{5}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۴) $\frac{4}{5}$

۱۱۰- در شکل زیر، مرکز بیضی بر مبدأ مختصات و قطرهای آن بر محورهای x و y منطبق هستند. اگر $OF = 3$ و $AF = 2$ باشد،

آنگاه عرض نقطه D کدام است؟ (F' و F کانون‌های بیضی هستند.)



(۱) $2/4$

(۲) $3/2$

(۳) $3/6$

(۴) ۴

ریاضی پایه - دوازدهم ، جبر و معادله

۹۱- جواب معادله $\frac{2x+1}{x-1} = 4$ در کدام بازه قرار دارد؟

(۲) $(0,1)$

(۱) $(-1,0)$

(۴) $(2,3)$

(۳) $(1,2)$

۹۲- محمد و علی برای چیدن دیواری به کار گرفته شده‌اند. محمد می‌تواند ۳ ساعت زودتر از علی دیوار را بچیند. حال اگر این دو با

هم کار کنند، چیدن دیوار در ۲ ساعت تمام می‌شود. علی به تنهایی دیوار را در چند ساعت می‌چیند؟

(۲) ۶

(۱) ۷

(۴) ۴

(۳) ۵

۹۳- به ازای چند مقدار صحیح a، معادله $\frac{x}{x-1} = \frac{a}{x}$ جواب ندارد؟

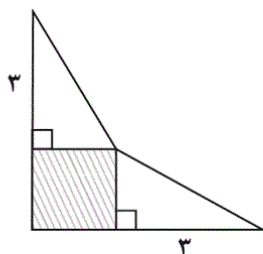
(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

۹۴- محیط شکل مقابل برابر ۱۸ است. محیط مربع هاشورخورده کدام است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۹

(۳) ۱۱

(۴) ۱۰

۹۵- حاصل ضرب جواب‌های معادله $x^2 + 2x + 1 = \sqrt{2x^2 + 4x + 10}$ کدام است؟

(۱) -۳

(۲) -۴

(۳) ۳

(۴) ۴

۹۶- چند عدد حقیقی وجود دارد که مجموع جذر و معکوس آن عدد، برابر ۴ باشد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۹۷- مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{-x^2 + 5x - 4} + 1 = |x - 5|$ کدام است؟

(۱) ۵/۵

(۲) ۶/۵

(۳) ۷/۵

(۴) ۸/۵

۹۸- به ازای کدام مقادیر k ، تنها جواب معادله $|x - 1| = 3x + k$ در بازه $(0, 1)$ قرار دارد؟

(۱) $-1 < k < 3$

(۲) $-3 < k < 1$

(۳) $0 < k \leq 1$

(۴) $-2 < k \leq 1$

۹۹- فاصله نقطه $A(1, 2)$ از دو خط $3x - 4y = 1$ و $4x + 3y = m$ برابر است. مجموع مقادیر m کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۲۲

(۳) ۳۲

(۴) ۲۰

۱۰۰- معادله‌های دو ضلع موازی یک مربع به صورت $mx - (m+2)y = 4$ و $2x - 6y = k$ است. اگر مساحت این مربع ۱۰ باشد، مقدار

مثبت k کدام است؟

(۲) ۲۴

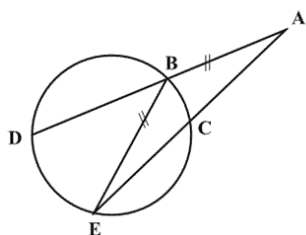
(۱) ۲۲

(۴) ۲۸

(۳) ۲۶

هندسه ۲ یازدهم، دایره

۱۲۱- در شکل زیر، اگر $AB = BE$ باشد، اندازه کمان $\widehat{DE}$ چند برابر اندازه کمان $\widehat{BC}$ است؟



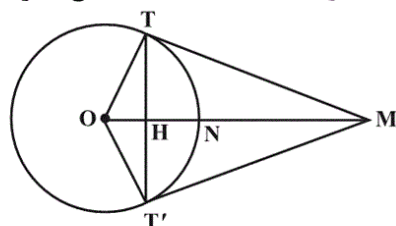
(۱) ۱/۵

(۲) ۲

(۳) ۲/۵

(۴) ۳

۱۲۲- در شکل زیر از نقطه M ، دو مماس MT و MT' بر دایره رسم شده است. اگر H وسط ON و $TH = 2\sqrt{3}$ باشد، شعاع دایره



کدام است؟

(۱) $2\sqrt{2}$

(۲) ۳

(۳) $2\sqrt{3}$

(۴) ۴

۱۲۳- دو دایره $C(O, 10)$ و $C'(O', 4)$ مماس خارج‌اند. اگر عمود منصف پاره خط TT' (مماس مشترک خارجی دو دایره)،

خط‌المركزین دو دایره را در نقطه A قطع کند، طول پاره خط AT کدام است؟ (نقطه T روی دایره C واقع است).

(۴) ۱۰

(۳) $\sqrt{98}$

(۲) $\sqrt{89}$

(۱) $4\sqrt{5}$

۱۲۴- مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده، چند برابر مساحت این دایره است؟

(۴) $\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}$

(۳) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

۱۲۵- در مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع $\sqrt{3}$ ، فاصله مرکز دایره محاطی داخلی از مرکز هر یک از دایره‌های محاطی خارجی

مثلث کدام است؟

$4\sqrt{3}$ (۴)

۴ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

۲ (۱)

آمار و احتمال - گواه ، آمار توصیفی

۱۳۶- در جدول زیر درصد داده‌ها داده شده است. در نمودار دایره‌ای، زاویه مربوط به بازه $(25, 28]$ چند درجه است؟

۷۲ (۱)

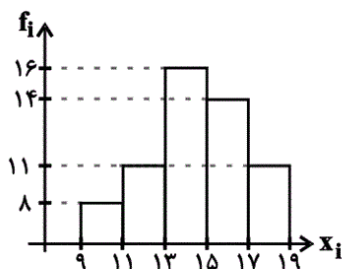
۸۱ (۲)

۸۴ (۳)

۹۰ (۴)

حدود دسته‌ها	۱۶-۱۹	۱۹-۲۲	۲۲-۲۵	۲۵-۲۸	۲۸-۳۱
درصد	۱۷	۲۰/۵	۲۲	x	۱۸

۱۳۷- با توجه به نمودار بافت‌نگاشت زیر، میانگین داده‌های آماری کدام است؟



۱۴/۲ (۱)

۱۴/۳ (۲)

۱۴/۴ (۳)

۱۴/۵ (۴)

۱۳۸- انحراف معیار ۲۶ داده آماری برابر ۲ است. اگر یکی از داده‌ها که با میانگین برابر است، از بین آنها حذف شود، واریانس ۲۵

داده دیگر کدام است؟

۴/۰۸ (۲)

