حسابان ۱ ، انواع تابع - ۵ سوال -

۸۷- تابع $f(x)=[x-۲]+[x+\frac{۵}{۲}]-[x-\frac{۳}{۲}]$ در بازهٔ $[-۲ , ۳]$ به‌ترتیب از راست به چپ دارای چند مقدار متمایز است و مجموع این مقادیر کدام است؟ ($[\ ]$ ، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۶ ، ۲۱
۲) ۵ ، ۱۰
۳) ۶ ، ۱۵
۴) ۵ ، ۱۵

۸۲- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=۱-\sqrt{x+۱}$ روی آن مقادیر مثبت دارد، کدام است؟

۱) $[-۱ , -\frac{۱}{۳})$
۲) $[-۱ , -\frac{۱}{۴})$
۳) $[-۱ , ۰)$
۴) $(۰ , ۱)$

۸۳- در کدام گزینه توابع f و g با هم برابر هستند؟

۱) $f(x)=(x-۳)\sqrt{x+۲}$ ، $g(x)=\sqrt{(x-۳)^۲(x+۲)}$

۲) $f(x)=\sqrt{x+۱}-\sqrt{۱-x}$ ، $g(x)=\frac{۲x}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{۱-x}}$

۳) $f(x)=\sqrt{x+۱}+\sqrt{۱-x}$ ، $g(x)=\frac{۲x}{\sqrt{x+۱}-\sqrt{۱-x}}$

۴) $f(x)=\sqrt{۱+x}$ ، $g(x)=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{۱-x}}$

۸۴- اگر توابع $g(x)=\frac{x-۱}{x^۲-bx+a}$ و $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ برابر باشند، به ازای چه مقدار k توابع $h(x)=k$ و $e(x)=[x]$ در بازهٔ $[a , b)$ بر هم منطبق می‌شوند؟ ($[\ ]$ ، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸۵- برد تابع $\begin{cases} f:\mathbb{R}-[-\frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۲}]\to \mathbb{R} \\ f(x)=\frac{۱}{x} \end{cases}$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

حسابان ۱ ، وارون تابع - ۴ سوال -

۸۸- کدام تابع زیر یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=x^۲-۲x$
۲) $f(x)=|\sqrt{x}-۱|$
۳) $f(x)=x+\sqrt{x}$
۴) $f(x)=x+|x-۳|$

۸۹- تابع خطی f و وارون آن یکدیگر را هیچگاه قطع نمی‌کنند. اگر $f(۲) = ۵$ باشد، $f(۶)$ کدام است؟ (دامنهٔ تابع f مجموعهٔ اعداد حقیقی است.)

۱) ۲ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۶

۹۰- نمودار تابع $f(x)$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا بر تابع $g(x) = \sqrt{x}$ منطبق شود. نمودار وارون تابع $f(x)$ با تابع $f(x)$ در کدام نقطه برخورد می‌کنند؟

۱) $(۱,۱)$ ۲) $(۲,۲)$ ۳) $(-۱,-۱)$ ۴) $(۳,۳)$

۹۱- وارون تابع $f(x) = ۳x + |x - ۳|$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+۳}{۴} & x \geq ۹ \\ \dfrac{x-۳}{۲} & x < ۹ \end{cases}$

۲) $f^{-۱}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+۴}{۳} & x \geq ۹ \\ \dfrac{x+۲}{۳} & x < ۹ \end{cases}$

۳) $f^{-۱}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+۴}{۳} & x < ۹ \\ \dfrac{x+۲}{۳} & x \geq ۹ \end{cases}$

۴) $f^{-۱}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-۳}{۲} & x \geq ۹ \\ \dfrac{x+۳}{۴} & x < ۹ \end{cases}$

حسابان ۱ ، اعمال روي توابع - ۶ سوال -

۹۲- اگر $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲} + \sqrt{x + ۳}$ ، $g(x) = \sqrt{۴ - x} - \sqrt{۴ - x^۲}$ و دامنهٔ تابع $f + g$ بازهٔ $[a , b]$ باشد، حاصل ab کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۶ ۳) -۱۲ ۴) -۱۶

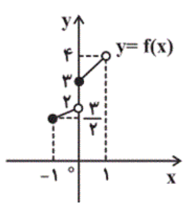
۹۳- اگر $f(x) = ۱ - ۲x$ و $g(x) = ax - ۱$ باشند، به ازای کدام مقدار a دو تابع $g(x)$ و $g(f(x))$ روی محور x ها متقاطع‌اند؟ $(a \neq ۰)$

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) ۳

۹۴- اگر $(fog)(x) = \dfrac{x}{x^۲ + ۱}$ و $f(x) = x + ۱$ باشد، ضابطهٔ تابع $g(x)$ کدام است؟

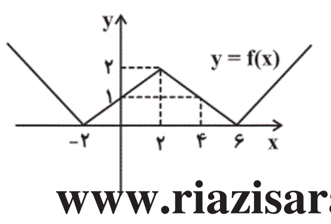
۱) $\dfrac{x - ۱}{x^۲ - ۲x + ۲}$ ۲) $-\dfrac{x^۲}{x^۲ + x + ۱}$ ۳) $\dfrac{۱}{x + ۱}$ ۴) $\dfrac{-x^۲ + x - ۱}{x^۲ + ۱}$

۹۵- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، مجموع جواب‌های معادلهٔ $(fof^{-۱})(x) = x^۲ - ۳x + ۳$ کدام است؟



۱) ۳
۲) -۴
۳) ۴
۴) معادله جواب ندارد.

۸۶- شکل زیر مربوط به نمودار تابع $y = f(x)$ است. مساحت سطح محدود به نمودار تابع $y = [f(x)]$ و محور x ها در بازهٔ $[-۲ , ۶]$ کدام است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۲
۴) ۶

۸۱- اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه با توجه به تعریف جزء صحیح کدام گزاره همواره صحیح است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $[x+y]=[x]+[y]$
۲) $[xy]=[x][y]$
۳) $[x-y]=[x]-[y]$
۴) $[x+۱]=[x]+۱$

حسابان ۱ ، تابع نمايي - ۵ سوال -

۹۶- برد تابع $f(x)=\dfrac{۴^x-۲^{x+۱}-۳}{۲^x+۱}$ کدام است؟

۱) $(-۳\,,+\infty)$
۲) $[-۳\,,+\infty)$
۳) $(-۱\,,+\infty)$
۴) $[-۱\,,+\infty)$

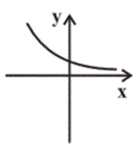
۹۷- خط $y=\sqrt{۲۸}$، نمودار تابع $y=۲^x$ را در کدام بازه قطع می‌کند؟

۱) $(۱\,,۲)$
۲) $(۲\,,۳)$
۳) $(۳\,,۴)$
۴) $(۴\,,۵)$

۹۸- در کدام بازه، نمودار تابع $y_۱=۲^{x+۱}$ بالاتر از نمودار تابع $y_۲=(\frac{۱}{۲})^x$ است؟

۱) $(-۲\,,+\infty)$
۲) $(-\infty\,,-۲)$
۳) $(-\frac{۱}{۲}\,,+\infty)$
۴) $(-\infty\,,-\frac{۱}{۲})$

۹۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=(\frac{۳a-۱}{a})^x$ به شکل مقابل است؟



۱) $(-\infty\,,۰)$
۲) $(\frac{۱}{۳}\,,+\infty)$
۳) $(۰\,,\frac{۱}{۲})$
۴) $(\frac{۱}{۳}\,,\frac{۱}{۲})$

۱۰۰- معادلهٔ $|۲^x-۱|=\sqrt{x+۱}$ چند جواب دارد؟

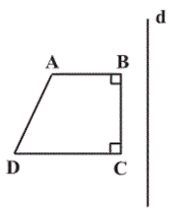
۱) دو جواب مثبت
۲) فقط یک جواب مثبت
۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی
۴) جواب ندارد.

هندسهٔ ۲ ، تبديل هاي هندسي - ۴ سوال -

۱۲۷- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، $BC=۶$ و $\hat{B}=۵\hat{C}$ است. اگر مثلث $A'B'C'$ تبدیل یافتهٔ مثلث ABC تحت تبدیل طولپای T باشد، مساحت مثلث $A'B'C'$ کدام است؟

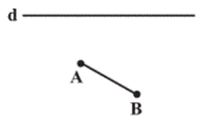
۱) $\frac{۹}{۲}$
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۱۲

۱۲۸- در شکل زیر ضلع BC از چهارضلعی $ABCD$ موازی خط d است. در بازتاب چهارضلعی $ABCD$ نسبت به خط d، شیب چه تعداد از اضلاع این چهارضلعی تغییر نمی‌کند؟



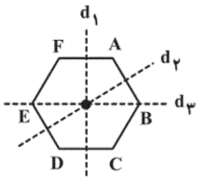
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

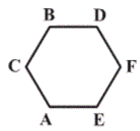
۱۲۹- در شکل زیر فاصلهٔ نقطه‌های A و B از خط d به‌ترتیب ۲ و ۵ است. اگر A' و B' به‌ترتیب بازتاب نقاط A و B نسبت به خط d و فاصلهٔ وسط پاره‌خط AA' تا وسط پاره‌خط BB' برابر $\frac{۳}{۲}$ باشد، مساحت چهارضلعی $AA'B'B$ کدام است؟

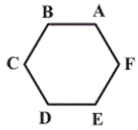


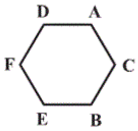
۱) ۸/۵
۲) ۱۰/۵
۳) ۱۲/۵
۴) ۱۴/۵

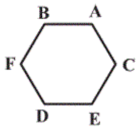
۱۳۰- بازتاب شش‌ضلعی منتظم ABCDEF را به‌ترتیب نسبت به محورهای d_1، d_2 و d_3 به دست می‌آوریم. شکل نهایی کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


هندسه‌ي ۲ ، چندضلعي محاطي و محيطي - ۶ سوال -

۱۲۱- کدام‌یک از چهارضلعی‌های زیر همواره محیطی است؟

۱) متوازی‌الاضلاع
۲) مستطیل
۳) کایت
۴) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

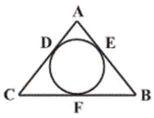
۱۲۲- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، $AB=۵$ و $AC=۱۲$ است. شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع AB کدام است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۳

۱۲۳- نسبت مساحت نه ضلعی منتظم محاطی دایره‌ای به شعاع ۵ به مساحت نه ضلعی منتظم محیطی این دایره کدام است؟

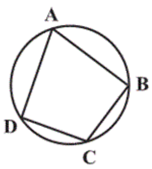
۱) $\cos^۲ ۴۰^\circ$
۲) $۵\cos^۲ ۲۰^\circ$
۳) $۵\cos^۲ ۴۰^\circ$
۴) $\cos^۲ ۲۰^\circ$

۱۲۴- مطابق شکل زیر دایرهٔ محاطی مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$، در نقاط D، E و F بر اضلاع این مثلث مماس است. اگر $AE=۲$ و $CF=۸$ باشد، شعاع دایره کدام است؟



۱) $\frac{۱۶}{۳}$
۲) $\frac{۸}{۳}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۱۴}{۳}$

۱۲۵- در شکل زیر $\hat{C}=۲\hat{A}$، $AB=AD=۳$ و $BC=CD$ است. شعاع دایره کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) ۱
۴) ۲

۱۲۶- دایرهٔ محاطی مثلثی با ارتفاع‌های $h_a=۳$، $h_b=۵$ و $h_c=۶$ را رسم کرده و درون آن شش‌ضلعی منتظمی محاط می‌کنیم. مساحت شش‌ضلعی منتظم کدام است؟

۱) $\frac{۳۰۰\sqrt{۳}}{۹۸}$
۲) $\frac{۲۰۰\sqrt{۳}}{۴۹}$
۳) $\frac{۱۰۰\sqrt{۳}}{۹۸}$
۴) $\frac{۳۰۰\sqrt{۳}}{۴۹}$

۱۰۷- اگر $[\frac{x}{3}]=1$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{x^2-6x+9}-2\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}$ کدام است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر　۲) $-x+2$　۳) $-x-2$　۴) $2x$

۱۰۸- تابع $f(x)=[x-2]+[x+\frac{5}{2}]-[x-\frac{3}{2}]$ در بازهٔ $[-2, 3]$ به‌ترتیب از راست به چپ دارای چند مقدار متمایز است و مجموع این مقادیر کدام است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۶ ، ۲۱　۲) ۵ ، ۱۰　۳) ۶ ، ۱۵　۴) ۵ ، ۱۵

۱۰۲- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=1-\sqrt{x+1}$ روی آن مقادیر مثبت دارد، کدام است؟

۱) $[-1, -\frac{1}{3})$　۲) $[-1, -\frac{1}{4})$　۳) $[-1, 0)$　۴) $(0, 1)$

۱۰۳- در کدام گزینه توابع f و g با هم برابر هستند؟

۱) $f(x)=(x-3)\sqrt{x+2}$ ، $g(x)=\sqrt{(x-3)^2(x+2)}$

۲) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}$ ، $g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}$

۳) $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$ ، $g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$

۴) $f(x)=\sqrt{1+x}$ ، $g(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x}}$

۱۰۴- اگر توابع $g(x)=\frac{x-1}{x^2-bx+a}$ و $f(x)=\frac{1}{x-1}$ برابر باشند، به ازای چه مقدار k توابع $h(x)=k$ و $e(x)=[x]$ در بازهٔ $[a , b)$ بر هم منطبق می‌شوند؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۱۰۵- برد تابع $\begin{cases} f:\mathbb{R}-[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\to\mathbb{R} \\ f(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۱۰۹- تابع خطی f و وارون آن یکدیگر را هیچگاه قطع نمی‌کنند. اگر $f(2)=5$ باشد، $f(6)$ کدام است؟ (دامنهٔ تابع f مجموعهٔ اعداد حقیقی است.)

