



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

۱۱۱- برای ... درستی گزاره «عدد گویایی وجود ندارد که حاصل ضرب آن در یک عدد گنگ، عددی گویا شود.» از ... استفاده می‌شود.

- (۱) اثبات / استدلال استنتاجی
(۲) رد / مثال نقض
(۳) اثبات / اثبات بازگشتی
(۴) رد / برهان خلف

۱۱۲- کدام یک از اعداد زیر را نمی‌توان به صورت مجموع حداقل دو عدد طبیعی متوالی نوشت؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۲۲

۱۱۳- کدام یک از گزاره‌های زیر در حالت کلی درست نیست؟ ($n \in \mathbb{N}$)

- (۱) اگر n مضربی از ۵ باشد، آنگاه n^2 مضربی از ۲۵ است.
(۲) اگر n^2 مضربی از ۱۰ باشد، آنگاه n نیز مضربی از ۱۰ است.
(۳) اگر n^2 مضربی از ۱۰ باشد، آنگاه n مضربی از ۵ است.
(۴) اگر n^2 مضربی از ۲۵ باشد، آنگاه n مضربی از ۱۰ است.

۱۱۴- در هر زیرمجموعه n عضوی از مجموعه $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ ، حداقل دو عضو وجود دارد که حاصل جمع آن‌ها برابر

۲۰ است، کم‌ترین مقدار n کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۱۵- اگر از مجموعه $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ سه عضو حذف کنیم، از تعداد زیرمجموعه‌های آن ۱۱۲ واحد کم می‌شود. A چند عضو دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۱۶- برای هر عدد طبیعی n مجموعه A_n به صورت $A_n = \{k + (-1)^k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq n\}$ تعریف شده است. مجموعه $\bigcap_{n=2}^5 A_n$ برابر کدام است؟

- (۱) A_2 (۲) A_3 (۳) A_4 (۴) A_5

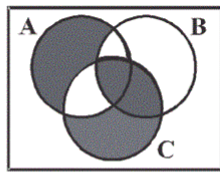
۱۱۷- در کدام یک از موارد زیر، با جایگزینی مجموعه Z (مجموعه اعداد صحیح) به جای S ، تساوی درستی حاصل نمی‌شود؟

- (۱) $\{x \in S \mid x^3 = 5\} = \emptyset$
(۲) $\{x \in S \mid 2 < x^2 < 5\} - \{x \in S \mid x > 0\} = \{-2\}$
(۳) $\{x \in S \mid -1 < x < 1\} = \{0\}$
(۴) $\{x \in S \mid 1 < x \leq 4\} = \{x \in S \mid x^2 = 4\} \cup \{3, 4\}$

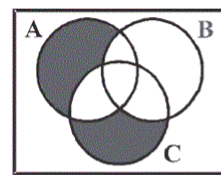
۱۱۸- اگر $(A' \cup B) \subseteq (C' - D)$ باشد، آنگاه کدام رابطه زیر همواره درست است؟

- (۱) $A \subseteq D$ (۲) $C \subseteq A$ (۳) $B \subseteq C$ (۴) $D \subseteq B$

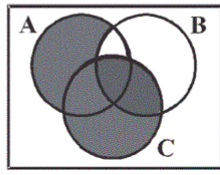
۱۱۹- کدام یک از نمودارهای ون زیر متناظر با مجموعه $\Delta(A-B)$ است؟



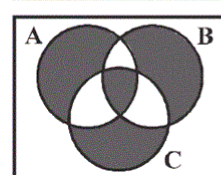
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۱۲۰- حاصل $(A-B) \cup (A-B') \cup [A \cap (A' \cup B)]$ همواره برابر کدام است؟

B' (۴)

A' (۳)

B (۲)

A (۱)

ریاضی پایه - ۱۰ سوال -

۱۰۱- اگر تابع $f(x) = a(2)^x + b$ از دو نقطه $(0, 1)$ و $(-1, 2)$ عبور کند، حاصل $a.b$ کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

-۵ (۲)

-۶ (۱)

۱۰۲- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 + \log_{\frac{1}{4}}(3x - x^2)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

صفر (۱)

۱۰۳- مجموع جوابهای معادله $\log(x+2) + \log(x-1) = \log(6x-8)$ کدام است؟

(۴) معادله جواب ندارد.

۳ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

۱۰۴- مساحت شکل گسترده قیفی مخروطی شکل به شعاع قاعده ۳، برابر 45π است. اندازه زاویه شکل گسترده (قطاع) این قیف چند

درجه است؟

۷۲ (۴)

۹۰ (۳)

۸۰ (۲)

۶۰ (۱)

۱۰۵- حاصل $\frac{-\tan 20^\circ (3 \sin 70^\circ + 5 \cos 160^\circ)}{\sin 340^\circ - 2 \sin(-20^\circ)}$ کدام است؟

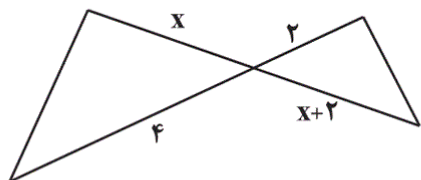
۲ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

-۲ (۲)

$-\sqrt{3}$ (۱)

۱۰۶- نسبت مساحت‌های مثلث‌های شکل زیر برابر $\frac{6}{5}$ است. مقدار x کدام می‌تواند باشد؟



(۱) ۲

(۲) $\frac{5}{7}$

(۳) $\frac{5}{2}$

(۴) $\frac{10}{7}$

۱۰۷- اگر $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\cos^4 x - \sin^4 x$ کدام است؟

(۴) $-\frac{1}{5}$

(۳) $\frac{1}{5}$

(۲) $\frac{4}{5}$

(۱) $-\frac{3}{5}$

۱۰۸- اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و α در ربع دوم باشد، مقدار $\cos(\frac{\pi}{3} + 2\alpha)$ کدام است؟

(۴) $12\sqrt{3} + 7$

(۳) $12\sqrt{3} - 7$

(۲) $-24\sqrt{3} - 7$

(۱) $24\sqrt{3} - 7$

۱۰۹- اگر α و β دو جواب معادله $\tan^2 x - 2(k+2)\tan x + k+2 = 0$ باشند، به طوری که $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ باشد، مقدار k کدام است؟

(۴) -۳

(۳) -۵

(۲) $-\frac{3}{2}$

(۱) ۲

۱۱۰- جواب کلی معادله $\cos x = \frac{1}{\cos x - \sin x}$ به صورت $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$ است. مجموعه مقادیر i کدام می‌تواند باشد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $\{0, -1\}$

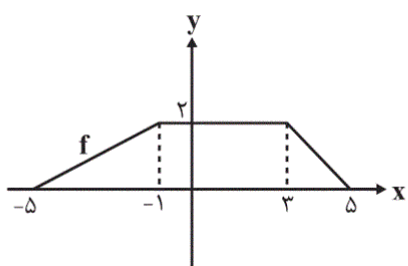
(۳) $\{-1, -2, -3\}$

(۲) $\{0, -2\}$

(۱) $\{-1, -2\}$

ریاضی پایه ، تابع ، ۸ سوال -

۸۹- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودارهای دو تابع $y = f(x)$ و $y = f(2x+a)$ حداقل در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟



(۱) $[-20, 15]$

(۲) $[-15, 15]$

(۳) $[-10, 20]$

(۴) $[-15, 20]$

۹۰- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$ و $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$ باشد، چند عدد طبیعی در برد تابع $h(x) = \frac{xf(x)}{g(x)}$ قرار ندارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۱- اگر $f(x) = \sqrt{5-x^2}$ باشد، دامنه تابع $f \circ f$ بازه $[a, b]$ است. مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $f \circ f$ ، محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ کدام است؟