۳/۹۶ (۱)

۴/۱۶ (۴)

۴/۱۲ (۳)

۱۳۹- در نمودار جعبه‌ای داده‌های ۱۹، ۳۱، ۲۵، ۱۸، ۳۲، ۴۳، ۴۱، ۳۴، ۱۶، ۲۷، ۱۴، ۲۳، ۱۵، ۱۰، ۱۲، نسبت طول دو بخشی از جعبه که توسط میانه

از هم جدا شده‌اند، کدام می‌تواند باشد؟

$\frac{7}{9}$ (۲)

$\frac{7}{8}$ (۱)

$\frac{5}{4}$ (۴)

$\frac{9}{8}$ (۳)

۱۴۰- ضریب تغییرات در چند داده آماری ۰/۰۶ محاسبه شده است. اگر به تمامی این داده‌ها ۵ واحد اضافه کنیم، ضریب تغییرات

برابر ۰/۰۵۵ می‌شود. میانگین داده‌های اولیه کدام بوده است؟

۷۵ (۲)

۵۵ (۱)

۴۵ (۴)

۶۵ (۳)

۱۱۱- ریاضیات گسسته

(عزیزالله علی اصغری)

مجموعه‌های A , B و C همگی مجموعه‌های احاطه‌گر برای گراف G هستند، اما هیچ یک از اعضای مجموعه D ، رأس b را احاطه نمی‌کنند، پس این مجموعه یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G محسوب نمی‌شود.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه ۱۴۴)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۱۱۲- ریاضیات گسسته

(علیرضا شریف‌فطیپی)

گزینه «۱»: اگر به جای x و y ، رؤوس e و f قرار گیرند، مجموعه $\{a, c, e, f\}$ حاصل می‌شود که مجموعه احاطه‌گر مینیمال نیست، زیرا با حذف رأس e ، همچنان یک مجموعه احاطه‌گر باقی می‌ماند.

گزینه «۳»: اگر به جای x و y ، رؤوس f و g قرار گیرند، مجموعه $\{a, c, f, g\}$ حاصل می‌شود که مجموعه احاطه‌گر مینیمال نیست، زیرا با حذف رأس g ، همچنان یک مجموعه احاطه‌گر باقی می‌ماند.

گزینه «۴»: اگر به جای x و y ، رؤوس d و f قرار گیرند، مجموعه $\{a, c, d, f\}$ حاصل می‌شود که مجموعه احاطه‌گر مینیمال نیست، زیرا با حذف رأس c یا d ، همچنان یک مجموعه احاطه‌گر باقی می‌ماند.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

در هر گراف r -منتظم، رابطه $rp = 2q$ برقرار است، بنابراین داریم:

$$3p = 2 \times 15 \Rightarrow p = 10$$

$$\left\lceil \frac{p}{\Delta + 1} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{10}{3 + 1} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$$

بنابراین حداقل عدد احاطه‌گری این گراف، برابر ۳ است.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۸ و ۴۹)

۴

۳

۲✓

۱

(نیلوفر مهروی)

۱۱۴ - گراف منتظم

در گراف G ، $\Delta = 3$ است، پس داریم:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{14}{4} \right\rceil = 4$$

یعنی هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم گراف G ، حداقل ۴ عضو دارد.

از طرفی مجموعه $\{e, g, n, i\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است،

پس این مجموعه یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم گراف G است. دقت کنید که

مجموعه $\{b, e, l, k\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G نیست، زیرا

رأس h توسط هیچ کدام از رأس‌های این مجموعه احاطه نمی‌شود. دو مجموعه

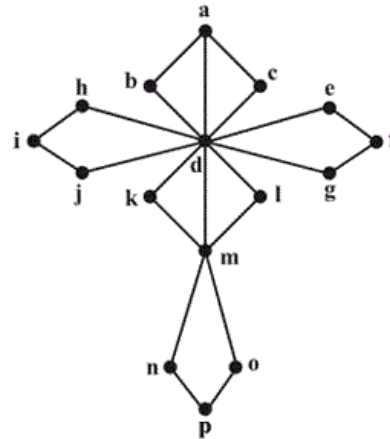
۴

۳✓

۲

۱

رأس d در این گراف قادر به احاطه همه رأس‌های گراف به جز رؤس f, i, j است. از طرفی رأس p به جز خودش، رؤس n و o را احاطه می‌کند ولی هیچ رأسی وجود ندارد که هر دو رأس f و i را احاطه کند. بنابراین مجموعه $\{d, f, i, p\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای این گراف است و در نتیجه عدد احاطه‌گری گراف برابر ۴ می‌باشد.



(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۴

۳

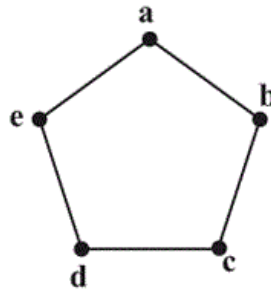
۲ ✓

۱

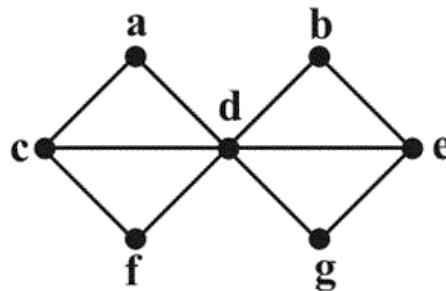
گزینه «۱»: به عنوان مثال هر کدام از مجموعه‌های $\{a, d\}$ و $\{b, d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای این گراف هستند.



گزینه «۲»: به عنوان مثال هر کدام از مجموعه‌های $\{a, c\}$ یا $\{b, d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای این گراف هستند.



گزینه «۳»: رأس d با تمامی رئوس دیگر گراف مجاور است، پس $\{d\}$ تنها مجموعه احاطه‌گر مینیمم این گراف است.



گزینه «۴»: به عنوان مثال هر کدام از مجموعه‌های $\{a, b, c, d\}$ یا $\{e, f, g, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای این گراف هستند.

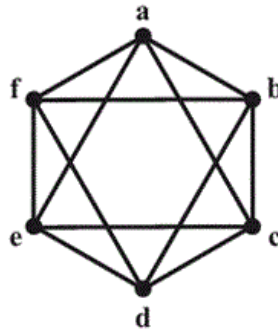
۴

۳ ✓

۲

۱

مکمل یک گراف ۴- منتظم از مرتبه ۶، گرافی ۱- منتظم از مرتبه ۶ است. چون تنها یک گراف ۱- منتظم از مرتبه ۶ وجود دارد، پس گراف ۴- منتظم از مرتبه ۶ نیز منحصر به فرد است.