۱) ۲　۲) ۷　۳) ۹　۴) ۶

۱۱۰- نمودار تابع $f(x)$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا بر تابع $g(x)=\sqrt{x}$ منطبق شود. نمودار وارون تابع $f(x)$ با تابع $f(x)$ در کدام نقطه برخورد می‌کنند؟

۱) $(1, 1)$　۲) $(2 , 2)$　۳) $(-1 , -1)$　۴) $(3 , 3)$

۱۱۱- وارون تابع $f(x)=۳x+|x-۳|$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\begin{cases} \dfrac{x+۳}{۴} & x\geq ۹ \\ \dfrac{x-۳}{۲} & x<۹ \end{cases}$

۲) $f^{-۱}(x)=\begin{cases} \dfrac{x+۴}{۳} & x\geq ۹ \\ \dfrac{x+۲}{۳} & x<۹ \end{cases}$

۳) $f^{-۱}(x)=\begin{cases} \dfrac{x+۴}{۳} & x<۹ \\ \dfrac{x+۲}{۳} & x\geq ۹ \end{cases}$

۴) $f^{-۱}(x)=\begin{cases} \dfrac{x-۳}{۲} & x\geq ۹ \\ \dfrac{x+۳}{۴} & x<۹ \end{cases}$

حسابان۱ - سوالات موازي ، اعمال روي توابع - ۱۱ سوال -

۱۱۲- اگر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{(a-۱)x}{x-۱}$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقارن باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۳

۱۱۳- اگر $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}+\sqrt{x+۳}$ ، $g(x)=\sqrt{۴-x}-\sqrt{۴-x^۲}$ و دامنهٔ تابع $f+g$ بازهٔ $[a\,,b]$ باشد، حاصل ab کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۶ ۳) -۱۲ ۴) -۱۶

۱۱۴- اگر $f=\{(۱\,,m)\,,(۲\,,n)\,,(-۱\,,p)\}$ ، $g=\{(۲\,,a)\,,(-۱\,,b)\,,(۴,z)\}$ ، $(\dfrac{۲f+g}{f.g})(۲)=-\dfrac{۱}{۲}$ و $(\dfrac{f-g}{۲f.g})(۲)=\dfrac{۵}{۸}$ باشد، مقدار $(\dfrac{f}{g})(۲)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{۴}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۴}$

۱۱۵- اگر $f(x)=۱-۲x$ و $g(x)=ax-۱$ باشند، به ازای کدام مقدار a دو تابع $g(x)$ و $g(f(x))$ روی محور x ها متقاطع‌اند؟ $(a\neq ۰)$

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) ۳

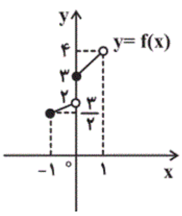
۱۱۶- تابع f روی اعداد طبیعی به صورت $f(n)=\begin{cases} n+۳ & \text{فرد ، } n \\ \dfrac{n}{۲} & \text{زوج ، } n \end{cases}$ تعریف می‌شود. به ازای کدام عدد فرد k، رابطهٔ $(fof)(k)=۲۷$ برقرار است؟

۱) ۵۳ ۲) ۲۱ ۳) ۵۱ ۴) ۲۷

۱۱۷- اگر $(fog)(x)=\dfrac{x}{x^۲+۱}$ و $f(x)=x+۱$ باشد، ضابطهٔ تابع $g(x)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{x-۱}{x^۲-۲x+۲}$ ۲) $-\dfrac{x^۲}{x^۲+x+۱}$ ۳) $\dfrac{۱}{x+۱}$ ۴) $\dfrac{-x^۲+x-۱}{x^۲+۱}$

۱۱۸- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، مجموع جواب‌های معادلهٔ $(fof^{-۱})(x)=x^۲-۳x+۳$ کدام است؟



۱) ۳
۲) -۴
۳) ۴
۴) معادله جواب ندارد.

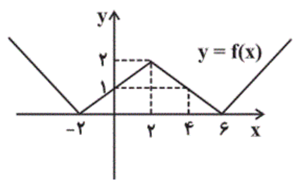
۱۱۹- اگر $f(x)=\frac{3}{x-1}$ و $g(x)=[x]$ باشند، تابع $\frac{f}{g}$ در چند نقطه با طول صحیح تعریف نمی‌شود؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۲۰- اگر $f(x)=\sqrt{\frac{9-x^2}{x-1}}$ و $g(x)=[x]+[-x]$ باشند، دامنهٔ تابع fog کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $[3,+\infty)$ ۲) $[-3,3]$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۰۶- شکل مقابل مربوط به نمودار تابع $y=f(x)$ است. مساحت سطح محدود به نمودار تابع $y=[f(x)]$ و محور xها در بازهٔ $[-2,6]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۲
۴) ۶

۱۰۱- اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه با توجه به تعریف جزء صحیح کدام گزاره همواره صحیح است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

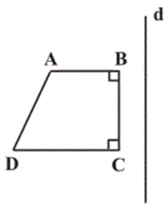
۱) $[x+y]=[x]+[y]$ ۲) $[xy]=[x][y]$
۳) $[x-y]=[x]-[y]$ ۴) $[x+1]=[x]+1$

هندسه۲- سوالات موازي ، تبديل هاي هندسي - ۲ سوال -

۱۴۷- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$)، $BC=6$ و $\hat{B}=5\hat{C}$ است. اگر مثلث $A'B'C'$ تبدیل یافتهٔ مثلث ABC تحت تبدیل طولپای T باشد، مساحت مثلث $A'B'C'$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

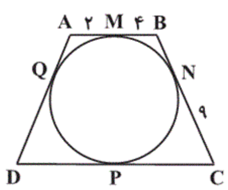
۱۴۸- در شکل زیر ضلع BC از چهارضلعی ABCD موازی خط d است. در بازتاب چهارضلعی ABCD نسبت به خط d، شیب چه تعداد از اضلاع این چهارضلعی تغییر نمی‌کند؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

هندسه۲- سوالات موازي ، چندضلعي محاطي و محيطي - ۸ سوال -

۱۴۹- ذوزنقهٔ ABCD محیطی است. طول DQ کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۱۶
۳) ۱۲
۴) ۲۴

۱۵۰- در مثلثی اندازهٔ یک ضلع $۶\sqrt{۲}$ و اندازهٔ زاویهٔ مقابل آن ۴۵° است. شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۴۱- کدام‌یک از چهارضلعی‌های زیر همواره محیطی است؟

۱) متوازی‌الاضلاع ۲) مستطیل ۳) کایت ۴) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

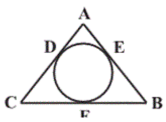
۱۴۲- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، $AB=۵$ و $AC=۱۲$ است. شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع AB کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

۱۴۳- نسبت مساحت نه ضلعی منتظم محاطی دایره‌ای به شعاع ۵ به مساحت نه ضلعی منتظم محیطی این دایره کدام است؟

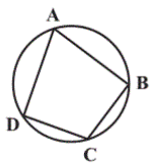
۱) $\cos^{۲} ۴۰^\circ$ ۲) $۵\cos^{۲} ۲۰^\circ$ ۳) $۵\cos^{۲} ۴۰^\circ$ ۴) $\cos^{۲} ۲۰^\circ$

۱۴۴- مطابق شکل زیر دایرهٔ محاطی مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$، در نقاط D، E و F بر اضلاع این مثلث مماس است. اگر $AE=۲$ و $CF=۸$ باشد، شعاع دایره کدام است؟



۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱۴}{۳}$

۱۴۵- در شکل زیر $\hat{C}=۲\hat{A}$، $AB=AD=۳$ و $BC=CD$ است. شعاع دایره کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) ۱
۴) ۲

۱۴۶- دایرهٔ محاطی مثلثی با ارتفاع‌های $h_a=۳$، $h_b=۵$ و $h_c=۶$ را رسم کرده و درون آن شش‌ضلعی منتظمی محاط می‌کنیم. مساحت شش‌ضلعی منتظم کدام است؟

۱) $\frac{۳۰۰\sqrt{۳}}{۹۸}$ ۲) $\frac{۲۰۰\sqrt{۳}}{۴۹}$ ۳) $\frac{۱۰۰\sqrt{۳}}{۹۸}$ ۴) $\frac{۳۰۰\sqrt{۳}}{۴۹}$

آمار و احتمال ، مباني احتمال - ۵ سوال -

۱۶۴- تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر عددی اول ظاهر شود، سه سکه و در غیر این صورت دو تاس دیگر پرتاب می‌کنیم. فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟

۱) ۱۰۴ ۲) ۱۱۲ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۲

۱۶۵- در پرتاب دو تاس با هم، اگر A پیشامد مجموع دو تاس کمتر از ۶، B پیشامد هر دو تاس فرد و C پیشامد رو شدن عدد ۱ در حداقل یکی از تاس‌ها باشد، آن‌گاه کدام رابطهٔ زیر درست است؟

۱) $A\cap B=A\cap C$ ۲) $B\cap C\subseteq A$ ۳) $A\cap C\subseteq B$ ۴) $A\cap B\subseteq C$

۱۶۶- اگر $P(B-A)=P(A)$ و $P(A\cup B)=0/8$ باشد، احتمال متمم پیشامد A کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

۱۶۷- شرکتی می‌خواهد از بین چند خانم و آقا با مدارک لیسانس و فوق لیسانس یک نفر را استخدام کند. اگر احتمال استخدام خانم ۴۵ درصد، استخدام با مدرک لیسانس ۳۵ درصد و استخدام آقا با مدرک لیسانس ۲۰ درصد باشد، احتمال این‌که خانمی با مدرک فوق لیسانس استخدام شود، چقدر است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳۰ ۳) ۰/۳۵ ۴) ۰/۴۰

۱۶۸- اگر $P(A-B)=\frac{1}{5}$ و $P(B-A)=\frac{2}{9}$ باشد، در این صورت مقدار $P(A)-P(B)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{45}$ ۲) $\frac{1}{45}$ ۳) $\frac{19}{45}$ ۴) $-\frac{19}{45}$

آمار و احتمال ، مجموعه - زیر مجموعه - ۱ سوال -

۱۶۳- فرض کنید $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}\,,|2x|\le 5\}$ و $B=\{-x\,|\,x\in\mathbb{Z}\,,|2x|<5\}$، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(A\cup B)\times(A\cap B)=A\times B$ ۲) $A\times B=A^2$

۳) $B^2-A^2=(B\cap A)\times(B\cap A)$ ۴) $A\times B=B\times A$

آمار و احتمال ، احتمال غیر هم شانس - ۲ سوال -

۱۶۹- سه فرد a، b و c در یک مسابقه شرکت کرده‌اند که تنها یک برنده دارد. اگر احتمال برد b، سه برابر a و احتمال برد c نصف b باشد، احتمال این‌که a یا c برنده شود، چقدر است؟

۱) $\frac{2}{11}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{5}{11}$ ۴) $\frac{5}{9}$

۱۷۰- در یک تجربهٔ تصادفی $S=\{x\,,y\,,\dots\,,z\}$ فضای نمونه است. اگر $P(x)\,,P(y)\,,\dots\,,P(z)$ یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند $(P(x)<P(z))$ به طوری‌که $P(x)=\frac{1}{12}$ و قدر نسبت $\frac{1}{30}$ باشد، تعداد پیشامدهای متمایزی که روی این فضای نمونه تعریف می‌شود کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۸ ۳) ۲۵۶ ۴) ۵۱۲

آمار و احتمال ، قوانین اعمال بین مجموعه ها (جبرمجموعه ها) - ۲ سوال -

۱۶۱- اگر به ازای $n=1,2,3$، $A_n=[n^2,\ 8n-2]$ باشد، مساحت نمودار $A_2^2-A_1\times A_3$ کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۹۰ ۳) ۸۰ ۴) ۷۵

۱۶۲- اگر $A=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,|m|<x\}$ ، $B=\{t\in\mathbb{Z}\,|\,t^3=t\}$ و $C=\{h\in\mathbb{Z}\,|\,h^2\le y\}$ سه مجموعهٔ ناتهی و $A\times B=B\times C$ باشد، $2x-y$ کدام است؟ $(x\,,y\in\mathbb{Z})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

هندسه ۲ - گواه ، تبدیل های هندسی - ۴ سوال -

۱۳۷- تابع M بین نقاط صفحه و نقاط خط l به‌صورت زیر تعریف شده است. کدام گزینه در مورد این تابع صحیح است؟

- اگر نقطهٔ A روی خط l باشد، آن‌گاه $M(A)=A$.
- اگر نقطهٔ A خارج خط l باشد، آن‌گاه $M(A)=A'$ که A' پای عمود A بر l می‌باشد.

