



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

دیفرانسیل و انتگرال ، دنباله - ۷ سوال -

۱۰۴- به ازای چند مقدار صحیح a ، دنباله $\left\{\left(\frac{a}{3} - 3\right)^n\right\}$ کران دار است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۱۰۵- دنباله $a_n = \log_{\frac{1}{5}} \frac{15n-1}{3n+4}$ به کدام عدد همگراست؟

- ۵ (۱) -۵ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)

۱۰۶- با مقادیر $n \geq n_0$ ، فاصله جملات دنباله $\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right\}$ از عدد همگرایی آن کم تر از $\frac{1}{98}$ است. کم ترین مقدار n_0 کدام است؟

- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴)

۱۰۷- بزرگ ترین کران پایین دنباله $U_n = \frac{3^n}{n^3}$ کدام است؟

- صفر (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴)

۱۰۸- دنباله $\left\{\left(\frac{n+3\ln 2}{n}\right)^n\right\}$ به چه عددی همگراست؟

- e (۱) e^3 (۲) ۲ (۳) ۸ (۴)

۱۰۹- اگر $a_n = \left[\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}\right]$ و $b_n = \frac{3^n}{2^n n^2}$ باشد، دنباله $a_n + b_n$ چگونه است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) همگرا و کران دار (۲) همگرا و بی کران
(۳) واگرا و کران دار (۴) واگرا و بی کران

۱۱۰- دنباله $a_n = \sqrt{n^2 + 4n + 3}$ مفروض است. کدام گزینه در مورد دنباله $b_n = a_n - [a_n]$ درست است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) واگرا و بی کران است. (۲) واگرا و کران دار است.
(۳) همگرا به صفر است. (۴) همگرا به ۱ است.

دیفرانسیل و انتگرال ، حد - ۲ سوال -

۱۲۶- اگر محل تلاقی نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3a}{x^2 + (a+1)x + 2}$ با مجانب افقی اش نقطه‌ای به طول ۴ باشد، فاصله مجانب‌های قائم این تابع از یکدیگر کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

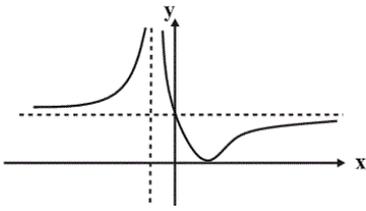
۱۲۸- شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 - 2x + a}{x^2 + bx + 1}$ را نمایش می‌دهد. حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۳

۳) ۲

۴) -۱



دیفرانسیل و انتگرال، پیوستگی - ۱۸ سوال -

۱۲۹- مجموع مختصات نقطه تلاقی مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{2x}{|x|} - \sqrt{x^2 + 2x}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۳۰- مجانب افقی تابع $y = \frac{x - \sqrt{x^2 + 2x}}{x + \sqrt{x^2 + 2x}}$ کدام است؟

$y = 2$ (۴)

$y = 1$ (۳)

$y = -2$ (۲)

$y = 0$ (۱)

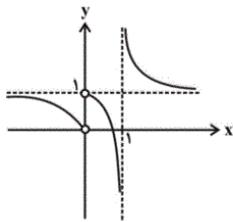
۱۲۷- مجانب‌های نمودار تابع $f(x) = \frac{ax|x|-1}{x^2-3x}$ یکدیگر را قطع می‌کنند و شکلی به مساحت ۱۲ می‌سازند. مقدار مثبت a کدام است؟

۸ (۴)

۲ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)



۱۱۱- اگر نمودار تابع f به صورت شکل مقابل باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر همگراست؟

$\text{fof}(n-1)$ (۲)

$\text{fof}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ (۱)

$\text{fof}(1-n)$ (۴)

$\text{fof}\left(\frac{n}{n+1}\right)$ (۳)

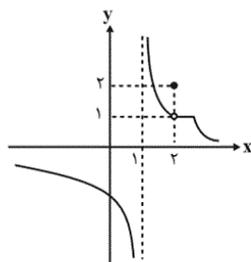
۱۱۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - f(2f(x))}$ کدام است؟

$+\infty$ (۱)

$-\infty$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۳)

صفر (۴)



۱۱۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{7\pi}{4})^+} \frac{x-1}{1 + \sqrt{2} \cos x}$ کدام است؟

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴)

$+\infty$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

$-\infty$ (۱)

۱۱۴ - اگر $f(x) = \frac{-1}{x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) صفر

۱۱۵ - اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + 2ax^2 - x^2 - bx^2 + 1}{ax + b} = 0$ باشد، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{3}$