چون هیچ رأسی در این گراف وجود ندارد که با تمامی رئوس دیگر مجاور باشد، پس عدد احاطه‌گری گراف بزرگ‌تر از یک است. از طرفی مجموعه $\{a, b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای این گراف است، پس عدد احاطه‌گری گراف برابر ۲ است. به طور مشابه هر زیرمجموعه دو عضوی از رئوس این گراف، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم و در نتیجه مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. دقت کنید که این گراف نمی‌تواند مجموعه احاطه‌گر مینیمالی با بیش از دو عضو داشته باشد (چون هر زیرمجموعه دو عضوی یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است)، پس تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال گراف برابر تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ ، یعنی برابر $\binom{6}{2} = 15$ است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۶ و ۴۷)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

گراف P_6 فقط دارای یک مجموعه احاطه گر مینیمم به صورت $\{b, e\}$ است، پس فقط یک مجموعه احاطه گر مینیمال دو عضوی دارد. از طرفی هر زیرمجموعه سه عضوی از رئوس گراف P_6 که شامل یک رأس از بین a و b ، یک رأس از بین c و d و یک رأس از بین e و f باشد، یک مجموعه احاطه گر برای این گراف است که تعداد این مجموعه‌ها طبق اصل ضرب برابر است با: $2 \times 2 \times 2 = 8$. از بین این ۸ مجموعه، تنها دو مجموعه $\{b, d, e\}$ و $\{b, c, e\}$ مجموعه احاطه گر مینیمال نیستند، چون شامل مجموعه $\{b, e\}$ می‌باشند.

۴

۳

۲

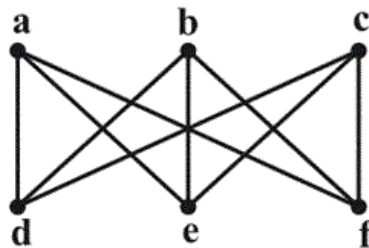
۱ ✓

(رضا توکلی)

۱۱۹-

اگر مجموعه همسایگی باز دو رأس در یک گراف یکسان باشد، آنگاه آن دو رأس قطعاً مجاور نیستند.

با توجه به داده‌های سؤال، گراف G متناظر با شکل زیر است:



هریک از رأس‌های پایینی با تمام رئوس بالایی مجاور است و بالعکس، بنابراین با انتخاب یک رأس از مجموعه رئوس بالایی و یک رأس از مجموعه رئوس پایینی، تمام رئوس گراف احاطه می‌شوند، پس طبق اصل ضرب تعداد مجموعه‌ها برابر است با: $3 \times 3 = 9$

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

۴ ✓

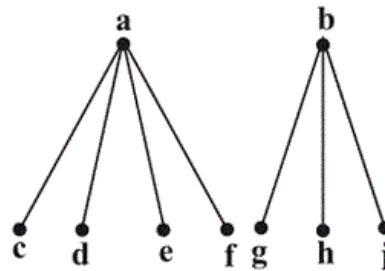
۳

۲

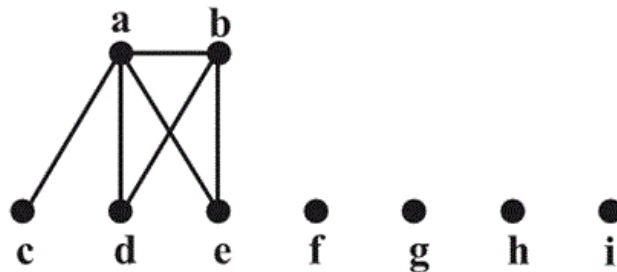
۱

مجموعه همسایگی بسته رأس b دارای ۴ عضو است، پس $\deg(b) = 3$ می باشد.

برای اینکه بیشترین تعداد رأس ممکن توسط رئوس a و b احاطه شوند، این دو رأس نباید مجاور بوده و همچنین اشتراک مجموعه همسایگی های باز این دو رأس باید تهی باشد، یعنی هیچ دو رأسی همزمان با رئوس a و b مجاور نباشند. در این صورت مطابق شکل تمامی رئوس گراف توسط دو رأس a و b احاطه می شوند.



حال اگر دو رأس a و b مجاور بوده و $N_G(b) \subseteq N_G(a)$ باشد، مطابق شکل حداکثر ۴ رأس در این گراف موجود است که توسط رئوس a و b احاطه نمی شود.



(ریاضیات گسسته - گراف و مدل سازی: صفحه های ۴۴)

۴

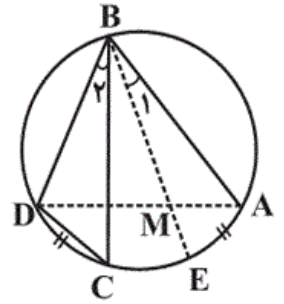
۳

۲

۱ ✓

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AE} = \widehat{CD} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \\ \hat{BAD} = \hat{BCD} = \frac{\widehat{BD}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle BCD$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{CD} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{3} = \frac{6}{8} \Rightarrow AM = 2/25$$



(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

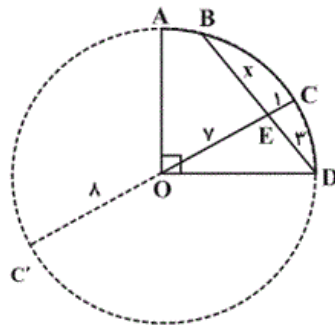
۴

۳

۲ ✓

۱

(کتاب آبی)



دایره کامل را رسم می‌کنیم، داریم:

$$OC' = OC = 8$$

حال بنا به رابطه طولی در دایره داریم:

$$EC \cdot EC' = EB \cdot ED$$

$$1 \times 15 = x \times 3 \Rightarrow x = 5$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

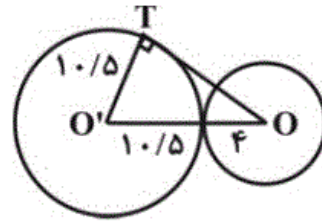
۴ ✓

۳

۲

۱

دو دایره، مماس برون هستند، پس طول خط‌المرکزین آن‌ها برابر است با مجموع طول شعاع دو دایره.