۱) M تبدیل نیست.

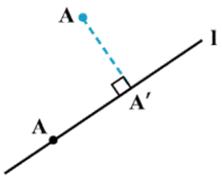
۲) M یک تبدیل است ولی طولپا نیست.

۳) M یک تبدیل طولپا است ولی شیب خط‌ها را ثابت نگه نمی‌دارد.

۴) M یک تبدیل طولپاست و شیب خط‌ها را ثابت نگه می‌دارد.

۱۳۸- مطابق شکل تابع M بین نقاط صفحه و نقاط خط l به‌صورت زیر تعریف شده است. M دارای چند نقطهٔ ثابت است؟

- اگر نقطهٔ A روی خط l باشد، آن‌گاه $M(A)=A$.
- اگر نقطهٔ A خارج خط l باشد، آن‌گاه $M(A)=A'$ که A' پای عمود A بر l می‌باشد.



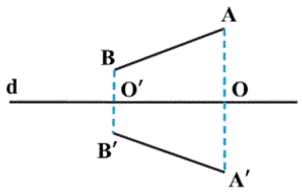
۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) بی‌شمار

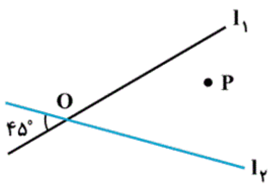
۱۳۹- در شکل زیر، پاره‌خط $A'B'$ بازتاب یافتهٔ پاره‌خط AB نسبت به خط d است. اگر امتداد پاره‌خط AB با خط d زاویهٔ ۶۰° بسازد و $AB+۲OO'+۳A'B'=۵$ باشد، اندازهٔ AB کدام است؟



۱) ۰/۵ ۲) ۱

۳) $\frac{۵}{۷}(۴-\sqrt{۳})$ ۴) $\frac{۵}{۷}(۴+\sqrt{۳})$

۱۴۰- در شکل زیر، بازتاب نقطهٔ P نسبت به خط l_1، نقطهٔ P_1 و بازتاب نقطهٔ P_1 نسبت به خط l_2، نقطهٔ P_2 است. هرگاه فاصلهٔ P تا O برابر ۴ باشد، طول PP_2 کدام است؟



۱) ۴

۲) ۸

۳) $۴\sqrt{۲}$

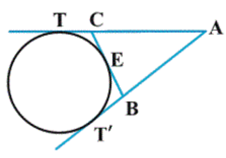
۴) $۴\sqrt{۳}$

هندسه ۲ - گواه ، چندضلعي محاطي و محيطي - ۶ سوال -

۱۳۱- دو زاویهٔ مجاور یک چهارضلعی محاطی ۸۰° و ۱۲۰° است. قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ دیگر کدام است؟

۱) ۲۰° ۲) ۴۰° ۳) ۵۰° ۴) ۳۰°

۱۳۲- از نقطهٔ ثابت A دو مماس AT و AT' بر دایره‌ای ثابت رسم شده‌اند و پاره خط متغیر BC بر دایره مماس است، به‌طوری که نقطهٔ B همواره روی AT' و نقطهٔ C همواره روی AT قرار دارد. محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}AT$ ۲) AT

۳) $\frac{۳}{۲}AT$ ۴) $۲AT$

۱۳۳- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ضلع آن به‌ترتیب ۵ و ۳ است، دایرهٔ محاطی داخلی در نقاط A و B بر ضلع‌های قائم مماس است. طول AB کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲/۵ ۳) ۲ ۴) $۱/۵\sqrt{۲}$

۱۳۴- از برخورد نیمسازهای چهار زاویهٔ داخلی چهارضلعی $ABCD$ فقط یک نقطه به‌دست می‌آید. چهارضلعی $ABCD$ لزوماً . . . است.

۱) لوزی ۲) محیطی ۳) مستطیل ۴) محاطی

۱۳۵- چهارضلعی $ABCD$ محیط بر یک دایره است. اگر AB کوچک‌ترین ضلع آن باشد، کدام نابرابری همواره درست است؟

۱) $\hat{C} > \hat{A}$ ۲) $\hat{B} < \hat{A}$ ۳) $\hat{D} < \hat{C}$ ۴) $\hat{D} < \hat{B}$

۱۳۶- ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۳}$ محیط است. اگر نسبت قاعده‌های این ذوزنقه $\frac{۱}{۳}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) $۸\sqrt{۳}$

هندسه۲- گواه-سوالات موازي ، تبديل هاي هندسي - ۲ سوال -

۱۵۷- تابع M بین نقاط صفحه و نقاط خط l به‌صورت زیر تعریف شده است. کدام گزینه در مورد این تابع صحیح است؟

- اگر نقطهٔ A روی خط l باشد، آن‌گاه $M(A) = A$.
- اگر نقطهٔ A خارج خط l باشد، آن‌گاه $M(A) = A'$ که A' پای عمود A بر l می‌باشد.

۱) M تبدیل نیست.

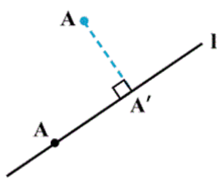
۲) M یک تبدیل است ولی طولپا نیست.

۳) M یک تبدیل طولپا است ولی شیب خط‌ها را ثابت نگه نمی‌دارد.

۴) M یک تبدیل طولپاست و شیب خط‌ها را ثابت نگه می‌دارد.

۱۵۸- مطابق شکل تابع M بین نقاط صفحه و نقاط خط l به‌صورت زیر تعریف شده است. M دارای چند نقطهٔ ثابت است؟

- اگر نقطهٔ A روی خط l باشد، آن‌گاه $M(A) = A$.
- اگر نقطهٔ A خارج خط d باشد، آن‌گاه $M(A) = A'$ که A' پای عمود A بر l می‌باشد.



۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

هندسه۲- گواه-سوالات موازي ، چندضلعي محاطي و محيطي - ۸ سوال -

۱۵۹- قرینهٔ کدام نقطه در مثلث نسبت به اضلاع، همواره بر دایرهٔ محیطی قرار دارد؟

۱) نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها ۲) نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها

۳) نقطهٔ همرسی میانه‌ها ۴) نقطهٔ همرسی نیمسازها

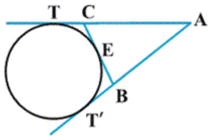
۱۶۰- دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مفروض‌اند. اگر پاره‌خط TT' به‌ترتیب در نقاط T و T' بر دایره‌های C و C' مماس و چهارضلعی $OTT'O'$، یک چهارضلعی محیطی باشد، آنگاه دو دایرهٔ C و C' چه وضعی می‌توانند نسبت به هم داشته باشند؟

۱) متخارج ۲) مماس خارج ۳) متقاطع ۴) مماس داخل

۱۵۱- دو زاویهٔ مجاور یک چهارضلعی محاطی ۸۰° و ۱۲۰° است. قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ دیگر کدام است؟

۱) ۲۰° ۲) ۴۰° ۳) ۵۰° ۴) ۳۰°

۱۵۲- از نقطهٔ ثابت A دو مماس AT و AT' بر دایره‌ای ثابت رسم شده‌اند و پاره خط متغیر BC بر دایره مماس است، به‌طوری کـه نقطـهٔ B همواره روی AT' و نقطهٔ C همواره روی AT قرار دارد. محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}AT$
۲) AT
۳) $\frac{۳}{۲}AT$
۴) $۲AT$

۱۵۳- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ضلع آن به‌ترتیب ۵ و ۳ است، دایـرهٔ محـاطی داخلـی در نقـاط A و B بـر ضلع‌های قائم مماس است. طول AB کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) ۲/۵
۳) ۲
۴) $۱/۵\sqrt{۲}$

۱۵۴- از برخورد نیمسازهای چهار زاویهٔ داخلی چهارضلعی $ABCD$ فقط یک نقطه به‌دست می‌آید. چهارضلعی $ABCD$ لزوماً . . . است.

۱) لوزی
۲) محیطی
۳) مستطیل
۴) محاطی

۱۵۵- چهارضلعی $ABCD$ محیط بر یک دایره است. اگر AB کوچک‌ترین ضلع آن باشد، کدام نابرابری همواره درست است؟

۱) $\hat{C} > \hat{A}$
۲) $\hat{B} < \hat{A}$
۳) $\hat{D} < \hat{C}$
۴) $\hat{D} < \hat{B}$

۱۵۶- ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۳}$ محیط است. اگر نسبت قاعده‌های این ذوزنقه $\frac{۱}{۳}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) $۸\sqrt{۳}$

$$-۱ \le x < ۰ \to f(x) = ۱$$
$$۰ \le x < ۱ \to f(x) = ۲$$
$$۱ \le x < ۲ \to f(x) = ۳$$
$$۲ \le x < ۳ \to f(x) = ۴$$
$$x = ۳ \to f(x) = ۵$$

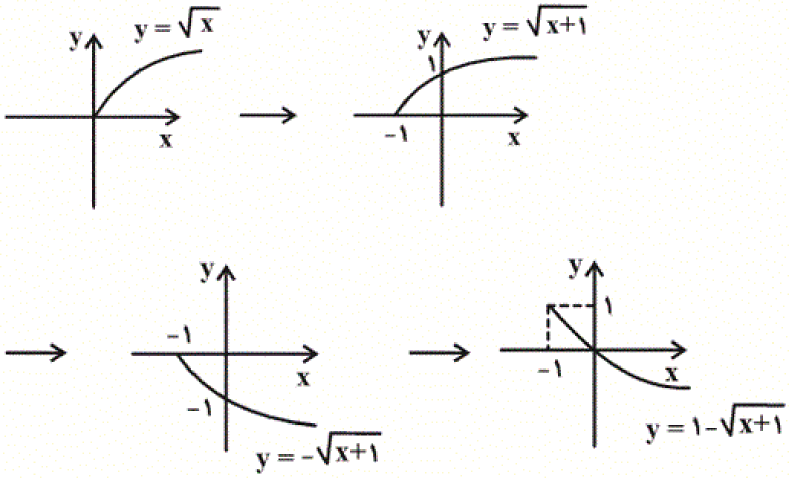
دارای ۶ مقدار متمایز است. $۰+۱+۲+۳+۴+۵=۱۵$

(حسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۱ | ۲ | ۳ ✓ | ۴

۸۲- (مسعود درویشی)

ابتدا نمودار تابع f را به کمک انتقال رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار تابع، درمی‌یابیم که تابع روی $[-۱,۰)$ مقادیر مثبت دارد و این بازه، بزرگ‌ترین بازه با این شرط است.

(حسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۱ | ۲ | ۳ ✓ | ۴

۸۳- (سیدحسین نیری‌پور)

در گزینهٔ «۲» داریم:

$$g(x)=\frac{۲x}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{۱-x}}\times\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{۱-x}}{\sqrt{x+۱}-\sqrt{۱-x}}$$

$$=\frac{۲x(\sqrt{x+۱}-\sqrt{۱-x})}{x+۱-(۱-x)}=\sqrt{x+۱}-\sqrt{۱-x}$$

پس ضابطه‌های دو تابع f و g در گزینهٔ «۲» یکسان است.

$$\left.\begin{array}{l} D_g:\begin{cases}x+۱\geq ۰\\ ۱-x\geq ۰\end{cases}\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱\\ \quad\sqrt{x+۱}+\sqrt{۱-x}\neq ۰\\ D_f:\begin{cases}x+۱\geq ۰\\ ۱-x\geq ۰\end{cases}\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱\end{array}\right\}\Rightarrow D_f=D_g$$

۱ ‏ ۲✓ ‏ ۳ ‏ ۴

۸۴- (امیرهوشنگ خمسه)

چون دامنهٔ f برابر با $R-\{۱\}$ است، پس باید $g(x)=\frac{x-۱}{(x-۱)^۲}$ باشد،

در نتیجه $b=۲$ و $a=۱$ است.