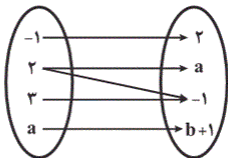
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۲- برای دو تابع $f = \{(1, 4), (5, 2), (-1, b), (6, 5)\}$ و $g = \{(a, 3), (-1, -1), (3, 6), (1, -6)\}$ ، اگر $(5, 3) \in \text{gof}$ و $(-1, 10) \in \text{fog}$ باشد، مقدار $f(b-2a)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۳- اگر $f(x) = |x|$ ، $g(x) = \begin{cases} f(x-1) & ; x \leq k \\ -f(x)+1 & ; x > k \end{cases}$ و تابع g اکیداً نزولی باشد، حدود k کدام است؟

- ۱ (۱) $k \geq 1$ ۲ (۲) $0 \leq k \leq 1$ ۳ (۳) $k < 0$ ۴ (۴) $k \geq 0$



۸۵- نمودار پیکانی تابع f به صورت شکل مقابل است. حاصل $a+b$ کدام است؟

- ۱ (۱) صفر ۲ (۲) ۱ ۳ (۳) ۲ ۴ (۴) -۱

۸۶- برد تابع $f(x) = 5x - 3$ بازه $[-2, 7]$ است. دامنه این تابع شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ (۱) ۴ ۲ (۲) ۳ ۳ (۳) ۲ ۴ (۴) ۱

۸۷- دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ (۱) ۷ ۲ (۲) ۵ ۳ (۳) ۶ ۴ (۴) ۴

۸۱- حاصل عبارت $\frac{\sqrt[5]{8 + (2\sqrt[5]{4\sqrt{2}})^3}}{1 - \sqrt[3]{16}}$ کدام است؟

(۴) $\sqrt[4]{2}$

(۳) $\sqrt[5]{2}$

(۲) $\sqrt[3]{2^8}$

(۱) $\sqrt[5]{2}$

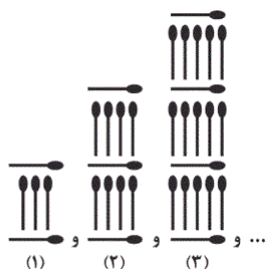
۸۲- با توجه به الگوی زیر، تعداد چوب کبریت‌ها در شکل دهم کدام است؟

(۱) ۱۳۱

(۲) ۱۳۳

(۳) ۱۰۹

(۴) ۱۱۱



ریاضی پایه، توابع خاص - نامعادله و تعیین علامت - سوال ۳ -

۸۸- به ازای هر k در بازه $[a, b]$ ، خط $y = k$ نمودار تابع $y = x - 1 + \frac{|3x|}{x}$ را قطع نمی‌کند. حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

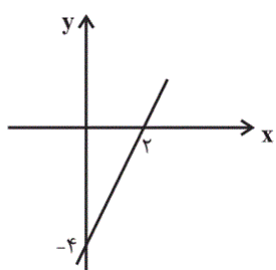
(۴) ۶

(۳) ۲

(۲) ۴

(۱) ۸

۹۹- خط $y = ax + b$ در شکل زیر رسم شده است. عبارت $p(x) = \frac{ax+b}{bx+a}$ در کدام بازه نامنفی است؟



(۲) $(\frac{1}{3}, 3]$

(۱) $(\frac{1}{4}, 2]$

(۴) $[\frac{1}{3}, 3)$

(۳) $[\frac{1}{4}, 2)$

۱۰۰- α و β جواب‌های معادله $x^2 + mx + 1 = 0$ هستند. اگر $\frac{1}{4} < \alpha < 2 < \beta$ باشد، حدود m کدام است؟

(۴) $(2, +\infty)$

(۳) $(-\frac{5}{2}, -2)$

(۲) $(-\infty, -\frac{5}{2})$

(۱) $(-\infty, -2)$

ریاضی پایه، محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات - سوال ۷ -

۸۳- در یک دنباله هندسی با جملات متمایز، جمله اول برابر ۲- و جمله چهارم مربع جمله دوم است. مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله

کدام است؟

(۴) ۸۴۲

(۳) ۴۲۲

(۲) ۶۸۲

(۱) ۳۴۲

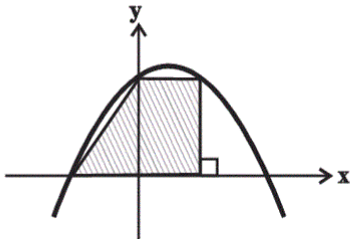
۸۴- اگر باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $2x^2 - 2$ برابر با $5x + 2$ باشد، باقی مانده تقسیم $f(x-2)$ بر $x-3$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۷

۹۴- اگر a و a^2 دو صفر متمایز تابع $f(x) = x^2 + ax + b$ باشند، حاصل $a-b$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۱۰

۹۵- نمودار سهمی $y = 2 + x - x^2$ در شکل زیر رسم شده است. مساحت دوزنقه رنگی کدام است؟



- (۱) ۳ (۲) ۳/۵ (۳) ۲/۵ (۴) ۴

۹۶- تعداد جواب‌های معادله $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 6x + 9} = \frac{3x + 3}{x - 3} - 2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۷- معادله $\sqrt{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} + \sqrt{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 5$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۹۸- اگر مجموعه جواب‌های نامعادله $|2x - \frac{x+a}{3}| < x$ با مجموعه جواب‌های نامعادله $|x - \frac{5}{4}| < b$ برابر باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

آمار و مدل‌سازی - سوال ۱۰ -

۱۳۱- اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی به صورت $2+E$ باشد، مساحت مثلث از کدام مدل زیر پیروی می‌کند؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2} + E$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4} + E$ (۳) $\frac{3\sqrt{3}}{2}(2+E)$ (۴) $\sqrt{3} + E$

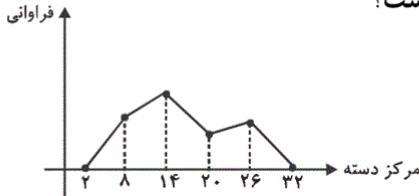
۱۳۲- یک سری داده آماری را در ۷ دسته، طبقه‌بندی کرده‌ایم. اگر دامنه تغییرات برابر ۲۱ و کوچک‌ترین داده برابر ۲ باشد، آنگاه مرکز دسته ششم کدام است؟

- (۱) ۲۱/۵ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸/۵ (۴) ۲۰

۱۳۳- میانگین قد ۱۵ دانش‌آموز ۱۷۳ سانتی‌متر و میانگین قد ۱۰ دانش‌آموز دیگر ۱۶۸ سانتی‌متر است. میانگین قد این ۲۵ دانش‌آموز چند سانتی‌متر است؟

- (۱) ۱۷۱/۵ (۲) ۱۷۱ (۳) ۱۷۰/۵ (۴) ۱۷۰

۱۳۴- اگر مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی زیر، ۷۲ باشد، فراوانی تجمعی دسته آخر کدام است؟



- (۱) ۲۰ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴) ۱۰

۱۳۵- در نمودار زیر تعداد افرادی که در دسته‌های B، C و D قرار دارند، به ترتیب ۲، ۳ و ۶ برابر تعداد افرادی است که در دسته A قرار دارند. زاویه متناظر با دسته A کدام است؟