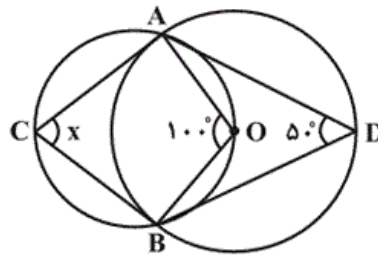
$$\begin{aligned} \Delta O'O'T : OT^2 &= OO'^2 - O'T^2 = (14/5)^2 - (10/5)^2 \\ \Rightarrow OT^2 &= (14/5 + 10/5)(14/5 - 10/5) = 25 \times 4 = 100 \\ \Rightarrow OT &= 10 \end{aligned}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱


$$\hat{D} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 100^\circ$$

زاویه محاطی

$$\hat{AOB} = \widehat{AB} \Rightarrow \hat{AOB} = 100^\circ$$

زاویه مرکزی

چهارضلعی AOBC محاطی است، پس در آن زاویه‌های روبه‌رو مکمل

$$x + 100^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 80^\circ$$

یکدیگرند و در نتیجه داریم:

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۴ و ۲۷)

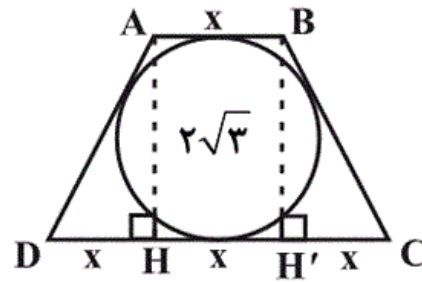
☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

روش اول:



مطابق شکل داریم: $\triangle AHC: AD^2 = AH^2 + DH^2 = 12 + x^2$

$$\Rightarrow AD = BC = \sqrt{12 + x^2}$$

چهارضلعی ABCD محیطی است، بنابراین داریم:

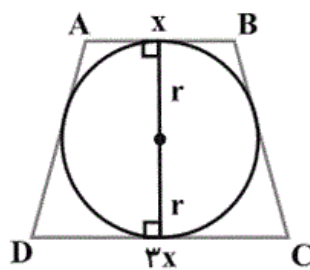
$$AB + CD = AD + BC$$

$$\Rightarrow 4x = 2\sqrt{12 + x^2} \Rightarrow 4x^2 = 12 + x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{x>0} x = 2$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AH(AB + CD)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}(2 + 6) = 8\sqrt{3}$$



روش دوم: قطر دایره محاطی ذوزنقه، واسطه

هندسی دو قاعده ذوزنقه است، بنابراین اگر شعاع

دایره محاطی ذوزنقه متساوی الساقین ABCD

برابر r باشد، داریم:

$$4r^2 = AB \times CD$$

$$\Rightarrow 4(\sqrt{3})^2 = x(3x) \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

مطابق شکل، مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$S_{ABCD} = \frac{(x + 3x) \times 2r}{2} = \frac{8 \times 2\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

اگر فراوانی گروه خونی با کمترین فراوانی را با X نمایش دهیم، فراوانی ۳ گروه خونی دیگر به ترتیب برابر $2X$ ، $4X$ و $8X$ خواهد بود.
حال اگر زاویه مربوط به گروه خونی با کمترین فراوانی را با θ_1 و زاویه مربوط به گروه خونی با بیشترین فراوانی را با θ_2 نمایش دهیم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{X}{15X} \times 360^\circ = 24^\circ \\ \theta_2 &= \frac{8X}{15X} \times 360^\circ = 192^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta_2 - \theta_1 = 168^\circ$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$\bar{X} = \frac{1+1+3+4+4+6+8+8+8+12+13+16}{12} = \frac{84}{12} = 7$$

فرض کنید داده‌های X و Y به داده‌های قبلی افزوده شود. در این صورت طبق فرض میانگین دو واحد افزایش پیدا کرده و برابر ۹ می‌شود، در نتیجه داریم:

$$9 = \frac{84 + X + Y}{14} \Rightarrow X + Y = 42$$

در بین گزینه‌ها، تنها مجموع اعداد گزینه «۲» برابر ۴۲ است.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۴ و ۸۵)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

۲, ۵, ۵, ۶, ۷, ۷, ۷, ۷, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۴, ۱۷, ۱۹, ۲۰, ۲۰, ۲۰

به داده‌ای که دارای بیشترین فراوانی است، مد گفته می‌شود. بنابراین عدد ۷ مد داده‌ها است.

تعداد داده‌ها برابر ۱۷ است، پس داده وسط یعنی داده نهم میانه داده‌هاست و میانه داده‌های بعد از داده نهم، یعنی میانگین داده‌های سیزدهم و چهاردهم، چارک سوم است.

$$Q_3 = \frac{17 + 19}{2} = 18$$

داریم:

$$18 - 7 = 11$$

بنابراین اختلاف بین چارک سوم و مد برابر است با:

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۶ تا ۸۸)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

می‌دانیم اگر تعدادی داده برابر یکدیگر باشند، واریانس آنها برابر صفر است و بالعکس، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 3x - 9 = 6 \Rightarrow x = 5 \\ 5y + 1 = 6 \Rightarrow y = 1 \\ 4z - 2 = 6 \Rightarrow z = 2 \end{cases}$$

پس داده‌های y^2 ، $3 - 2z$ ، $x + 1$ و $x - y$ به ترتیب عبارتند از: ۱، ۱، ۶، ۴ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. چون تعداد داده‌ها زوج است،

$$\text{میانۀ برابر میانگین دو داده وسط است: } \frac{1+4}{2} = 2.5 \Rightarrow \text{میانۀ } 1, 1, 4, 6$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحہ‌های ۹۳ و ۹۴)

۴

۳✓

۲

۱

ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

۱۷، ۲۳، ۲۶، ۳۲، ۴۵، ۵۱، ۵۳، ۵۹، ۶۱، ۶۴، ۷۴

تعداد داده‌ها برابر ۱۱ است، پس داده ششم میانۀ داده‌هاست و در نتیجه میانۀ ۵ داده اول برابر Q_1 و میانۀ ۵ داده آخر برابر Q_3 است:

$$Q_1 = 26, Q_3 = 61$$

پس داده‌های داخل جعبه عبارت‌اند از ۳۲، ۴۵، ۵۱، ۵۳، ۵۹ و میانگین این

$$\bar{x} = \frac{32 + 45 + 51 + 53 + 59}{5} = \frac{240}{5} = 48 \quad \text{داده‌ها برابر است با:}$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحہ‌های ۹۷ و ۹۸)

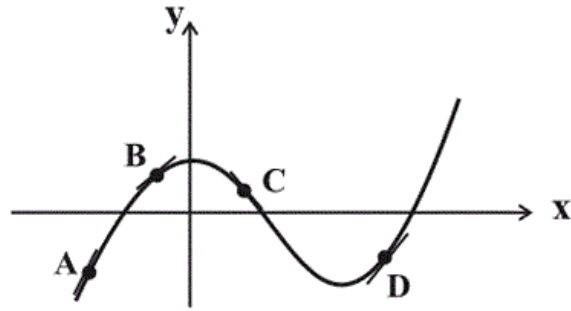
۴

۳✓

۲

۱

باید در هر نقطه علامت f' و شیب خط مماس بر نمودار یعنی f' را تعیین کنیم.