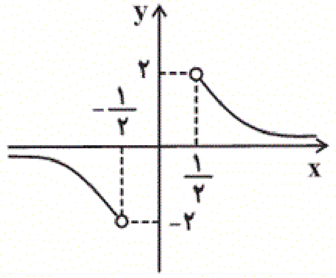
$$\Rightarrow x\in[a\,,b)=[۱\,,۲):e(x)=[x]=۱\Rightarrow k=۱$$

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۱ تا ۴۵ و ۴۹ تا ۵۳)

۱✓ ‏ ۲ ‏ ۳ ‏ ۴

۸۵- (علی شهرابی)

نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow R_f=(-2, 2)-\{0\}$$

بنابراین بُرد شامل دو عدد صحیح ۱ و ۱- است.

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰، ۴۴ و ۴۵)

۱ | ۲✓ | ۳ | ۴

۸۸- (امیرهوشنگ خمسه)

$$f(x)=x+\sqrt{x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=(\sqrt{x}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$$

دقت کنید دامنه $x\geq 0$ است. $f(x_1)$ را برابر با $f(x_2)$ قرار می‌دهیم $(x_1, x_2\in D_f)$. اگر نتیجه بگیریم که $x_1=x_2$ است، آن‌گاه تابع یک‌به‌یک است.

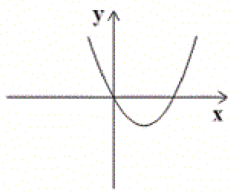
$$(\sqrt{x_1}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=(\sqrt{x_2}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\Rightarrow(\sqrt{x_1}+\frac{1}{2})^2=(\sqrt{x_2}+\frac{1}{2})^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{x_1}+\frac{1}{2}=\sqrt{x_2}+\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$$

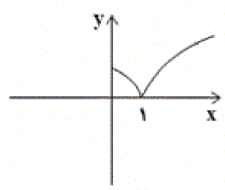
پس تابع یک‌به‌یک است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

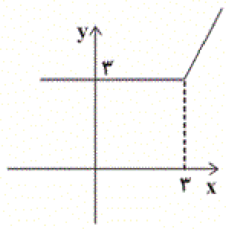
گزینهٔ «۱»: $f(x)=x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1$



گزینهٔ «۲»: $f(x)=|\sqrt{x}-1|$



گزینهٔ «۴»: $f(x)=x+|x-3|$



(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۱ | ۲ | ۳✓ | ۴

۸۹- (امید شیری‌نژاد)

تابع خطی $f(x)=ax+b$ با دامنهٔ R زمانی با وارونش یعنی f^{-1} غیرمتقاطع است که $a=1$ و $b\neq 0$ باشد، پس:

$$f(x)=x+b \xrightarrow{f(2)=5} 5=2+b \Rightarrow b=3$$

پس $f(x)=x+3$ و در نتیجه $f(6)=6+3=9$ است.

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱ | ۲ | ۳✓ | ۴

$$f(x)=\sqrt{x+1}+1$$

برای به دست آوردن محل برخورد، معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x+1}+1=x \Rightarrow \sqrt{x+1}=x-1 \Rightarrow x+1=x^2-2x+1$$

$$\Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ ق ق} \\ x=3 & \text{ق ق} \Rightarrow \end{cases}$$

در نقطهٔ $(3, 3)$ همدیگر را قطع می‌کنند.

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸ و ۵۴ تا ۶۲)

۱ | ۲ | ۳ | ۴✓

۹۱- (مهرداد ملوندی)

برای به دست آوردن ضابطهٔ وارون یک تابع می‌توانیم از روش عددگذاری استفاده کنیم. به این صورت که یک x دلخواه به تابع بدهیم و y را به دست آوریم. جای x و y را عوض می‌کنیم و در گزینه‌ها تست می‌کنیم.

$$\xrightarrow{x=1} f(1)=3(1)+|1-3|=5 \Rightarrow \begin{vmatrix}1\\5\end{vmatrix} \in f \Rightarrow \begin{vmatrix}5\\1\end{vmatrix} \in f^{-1}$$

نقطهٔ $(5, 1)$ تنها در گزینهٔ «۱» صدق می‌کند.

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱✓ | ۲ | ۳ | ۴

-۹۲ (حمیدمعنوی)

$$f(x)=\sqrt{۴-x^۲}+\sqrt{x+۳}\xrightarrow{\text{دامنه}}\begin{cases}۴-x^۲\ge ۰\Rightarrow -۲\le x\le ۲\\ x+۳\ge ۰\Rightarrow x\ge -۳\end{cases}\xrightarrow{\bigcap}[-۲,۲]$$

$$g(x)=\sqrt{۴-x}-\sqrt{۴-x^۲}\xrightarrow{\text{دامنه}}\begin{cases}۴-x^۲\ge ۰\Rightarrow -۲\le x\le ۲\\ ۴-x\ge ۰\Rightarrow x\le ۴\end{cases}\xrightarrow{\bigcap}[-۲,۲]$$

$$D_{f+g}=D_f\bigcap D_g=[-۲,۲]\bigcap[-۲,۲]=[-۲,۲]\Rightarrow a=-۲,b=۲$$

$$\Rightarrow a.b=-۴$$

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸ و ۶۳ تا ۶۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

-۹۳ (امیر شیری‌نژاد)

ابتدا ضابطهٔ $g(f(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x))=a(۱-۲x)-۱=a-۲ax-۱$$

اکنون چون $g(f(x))$ و g روی محور x ها متقاطع‌اند، پس طول نقطهٔ تقاطع برابر با ریشهٔ g و ریشهٔ gof است.

$$\Rightarrow\begin{cases}g(f(x))=۰\Rightarrow a-۲ax-۱=۰\Rightarrow a-۱=۲ax\Rightarrow \dfrac{a-۱}{۲a}=x\\ g(x)=۰\Rightarrow ax-۱=۰\Rightarrow x=\dfrac{۱}{a}\end{cases}$$

چون ریشهٔ gof و g یکسان است، پس داریم:

$$\frac{a-۱}{۲a}=\frac{۱}{a}\xrightarrow{a\neq ۰}\frac{a-۱}{۲}=۱\Rightarrow a-۱=۲\Rightarrow a=۳$$

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

$$\underbrace{(fog)(x)}_{f(g(x))}=\frac{x}{x^۲+۱}\Rightarrow g(x)+۱=\frac{x}{x^۲+۱}$$

$$g(x)=\frac{x}{x^۲+۱}-۱\Rightarrow g(x)=\frac{x-x^۲-۱}{x^۲+۱}$$

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۵- (مسعود درویشی)

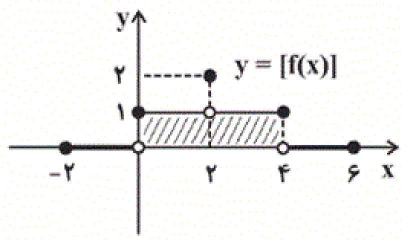
می‌دانیم که $(fof^{-1})(x)=x$ برای همهٔ مقادیر عضو $D_{f^{-1}}$ برقرار است. از طرفی $D_{f^{-1}}=R_f$ و $R_f=[\frac{3}{2},2)\cup[3,4)$. بنابراین باید معادلهٔ $x=x^2-3x+3$ را حل کنیم. البته تنها جواب‌هایی قابل قبول هستند که عضو R_f باشند. با حل این معادله به $x=1$ و $x=3$ می‌رسیم که تنها $x=3$ قابل قبول است.

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲ و ۶۶ تا ۶۸)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۸۶- (مسعود درویشی)

با توجه به تعریف جزء صحیح و مقادیر تابع $y=f(x)$ در محدودهٔ $[-2,6]$، نمودار تابع $y=[f(x)]$ را رسم می‌کنیم. مساحت سطح محدود به نمودار تابع $y=[f(x)]$ و محور xها برابر با مساحت مستطیل هاشورخورده یعنی $4=1\times 4$ می‌باشد.



(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳ و ۶۶ تا ۶۸)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۸۱- *(سینا محمدپور)*

اگر $x = y = ۱/۵$ باشد، گزینه‌های «۱» و «۲» رد می‌شوند. همچنین اگر $y = ۱/۵$ و $x = ۲$ باشد، گزینهٔ «۳» نیز رد می‌شود.

از طرفی می‌توان اثبات نمود که به‌ازای هر عدد صحیح a داریم:

$$[x + a] = [x] + a$$

فرض کنید $[x] = n$. در این‌صورت:

$$n \le x < n + ۱ \Rightarrow (n + a) \le x + a < (n + a) + ۱$$

$$\Rightarrow [x + a] = n + a \Rightarrow [x + a] = [x] + a$$

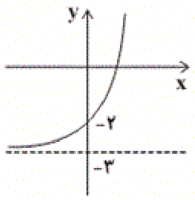
(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۶- *(علی شهرابی)*

$$f(x) = \frac{(۲^x)^۲ - ۲(۲^x) - ۳}{۲^x + ۱} = \frac{(۲^x - ۳)(۲^x + ۱)}{۲^x + ۱} = ۲^x - ۳$$

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow R_f = (-۳ \,,\, +\infty)$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۹۷- *(علی شهرابی)*

$\sqrt{۲۸}$ تقریباً برابر است با $۵/۳$.

$$۲^x = \sqrt{۲۸} \Rightarrow ۲^x \simeq ۵/۳ \xrightarrow{۲^۲ < ۵/۳ < ۲^۳} ۲ < x < ۳$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۸- (علی شهرابی)

$$y_1 > y_2 \Rightarrow 2^{x+1} > (\frac{1}{2})^x \Rightarrow 2^{x+1} > 2^{-x} \Rightarrow x+1 > -x$$

$$\Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

$$\overbrace{0 < \underbrace{\frac{3a-1}{a}}_{}}^{\mathrm{I}}\underbrace{< 1}_{\mathrm{II}}$$

$$(\mathrm{I}): \frac{3a-1}{a} > 0 \Rightarrow$$

a	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3a-1$	$-$		$-$ 0	$+$
a	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{3a-1}{a}$	$+$	ت.ن	$-$ 0	$+$

$$\Rightarrow a < 0 \text{ یا } a > \frac{1}{3}$$

$$(\mathrm{II}): \frac{3a-1}{a} < 1 \Rightarrow \frac{3a-1}{a} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{2a-1}{a} < 0$$

$\Rightarrow$

a	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2a-1$	$-$		$-$ 0	$+$
a	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{2a-1}{a}$	$+$	ت.ن	$-$ 0	$+$

$$\Rightarrow 0 < a < \frac{1}{2}$$

بین محدوده جواب‌های I و II اشتراک می‌گیریم:

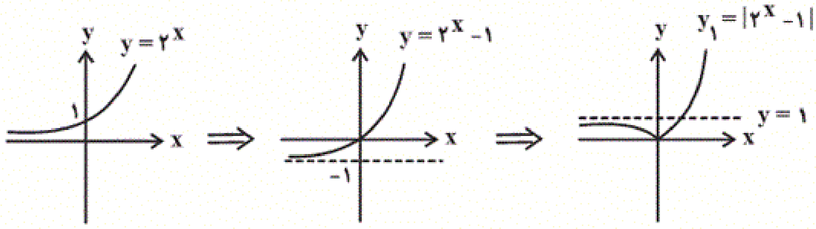
$$\mathrm{I} \cap \mathrm{II}: \frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$$

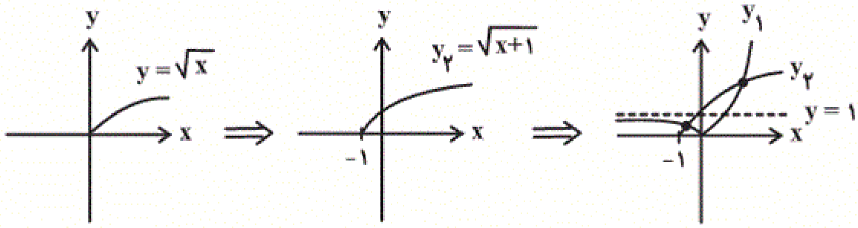
(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۰– *(حمید معنوی)*

معادله را می‌توانیم به روش هندسی حل کنیم به این صورت که نمودار توابع طرفین تساوی را رسم می‌کنیم. تعداد نقاط برخورد دو نمودار، تعداد جواب‌های معادله است.





معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

می‌دانیم اگر اندازهٔ یکی از زوایای حادهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای 15° باشد، آن‌گاه طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ طول وتر است، پس داریم:

$$AH = \frac{1}{4}BC = \frac{1}{4}\times 6 = \frac{3}{2}$$

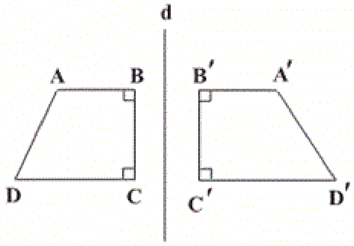
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}AH\times BC = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 6 = \frac{9}{2}$$

از طرفی در یک تبدیل طولپا، طول اضلاع مثلث و در نتیجه مساحت آن ثابت می‌ماند، پس $S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{9}{2}$ است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۸- (سینا محمدپور)



تحت یک بازتاب، در دو حالت شیب یک خط و بازتاب یافتهٔ آن یکسان است.