- (۱) ۲۰° (۲) ۳۰° (۳) ۴۵° (۴) ۶۰°

۱۳۶- داده‌های آماری با یک رقم اعشار در نمودار ساقه و برگ زیر داده شده‌اند. قدرمطلق اختلاف میانگین و میانه کدام است؟

ساقه	برگ
۸	۰ ۰ ۱ ۲ ۲ ۵
۹	۰ ۱ ۵
۱۰	۱ ۱

- (۱) ۰/۵ (۲) ۰/۴ (۳) ۰/۳ (۴) ۰/۲

۱۳۷- در نمودار جعبه‌ای داده‌های ۱۹، ۲۱، ۲۵، ۱۸، ۳۲، ۴۳، ۴۱، ۳۴، ۱۶، ۲۷، ۱۴، ۲۳، ۱۵، ۱۰، ۱۲. نسبت طول دو بخشی از جعبه که توسط میانه از هم جدا شده‌اند، کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{7}{8}$ (۲) $\frac{7}{9}$ (۳) $\frac{9}{8}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۱۳۸- اعداد ۲- و ۵ و a و ۴- و ۳ اختلاف از میانگین ۵ داده آماری را نشان می‌دهند. واریانس این داده‌ها کدام است؟

- (۱) ۱۲/۶ (۲) ۱۱/۶ (۳) ۱۲/۴ (۴) ۱۱/۴

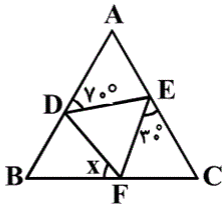
۱۳۹- اگر میانگین داده‌های آماری x_1, x_2, \dots, x_n برابر ۲ و انحراف معیار آن‌ها ۳/۰ باشد، ضریب تغییرات داده‌های آماری $4x_1 + 2, 4x_2 + 2, \dots, 4x_n + 2$ کدام است؟

- (۱) ۰/۱۲ (۲) ۰/۱۵ (۳) ۰/۱۸ (۴) ۰/۲۴

۱۴۰- پنج داده آماری که واریانس آن‌ها ۲ و ضریب تغییرات آن‌ها $\frac{1}{\sqrt{6}}$ می‌باشد، مفروض‌اند. مجموع مربعات این داده‌ها کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۷۰ (۳) ۸۰ (۴) ۹۰

۱۲۱- در شکل مقابل $AB = AC$ و $DE = DF = EF$ می‌باشد. اندازه زاویه x کدام است؟



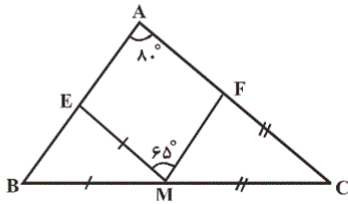
(۲) 40°

(۱) 50°

(۴) 10°

(۳) 20°

۱۲۲- مطابق شکل، $ME = MB$ ، $CM = CF$ ، $\hat{A} = 80^\circ$ و $\hat{EMF} = 65^\circ$ است. زاویه C کدام است؟



(۲) 30°

(۱) 35°

(۴) 40°

(۳) 25°

۱۲۳- اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، تشکیل دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $d = 5$ می‌دهند. طول قطعه بزرگ‌تری که ارتفاع وارد بر وتر،

بر روی آن ایجاد می‌کند، کدام است؟

(۴) ۲۰

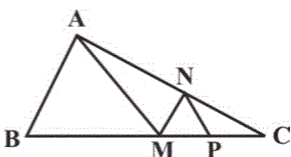
(۳) ۱۸

(۲) ۱۲

(۱) ۱۶

۱۲۴- در شکل زیر نقاط M ، N و P به ترتیب اوساط BC ، AC و MC هستند. نسبت مساحت مثلث NPC به مساحت چهارضلعی $ANMB$ کدام

است؟



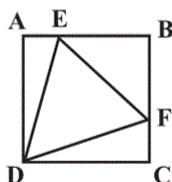
(۲) $\frac{1}{4}$

(۱) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{6}$

۱۲۵- در شکل زیر، اگر $ABCD$ مربعی به ضلع واحد باشد، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع DEF کدام است؟



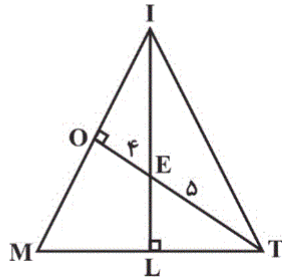
(۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۴) $3\sqrt{3} - 3$

(۳) $2\sqrt{3} - 3$

۱۲۶- مطابق شکل در مثلث MIT، ارتفاع $IL = ۱۲$ ، ارتفاع TO را به دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۵ تقسیم کرده است. طول



پاره‌خط LT کدام است؟

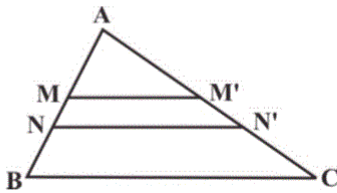
۳/۲ (۲)

$\sqrt{۲۱}$ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۱۲۷- در شکل زیر اگر $AM = NB = ۲MN$ و $AM' = N'C = ۲M'N'$ باشد، حاصل $MM' + NN'$ چند برابر BC است؟



۱ (۲)

$\frac{۱}{۲}$ (۱)

$\frac{۴}{۵}$ (۴)

$\frac{۲}{۳}$ (۳)

۱۲۸- سطح کل مکعبی به طول یال k با سطح کل مکعب مستطیلی به طول یال‌های a، ۲a و ۲a برابر است. قطر مکعب چند برابر قطر

مکعب مستطیل است؟

$\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ (۴)

$\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ (۳)

$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۲)

$\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ (۱)

۱۲۹- قاعده‌های یک منشور قائم، دو شش ضلعی منتظم‌اند. اگر مجموع مساحت‌های دو قاعده، $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ برابر مساحت جانبی منشور باشد،

نسبت ضلع قاعده به یال جانبی منشور کدام است؟

$\frac{۲}{۳}$ (۴)

$\sqrt{۳}$ (۳)

۴ (۲)

$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ (۱)

۱۳۰- در داخل کره‌ای به شعاع ۶ واحد، بزرگ‌ترین استوانه‌ای ممکن به ارتفاع ۸ واحد قرار دارد. مساحت جانبی این استوانه چند برابر π است؟

۳۲ $\sqrt{5}$ (۴)

۳۲ (۳)

۱۶ $\sqrt{5}$ (۲)

۱۶ (۱)

۱۱۱- گزینه صحیح

(مهرداد ملوندی)

عدد گویای $a = 0$ در هر عدد گنگی که ضرب شود، حاصل آن برابر صفر می‌شود که عددی گویاست. برای رد درستی گزاره مورد نظر از «مثال نقض» استفاده می‌شود.

(بهر و احتمال - استدلال ریاضی: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲

۱

۱۱۲- گزینه صحیح

(امیرمسین ابومحبوب)

$۱۶ = ?$ و $۲۲ = ۴ + ۵ + ۶ + ۷$ و $۱۵ = ۷ + ۸$ و $۹ = ۴ + ۵$

تذکر: اعداد $a = 2^n$ که در آن $n \in W$ است، را نمی‌توان به صورت مجموع حداقل دو عدد طبیعی متوالی نوشت.

(بهر و احتمال - استدلال ریاضی: صفحه ۱۸)

۴

۳

۲

۱

۱۱۳- گزینه صحیح

(مسین عرفانی)

برای مثال نقض گزاره گزینه «۴» می‌توان $n^2 = ۲۵$ را در نظر گرفت که در نتیجه $n = ۵$ است و مضربی از ۱۰ نیست.