بنابراین مطابق نمودار فوق داریم:

$$f(A) < 0, f'(A) > 0 \Rightarrow \frac{f(A)}{f'(A)} < 0$$

$$f(B) > 0, f'(B) = 0 \Rightarrow \frac{f(B)}{f'(B)} > 0$$

$$f(C) > 0, f'(C) < 0 \Rightarrow \frac{f(C)}{f'(C)} < 0$$

$$f(D) < 0, f'(D) > 0 \Rightarrow \frac{f(D)}{f'(D)} < 0$$

(مسابان ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۷)

۴

۳

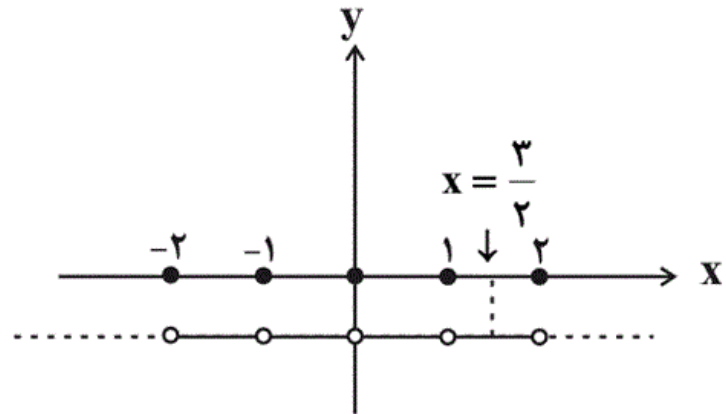
۲

۱ ✓

حد داده شده در صورت سؤال همان تعریف مشتق در $x = \frac{3}{2}$ است.

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{x - \frac{3}{2}}$$

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



با توجه به نمودار تابع f ، شیب خط مماس بر آن در $x = \frac{3}{2}$ برابر صفر است.

(حسابان ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۸۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(همید علیزاده)

$$f'(2\sqrt{6}) = \sqrt{3} = A = \text{شیب خط مماس در نقطه } A = m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{x_B - 2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}}{x_B - 2\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x_B - 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3}x_B = 9\sqrt{2} \Rightarrow x_B = 3\sqrt{6}$$

(حسابان ۲- مشتق؛ مشابه تمرین ۱ صفحه ۸۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

(عادل حسینی)

$$f'(0) + f'(4) = 0 \Rightarrow f'(0) = -f'(4)$$

طبق نکات حاصل از کار در کلاس صفحه ۸۰ کتاب درسی، در سهمی

$$y = Ax^2 + Bx + C, \text{ شیب خطوط مماس بر نمودار آن در نقاط با عرض یکسان}$$

قرینه یکدیگر هستند (و برعکس)؛ بنابراین این نقاط نسبت به محور تقارن سهمی متقارن هستند.

در این سؤال نقاط با طول‌های $x = 0$ و $x = 4$ ، نسبت به محور تقارن سهمی

متقارن هستند. یعنی $x = 2$ طول رأس سهمی و در نتیجه $f'(2) = 0$ خواهد بود.

(مسئله ۲- مشتق؛ مکمل کار در کلاس صفحه ۸۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کاظم ابلالی)

توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $x = \frac{3}{2}$ داریم: $[3x] = 4$. بنابراین

در این همسایگی تابع f برابر است با:

شیب خط $y = 4mx - 2$ برابر $4m$ است، پس $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ برابر $4m$

است. بنابراین داریم: $2m + 1 = 4m \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

(مسئله ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کاظم ابلالی)

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x = 0$ برابر $f'(0)$ است. پس داریم:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x+4} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+4} = 2 \end{aligned}$$

از طرف دیگر خط مماس از نقطه $(0, 0)$ عبور می‌کند، پس معادله آن به

صورت $y = 2x$ است و این خط از نقطه $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ نیز می‌گذرد.

(مسئله ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۸۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

(عادل حسینی)

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - kx - (1 - k)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - kx + k - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1 - k)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1 - k)$$

$$= 3 - k = 0 \Rightarrow k = 3$$

(مسابقان ۲- مشتق: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$f'(2) = -3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x^2 + 2x + 4)(x - 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 + 2x + 4} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2}$$

$$= \frac{1}{12} f'(2) = -\frac{1}{4}$$

(مسابقان ۲- مشتق: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(علی سلامت)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x) - 4f(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(f(x) + 2)(f(x) - 2)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (f(x)(f(x) + 2)) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 2 \times 4 \times f'(1)$$

$$= 8 \times 3 = 24$$

(مسابقان ۲- مشتق: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کظم ابلالی)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 4}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{1}{2} f'(2) = -3$$

$$\Rightarrow f'(2) = -6$$

چون خط d در نقطه $x = 2$ بر نمودار توابع f و g مماس است،
 $g'(2) = f'(2) = -6$ است. بنابراین داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2-h) - 4}{3h} = -\frac{1}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2-h) - g(2)}{-h}$$

$$= -\frac{1}{3} g'(2) = \left(-\frac{1}{3}\right)(-6) = 2$$

(مسابقه ۲- مشتق: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۰)

۴

۳

۲✓

۱

(مهمر فندان)

$$2c = FF' = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{a} \Rightarrow a = 9$$

مجموع فواصل هر نقطه دلخواه واقع بر یک بیضی از دو کانون آن برابر طول قطر

بزرگ بیضی است، پس در این بیضی، مقدار مورد نظر برابر $2a = 18$ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۴

۳✓

۲

۱

$$\left. \begin{array}{l} 2c = 10 \Rightarrow c = 5 \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 = 5^2 + 3^2 = 34$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{34} < 6 \Rightarrow 2a < 12$$

اگر F و F' کانون‌های بیضی باشند، آنگاه داریم:

$$MF + MF' = 12 > 2a \Rightarrow M \text{ بیرون بیضی قرار دارد}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۴

۳✓

۲

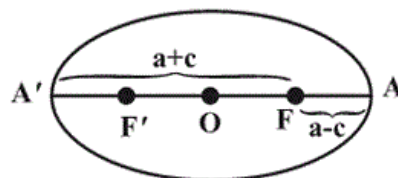
۱

(رضا عباسی اصل)

فاصله هر کانون یک بیضی از دو سر قطر بزرگ آن، به ترتیب برابر $a - c$

و $a + c$ است. طبق فرض سؤال داریم:

$$\frac{a - c}{a + c} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5a - 5c = 3a + 3c \Rightarrow 2a = 8c \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$$



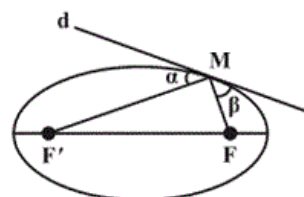
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۴✓

۳

۲

۱



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه ۵۰)