الف) در صورتی که خط با محور بازتاب موازی باشد.

ب) در صورتی که خط بر محور بازتاب عمود باشد.

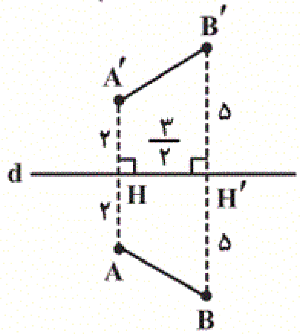
بنابراین تحت این بازتاب، شیب اضلاع AB ، BC و CD با شیب بازتاب یافتهٔ آن‌ها نسبت به خط d یکسان است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- مشابه فعالیت صفحهٔ ۳۵)

۱   ۲   ۳✓   ۴

۱۲۹- (احسان خیراللهی)

اگر H وسط پاره‌خط AA' و H' وسط پاره‌خط BB' باشد، داریم:



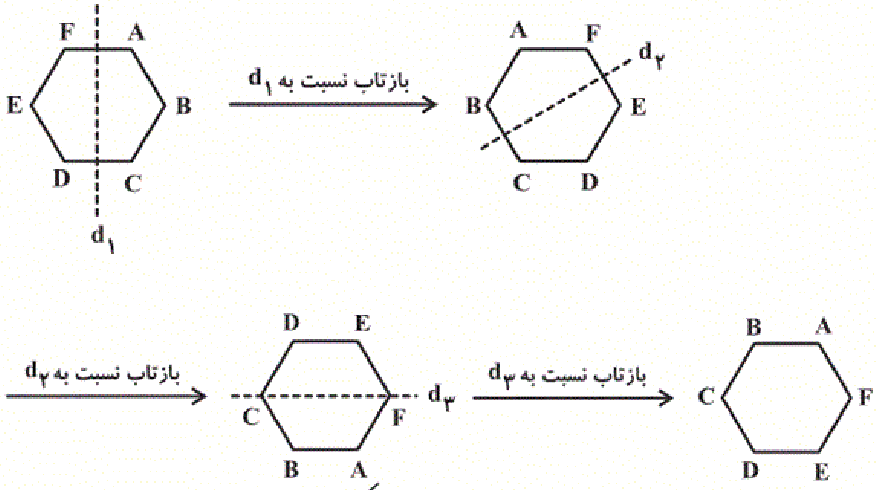
$$S=\left(\frac{AA'+BB'}{۲}\right)\times HH'$$

$$=\left(\frac{۴+۱۰}{۲}\right)\times\frac{۳}{۲}=\frac{۲۱}{۲}=۱۰/۵$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۱   ۲✓   ۳   ۴

-۱۳۰ *(احسان خیراللهی)*

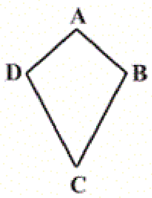


(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۲۱ *(امیرحسین ابومحبوب)*

یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشند. با توجه به این تعریف، متوازی‌الاضلاع و مستطیل نمی‌توانند همواره چهارضلعی محیطی باشند و ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین تنها در صورتی چهارضلعی محیطی است که اندازهٔ ساق آن برابر میانگین طول دو قاعده باشد ولی کایت همواره یک چهارضلعی محیطی است. طبق ویژگی کایت داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AB = AD \\ CD = BC \end{array}\right\} \Rightarrow AB + CD = AD + BC$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۲۲ (محمد خندان)

$$\overset{\Delta}{ABC}: BC^2 = AB^2 + AC^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow BC = 13$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$$

$$P_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{5+12+13}{2} = 15$$

شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع AB برابر است با:

$$r_c = \frac{S}{P-c} = \frac{30}{15-5} = \frac{30}{10} = 3$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۲۳ (احمدرضا حمزه‌ای)

فرض کنید a و b به‌ترتیب طول اضلاع نه‌ضلعی منتظم محاطی و نه‌ضلعی منتظم محیطی این دایره باشند. داریم:

$$a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \Rightarrow a = 10\sin 20^\circ$$

$$b = 2R\tan\frac{180^\circ}{n} \Rightarrow b = 10\tan 20^\circ$$

از طرفی هر دو نه‌ضلعی منتظم با هم متشابه‌اند و نسبت مساحت آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است، پس داریم:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{10\sin 20^\circ}{10\tan 20^\circ}\right)^2 = \cos^2 20^\circ$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

در مثلث متساوی‌الساقین میانهٔ وارد بر قاعده، ارتفاع هم می‌باشد. بنابراین AF ارتفاع وارد بر BC است.

$$AF^2 + FB^2 = AB^2 \Rightarrow AF^2 + 64 = 100 \Rightarrow AF = 6$$

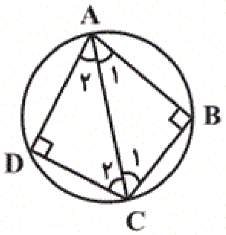
$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow \begin{cases} P = \dfrac{10+10+16}{2} = 18 \\ S = \dfrac{AF \times BC}{2} = \dfrac{6 \times 16}{2} = 48 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{48}{18} = \frac{8}{3}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۵- *(امیرحسین ابومحبوب)*

در یک چهارضلعی محاطی، مجموع اندازه‌های هر دو زاویهٔ مقابل برابر 180° است. بنابراین داریم:



$$\hat{A}+\hat{C}=180^\circ \xrightarrow{\hat{C}=2\hat{A}} 3\hat{A}=180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}=60^\circ \Rightarrow \hat{C}=120^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} AB=AD \\ BC=CD \\ AC=AC \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{C}_1=\hat{C}_2=60^\circ \\ \hat{A}_1=\hat{A}_2=30^\circ \end{array}\right.$$

بنابراین زاویهٔ B در مثلث ABC، قائمه و AC قطر دایره است. در نتیجه داریم:

$$\hat{C}_1=60^\circ \Rightarrow AB=\frac{\sqrt{3}}{2}AC \Rightarrow 3=\frac{\sqrt{3}}{2}AC \Rightarrow AC=2\sqrt{3}$$

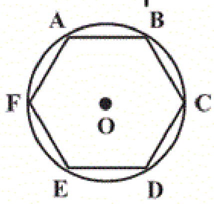
$$\Rightarrow 2R=2\sqrt{3} \Rightarrow R=\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحهٔ ۲۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۶- *(احمدرضا حمزه‌ای)*

اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث باشد، آن‌گاه داریم:



$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{7}{10} \Rightarrow r=\frac{10}{7}$$

طول هر ضلع شش‌ضلعی منتظم محاط در دایره برابر است با:

$$AB=2r\sin\frac{180^\circ}{n} \xrightarrow{n=6} AB=2\times\frac{10}{7}\times\frac{1}{2} \Rightarrow AB=\frac{10}{7}$$

$$S_{ABCDEF}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times AB^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{100}{49}=\frac{300\sqrt{3}}{98}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۹ و ۳۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

$= |x - ۳| - ۲|x - \frac{۱}{۲}|$

چون $۳ \le x < ۶$ است، پس $|x - ۳| = x - ۳$ و $|x - \frac{۱}{۲}| = x - \frac{۱}{۲}$ است.

$\Rightarrow$ عبارت $= x - ۳ - ۲(x - \frac{۱}{۲}) = x - ۳ - ۲x + ۱ = -x - ۲$

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۸- *(میثم بهرامی‌جویا)*

$f(x) = [x] - ۲ + [x - \frac{۳}{۲} + \frac{۸}{۲}] - [x - \frac{۳}{۲}]$

$= [x] - ۲ + [x - \frac{۳}{۲}] + ۴ - [x - \frac{۳}{۲}] = [x] + ۲$

$-۲ \le x < -۱ \to f(x) = ۰$

$-۱ \le x < ۰ \to f(x) = ۱$

$۰ \le x < ۱ \to f(x) = ۲$

$۱ \le x < ۲ \to f(x) = ۳$

$۲ \le x < ۳ \to f(x) = ۴$

$x = ۳ \to f(x) = ۵$

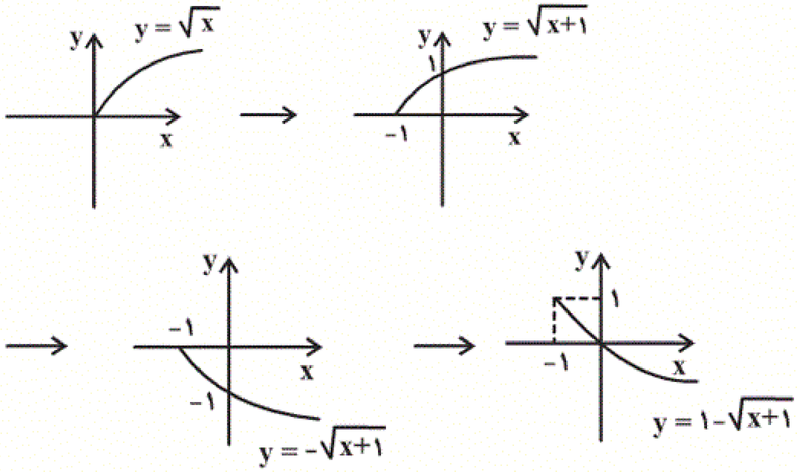
دارای ۶ مقدار متمایز است. $۰ + ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ = ۱۵$

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۲– (مسعود درویشی)

ابتدا نمودار تابع f را به کمک انتقال رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار تابع، درمی‌یابیم که تابع روی $[-1,0)$ مقادیر مثبت دارد و این بازه، بزرگ‌ترین بازه با این شرط است.

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۳– (سیدحسین نیری‌پور)

در گزینهٔ «۲» داریم:

$$g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}\times\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{2x(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x})}{x+1-(1-x)}=\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}$$

پس ضابطه‌های دو تابع f و g در گزینهٔ «۲» یکسان است.

$$\left.\begin{array}{l} D_g:\begin{cases}x+1\geq 0\\ 1-x\geq 0\end{cases}\Rightarrow -1\leq x\leq 1\\ \quad\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\neq 0\\ D_f:\begin{cases}x+1\geq 0\\ 1-x\geq 0\end{cases}\Rightarrow -1\leq x\leq 1\end{array}\right\}\Rightarrow D_f=D_g$$

دامنهٔ دو تابع f و g در گزینهٔ «۲» نیز با هم برابرند پس این دو تابع با هم مساوی‌اند.

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۴- (امیرهوشنگ خمسه)

چون دامنهٔ f برابر با $R-\{۱\}$ است، پس باید $g(x)=\dfrac{x-۱}{(x-۱)^۲}$ باشد،

در نتیجه $b=۲$ و $a=۱$ است.

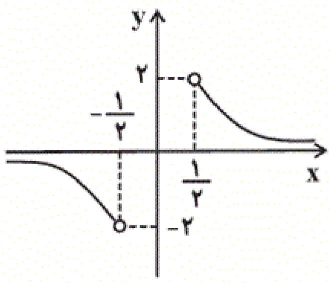
$$\Rightarrow x\in [a\,,b)=[۱\,,۲):e(x)=[x]=۱\Rightarrow k=۱$$

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۱ تا ۴۵ و ۴۹ تا ۵۳)

۱ ✓   ۲   ۳   ۴

۱۰۵- (علی شهرابی)

نمودار تابع $y=\dfrac{۱}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-[-\dfrac{۱}{۲}\,,\,\dfrac{۱}{۲}]$ را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow R_f=(-۲\,,۲)-\{۰\}$$

بنابراین بُرد شامل دو عدد صحیح ۱ و ۱- است.

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰، ۴۴ و ۴۵)

۱   ۲ ✓   ۳   ۴

۱۰۹- (امیر شیری‌نژاد)

تابع خطی $f(x)=ax+b$ زمانی با وارونش یعنی $f^{-۱}$ غیرمتقاطع است که $a=۱$ و $b\neq ۰$ باشد، پس:

$$f(x)=x+b\xrightarrow{f(۲)=۵}۵=۲+b\Rightarrow b=۳$$

پس $f(x)=x+۳$ و در نتیجه $f(۶)=۶+۳=۹$ است.

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱   ۲   ۳ ✓   ۴

-۱۱۰ *(میثم بهرامی‌جویا)*

اگر عملیات را برعکس بر روی تابع g انجام دهیم، یعنی یک واحد نمودار آن را به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم به نمودار تابع f می‌رسیم، پس:

$$f(x)=\sqrt{x+1}+1$$

برای به دست آوردن محل برخورد، معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x+1}+1=x\Rightarrow\sqrt{x+1}=x-1\Rightarrow x+1=x^2-2x+1$$

$$\Rightarrow x^2-3x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{غ ق ق}\\ x=3 & \text{ق ق}\end{cases}\Rightarrow$$ همدیگر را قطع می‌کنند. در نقطهٔ $(3\,,\,3)$

(حسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸ و ۵۴ تا ۶۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۱۱ *(مهرداد ملوندی)*

برای به دست آوردن ضابطهٔ وارون یک تابع می‌توانیم از روش عددگذاری استفاده کنیم به این صورت که یک x دلخواه به تابع بدهیم و y را به دست آوریم. جای x و y را عوض می‌کنیم و در گزینه‌ها تست می‌کنیم.

$$\xrightarrow{x=1}f(1)=3(1)+|1-3|=5\Rightarrow\left|\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right.\in f\Rightarrow\left|\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right.\in f^{-1}$$

نقطهٔ $(1\,,\,5)$ تنها در گزینهٔ «۱» صدق می‌کند.