(بهر و احتمال - استدلال ریاضی: صفحه ۲۸)

۴

۳

۲

۱

خانه‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\boxed{2,18} \quad \boxed{4,16} \quad \boxed{6,14} \quad \boxed{8,12} \quad \boxed{10}$$

اگر حداقل ۶ عضو از مجموعه S انتخاب شود، آنگاه با توجه به ۵ خانه بالا، طبق اصل لانه کبوتری، ۲ عضو در یکی از ۴ خانه اول قرار می‌گیرند که مجموعشان برابر ۲۰ است، پس $\min(n) = 6$.

(بهر و احتمال - استرلای ریاضی؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(آزیتا صبوری)

می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است. اگر $|A| = n$ باشد، آنگاه داریم:

$$2^n - 2^{n-3} = 112 \Rightarrow 2^{n-3}(2^3 - 1) = 112$$

$$\Rightarrow 2^{n-3} \times 7 = 112 \Rightarrow 2^{n-3} = 16$$

$$\Rightarrow 2^{n-3} = 2^4 \Rightarrow n = 7$$

(بهر و احتمال - مجموعه‌ها؛ صفحه‌های ۳۹ تا ۴۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(مهرعلی نادرپور)

$$\bigcap_{n=2}^5 A_n = A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$$

$$= \{0, 3\} \cap \{0, 2, 3\} \cap \{0, 2, 3, 5\} \cap \{0, 2, 3, 4, 5\}$$

$$= \{0, 3\} = A_2$$

(بهر و احتمال - مجموعه‌ها؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

در گزینه «۴»، اگر به جای S، مجموعه اعداد صحیح قرار داده شود، داریم:

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x \leq 4\} = \{2, 3, 4\}$$

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\} \cup \{3, 4\}$$

$$= \{-2, 2\} \cup \{3, 4\} = \{-2, 2, 3, 4\}$$

بنابراین تساوی برقرار نیست.

در سایر گزینه‌ها با جایگزینی مجموعه اعداد صحیح به جای S، تساوی درستی حاصل می‌شود.

(بیر و احتمال - مجموعه‌ها: مشابه تمرین ۱۱ صفحه ۵۶)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

$$\left. \begin{matrix} A' \\ B \end{matrix} \right\} \subseteq (A' \cup B) \subseteq (C' \cap D') \subseteq \left\{ \begin{matrix} C' \\ D' \end{matrix} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A' \subseteq C' \xrightarrow{X \subseteq Y \Rightarrow Y' \subseteq X'} C \subseteq A \\ A' \subseteq D' \\ B \subseteq C' \\ B \subseteq D' \end{cases}$$

(بیر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۶)

 ۴

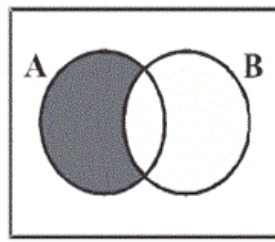
 ۳

 ۲ ✓

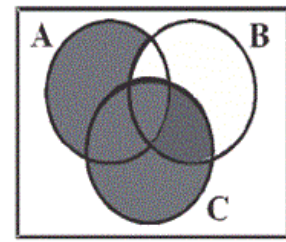
 ۱

با توجه به تعریف تفاضل متقارن داریم:

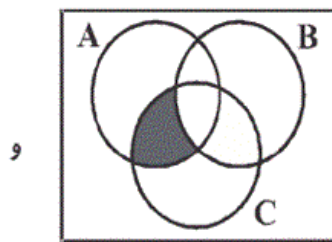
$$(A - B) \Delta C = [(A - B) \cup C] - [(A - B) \cap C]$$



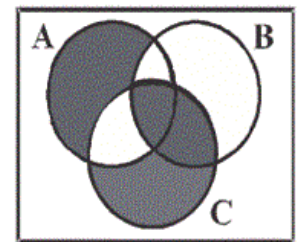
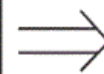
$(A - B)$



$(A - B) \cup C$



$(A - B) \cap C$



$(A - B) \Delta C$

(بیر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۴۱ تا ۵۶)

۴

۳

۲

۱

(فرهاد صابر)

-۱۲۰

$$\begin{aligned} & (A - B) \cup (A - B') \cup [A \cap (A' \cup B)] \\ &= (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup [\underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \cup (A \cap B)] \\ & [A \cap \underbrace{(B' \cup B)}_U] \cup (A \cap B) = \underbrace{A \cup (A \cap B)}_{\text{قانون جذب}} = A \end{aligned}$$

(بیر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

۴

۳

۲

۱

$$f(0) = a(2)^0 + b \Rightarrow a + b = 1 \quad (1)$$

$$f(-1) = a(2)^{-1} + b = \frac{a}{2} + b = 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a = -2, b = 3$$

$$\Rightarrow a.b = -6$$

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۸۶ تا ۹۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مهم پیمانی)

اولاً، باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت باشد:

$$3x - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (0, 3) \quad (1)$$

ثانیاً، عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$1 + \log_{\frac{1}{4}}(3x - x^2) \geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}}(3x - x^2) \geq -1$$

$$\Rightarrow 3x - x^2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4 \Rightarrow x^2 - 3x + 4 \geq 0$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{ضریب } x^2 \text{ مثبت} \\ \Delta < 0}} x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} D_f = (0, 3)$$

این بازه شامل اعداد صحیح ۱ و ۲ است.

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۱۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

اگر معادله جوابی داشته باشد، با توجه به دامنه لگاریتم‌ها باید در بازه

$\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ باشد. حال با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$$\log((x+2)(x-1)) = \log(6x-8)$$

$$\xrightarrow{x \in \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)} x^2 + x - 2 = 6x - 8$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x=2 \text{ یا } x=3$$

هر دو جواب $x=2$ و $x=3$ قابل قبول هستند که مجموع آن‌ها برابر ۵ است.

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۹)

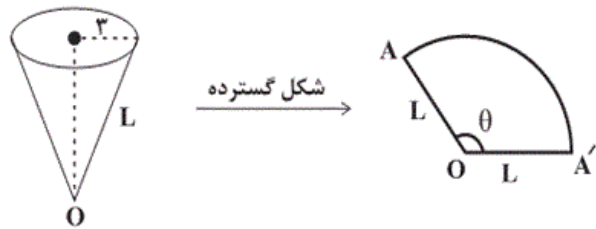
۴

۳

۲

۱ ✓

(میلاد منوری)



محیط قاعده مخروط برابر طول کمان AA' است.

$$\Rightarrow 2\pi(3) = 6\pi = L\theta \Rightarrow L = \frac{6\pi}{\theta}$$

از طرفی مساحت قطاعی با زاویه θ از دایره‌ای به شعاع L از رابطه

$$S = \frac{1}{2}\theta L^2 \text{ به دست می‌آید. بنابراین داریم:}$$

$$S = \frac{1}{2}\theta \left(\frac{6\pi}{\theta}\right)^2 = \frac{18\pi^2}{\theta} = 45\pi \Rightarrow \theta = \frac{18\pi^2}{45\pi} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad} = 72^\circ$$

(ریاضیات ۲- مثلثات، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

(عمید مامقاری)

$$\begin{aligned} & \frac{-\tan 20^\circ (3 \sin 70^\circ + 5 \cos 160^\circ)}{\sin 340^\circ - 2 \sin(-20^\circ)} \\ &= \frac{-\tan 20^\circ (3 \cos 20^\circ - 5 \cos 20^\circ)}{2 \sin 20^\circ - \sin 20^\circ} \\ &= \frac{-\tan 20^\circ (-2 \cos 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = 2 \tan 20^\circ \cot 20^\circ = 2 \end{aligned}$$