۴

۳

۲✓

۱

مجموع فواصل هر نقطه واقع بر یک بیضی از کانون‌های آن برابر طول قطر بزرگ بیضی است. داریم:

$$MF = \sqrt{(9-4)^2 + (8+4)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$MF' = \sqrt{(-5-4)^2 + (8+4)^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$$

$$2a = MF + MF' = 13 + 15 = 28 \Rightarrow a = 14$$

$$2c = FF' = 14 \Rightarrow c = 7$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 196 - 49 = 147 = 49 \times 3 \Rightarrow b = 7\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{طول قطر کوچک} = 2 \times 7\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۴

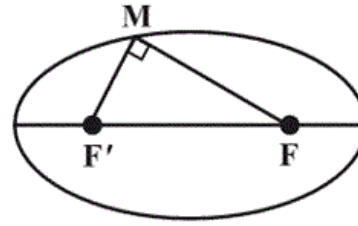
 ✓

۳

۲

۱

می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه واقع بر یک بیضی از دو کانون آن برابر طول قطر بزرگ بیضی است. بنابراین داریم:



$$MF + MF' = 3\sqrt{5} \Rightarrow (MF + MF')^2 = (3\sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow MF^2 + MF'^2 + 2 \underbrace{MF \times MF'}_{10} = 45 \Rightarrow MF^2 + MF'^2 = 25$$

$$\Delta MFF' : FF'^2 = MF^2 + MF'^2 = 25 \Rightarrow FF' = 5$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2c}{2a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{FF'}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow FF' = 6$$

می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه واقع بر بیضی از دو کانون آن برابر طول قطر

بزرگ بیضی است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} MF + MF' = 9 \\ MF' - MF = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MF' = 5 \\ MF = 4 \end{cases}$$

طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث $MF'F$ داریم:

$$FF'^2 = MF^2 + MF'^2 - 2MF.MF'.\cos\theta$$

$$\Rightarrow 6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \cos\theta \Rightarrow 40 \cos\theta = 5 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{8}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

هرچه خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، کشیدگی بیضی کمتر شده و شکل بیضی به دایره نزدیکتر می‌شود. داریم:

$$\text{گزینه «۱» : } c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3} \Rightarrow e_1 = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{گزینه «۲» : } a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5} \Rightarrow e_2 = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{گزینه «۳» : } e_3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{گزینه «۴» : } a^2 = b^2 + c^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \Rightarrow e_4 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

با توجه به اینکه $e_2 < e_3 < e_4 < e_1$ ، پس شکل بیضی گزینه «۲» به دایره نزدیکتر است.

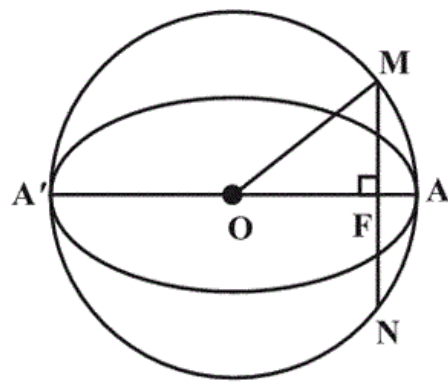
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۴

۳

۲ ✓

۱



$$MF^2 = OM^2 - OF^2 = a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow MF = b$$

می‌دانیم در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس

$$MN = 2MF = 2b \text{ و در نتیجه } b = 3 \text{ است و داریم:}$$

$$\Delta_{OMF} \text{ محیط} = 12 \Rightarrow a + b + c = 12 \xrightarrow{b=3} a + c = 9$$

$$b = 3 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow a^2 - c^2 = 9$$

$$\Rightarrow (a + c)(a - c) = 9 \xrightarrow{a+c=9} a - c = 1$$

$$\begin{cases} a + c = 9 \\ a - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۴ ✓

۳

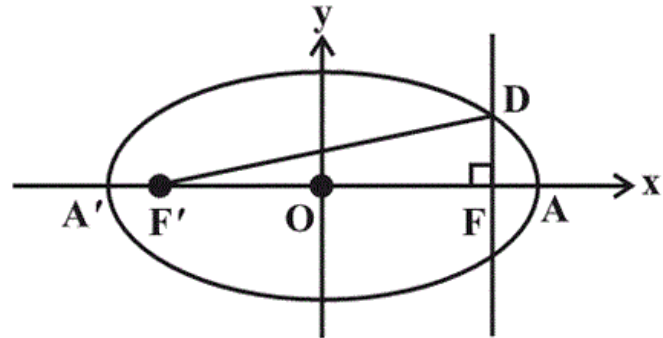
۲

۱

$$FF' = 2OF = 2 \times 3 = 6$$

$$a = OA = 3 + 2 = 5 \Rightarrow DF + DF' = 2a = 10$$

اگر $DF = y$ باشد، آنگاه $DF' = 10 - y$ است و داریم:



$$\Delta DFF' : FF'^2 = DF'^2 - DF^2 = (10 - y)^2 - y^2$$

$$\Rightarrow 36 = 100 - 20y + y^2 - y^2$$

$$\Rightarrow 20y = 64 \Rightarrow y = \frac{64}{20} = \frac{8}{5}$$

(هندسه ۳ - آشنایی با مقاطع مخروطی: مشابه کار در کلاس صفحه ۴۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

(عادل مسینی)

۹۱ - فصل ۳

$$\frac{2x+1}{x-1} = 4 \Rightarrow 2x+1 = 4x-4 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$\frac{5}{2}$ در بازه $(2, 3)$ قرار دارد.

(مسابان ۱ - جبر و معادله: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

(عادل حسینی)

فرض کنیم که علی به تنهایی دیوار را در X ساعت بچیند. یعنی محمد آن را در $X - ۳$ ساعت می‌چیند. حال با توجه به اینکه اگر با هم کار کنند، کار دیوار در ۲ ساعت تمام می‌شود، داریم:

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{X-3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{X-3+X}{X^2-3X} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow X^2 - 3X = 4X - 6 \Rightarrow X^2 - 7X + 6 = (X-1)(X-6) = 0$$

۴

۳

۲ ✓

۱

(کاظم ابلالی)

اگر $a = 0$ باشد، معادله به صورت $\frac{X}{X-1} = 0$ در می‌آید که جواب آن

$X = 0$ و غیرقابل قبول است؛ زیرا مخرج کسر $\frac{a}{X}$ را صفر می‌کند.

اما اگر $a \neq 0$ باشد، داریم:

$$X^2 = aX - a \Rightarrow X^2 - aX + a = 0 \quad (*)$$

اگر معادله بالا جواب نداشته باشد، باید Δ آن منفی باشد:

$$\Rightarrow \Delta = a^2 - 4a < 0 \Rightarrow 0 < a < 4$$

در نتیجه اگر $0 \leq a < 4$ باشد، معادله اصلی جواب ندارد. این بازه شامل اعداد صحیح صفر، ۱، ۲ و ۳ است.