۱۱۶ - اگر در بازه $(1, 3)$ به ازای هر x داشته باشیم: $2 + 6(x-2)^2 \leq \frac{x^2}{3f(x)-1} \leq 2 \sin^2(\frac{\pi x}{4})$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) -۲

۱۱۷ - حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x[x]}{\sqrt[3]{x^3} + 2\sqrt{x^4}}$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۱۸ - اگر $f(x+5) = \frac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt{x+2}}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

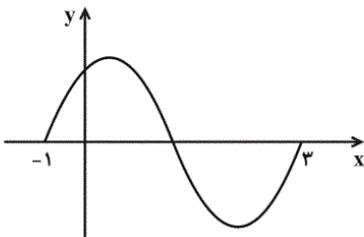
۱۱۹ - اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{a - \cos bx} = 1$ باشد، حاصل $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۰ - اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x \geq 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & ; x \geq 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$ باشد، تابع $h(x) = f(x)g(x)$ در $x = 0$...

- (۱) پیوسته است. (۲) فقط از راست پیوسته است. (۳) فقط از چپ پیوسته است. (۴) نه پیوستگی راست دارد و نه پیوستگی چپ

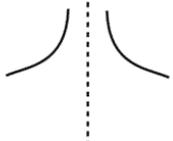
۱۲۱ - نمودار تابع f در بازه $[-1, 3]$ به صورت زیر است. اگر برد این تابع $[-2, 2]$ باشد، نمودار تابع $y = [f(x)]$ در این بازه چند نقطه ناپیوستگی دارد؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)



- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۲۲ - کدام یک از خطوط زیر نمودار تابع $y = x + 1 - \cos x$ را در بازه $(0, \frac{\pi}{3})$ قطع می‌کند؟

- (۱) $y = 0$ (۲) $y = 1$ (۳) $y = 2$ (۴) $y = 3$

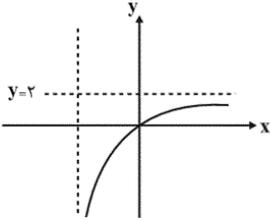


۱۲۳- نمودار تابع $f(x) = \frac{x+2}{x^2+bx+4}$ در اطراف مجانب قائمش به صورت زیر است. مقدار b کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ± 4
(۳) -4
(۴) ± 2

۱۲۴- برای تابع $f(x) = \frac{x(ax^2+bx+2)}{2x^2+(a-1)x+c}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $-\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) $-\frac{3}{2}$



۱۲۵- نمودار تابع $y = \frac{bx}{x+|x-a|+3}$ به صورت روبه‌رو است. زوج مرتب (a, b) کدام است؟

- (۱) $(3, 2)$
(۲) $(-3, 2)$
(۳) $(3, 4)$
(۴) $(-3, 4)$

دیفرانسیل و انتگرال، **یاد آوری مفاهیم پایه** - ۳ سوال -

۱۰۱- اگر α عددی گنگ باشد، چه تعداد از اعداد α^2 ، $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\log \alpha$ همواره گنگ هستند؟

- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) صفر

۱۰۲- با توجه به تساوی $\frac{y}{9} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1}$ ، رقم x کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۱۰۳- تعداد جواب‌های معادله $|\sin x| - 1 = |x|$ در بازه $[-\pi, \pi]$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۲
(۴) صفر

هندسه‌ی تحلیلی، **مقاطع مخروطی** - ۶ سوال -

۱۳۵- مکان هندسی نقاطی که فاصله آنها از نقطه $(1, -2)$ ، نصف فاصله آنها از نقطه $(-2, 4)$ باشد، کدام است؟

- (۱) دایره‌ای به مرکز $(2, -4)$ و شعاع $\sqrt{5}$
(۲) دایره‌ای به مرکز $(2, -4)$ و شعاع $2\sqrt{5}$
(۳) دایره‌ای به مرکز $(-2, 4)$ و شعاع $2\sqrt{5}$
(۴) دایره‌ای به مرکز $(-2, 4)$ و شعاع $\sqrt{5}$

۱۳۶- کانون‌های بیضی به معادله $4y = 12 - 2y^2 + 7x^2$ دو سر قطری از یک دایره‌اند. این دایره نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) ۲
(۲) $1 + \sqrt{2}$
(۳) $\frac{5}{2}$
(۴) ۳

۱۳۷- مساحت لوزی محاط شده درون مقطع مخروطی $y^2 + x^2 = 25$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۷/۵ (۳)

۵ (۲)

۲/۵ (۱)