(ریاضیات ۲- مثلثات، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۹)

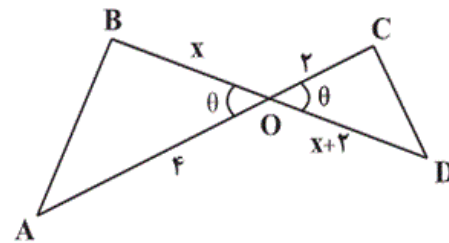
۴ ✓

۳

۲

۱

(کاظم ابلالی)



$$S_1 = S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} (4)(x) \sin \theta = 2x \sin \theta$$

$$S_2 = S_{\Delta COD} = \frac{1}{2} (2)(x+2) \sin \theta = (x+2) \sin \theta$$

حالت‌های زیر برای نسبت مساحت‌های این دو مثلث امکان‌پذیر است:

$$\begin{cases} \frac{S_1}{S_2} = \frac{2x}{x+2} = \frac{6}{5} \Rightarrow x = 3 \\ \frac{S_2}{S_1} = \frac{x+2}{2x} = \frac{6}{5} \Rightarrow x = \frac{10}{7} \end{cases}$$

(ریاضیات ۲- مثلثات، صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \xrightarrow{\tan x = -2} \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} \sin^2 x = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{3}{5}$$

راه حل دوم:

به سادگی می‌توان درستی رابطه $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ را اثبات کرد:

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}$$

(مسئله‌ها - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کاملاً اجابلی)

۱۰۸ -

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

چون α در ربع دوم است، $\cos \alpha$ منفی و برابر $-\frac{3}{5}$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25} \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos 2\alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin 2\alpha$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{7}{25}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{24\sqrt{3} - 7}{50}$$

$$\Rightarrow 50 \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right) = 24\sqrt{3} - 7$$

(مسئله‌ها - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سعید مامقاری)

از آنجا که α و β جوابهای معادله $\tan^2 x - 2(k+2)\tan x + k+2 = 0$ هستند،
 $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ جوابهای معادله $x^2 - 2(k+2)x + k+2 = 0$ هستند، در نتیجه داریم:

$$\tan\alpha \tan\beta = k+2 \text{ و } \tan\alpha + \tan\beta = 2k+4$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} \Rightarrow -1 = \frac{2k+4}{1 - (k+2)}$$

$$\Rightarrow k = -3$$

(مسایان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

(سعید علم‌پور)

$$\cos x = \frac{1}{\cos x - \sin x} \Rightarrow \cos^2 x - \sin x \cos x = 1$$

$$\Rightarrow -\sin x \cos x - 1 + \cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow -\sin x \cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow -\sin x(\cos x + \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = -\sin x \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین مجموعه مقادیر x را می‌توان به صورت $\{0, -1\}$ در نظر گرفت.

(مسایان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

(حمید مام‌قارری)

نقاط $(5, 0)$ و $(-5, 0)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ ، به ترتیب به نقاط $(-\frac{a+5}{2}, 0)$ و $(-\frac{a-5}{2}, 0)$ روی نمودار تابع $y = f(2x+a)$

تبدیل می‌شوند. برای اینکه نمودار دو تابع حتماً برخورد داشته باشند، کافی

است حداقل یکی از نقاط تبدیل شده در بازه $[-5, 5]$ قرار داشته باشد.

بنابراین داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} -5 \leq -\frac{a+5}{2} \leq 5 \Rightarrow -5 \leq \frac{a+5}{2} \leq 5 \quad (1) \\ \Rightarrow -10 \leq a+5 \leq 10 \Rightarrow -15 \leq a \leq 5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -5 \leq -\frac{a-5}{2} \leq 5 \Rightarrow -5 \leq \frac{a-5}{2} \leq 5 \quad (2) \\ \Rightarrow -10 \leq a-5 \leq 10 \Rightarrow -5 \leq a \leq 15 \end{array} \right.$$

اجتماع جواب‌های (۱) و (۲)، بازه $[-15, 15]$ است.

(مسئله - تابع، صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴)

(کاظم ایلالی)

دامنه تابع f به صورت $\mathbb{R} - \{1\}$ و دامنه تابع g به صورت $[0, +\infty)$

است. بنابراین داریم:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = (0, +\infty) - \{1\}$$

دقت کنید که از $g(x) = 0$ نتیجه می‌شود $x = 0$ است.

از طرف دیگر داریم:

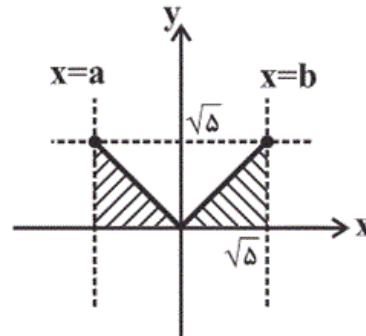
$$h(x) = \frac{xf(x)}{g(x)} = \frac{x(\frac{\sqrt{x}+2}{x^2-1})}{\frac{x}{x^2-1}} = \sqrt{x}+2$$

(سعید علم‌پور)

$$D_f = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}], R_f = [0, \sqrt{5}] \Rightarrow D_{f \circ f} = D_f = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$$

$$(f \circ f)(x) = \sqrt{5 - (\sqrt{5 - x^2})^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

بنابراین نمودار تابع $f \circ f$ به صورت شکل زیر است:



مثلث‌های هاشورخورده، ناحیه مورد نظر هستند که مساحت آن برابر مجموع

مساحت‌های مثلث‌ها یعنی $2 \times \left(\frac{5}{2}\right) = 5$ است.

(مسابان - تابع، صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی سلامت)

$$(5, 3) \in \text{gof}$$

$$\Rightarrow g(f(5)) = g(3) = 3$$

$$\Rightarrow a = 3 \quad (1)$$

$$(-1, 10) \in \text{fog}$$

$$\Rightarrow f(g(-1)) = f(-1) = 10$$

$$\Rightarrow b = 10 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} f(b - 2a) = f(4) = 5$$

(مسابان - تابع، صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶)

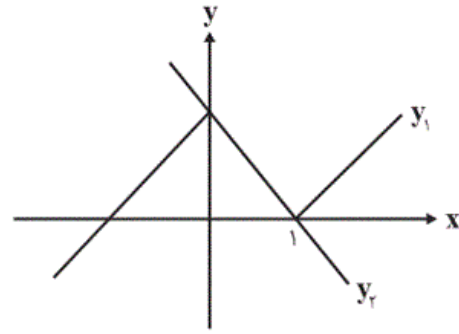
۴

۳

۲

۱ ✓

(علی ساویبی)

ابتدا، نمودار دو تابع $y_1 = f(x-1)$ و $y_2 = -f(x)+1$ را رسم می‌کنیم.

برای آن که تابع g اکیداً نزولی باشد، هر کدام از ضابطه‌های y_1 و y_2 در دامنه محدود خود باید اکیداً نزولی باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} y_1 : k \leq 1 \\ y_2 : k \geq 0 \end{cases} \Rightarrow k \in [0, 1]$$

۴

۳

۲ ✓

۱

(طاہر دادستانی)

عضو ۲ از مجموعه اول به دو عضو a و -1 مرتبط شده است. برای تابع بودن لازم است که $a = -1$ باشد. در این صورت عضو -1 نیز به دو عضو ۲ و $b+1$ مرتبط خواهد شد. بنابراین باید $b = 1$ باشد.

$$\Rightarrow a + b = 0$$

(ریاضیات ۲- تابع، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(محمدر پیمانی)

$$R_f = [-2, 7]$$

$$\Rightarrow -2 \leq y = f(x) \leq 7 \Rightarrow -2 \leq 5x - 3 \leq 7$$

$$\Rightarrow 1 \leq 5x \leq 10 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq x \leq 2$$

۴

۳ ✓

۲

۱

(کامظم ابلالی)

دامنه تابع f به صورت $\{0\} - [-3, 3]$ است. این بازه شامل اعداد صحیح $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ است.