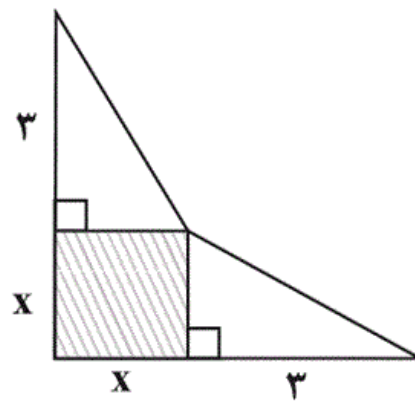
(مسابقه ۱ - جبر و معادله: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲ ✓

۱



مثلث‌های قائم‌الزاویه شکل، هم‌نهشت هستند و اندازه وتر آن‌ها برابر $\sqrt{x^2 + 9}$ است. حال داریم:

$$\text{محیط شکل} = 2x + 6 + 2\sqrt{x^2 + 9} = 18$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 9} = 6 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 9} = 6 - x; \quad 0 < x \leq 6$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 + 9 = x^2 - 12x + 36 \Rightarrow 12x = 27$$

$$\Rightarrow \text{محیط مربع} = 4x = 9$$

(مسایان ۱ - پیر و معارله؛ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳

۲✓

۱

با تغییر متغیر $t = x^2 + 2x + 1$ داریم:

$$t = \sqrt{2t + 8} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} t^2 = 2t + 8$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t - 8 = (t - 4)(t + 2) = 0 \xrightarrow{t = (x+1)^2 > 0} t = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

حاصل ضرب جواب‌های این معادله و در نتیجه حاصل ضرب جواب‌های معادله اصلی برابر ۳- است.

(مسایان ۱ - پیر و معارله؛ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳

۲

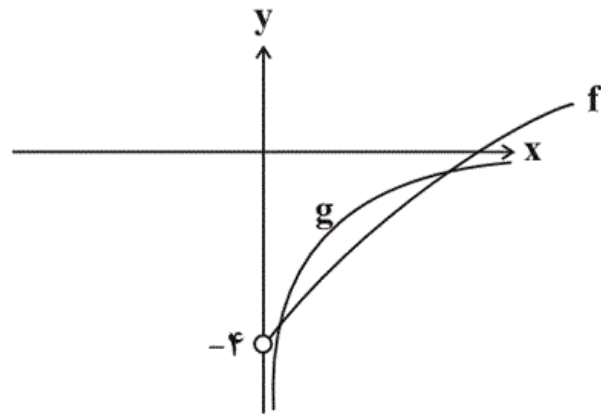
۱✓

اگر این عدد را x فرض کنیم، مقدار x از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow \sqrt{x} - 4 = -\frac{1}{x} \quad (*)$$

نمودار توابع $f(x) = \sqrt{x} - 4$ و $g(x) = -\frac{1}{x}$ با شرط $x > 0$ به

صورت زیر است که در دو نقطه متقاطع‌اند. پس معادله $(*)$ دو جواب دارد و دو عدد مانند x با شرایط مسئله وجود دارد.



(حسابان ۱ - جبر و معادله: صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

(جهانبفش نیکنام)

باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$\Rightarrow -x^2 + 5x - 4 \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 4$$

با توجه به حدود x ، عبارت داخل قدر مطلق منفی است. پس داریم:

$$\sqrt{-(x-1)(x-4)} + 1 = 5 - x \Rightarrow \sqrt{-(x-1)(x-4)} = 4 - x$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x-4)^2 = -(x-1)(x-4) \Rightarrow (x-4)(2x-5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4 & \text{ق ق} \\ x=\frac{5}{2} & \text{ق ق} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = 6\frac{1}{2}$$

(حسابان ۱ - جبر و معادله: صفحه‌های ۲۰، ۲۱، ۲۶ و ۲۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

راه اول: اگر $x \in (0, 1)$ باشد، رابطه $|x-1| = 1-x$ برقرار است، پس داریم:

$$1-x = 3x+k \Rightarrow x = \frac{1-k}{4}$$

جواب به دست آمده باید متعلق به بازه $(0, 1)$ باشد، یعنی

$$x = \frac{1-k}{4} \in (0, 1) \text{ باشد:}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1-k}{4} < 1 \Rightarrow 0 < 1-k < 4 \Rightarrow -3 < k < 1$$

راه دوم: ابتدا نمودار $y = |x-1|$ و $y = 3x+k$ را به ازای مقادیر مختلف k رسم می‌کنیم. ملاحظه می‌کنید که به ازای $k = 1$ جواب معادله $x = 0$ و به ازای $k = -3$ جواب معادله $x = 1$ می‌باشد، بنابراین اگر $-3 < k < 1$ جواب معادله متعلق به بازه $(0, 1)$ خواهد بود.

۴

۳

۲✓

۱

$$d: 3x - 4y - 1 = 0$$

$$d': 4x + 3y - m = 0$$

$$d \text{ فاصله } A \text{ از خط } = \frac{|3(1) - 4(2) - 1|}{\sqrt{16+9}} = \frac{6}{5}$$

$$d' \text{ فاصله } A \text{ از خط } = \frac{|4(1) + 3(2) - m|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|10-m|}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{برابری فاصله ها}} \frac{|10-m|}{5} = \frac{6}{5} \Rightarrow |10-m| = 6 \Rightarrow 10-m = \pm 6$$

$$\Rightarrow m = \begin{cases} 4 \\ 16 \end{cases} \Rightarrow m \text{ مجموع مقادیر } = 20$$

(مسابقان ۱ - جبر و معادله: صفحه‌های ۳۳ و ۳۴)

۴✓

۳

۲

۱

چون دو خط موازی اند، داریم:

$$\frac{m}{2} = \frac{-(m+2)}{-6} \Rightarrow 6m = 2m + 4 \Rightarrow m = 1$$

با جای گذاری $m = 1$ ، معادله خط اول به صورت $x - 3y = 4$ در می آید که می توانیم آن را به صورت $2x - 6y = 8$ بنویسیم.