۱۳۸- اگر نقطه $(2, 4)$ کانون و خط $y = 2$ خط هادی یک سهمی باشد، فاصله رأس این سهمی تا نقطه برخورد آن با محور عرض‌ها کدام است؟

$\sqrt{7}$ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

۱۳۹- اگر $y = 1$ خط هادی سهمی $y = mx^2 + 2mx + m$ باشد، مختصات کانون آن کدام است؟

$(1, -1)$ (۴)

$(1, 0)$ (۳)

$(-1, -1)$ (۲)

$(-1, 0)$ (۱)

۱۴۰- نقطه $(3, 2)$ کانون سهمی قائمی است که دهانه آن رو به پایین باز می‌شود. اگر این سهمی محور y ها را با عرض ۲ قطع کند، فاصله رأس تا خط هادی آن کدام است؟

۴ (۴)

۲/۵ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

هندسه‌ی تحلیلی ، بردار - ۲ سوال -

۱۴۱- تصویر قائم بردار $a = 2i + 3j - k$ بر امتداد بردار $b = 2i - j + 2k$ چه مضربی از بردار b است؟

$\frac{1}{14}$ (۴)

$\frac{3}{14}$ (۳)

$-\frac{1}{10}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۱۴۲- دو بردار a و b به ترتیب با طول‌های ۳ و ۶ مفروض‌اند. اگر طول بردار $a - b$ برابر ۶ باشد، مساحت مثلثی که روی بردارهای $a - b$ و $a + 3b$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱۸ (۴)

$36\sqrt{3}$ (۳)

$18\sqrt{3}$ (۲)

۲۴ (۱)

هندسه‌ی تحلیلی ، خط و صفحه - ۲ سوال -

۱۴۳- اگر معادله‌های خطوط شامل دو یال مکعبی که در یک وجه مشترک قرار ندارند به صورت زیر باشند، حجم مکعب کدام است؟

$$\begin{cases} L: x-1=y-2=\frac{z-13}{4} \\ L': \frac{2-x}{-2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{8} \end{cases}$$

$108\sqrt{2}$ (۲)

۱۰۸ (۱)

$54\sqrt{2}$ (۴)

۵۴ (۳)

۱۴۴- فصل مشترک دو صفحه $P_1: 3x - 2y + 4z = 1$ و $P_2: x + 2y - 4z = 2$ کدام خصوصیت را دارد؟

موازی محور x هاست. (۲)

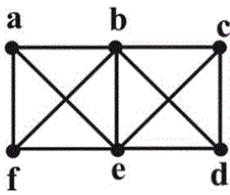
(۱) عمود بر محور x هاست.

موازی محور z هاست. (۴)

(۳) عمود بر محور z هاست.

ریاضیات گسسته ، نظریه‌ی گراف - ۳ سوال -

۱۴۱- در گراف روبه‌رو، چند مسیر به طول ۳ از رأس a به رأس b وجود دارد؟



۶ (۱)

۲ (۲)

۴ (۳)

۳ (۴)

۱۴۲- M ماتریس مجاورت گراف r^2 -منتظم از مرتبه p است. اگر حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی M^2 برابر ۶۴ باشد، حداکثر

تعداد دورهای این گراف کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۴۳- چند درخت از مرتبه p و اندازه q وجود دارد که در آنها $\Delta = 3$ و $p \times q = 30$ باشد؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

ریاضیات گسسته ، نظریه ی اعداد - ۷ سوال -

۱۴۴- به ازای چند عدد طبیعی b، در تقسیم عدد 130 بر عدد b، خارج قسمت و باقی مانده برابر می‌شود؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۴۵- عددی در مبنای ۸ به صورت $(a11)$ و در مبنای ۹ به صورت (\overline{ab}) نوشته می‌شود. اگر این عدد را به مبنای ۷ ببریم، مجموع ارقام

آن کدام است؟

۷ (۴)

۱۰ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

۱۴۶- کدام گزاره زیر همواره صحیح است؟

(۱) اگر n عددی مرکب باشد، آنگاه n حداقل یک مقسوم‌علیه اول کوچک‌تر از \sqrt{n} دارد.

(۲) اگر $(a, b) = d$ و داشته باشیم $a | c$ و $c | b$ ، آنگاه $d | c$.

(۳) اگر $a | bc$ و $(a, b) = 1$ ، آنگاه $a | c$.

(۴) اگر برای اعداد طبیعی a، b و p داشته باشیم $p | ab$ ، آنگاه $p | a$ یا $p | b$.