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

-۱۱۲ *(میثم بهرامی‌جویا)*

اگر نمودار تابع f نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقارن باشد، نمودارهای f و f^{-1} بر هم منطبق هستند. یعنی: $(fof)(x)=x$

$$\frac{(a-1)\times\dfrac{(a-1)x}{x-1}}{\dfrac{(a-1)x}{x-1}-1}=x\Rightarrow\frac{(a-1)^2x}{(a-1)x-x+1}=x$$

$$\Rightarrow (a-1)^2x=(a-1)x^2-x^2+x\Rightarrow (a-1)^2x-x=(a-2)x^2$$

$$\Rightarrow ((a-1)^2-1)x-(a-2)x^2=0\Rightarrow\begin{cases}a-2=0\Rightarrow a=2\\(a-1)^2-1=0\Rightarrow\begin{cases}a=2\\a=0\end{cases}\end{cases}$$

که فقط $a=2$ قابل قبول است.

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۴، ۴۵، ۵۴ تا ۶۲ و ۶۶ تا ۶۹)

---

۱ ✓   ۲   ۳   ۴

-۱۱۳ *(حمید معنوی)*

$$f(x)=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x+3}\xrightarrow{\text{دامنه}}\left\{\begin{array}{l}4-x^2\ge 0\Rightarrow -2\le x\le 2\\x+3\ge 0\Rightarrow x\ge -3\end{array}\right\}\xrightarrow{\cap}[-2,2]$$

$$g(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{4-x^2}\xrightarrow{\text{دامنه}}\left\{\begin{array}{l}4-x^2\ge 0\Rightarrow -2\le x\le 2\\4-x\ge 0\Rightarrow x\le 4\end{array}\right\}\xrightarrow{\cap}[-2,2]$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-2,2]\cap[-2,2]=[-2,2]\Rightarrow a=-2\,,\,b=2$$

$$\Rightarrow a.b=-4$$

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸ و ۶۳ تا ۶۶)

۱ ✓   ۲   ۳   ۴

۱۱۴- (سیدحسین نیری‌پور)

$$\begin{cases} \dfrac{2f+g}{f.g}(2) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{2n+a}{na} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2n+a = -\dfrac{1}{2}na \\ \dfrac{f-g}{2f.g}(2) = \dfrac{5}{8} \Rightarrow \dfrac{n-a}{2na} = \dfrac{5}{8} \Rightarrow \quad n-a = \dfrac{5}{4}na \end{cases}$$

$$3n = \dfrac{3}{4}na \Rightarrow a = 4 \xrightarrow{\text{جایگذاری}}$$

$$n = -1 \Rightarrow \dfrac{f}{g}(2) = \dfrac{n}{a} = -\dfrac{1}{4}$$

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۵- (امید شیری‌نژاد)

ابتدا ضابطهٔ gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = a(1-2x)-1 = a-2ax-1$$

اکنون چون gof و g روی محور x متقاطع‌اند، پس طول نقطهٔ تقاطع برابر با ریشهٔ g و ریشهٔ gof است.

$$\Rightarrow \begin{cases} g(f(x)) = 0 \Rightarrow a-2ax-1 = 0 \Rightarrow a-1 = 2ax \Rightarrow \dfrac{a-1}{2a} = x \\ g(x) = 0 \Rightarrow ax-1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

چون ریشهٔ gof و g یکسان است، پس داریم:

$$\dfrac{a-1}{2a} = \dfrac{1}{a} \xrightarrow{a \neq 0} \dfrac{a-1}{2} = 1 \Rightarrow a-1 = 2 \Rightarrow a = 3$$

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۶- (مسعود درویشی)

راه‌حل اول: چون k فرد است پس $f(k)=k+3$ می‌باشد و $f(k)$ عددی زوج است. پس $(fof)(k)=\frac{f(k)}{2}$ می‌شود.

$$(fof)(k)=\frac{f(k)}{2}=\frac{k+3}{2}=27\Rightarrow k+3=54\Rightarrow k=51$$

راه‌حل دوم: برای این‌که داشته باشیم $f(f(k))=27$ باید $f(k)=27\times 2$ یا $f(k)=27-3$؛ یعنی $f(k)=54$ یا $f(k)=24$. اما اگر $f(k)=24$ آن‌گاه $f(f(k))=12$ است؛ بنابراین $f(k)=24$ قابل قبول نمی‌باشد. پس $f(k)=54$. بدین منظور باید داشته باشیم $k=54-3=51$ یا $k=54\times 2=108$. با توجه به شرط مسئله $k=108$ قابل قبول نیست، پس $k=51$.

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۷- (حمید معنوی)

$f(g(x))$ یعنی در تابع f به جای x، عبارت $g(x)$ را قرار دهیم.

چون $f(x)=x+1$ است، پس داریم: $f(g(x))=g(x)+1$

$$\underbrace{(fog)(x)}_{f(g(x))}=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow g(x)+1=\frac{x}{x^2+1}$$

$$g(x)=\frac{x}{x^2+1}-1\Rightarrow g(x)=\frac{x-x^2-1}{x^2+1}$$

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۸- (مسعود درویشی)

می‌دانیم که $(fof^{-۱})(x) = x$ برای همهٔ مقادیر عضو $D_{f^{-۱}}$ برقرار است. از طرفی $D_{f^{-۱}} = R_f$ و $R_f = [\frac{۳}{۲}, ۲) \cup [۳, ۴)$. بنابراین باید معادلهٔ $x = x^۲ - ۳x + ۳$ را حل کنیم. البته تنها جواب‌هایی قابل قبول هستند که عضو R_f باشند. با حل این معادله به $x = ۱$ و $x = ۳$ می‌رسیم که تنها $x = ۳$ قابل قبول است.

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲ و ۶۶ تا ۶۸)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۹- (امیرهوشنگ خمسه)

$$\frac{f}{g} = \frac{۳}{[x](x-۱)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = ۰\} = (R - \{۱\}) - [۰, ۱) = R - [۰, ۱]$$

پس تابع $\frac{f}{g}$ در دو نقطه با طول صحیح یعنی $\{۱, ۰\}$ تعریف نمی‌شود.

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳ و ۶۳ تا ۶۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۰- (علی کردی)

$$D_f : \frac{۹-x^۲}{x-۱} \geq ۰$$

x		-۳		۱		۳	
$۹-x^۲$	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$
$\Rightarrow$ $x-۱$	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$\frac{۹-x^۲}{x-۱}$	$+$	۰	$-$	ت.ن	$+$	۰	$-$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty , -۳] \cup (۱ , ۳]$$

$$g(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & ; \ x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & ; \ x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

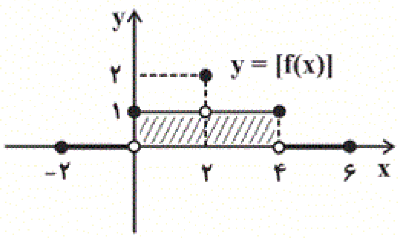
$$\Rightarrow D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] + [-x] \in (-\infty , -۳) \cup (۱ , ۳]\} = \varnothing$$

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۴ تا ۵۳ و ۶۶ تا ۷۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۶- (مسعود درویشی)

با توجه به تعریف جزء صحیح و مقادیر تابع $y = f(x)$ در محدودهٔ $[-۲ , ۶]$، نمودار تابع $y = [f(x)]$ را رسم می‌کنیم. مساحت سطح محدود به نمودار تابع $y = [f(x)]$ و محور x ها برابر با مساحت مستطیل هاشورخورده یعنی $۴ \times ۱ = ۴$ می‌باشد.



(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳ و ۶۶ تا ۶۸)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۱-
(سینا محمدپور)

اگر $x = y = 1/5$ باشد، گزینه‌های «۱» و «۲» رد می‌شوند. همچنین اگر $y = 1/5$ و $x = 2$ باشد، گزینهٔ «۳» نیز رد می‌شود.

از طرفی می‌توان اثبات نمود که به‌ازای هر عدد صحیح a داریم:

$$[x+a] = [x] + a$$

فرض کنید $[x] = n$. در این‌صورت:

$$n \le x < n+1 \Rightarrow (n+a) \le x+a < (n+a)+1$$

$$\Rightarrow [x+a] = n+a \Rightarrow [x+a] = [x]+a$$

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

[۱] [۲] [۳] [۴]✓

$$AH = \frac{1}{4}BC = \frac{1}{4}\times 6 = \frac{3}{2}$$

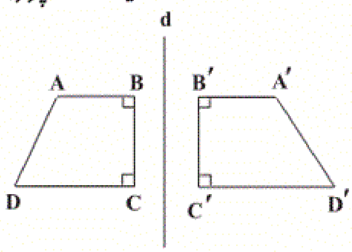
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}AH \times BC = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 6 = \frac{9}{2}$$

از طرفی در یک تبدیل طولپا، طول اضلاع مثلث و در نتیجه مساحت آن ثابت می‌ماند، پس $S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{9}{2}$ است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

[۱]✓ [۲] [۳] [۴]

۱۴۸-
(سینا محمدپور)



تحت یک بازتاب، در دو حالت شیب یک خط و بازتاب یافتهٔ آن یکسان است.

الف) در صورتی که خط با محور بازتاب موازی باشد.

ب) در صورتی که خط بر محور بازتاب عمود باشد.

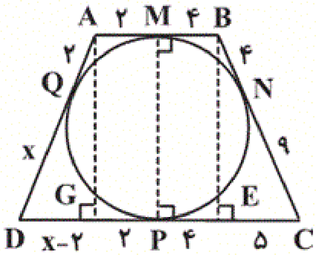
بنابراین تحت این بازتاب، شیب اضلاع AB، BC و CD با شیب بازتاب یافتهٔ آن‌ها نسبت به خط d یکسان است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- مشابه فعالیت صفحهٔ ۳۵)

[۱] [۲] [۳]✓ [۴]

(احسان خیراللهی) ۱۴۹-

مماس‌های رسم شده بر یک دایره از نقطه‌ای بیرون آن دایره با هم مساوی‌اند. بنابراین با فرض $DQ = x$ داریم:



$$DP = x \ , \ PC = ۹ \ , \ AQ = ۲ \ , \ BN = ۴$$

از B و A عمودهای BE و AG را بر CD رسم می‌کنیم.

$$DG = x - ۲ \ , \ GP = ۲ \ , \ PE = ۴ \ , \ EC = ۵$$

$$\overset{\Delta}{BEC} : BE^۲ + EC^۲ = BC^۲ \Rightarrow BE^۲ + ۲۵ = ۱۶۹$$

$$\Rightarrow BE^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow BE = ۱۲ \Rightarrow AG = MP = BE = ۱۲$$

$$\overset{\Delta}{AGD} : AG^۲ + DG^۲ = AD^۲ \Rightarrow ۱۴۴ + (x - ۲)^۲ = (x + ۲)^۲$$

$$\Rightarrow ۱۴۴ + x^۲ - ۴x + ۴ = x^۲ + ۴x + ۴ \Rightarrow ۱۴۴ = ۸x \Rightarrow x = ۱۸$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۱✓ ۲ ۳ ۴

$$\overset{\Delta}{BOC} : OB^۲ + OC^۲ = BC^۲ \Rightarrow r^۲ + r^۲ = (۶\sqrt{۲})^۲$$

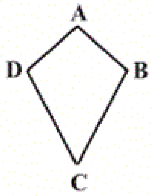
$$\Rightarrow ۲r^۲ = ۳۶ \times ۲ \Rightarrow r^۲ = ۳۶ \Rightarrow r = ۶$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۴۱- (امیرحسین ابومحبوب)

یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشند. با توجه به این تعریف، متوازی‌الاضلاع و مستطیل نمی‌توانند همواره چهارضلعی محیطی باشند و ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین تنها در صورتی چهارضلعی محیطی است که اندازهٔ ساق آن برابر میانگین طول دو قاعده باشد ولی کایت همواره یک چهارضلعی محیطی است. طبق ویژگی کایت داریم:



$$\left.\begin{array}{l}AB = AD\\ CD = BC\end{array}\right\} \Rightarrow AB + CD = AD + BC$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۴۲- (محمد خندان)

$$\overset{\Delta}{ABC} : BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۲۵ + ۱۴۴ = ۱۶۹ \Rightarrow BC = ۱۳$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۱۲ = ۳۰$$

$$P_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۵+۱۲+۱۳}{۲} = ۱۵$$

شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع AB برابر است با:

$$r_c = \frac{S}{P-c} = \frac{۳۰}{۱۵-۵} = \frac{۳۰}{۱۰} = ۳$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۴۳- *(احمدرضا حمزه‌ای)*