(ریاضیات ۲- توابع خاص - نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

(عادل مسینی)

$$\frac{\sqrt[5]{8} + (2\sqrt[5]{4\sqrt{2}})^{\frac{5}{3}}}{(54)^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{16}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{6}} + (2(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{5}{3}}}{(2 \times 3^3)^{\frac{1}{3}} - (2^4)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{5}{2}}}{3 \times 2^3 - 2 \times 2^3} = \frac{2^{\frac{1}{2}}(1 + 2^2)}{2^3} = 5 \times 2^{\frac{1}{2} - 3} = 5 \times 2^{-\frac{5}{2}} = 5\sqrt[2]{2}$$

(ریاضیات ۲- الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

(عمید علیزاده)

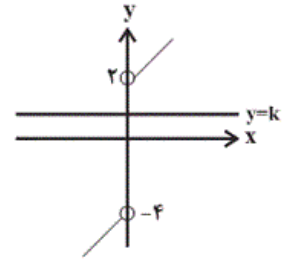
شماره شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد چوب کبریت‌ها	۵	۱۱	۱۹		
الگو	$3+2$	$8+3$	$15+4$		$n(n+2) + (n+1)$

$$\Rightarrow t_n = n^2 + 3n + 1 \Rightarrow t_{10} = 100 + 30 + 1 = 131$$

(ریاضیات ۲- الگو و دنباله: صفحه‌های ۲ تا ۶)

(سعید علم‌پور)

تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم.



$$y = \begin{cases} x-4; & x < 0 \\ x+2; & x > 0 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که خط $y = k$ با شرط $k \in [-4, 2]$ ، نمودار تابع را قطع نمی‌کند، پس بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با: $2 - (-4) = 6$.

(ریاضیات ۲- توابع فاص - نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عرفان صادقی)

با توجه به اینکه نقاط $(2, 0)$ و $(0, -4)$ روی خط مورد نظر قرار دارند، معادله خط به صورت $y = 2x - 4$ است و داریم:

$$p(x) = \frac{2x-4}{-4x+2} = \frac{x-2}{-2x+1}$$

جدول تعیین علامت عبارت $p(x)$ به صورت زیر است:

		$\frac{1}{2}$		۲	
		$\frac{1}{2}$			
$x-2$	-	•	-	•	+
$-2x+1$	+	•	-	•	-
$p(x)$	-	•	+	•	-
		$\frac{1}{2}$		۲	
$p(x) \geq 0$		→ $x \in (\frac{1}{2}, 2]$			

(ریاضیات ۲- توابع فاص - نامعادله و تعیین علامت، صفحه‌های ۷۳ تا ۷۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{cases} p(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{4} - \frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m < \frac{5}{2} & (1) \\ p(2) = 2m + 5 < 0 \Rightarrow m < -\frac{5}{2} & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} m \in (-\infty, -\frac{5}{2})$$

دقت کنید برای این بازه شرط وجود دو جواب حقیقی متمایز (یعنی $\Delta > 0$) نیز برقرار خواهد بود.

(ریاضیات ۲- توابع خاص- نامعادله و تعیین علامت، صفحه‌های ۷۹ تا ۸۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سعید علم‌پور)

۸۳- ریاضیات ۲

$$a_1 = -2$$

$$a_4 = (a_2)^2 \Rightarrow a_1 q^3 = a_1^2 q^2 \xrightarrow{a_1 = -2, q \neq 0} a_1 = q = -2$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{-2(1-(-2)^{10})}{1+2} = \frac{-2(-1023)}{3} = 682$$

(مسئله - تناسب جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲ تا ۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی شهرابی)

۸۴- ریاضیات ۲

با استفاده از قضیه تقسیم، $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x) = (2x^2 - 2)Q(x) + 5x + 2$$

باقی‌مانده $f(x-2)$ بر $x-3$ برابر است با $f(1) = f(3-2)$.

$$\Rightarrow f(1) = 5 + 2 = 7$$

(مسئله - تناسب جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۶ و ۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

a و a^2 جواب‌های معادله هستند، پس داریم:

$$\Rightarrow S = a + a^2 = -a \Rightarrow a^2 + 2a = a(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 0 \end{cases}$$

$a = 0$ غیرقابل قبول است، زیرا a و a^2 برابر خواهند شد.

$$P = a \cdot a^2 = b \xrightarrow{a=-2} b = -8 \Rightarrow a - b = 6$$

(مسئله‌ها - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۴

۳ ✓

۲

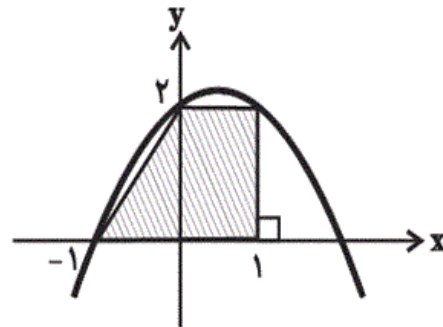
۱

$$y = 2 + x - x^2 = (1+x)(2-x)$$

عرض از مبدأ سهمی و ارتفاع ذوزنقه برابر ۲ است و همچنین $x = 2$ و $x = -1$ طول نقاط برخورد سهمی با محور طول‌ها هستند. بنابراین برای به دست آوردن طول قاعده‌های ذوزنقه، کافی است طول نقطه (نقاط) برخورد سهمی را با خط $y = 2$ به دست آوریم:

$$2 + x - x^2 = 2 \Rightarrow x - x^2 = x(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

داریم:



$$\Rightarrow S = \frac{(2+1)}{2} \times 2 = 3$$

(مسئله‌ها - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات، صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سعید فانجانی)

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 6x + 9} - 3\left(\frac{x+1}{x-3}\right) + 2 = 0$$

$$\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^2 - 3\left(\frac{x+1}{x-3}\right) + 2 = 0 \xrightarrow{\frac{x+1}{x-3} = t} t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t-1)(t-2) = 0 \Rightarrow t = 1, 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-3} = 2 \Rightarrow 2x - 6 = x + 1 \Rightarrow x = 7 \\ \frac{x+1}{x-3} = 1 \Rightarrow x - 3 = x + 1 \Rightarrow -3 = 1 \text{ ق.غ.} \end{cases}$$

(حسابان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(میلاز منصوره)

واضح است که باید $x \geq 0$ باشد. حال قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = T$$

$$\sqrt{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \frac{1}{T}$$

بنابراین داریم:

در نتیجه معادله به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$T + \frac{1}{T} = 5 \Rightarrow T^2 + \frac{1}{T^2} + 2 = 25$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 23$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x+1} = 23$$

این معادله فقط یک جواب مثبت دارد.