۱۴۷- اگر x و y اعدادی صحیح و $(30, 10y + 5) = (30, 6x + 3)$ باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم x بر ۵ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۴۸- اگر کوچک‌ترین مضرب مشترک عدد طبیعی a و ۶۰ برابر ۳۶۰ باشد، $(a, 108)$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۸ (۳)

۲۷ (۲)

۳۶ (۱)

۱۴۹- چند عدد طبیعی دو رقمی مانند a وجود دارد به طوری که کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و ۱۰ بر ۲۰ بخش‌پذیر باشد؟

۲۱ (۴)

۲۲ (۳)

۳۹ (۲)

۴۰ (۱)

۱۵۰- دو عدد طبیعی a و b را طوری در نظر بگیرید که $M = 13d + 2$ و $d \neq 1$ (d بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک M و

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b) باشد. حاصل $a + b$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

۱۰۴ - ۱۳۹۳

(کامظم اجلالی)

برای این که دنباله $\{x^n\}$ کران دار باشد، باید داشته باشیم $-1 \leq x \leq 1$. بنابراین

$$-1 \leq \frac{a}{2} - 3 \leq 1 \Rightarrow 2 \leq \frac{a}{2} \leq 4 \Rightarrow 4 \leq a \leq 8$$

می توان نوشت:

بنابراین به ازای مقادیر صحیح $a \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ دنباله کران دار است.
(دیفرانسیل - دنباله ها: صفحه های ۲۳ تا ۲۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۰۵ - ۱۳۹۳

(امسان نوری)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{5}} \frac{15n-1}{3n+4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{5}} \frac{15n}{3n} = \log_{\frac{1}{5}} 5 = -\log_5 5 = -1$$

(دیفرانسیل - دنباله ها: صفحه های ۲۷ تا ۳۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

۱۰۶ - ۱۳۹۳

(سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۰)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

ابتدا حد دنباله را می یابیم:

فاصله جملات دنباله از حدش کم تر از $\frac{1}{98}$ است یعنی:

$$\left| \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{98} \Rightarrow \left| \frac{2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right| < \frac{1}{98}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right| < \frac{1}{98}$$

مشخص است که $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ است، بنابراین عبارت داخل قدرمطلق منفی است و در نتیجه قدرمطلق را با علامت منفی برمی داریم:

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < \frac{1}{98} \Rightarrow \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{49}$$

از آن جا که مخرج همواره مثبت است داریم:

$$49\sqrt{n+1} - 49\sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \Rightarrow 48\sqrt{n+1} < 50\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow 24\sqrt{n+1} < 25\sqrt{n} \Rightarrow 576(n+1) < 625n \Rightarrow 49n > 576$$

$$n > \frac{576}{49} \approx 11.75 \dots \Rightarrow n \geq 12 \Rightarrow \min(n_0) = 12$$

(دیفرانسیل - دنباله ها: صفحه های ۲۷ تا ۳۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۱۷)

۱۰۷- با نوشتن چند جمله دنباله، خواهیم داشت:

$$3, \underbrace{\frac{9}{8}, 1, \frac{81}{64}, \frac{243}{125}, \dots}_{\text{صعودی نزولی}}$$

با توجه به مقادیر، دیده می‌شود که این دنباله، از جمله سوم به بعد، صعودی خواهد بود، پس بزرگترین کران پایین آن جمله سوم یعنی $U_{\inf} = 1$ خواهد بود.
(دیفرانسیل - دنباله‌ها؛ صفحه‌های ۴۱ تا ۴۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(شیب شیبی)

۱۰۸- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

سعی می‌کنیم عبارت را به صورت $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$ تبدیل کنیم و از

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e \quad \text{استفاده کنیم.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt{\ln \lambda}}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{\sqrt{\ln \lambda}}}\right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{\sqrt{\ln \lambda}}}\right)^{\frac{n}{\sqrt{\ln \lambda}}} = e^{\sqrt{\ln \lambda}} = \lambda$$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$-1 \leq \sin \frac{n\pi}{2} \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \right] = \begin{cases} -1 & ; n = 4k - 1 \\ 0 & ; n = 2k, 4k + 1 \\ 1 & ; n = 1 \end{cases}$$

بنابراین دنباله a_n کران دار اما واگراست. از طرفی وقتی $n \rightarrow \infty$ ، سرعت رشد دنباله‌های مختلف به صورت زیر است:

$$\log n < n^k < a^n < n! < n^n \quad ; (a, k > 1)$$

بنابراین دنباله $b_n = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n^2}$ واگرا و بی کران است؛ در نتیجه دنباله $a_n + b_n$ نیز واگرا و بی کران است.