فرض کنید a و b به‌ترتیب طول اضلاع نه‌ضلعی منتظم محاطی و نه‌ضلعی منتظم محیطی این دایره باشند. داریم:

$$a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \Rightarrow a = 10\sin 20^\circ$$

$$b = 2R\tan\frac{180^\circ}{n} \Rightarrow b = 10\tan 20^\circ$$

از طرفی هر دو نه‌ضلعی منتظم با هم متشابه‌اند و نسبت مساحت آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است، پس داریم:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{10\sin 20^\circ}{10\tan 20^\circ}\right)^2 = \cos^2 20^\circ$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

$$AF^2 + FB^2 = AB^2 \Rightarrow AF^2 + 64 = 100 \Rightarrow AF = 6$$

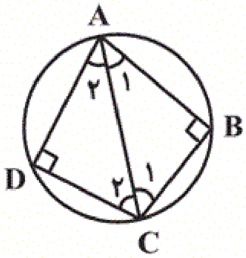
$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow \begin{cases} P = \dfrac{10+10+16}{2} = 18 \\ S = \dfrac{AF \times BC}{2} = \dfrac{6 \times 16}{2} = 48 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{48}{18} = \frac{8}{3}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۴۵– *(امیرحسین ابومحبوب)*

در یک چهارضلعی محاطی، مجموع اندازه‌های هر دو زاویهٔ مقابل برابر ۱۸۰° است. بنابراین داریم:



$$\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{C}=۲\hat{A}} ۳\hat{A}=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}=۶۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۲۰^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} AB=AD \\ BC=CD \\ AC=AC \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC} \Rightarrow \begin{cases} \hat{C}_۱=\hat{C}_۲=۶۰^\circ \\ \hat{A}_۱=\hat{A}_۲=۳۰^\circ \end{cases}$$

بنابراین زاویهٔ B در مثلث ABC، قائمه و AC قطر دایره است. در نتیجه داریم:

$$\hat{C}_۱=۶۰^\circ \Rightarrow AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AC \Rightarrow ۳=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AC \Rightarrow AC=۲\sqrt{۳}$$

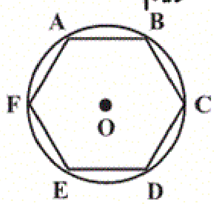
$$\Rightarrow ۲R=۲\sqrt{۳} \Rightarrow R=\sqrt{۳}$$

(هندسه ۲– دایره– صفحهٔ ۲۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۴۶– *(احمدرضا حمزه‌ای)*

اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث باشد، آن‌گاه داریم:



$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{r}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}=\frac{۷}{۱۰} \Rightarrow r=\frac{۱۰}{۷}$$

طول هر ضلع شش‌ضلعی منتظم محاط در دایره برابر است با:

$$AB=۲r\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n} \xrightarrow{n=۶} AB=۲\times\frac{۱۰}{۷}\times\frac{۱}{۲} \Rightarrow AB=\frac{۱۰}{۷}$$

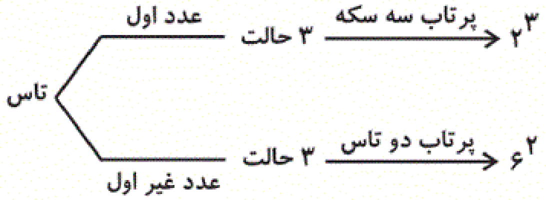
$$S_{ABCDEF}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times AB^۲=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۱۰۰}{۴۹}=\frac{۳۰۰\sqrt{۳}}{۹۸}$$

(هندسه ۲– دایره– صفحه‌های ۲۹ و ۳۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

−۱۶۴ *(عزیزالله علی‌اصغری)*

تاس در ۳ حالت عدد اول و در ۳ حالت دیگر عدد غیراول می‌آید، بنابراین داریم:



$$n(S)=۳\times ۲^{۳}+۳\times ۶^{۲}=۲۴+۱۰۸=۱۳۲$$

(آمار و احتمال- احتمال- صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

−۱۶۵ *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$A=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)\}$$

$$B=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۱),(۵,۳),(۵,۵)\}$$

$$C=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۱),(۳,۱),(۴,۱),(۵,۱),(۶,۱)\}$$

$$A\cap B=\{(۱,۱),(۱,۳),(۳,۱)\}$$

$$A\cap C=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۳,۱),(۴,۱)\}$$

$$B\cap C=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۵,۱)\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود $A\cap B\subseteq C$ است ولی سایر روابط درست نیستند.

(آمار و احتمال- احتمال- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

−۱۶۶ *(ندا صالح‌پور)*

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\ P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B-A)\Rightarrow ۰/۸=P(A)+P(A)$$

$$\Rightarrow ۲P(A)=۰/۸\Rightarrow P(A)=۰/۴$$

$$\Rightarrow P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۴=۰/۶$$

(آمار و احتمال- احتمال- صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۶۷- (علی بهرمندپور)

فرض کنید A پیشامد استخدام خانم و B پیشامد استخدام با مدرک لیسانس باشد، در این صورت داریم:

$$P(A)=0/45 \quad , \quad P(B)=0/35 \quad , \quad P(A'\cap B)=0/2$$

می‌خواهیم احتمال این‌که فرد استخدام شده خانم با مدرک فوق لیسانس باشد را به دست آوریم، بنابراین داریم:

$$P(B\cap A')=P(B)-P(B\cap A)$$

$$\Rightarrow 0/20=0/35-P(B\cap A)\Rightarrow P(B\cap A)=0/15$$

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=0/45-0/15=0/30$$

(آمار و احتمال- احتمال- صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱ ‏ ۲✓ ‏ ۳ ‏ ۴

۱۶۸- (امیرحسین ابومحبوب)

$$P(A)-P(B)=P(A)-P(A\cap B)+P(A\cap B)-P(B)$$

$$=(P(A)-P(A\cap B))-(P(B)-P(A\cap B))$$

$$=P(A-B)-P(B-A)=\frac{1}{5}-\frac{2}{9}=\frac{9-10}{45}=-\frac{1}{45}$$

(آمار و احتمال- احتمال- صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱✓ ‏ ۲ ‏ ۳ ‏ ۴

۱۶۳- (علی بهرمندپور)

$$A=B=\{-2,-1,0,1,2\}$$

پس $A\cup B=A\cap B=A=B$ و در نتیجه فقط گزینهٔ «۳» نادرست است، زیرا داریم:

$$\begin{cases} B^2-A^2=\varnothing \\ (B\cap A)\times(B\cap A)=A\times A=A^2 \end{cases}$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۱ ‏ ۲ ‏ ۳✓ ‏ ۴

۱۶۹- (ندا صالح‌پور)

$$P(b)=3P(a)\ ,\ P(c)=\frac{1}{2}P(b)=\frac{1}{2}(3P(a))=\frac{3}{2}P(a)$$

$$P(S)=1\Rightarrow P(a)+P(b)+P(c)=1$$

$$\Rightarrow P(a)+3P(a)+\frac{3}{2}P(a)=1\Rightarrow \frac{11}{2}P(a)=1\Rightarrow P(a)=\frac{2}{11}$$

$$P(c)=\frac{3}{2}P(a)\Rightarrow P(c)=\frac{3}{2}\times\frac{2}{11}=\frac{3}{11}$$

$$P(\{a\ ,\ c\})=P(a)+P(c)=\frac{2}{11}+\frac{3}{11}=\frac{5}{11}$$

(آمار و احتمال- احتمال- صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۷۰- (امیرهوشنگ خمسه)

مجموع احتمال تمام پیشامدها باید برابر یک باشد. با فرض $a_1=\frac{1}{12}$ و $d=\frac{1}{30}$ برای مجموع جملات این دنبالهٔ حسابی داریم:

$$\frac{n}{2}[2(\frac{1}{12})+(n-1)\frac{1}{30}]=1\Rightarrow \frac{n}{2}[\frac{1}{6}+(\frac{n}{30}-\frac{1}{30})]=1$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(\frac{4}{30}+\frac{n}{30})=1\Rightarrow \frac{n}{2}(\frac{4+n}{30})=1$$

$$\Rightarrow n(4+n)=60\xrightarrow{n>0}n=6$$

تعداد اعضای فضای نمونه برابر ۶ و تعداد زیرمجموعه‌های تعریف شده روی این فضای نمونه برابر $2^6=64$ است. از طرفی هر زیرمجموعه از فضای نمونه معادل یک پیشامد است، پس ۶۴ پیشامد روی این فضای نمونه قابل تعریف است.

(آمار و احتمال- احتمال- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴ و ۴۸ تا ۵۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

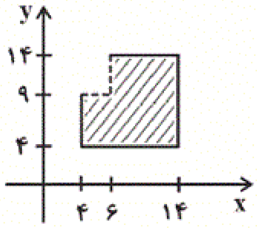
۱۶۱- (احمدرضا حمزه‌ای)

طبق تعریف مجموعهٔ A_n داریم:

$$A_1 = [1, 6] \ , \ A_2 = [4, 14] \ , \ A_3 = [9, 22]$$

$$A_2^2 = [4, 14] \times [4, 14]$$

$$A_1 \times A_3 = [1, 6] \times [9, 22]$$



مساحت نمودار $A_2^2 - A_1 \times A_3$ معادل مساحت ناحیهٔ هاشورخورده در شکل است. داریم:

$$S = (14 - 4) \times (14 - 4) - (6 - 4) \times (14 - 9)$$

$$= 10 \times 10 - 2 \times 5 = 100 - 10 = 90$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۶۲- (ندا صالح‌پور)

اگر برای مجموعه‌های ناتهی A، B و C رابطهٔ $A \times B = B \times C$ برقرار باشد، آن‌گاه باید $A = B$ و $B = C$ باشد و در نتیجه $A = B = C$.

ابتدا اعضای مجموعهٔ B را به دست می‌آوریم:

$$t^3 = t \Rightarrow t^3 - t = 0 \Rightarrow t(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow t = 0 \ , \ t = \pm 1$$

در مجموعهٔ A، x باید برابر ۲ در نظر گرفته شود. در این صورت داریم:

$$|m| < 2 \Rightarrow -2 < m < 2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = -1, 0, 1$$

در مجموعهٔ C، y باید برابر ۱ در نظر گرفته شود. در این صورت داریم:

$$h^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le h \le 1 \xrightarrow{h \in \mathbb{Z}} h = -1, 0, 1$$

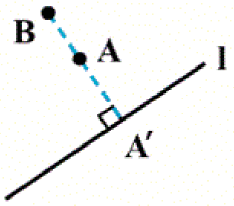
$$x = 2 \ , \ y = 1 \Rightarrow 2x - y = 2 \times 2 - 1 = 3$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۷- *(کتاب آبی)*

M یک تبدیل نیست، زیرا همان‌طور که در شکل می‌بینید تصویر دو نقطهٔ متمایز A و B از دامنه، بر هم منطبق می‌باشند.



یعنی: $M(A)=M(B)=A'$

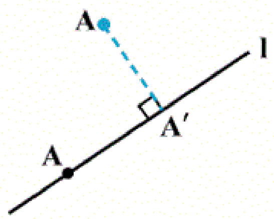
به بیانی دیگر شرط یک به یک بودن را ندارد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۱ ✓   ۲   ۳   ۴

۱۳۸- *(کتاب آبی)*

نقاطی از دامنه که روی خط l قرار دارند، تصویرشان بر خودشان منطبق است. یعنی:



$\forall A\in l\ ;\ \ M(A)=A$

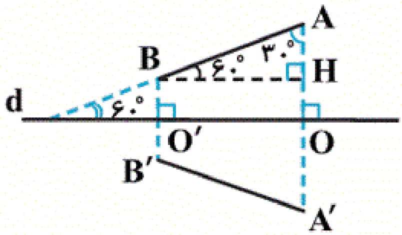
پس بی‌شمار نقطهٔ ثابت دارد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۱   ۲   ۳   ۴ ✓

(کتاب آبی) ۱۳۹-

تبدیل بازتاب طولپا است پس $AB = A'B'$ است و امتداد پاره‌خط واصل نقطهٔ بازتاب یافته و نقطهٔ نظیر آن، بر خط بازتاب عمود است، پس $\hat{O} = \hat{O'} = ۹۰^\circ$ است. حال طبق شکل داریم:



$BH = OO'$ و $BH = \frac{AB}{۲}$

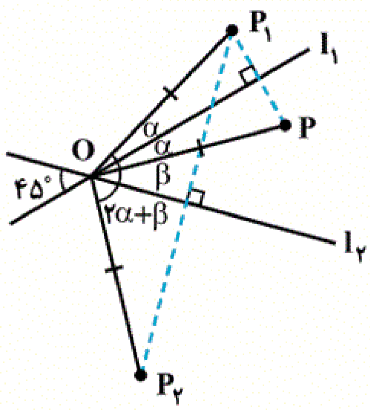
(ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است.)

$$AB + \underbrace{۲OO'}_{AB} + ۳\underbrace{A'B'}_{AB} = ۵ \Rightarrow ۵AB = ۵ \Rightarrow AB = ۱$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(کتاب آبی) ۱۴۰-



مطابق آنچه در شکل می‌بینیم می‌توان نوشت:

$$\alpha + \beta = ۴۵^\circ \Rightarrow P_۲\widehat{O}P = ۲(\alpha + \beta) = ۹۰^\circ$$

پس مثلث $P_۲OP$ یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است.