(حسابان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

(عمید علیزاده)

$$\left| 2x - \frac{x+a}{3} \right| < x \Rightarrow \left| \frac{\Delta x - a}{3} \right| < x \Rightarrow |\Delta x - a| < 3x$$

$$\Rightarrow -3x < \Delta x - a < 3x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x < \Delta x - a \Rightarrow 4x > a \Rightarrow x > \frac{a}{4} \\ \Delta x - a < 3x \Rightarrow 2x < a \Rightarrow x < \frac{a}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a > 0} \frac{a}{4} < x < \frac{a}{2} \quad (1)$$

$$\left| x - \frac{\Delta}{4} \right| < b \xrightarrow{b > 0} -b < x - \frac{\Delta}{4} < b$$

$$\Rightarrow -b + \frac{\Delta}{4} < x < b + \frac{\Delta}{4} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} \frac{a}{4} = -b + \frac{\Delta}{4} \\ \frac{a}{2} = b + \frac{\Delta}{4} \end{cases} \Rightarrow a = 4, b = \frac{3}{4}$$

(مسئله - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات، صفحه‌های ۳۹ و ۴۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(مقدار منجمدی)

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^r \xrightarrow{a=r+E} S = \frac{\sqrt{3}}{4} (r+E)^r = \frac{\sqrt{3}}{4} (4 + 4E + E^2)$$

از E^2 صرف نظر می‌کنیم. بنابراین:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (4 + 4E) \Rightarrow S = \sqrt{3} (1 + E)$$

$$S = \sqrt{3} + \sqrt{3}E \Rightarrow S = \sqrt{3} + E_1$$

(آمار و مدل‌سازی - اندازه‌گیری و مدل‌سازی: صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مهردار ملونری)

$$C = \frac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{تعداد دسته‌ها}} = \frac{21}{7} = 3$$

۲ = کوچک‌ترین داده

$$\Rightarrow \text{مرکز دسته اول: } x_1 = 2 + \frac{C}{2} = 2 + 1.5 = 3.5$$

$$\Rightarrow \text{مرکز دسته ششم: } x_6 = x_1 + (6-1)C$$

$$= 3.5 + 5(3) = 18.5$$

(آمار و مدل‌سازی - دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۴۲)

۴

۳

۲

۱

(مهردار ملونری)

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{15 \times 173 + 10 \times 168}{15 + 10}$$

$$= \frac{3 \times 173 + 2 \times 168}{5} = \frac{519 + 336}{5} = \frac{855}{5} = 171 \text{ cm}$$

(آمار و مدل‌سازی - شافص‌های مرکزی؛ صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۲)

۴

۳

۲

۱

(میثم همزه‌لویی)

می‌دانیم که مساحت زیر نمودار مستطیلی یک سری داده آماری، برابر مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی آن داده‌هاست. از طرفی اختلاف بین مرکزهای دو دسته متوالی در نمودار چندبر فراوانی، برابر طول دسته‌ها در نمودار مستطیلی است.

$$6 = 8 - 2 = \text{طول دسته‌ها در نمودار مستطیلی}$$

$$72 = \text{فراوانی کل} \times \text{طول دسته‌ها} = \text{مساحت زیر نمودار مستطیلی}$$

$$\Rightarrow 6 \times (\text{فراوانی کل}) = 72 \Rightarrow \text{فراوانی کل} = 12$$

$$12 = \text{فراوانی تجمعی دسته آخر} = \text{فراوانی کل}$$

(آمار و مدل‌سازی - نمودارها و تحلیل داده‌ها؛ صفحه‌های ۸۲ تا ۹۱)

۴

۳

۲

۱

(رضا عباسی اصل)

در نمودار دایره‌ای، زاویه مرکزی هر دسته متناسب با فراوانی مطلق آن دسته است.

$$\begin{cases} \hat{B} = 2\hat{A} \\ \hat{C} = 3\hat{A} \\ \hat{D} = 6\hat{A} \end{cases} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + 2\hat{A} + 3\hat{A} + 6\hat{A} = 360^\circ$$

۴

۳

۲

۱

(علیرضا شریف فطیعی)

تعداد داده‌ها فرد است، پس عدد وسط یعنی ۸/۵ میانه است. ۸/۵ = میانۀ

$$\bar{x} = \frac{6 \times 8 + 3 \times 9 + 2 \times 10 + 4 \times 0/1 + 2 \times 0/2 + 2 \times 0/5}{11} = \frac{96/8}{11} = 8/8$$

قدر مطلق اختلاف میانگین و میانۀ برابر ۰/۳ است. ۸/۸ - ۸/۵ = ۰/۳

(آمار و مدل‌سازی - شافص‌های مرکزی؛ صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۱۸ و ۱۲۵ تا ۱۲۹)

۴

۳

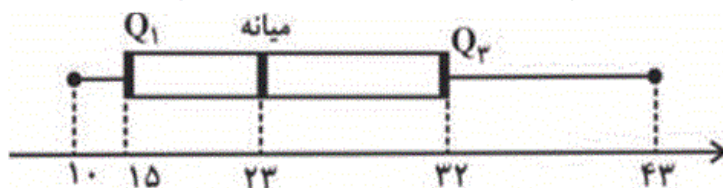
۲

۱

(هنریک سرکیسیان)

ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم تا میانۀ و چارک‌ها مشخص شوند.

۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۸, ۱۹, ۲۳, ۲۵, ۲۷, ۳۱, ۳۲, ۳۴, ۴۱, ۴۳



در نمودار جعبه‌ای نسبت طول دو بخش مورد نظر برابر است با:

$$\frac{32 - 23}{23 - 15} = \frac{9}{8}$$

(آمار و مدل‌سازی - شافص‌های مرکزی؛ صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۴)

۴

۳

۲

۱

مجموع اختلاف از میانگین‌ها همواره صفر است، پس:

$$۳ - ۴ + a + ۵ - ۲ = ۰ \Rightarrow a = -۲$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{۹ + ۱۶ + ۴ + ۲۵ + ۴}{۵} = \frac{۵۸}{۵} = ۱۱/۶$$

(آمار و مدل‌سازی - شافص‌های پراکنندگی: صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهرداد ملونری)

$$\begin{cases} \overline{4X+2} = 4\bar{X} + 2 = 4 \times 2 + 2 = 10 \\ \sigma_{4X+2} = 4\sigma_X = 4 \times 0/3 = 1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow CV = \frac{\sigma_{4X+2}}{4X+2} = \frac{1/2}{10} = 0/12$$

(آمار و مدل‌سازی - شافص‌های پراکنندگی: صفحه‌های ۱۵۶ تا ۱۵۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(آرش رحیمی)

$$\sigma^2 = ۲, CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \sqrt{12}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \Rightarrow ۲ = \frac{\sum x_i^2}{۵} - (\sqrt{12})^2$$

$$\Rightarrow ۲ = \frac{\sum x_i^2}{۵} - ۱۲ \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{۵} = ۱۴$$

$$\Rightarrow \sum x_i^2 = ۷۰$$

(آمار و مدل‌سازی - شافص‌های پراکنندگی: صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۶۰)

 ۴

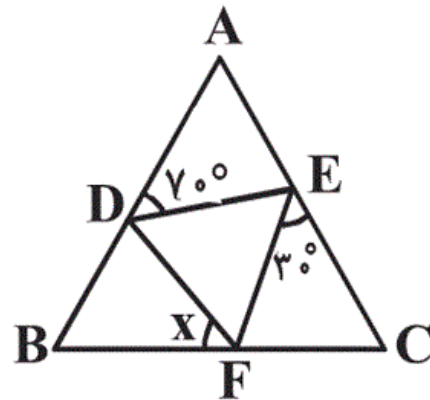
 ۳

 ۲

 ۱

چون مثلث DEF متساوی الاضلاع است، در نتیجه $\hat{DEF} = 60^\circ$ و لذا

$$\hat{AED} = 90^\circ$$



از این‌جا نتیجه می‌شود که $\hat{A} = 20^\circ$. از طرفی

$$\hat{B} = \hat{C} = 80^\circ \text{ در نتیجه } AB = AC \text{ و } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