فاصله دو خط موازی $ax + by = c$ و $ax + by = c'$ برابر با

$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

است. پس فاصله دو خط موازی $2x - 6y = 8$ و

$$2x - 6y = k$$

برابر است با:

$$\text{ضلع مربع} = \frac{|k - 8|}{\sqrt{4 + 36}} \Rightarrow \sqrt{10} = \frac{|k - 8|}{2\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow |k - 8| = 20 \Rightarrow \begin{cases} k - 8 = 20 \Rightarrow k = 28 \\ k - 8 = -20 \Rightarrow k = -12 \end{cases}$$

(مسئله ۱ - جبر و معادله: تمرین ۴ صفحه ۳۵)

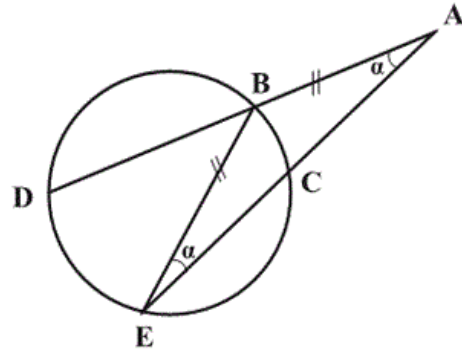
۴ ✓

۳

۲

۱

فرض کنید $\widehat{A} = \alpha$ باشد. مثلث ABE متساوی الساقین است، بنابراین $\widehat{E} = \alpha$ است و در نتیجه داریم:



$$\widehat{E} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \alpha \Rightarrow \widehat{BC} = 2\alpha \quad (1)$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2} = \alpha \Rightarrow \widehat{DE} - 2\alpha = 2\alpha \Rightarrow \widehat{DE} = 4\alpha \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{\widehat{DE}}{\widehat{BC}} = \frac{4\alpha}{2\alpha} = 2$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

مطابق شکل $MT = MT'$ و $OT = OT'$ است، پس نقاط O و M بر روی عمود منصف پاره خط TT' واقع اند، یعنی OM عمود منصف پاره خط TT' است و در نتیجه بر آن عمود می باشد. طبق فرض $OH = \frac{R}{2}$ است،

بنابراین در مثلث قائم الزاویه OHT داریم:

$$TH^2 = OT^2 - OH^2 \Rightarrow (2\sqrt{3})^2 = R^2 - \frac{R^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3R^2}{4} = 12 \Rightarrow R^2 = 16 \Rightarrow R = 4$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه های ۱۹ و ۲۰)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

مطابق شکل $OT \parallel O'T' \parallel AH$ و H وسط TT' است، پس طبق قضیه تالس در ذوزنقه، A وسط OO' بوده و در نتیجه در ذوزنقه $OTT'O'$ داریم:

$$AH = \frac{OT + O'T'}{2} = \frac{10 + 4}{2} = 7$$

حال در مثلث قائم الزاویه AHT طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$AT^2 = AH^2 + TH^2 = 7^2 + (2\sqrt{10})^2$$

$$= 49 + 40 = 89 \Rightarrow AT = \sqrt{89}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه های ۲۰ تا ۲۳)

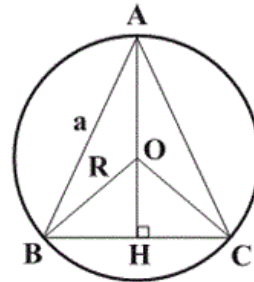
☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

مرکز دایره محیطی هر مثلث، محل هم‌رسی عمود منصف‌های اضلاع آن مثلث است. در مثلث متساوی‌الاضلاع، میانه، ارتفاع و عمود منصف نظیر یک ضلع برهم منطبق‌اند.



با توجه به اینکه میانه‌ها در هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، داریم:

$$OA = \frac{2}{3}AH \Rightarrow R = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow a = \sqrt{3}R$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{\text{دایره}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}R)^2}{\pi R^2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

(هندسه ۲- دایره: مشابه تمرین ۲ صفحه ۲۹)

۴

۳✓

۲

۱

$$\begin{aligned} OO' = r + r_a &= \frac{S}{P} + \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3}{2}a} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3}{2}a-a} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{2\sqrt{3}}{3}a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = 2 \end{aligned}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

۳

۲

۱✓

۱۳۶-  (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۱)

می‌دانیم که همیشه مجموع درصد داده‌ها برابر ۱۰۰ است. پس:

$$17 + 20/5 + 22 + x + 18 = 100 \Rightarrow x = 100 - 77/5 \Rightarrow x = 22/5$$

$$\theta_f = F_f \times 360^\circ = \frac{22/5}{100} \times 360^\circ = 81^\circ$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۳۷-  (سراسری ریاضی - ۹۳)

در داده‌های طبقه‌بندی شده برای به‌دست آوردن میانگین داده‌ها باید ابتدا مرکز هر دسته را به‌دست آوریم، سپس در فراوانی آن دسته ضرب کنیم و مجموع آنها را بر تعداد داده‌ها تقسیم می‌کنیم:

حدود دسته‌ها	۹-۱۱	۱۱-۱۳	۱۳-۱۵	۱۵-۱۷	۱۷-۱۹
مرکز دسته x_i	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
f_i	۸	۱۱	۱۶	۱۴	۱۱

$$\bar{x} = \frac{8 \times 10 + 11 \times 12 + 16 \times 14 + 14 \times 16 + 11 \times 18}{8 + 11 + 16 + 14 + 11} = 14/3$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۳۸-  (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۷)

می‌دانیم انحراف معیار جذر واریانس است. پس:

$$\sigma = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{26} (x_i - \bar{x})^2}{26} \Rightarrow 4 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{26} - \bar{x})^2}{26}$$

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{26} - \bar{x})^2 = 104$$

اگر داده‌ای که برابر میانگین است را حذف کنیم یعنی $(\bar{x} - \bar{x})^2$ را در رابطه بالا حذف کرده‌ایم که تغییری در مقدار آن ایجاد نمی‌کند. بنابراین داریم:

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{25} - \bar{x})^2 = 104$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2}{25} = \frac{104}{25} = 4/16$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

۴ ✓

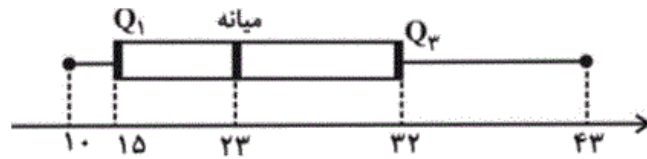
۳

۲

۱

ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم تا میانه و چارک‌ها مشخص شوند.

۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۸, ۱۹, ۲۳, ۲۵, ۲۷, ۳۱, ۳۲, ۳۴, ۴۱, ۴۳



بنابراین در نمودار جعبه‌ای نسبت طول دو بخش موردنظر برابر است با:

$$\frac{32 - 23}{23 - 15} = \frac{9}{8}$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۹۷ و ۹۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

با اضافه شدن مقداری ثابت به داده‌ها، انحراف معیار تغییری نمی‌کند ولی میانگین به همان مقدار اضافه می‌شود.

$$\left. \begin{array}{l} CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{6}{100} \\ CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma}{\bar{x} + 5} = \frac{55}{1000} \end{array} \right\} \div \rightarrow \frac{\frac{\sigma}{\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\bar{x} + 5}} = \frac{\frac{6}{100}}{\frac{55}{1000}} \Rightarrow \frac{\bar{x} + 5}{\bar{x}} = \frac{60}{55} \Rightarrow \bar{x} = 55$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۹۶ و ۹۷)

۴

۳

۲

۱ ✓