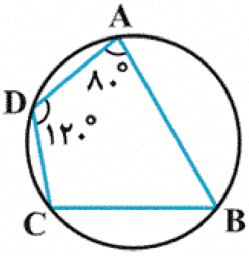
$$PP_۲^{\,۲} = OP^۲ + OP_۲^{\,۲} = ۴^۲ + ۴^۲ \Rightarrow PP_۲^{\,۲} = ۳۲ \Rightarrow PP_۲ = ۴\sqrt{۲}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی وکاربردها- صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۱- (کتاب آبی)

می‌دانیم که در چهارضلعی محاطی مجموع زوایای مقابل ۱۸۰° است، در نتیجه:



$$\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۸۰^\circ+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۰۰^\circ$$

$$\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}+۱۲۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۶۰^\circ$$

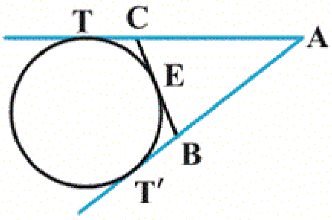
$$|\hat{C}-\hat{B}|=۱۰۰^\circ-۶۰^\circ=۴۰^\circ$$

(هندسه ۲- دایره- صفحهٔ ۲۷)

۱   ۲ ✓   ۳   ۴

۱۳۲- (کتاب آبی)

چون از نقطهٔ A دو مماس بر دایره رسم شده، پس $AT=AT'$ و داریم:



$$\begin{cases} BE=BT' \\ CE=CT \end{cases}$$

$\Rightarrow$ محیط مثلث $ABC = AB+AC+BC$

$$=AB+BE+CE+AC$$

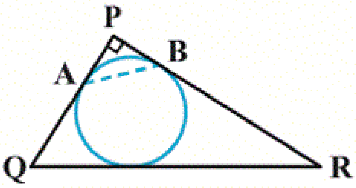
$$=AB+BT'+CT+AC=AT'+AT=۲AT$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱   ۲   ۳   ۴ ✓

۱۳۳- *(کتاب آبی)*

نکته: طول مماسی که از هر رأس یک مثلث بر دایرهٔ محاطی داخلی آن رسم می‌شود، برابر است با نصف محیط منهای طول ضلع روبه‌روی آن رأس.



$$PR = \sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴$$

با توجه به این نکته در شکل بالا داریم:

$$PA = PB = \frac{۳+۴+۵}{۲} - ۵ = ۱$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین PAB ، داریم:

$$AB = \sqrt{۲}PA = \sqrt{۲}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۴- *(کتاب آبی)*

در هر چهارضلعی محیطی، نیمسازهای چهار زاویهٔ داخلی، همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند که این نقطه مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی است.

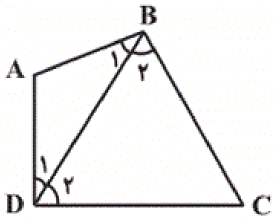
(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۵- *(کتاب آبی)*

$$AB + CD = AD + BC \Rightarrow$$ چهارضلعی $ABCD$ محیطی است.

$$\xrightarrow{\text{کوچک‌ترین ضلع است } AB} \text{ بزرگ‌ترین ضلع است } CD$$



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABD}: AD > AB \Rightarrow \hat{B}_۱ > \hat{D}_۱ \\ \overset{\Delta}{BCD}: CD > BC \Rightarrow \hat{B}_۲ > \hat{D}_۲ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ > \hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ \Rightarrow \hat{B} > \hat{D}$$

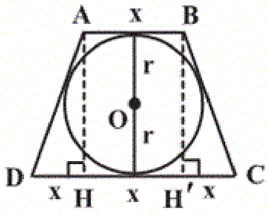
به‌طور مشابه با رسم قطر AC می‌توان نشان داد $\hat{A} > \hat{C}$.

(هندسه ۲-دایره- صفحهٔ ۲۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۶- (کتاب آبی)

روش اول: اگر $AB = x$ فرض شود، آن‌گاه $CD = 3x$ است. در چهارضلعی محیطی $ABCD$ داریم:



$$AB + CD = AD + BC \xrightarrow{AD=BC} 2AD = x + 3x = 4x \Rightarrow AD = 2x$$

$$\overset{\Delta}{AHD} : AD^2 = AH^2 + HD^2 \Rightarrow (2x)^2 = (2\sqrt{3})^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

مطابق شکل، مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$S(ABCD) = \frac{(x+3x)\times 2r}{2} \Rightarrow S(ABCD) = \frac{8\times 2\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

روش دوم: اگر شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ برابر r باشد، آن‌گاه داریم: $4r^2 = AB\times CD \Rightarrow 4(\sqrt{3})^2 = x(3x)$

$$\Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

در ادامه مساحت ذوزنقه مانند روش بالا محاسبه می‌شود.

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

یعنی: $M(A) = M(B) = A'$

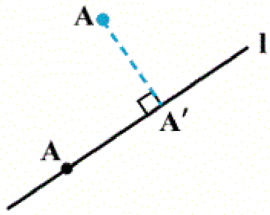
به بیانی دیگر شرط یک به یک بودن را ندارد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۵۸- (کتاب آبی)

نقاطی از دامنه که روی خط l قرار دارند، تصویرشان بر خودشان منطبق است. یعنی:



$$\forall A \in l \; ; \; M(A) = A$$

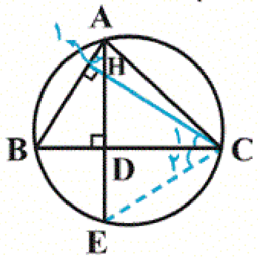
پس بی‌شمار نقطهٔ ثابت دارد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

(کتاب آبی) ۱۵۹-

دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم کرده و ارتفاع AD را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ E قطع کند. اگر ارتفاع نظیر رأس C در مثلث ABC، AD را در نقطهٔ H قطع کند، آن‌گاه داریم:



$\left.\begin{array}{ll} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 & \text{.هر دو متمم } \hat{B} \text{ هستند} \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_2 & \text{.هر دو مقابل به کمان } BE \text{ هستند} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2$

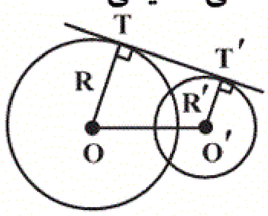
بنابراین دو مثلث HDC و EDC به حالت (زض‌ز) همنهشت هستند و در نتیجه $HD = DE$. بنابراین نقطهٔ E که روی دایرهٔ محیطی است، بازتاب H نسبت به ضلع BC است. به‌همین ترتیب، قرینهٔ نقطهٔ H (محل همرسی ارتفاع‌ها) نسبت به اضلاع AB و AC نیز روی دایرهٔ محیطی قرار می‌گیرد.

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

(کتاب آبی) ۱۶۰-

برای این‌که چهارضلعی $OTT'O'$، یک چهارضلعی محیطی باشد، لازم است $OT + O'T' = OO' + TT'$ باشد. در صورتی که دو دایره متخارج یا مماس خارج باشند، آنگاه $OO' \geq R + R'$، یعنی $OO' \geq OT + O'T'$ در نتیجه $TT' + OO' > OT + O'T'$ و چهارضلعی محیطی نخواهد بود. در حالتی که دو دایره مماس داخل باشند، T و T' بر هم منطبق هستند و چهارضلعی ایجاد نمی‌شود. اما در حالتی که دو دایره متقاطع باشند، می‌توان یک چهارضلعی محیطی برای $OTT'O'$ به‌دست آورد. مثلاً اگر $OT = R = 6$ و $O'T' = R' = 2$ و $OO' = 5$ باشد، آنگاه دو دایره متقاطع هستند و $TT' = 3$ خواهد بود و $5 + 3 = 6 + 2$ و در نتیجه $OTT'O'$، چهارضلعی محیطی است.



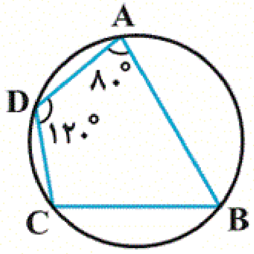
(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۵۱-

(کتاب آبی)

می‌دانیم که در چهارضلعی محاطی مجموع زوایای مقابل 180° است، در نتیجه:



$$\hat{A}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow 80^\circ+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{C}=100^\circ$$

$$\hat{B}+\hat{D}=180^\circ \Rightarrow \hat{B}+120^\circ=180^\circ \Rightarrow \hat{B}=60^\circ$$

$$|\hat{C}-\hat{B}|=100^\circ-60^\circ=40^\circ$$

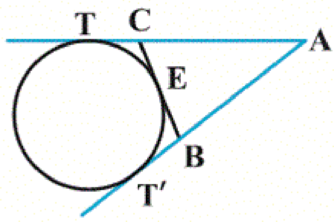
(هندسه ۲- دایره- صفحهٔ ۲۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۵۲-

(کتاب آبی)

چون از نقطهٔ A دو مماس بر دایره رسم شده، پس $AT=AT'$ و داریم:



$$\begin{cases} BE=BT' \\ CE=CT \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ABC محیط مثلث $=AB+AC+BC$

$$=AB+BE+CE+AC$$

$$=AB+BT'+CT+AC=AT'+AT=2AT$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

با توجه به این نکته در شکل بالا داریم: $PA = PB = \frac{۳+۴+۵}{۲} - ۵ = ۱$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین PAB ، داریم:

$$AB = \sqrt{۲}PA = \sqrt{۲}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

$\boxed{۱}$ ✓ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

۱۵۴- (کتاب آبی)

در هر چهارضلعی محیطی، نیمسازهای چهار زاویهٔ داخلی، همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند که این نقطه مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی است.

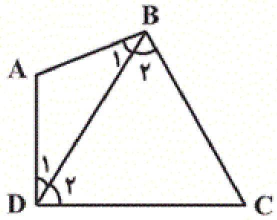
(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ ✓ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

۱۵۵- (کتاب آبی)

چهارضلعی $ABCD$ محیطی است. $\Rightarrow AB + CD = AD + BC$

CD بزرگ‌ترین ضلع است $\xrightarrow{\text{AB کوچک‌ترین ضلع است}}$



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABD} : AD > AB \Rightarrow \hat{B}_۱ > \hat{D}_۱ \\ \overset{\Delta}{BCD} : CD > BC \Rightarrow \hat{B}_۲ > \hat{D}_۲ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ > \hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ \Rightarrow \hat{B} > \hat{D}$$

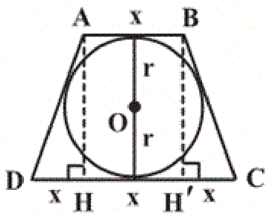
به‌طور مشابه با رسم قطر AC می‌توان نشان داد $\hat{A} > \hat{C}$.

(هندسه ۲-دایره- صفحهٔ ۲۷)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$ ✓

-۱۵۶ (کتاب آبی)

روش اول: اگر $AB = x$ فرض شود، آن‌گاه $CD = ۳x$ است. در چهارضلعی محیطی $ABCD$ داریم:



$$AB + CD = AD + BC \xrightarrow{AD=BC}$$
$$۲AD = x + ۳x = ۴x \Rightarrow AD = ۲x$$

$$\overset{\Delta}{AHD} : AD^۲ = AH^۲ + HD^۲ \Rightarrow (۲x)^۲ = (۲\sqrt{۳})^۲ + x^۲$$
$$\Rightarrow ۳x^۲ = ۱۲ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = ۲$$

مطابق شکل، مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$S(ABCD) = \frac{(x + ۳x) \times ۲r}{۲} \Rightarrow S(ABCD) = \frac{۸ \times ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۸\sqrt{۳}$$

روش دوم: اگر شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ برابر r باشد، آن‌گاه داریم: $۴r^۲ = AB \times CD \Rightarrow ۴(\sqrt{۳})^۲ = x(۳x)$

$$\Rightarrow ۳x^۲ = ۱۲ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = ۲$$

در ادامه مساحت ذوزنقه مانند روش بالا محاسبه می‌شود.

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