بنابراین :

$$\hat{EFC} = 180^\circ - (80^\circ + 30^\circ) = 70^\circ$$

$$\Rightarrow x = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 50^\circ$$

(هندسه ۱- هندسه و استدلال: صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

 ۴

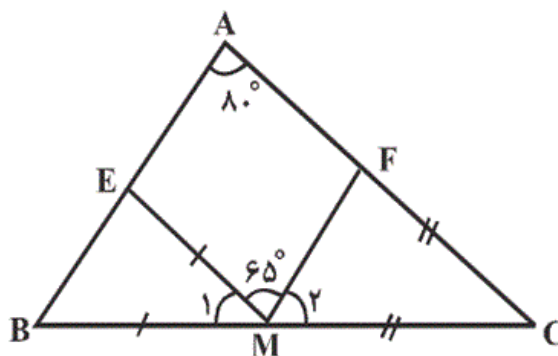
 ۳

 ۲

 ۱

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle MBE : \hat{M}_1 = 180^\circ - 2\hat{B} \\ \triangle MCF : \hat{M}_2 = \frac{180^\circ - \hat{C}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} \\ \hat{M}_1 + 65^\circ + \hat{M}_2 = 180^\circ \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow 2\hat{B} + \frac{\hat{C}}{2} = 155^\circ \quad (1)$$



$$\triangle ABC : \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} = 100^\circ \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \hat{B} = 70^\circ, \hat{C} = 30^\circ$$

(هندسه ۱- هندسه و استرلاال: صفحه‌های ۱۱ و ۲۲)

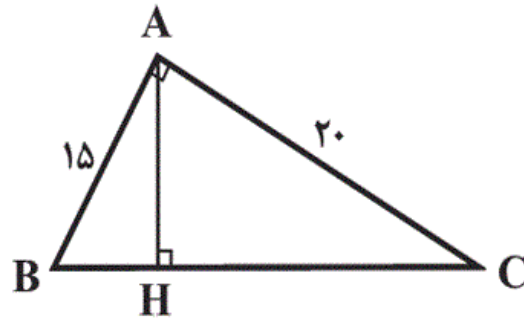
۴

۳

۲ ✓

۱

اگر طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه را $a+d$ و a و $a-d$ در نظر بگیریم، داریم:



$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2 \Rightarrow 2a^2 - 2ad + d^2 = a^2 + 2ad + d^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 4ad \xrightarrow{a \neq 0} a = 4d \xrightarrow{d=5} a = 20$$

بنابراین طول اضلاع مثلث عبارت‌اند از ۱۵، ۲۰ و ۲۵. داریم:

$$AC^2 = CH \cdot BC \Rightarrow CH = \frac{20 \times 20}{25} = 16$$

(هندسه ۱- مساحت و قضیه فیثاغورس: صفحه‌های ۵۷ و ۶۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\left. \begin{array}{l} \text{میانۀ AM} \Rightarrow S_{AMB} = S_{AMC} = \frac{1}{2} S_{ABC} \\ \text{میانۀ MN} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{2} S_{AMC} = \frac{1}{4} S_{ABC} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow S_{ANMB} = \frac{3}{4} S_{ABC} \quad (\text{I})$$

$$\text{میانۀ NP} \Rightarrow S_{NPC} = \frac{1}{2} S_{MNC} = \frac{1}{4} S_{AMC} = \frac{1}{8} S_{ABC} \quad (\text{II})$$

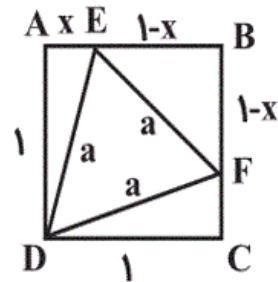
$$(\text{I}), (\text{II}) \Rightarrow \frac{S_{NPC}}{S_{ANMB}} = \frac{\frac{1}{8} S_{ABC}}{\frac{3}{4} S_{ABC}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$$

(هندسه ۱- مساحت و قضیه فیثاغورس: صفحه ۵۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱


$$a^2 = x^2 + 1 = (2 - \sqrt{3})^2 + 1 = 8 - 4\sqrt{3}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (8 - 4\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3$$

(هندسه ۱- مساحت و قضیه فیثاغورس: صفحه‌های ۵۳ تا ۶۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

دو مثلث قائم‌الزاویه IOE و TLE به حالت تساوی دو زاویه (زاویه قائمه و زاویه‌های متقابل به رأس E) با هم متشابه‌اند، لذا داریم:

$$\frac{IE}{ET} = \frac{OE}{LE} \Rightarrow \frac{IE}{5} = \frac{4}{LE} \Rightarrow IE \cdot LE = 20 \quad (1)$$

چون $IL = IE + LE = 12$ ، پس با فرض $LE = x$ داریم:

$$\xrightarrow{(1)} (12 - x) \cdot x = 20 \Rightarrow x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 10)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} LE = x = 2 \\ LE = x = 10 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$\triangle TLE \text{ در فیثاغورس: } LT = \sqrt{ET^2 - LE^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$$

(هندسه ۱- تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مسئله مهم‌گیریمی)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{MM'}{BC} = \frac{2}{5} \\ \frac{AN}{AB} = \frac{AN'}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{NN'}{BC} = \frac{3}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{MM' + NN'}{BC} = 1$$

(هندسه ۱- تشابه: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$S_1 = S_2 \Rightarrow 6k^2 = 16a^2 \Rightarrow 3k^2 = 8a^2 \Rightarrow \sqrt{3}k = 2\sqrt{2}a$$

از طرفی قطر مکعبی به طول یال k برابر است با $d = \sqrt{3}k$ و در مکعب

مستطیل قطر برابر است با:

$$d' = \sqrt{(2a)^2 + a^2 + (2a)^2} = \sqrt{9a^2} = 3a$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d'} = \frac{\sqrt{3}k}{3a} = \frac{2\sqrt{2}a}{3a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(هندسه ۱- شکل‌های فضایی؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۶)

۴

۳ ✓

۲

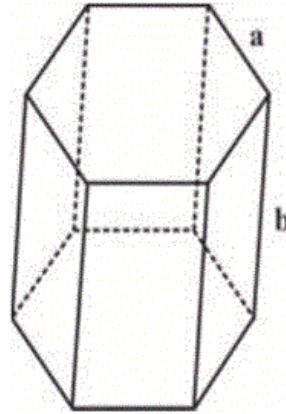
۱

(هندیک سرکیسیان)

۱۲۹

اگر اندازه یال جانبی را b و ضلع قاعده را a در نظر بگیریم، طبق اطلاعات

مسئله داریم:



$$2(\text{مساحت قاعده}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 6(\text{مساحت یک وجه جانبی})$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 6ab \Rightarrow 3a\sqrt{3} = \frac{6b}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 9a = 6b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$$

(هندسه ۱- شکل‌های فضایی؛ صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۸)

۴ ✓

۳

۲

۱



$$\triangle OHA: 6^2 = 4^2 + r^2 \Rightarrow r = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت جانبی استوانه} : S = 2\pi rh = 2\pi \times 2\sqrt{5} \times 8 = 32\sqrt{5}\pi$$

(هندسه ۱- شکل‌های فضایی: صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۸ و ۱۳۶ تا ۱۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