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کظم اجلائی)

۱۱۰ -

می‌دانیم $(n+1)^2 < n^2 + 4n + 3 < (n+2)^2$ ، بنابراین داریم:

$$n+1 < \sqrt{n^2 + 4n + 3} < n+2 \Rightarrow [\sqrt{n^2 + 4n + 3}] = n+1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 3} - (n+1)) \times \frac{\sqrt{n^2 + 4n + 3} + (n+1)}{\sqrt{n^2 + 4n + 3} + (n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 4n + 3 - n^2 - 2n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n + 3} + (n+1)} = \frac{2n}{2n} = 1$$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سعید علم‌پور)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ مجانب افقی}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 3a}{x^2 + (a+1)x + 2} = 1 \Rightarrow 2x + 3a = (a+1)x + 2$$

$$\xrightarrow{x=4} 8 + 3a = 4a + 6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x + 6}{x^2 + 3x + 2}$$

مجانب‌های قائم، بین ریشه‌های مخرج هستند:

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } -2$$

هیچ‌کدام از این مقادیر، ریشه صورت نیستند، بنابراین $x = -1$ و $x = -2$ مجانب‌های قائم تابع f هستند. فاصله این دو خط از هم یک واحد است.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(عمیر علیزاده)

-۱۲۸

با توجه به نمودار تابع در همسایگی مجانب قائم آن، عبارت مخرج باید ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\Rightarrow \Delta_{\text{مخرج}} = b^2 - 4 = 0 \Rightarrow b = \pm 2$$

از طرفی این مجانب قائم در سمت چپ محور y ها قرار دارد. بنابراین $b = 2$ قابلقبول است. خط $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ مجانب افقی است و نمودار تابع مجانبافقی خود را در $x = 0$ قطع کرده است. بنابراین داریم:

$$f(0) = a = 1 \Rightarrow a + b = 3$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(ممدراطهر شعاعی)

راه حل اول: ابتدا مجانب‌های مایل $y = \sqrt{x^2 + 2x}$ را به دست می‌آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow y_1 = x + 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} = -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow y_2 = -x - 1$$

بنابراین معادله مجانب‌های مایل تابع f برابر $y = 2 - y_1$ و $y = -2 - y_2$ یعنی $y = 1 - x$ و $y = x - 1$ است که نقطه تقاطع آن‌ها نقطه $(1, 0)$ است. مجموع مختصات این نقطه برابر ۱ است.
راه حل دوم:

معادله مجانب‌های مایل تابع $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a > 0$) برابر $\sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$ است. بنابراین معادله‌های مجانب‌های تابع فوق برابر است با:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty : y = 2 - x - 1 = 1 - x \\ x \rightarrow -\infty : y = -2 + x + 1 = x - 1 \end{array} \right.$$

ادامه راه حل مشابه راه حل اول است.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(ممدراطهر شعاعی)

$$y = \frac{x - \sqrt{x^2 + 2x}}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} \times \frac{x - \sqrt{x^2 + 2x}}{x - \sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{(x - \sqrt{x^2 + 2x})^2}{x^2 - x^2 - 2x}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - 2x\sqrt{x^2 + 2x}}{-2x} \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 2x} - x - 1$$

از ضابطه y مشخص است که تابع در $x = -\infty$ مجانب مایل و در $x = +\infty$ مجانب افقی دارد. حال با توجه به نکته موجود در راه حل دوم سؤال قبل می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x - 1) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (|x + 1| - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - x - 1) = 0$$

خط $y = 0$ مجانب افقی تابع در $+\infty$ است.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۲۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی ساوچی)

مجانب های قائم از بین ریشه های مخرج هستند:

ریشه های مخرج $\rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$

برای مجانب های افقی نیز داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax|x|-1}{x^2-3x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax \cdot x}{x^2} = a \Rightarrow y = a \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax \cdot (-x)}{x^2} = -a \Rightarrow y = -a \end{cases}$$

۴

۳ ✓

۲

۱

(محمودرضا اسلامی)

با توجه به این که دنباله $\{\frac{n}{n+1}\}$ با مقادیر کم تر از ۱ به ۱ همگرا می شود، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} fof(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} fof\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow 1^-} fof(n) = 1$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه های ۵۳ تا ۷۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کاظم ابلالی)

توجه کنید که در همسایگی راست نقطه $x = 2$ تابع f با تابع ثابت $y = 1$ برابر است. پس در این همسایگی داریم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow 2f(x) = 2 \Rightarrow f(2f(x)) = f(2) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - f(2f(x))} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه های ۶۰ تا ۶۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

در همسایگی راست $X = \frac{3\pi}{4}$ ، عبارت $X - 1$ مقداری مثبت به خود می‌گیرد و $\cos X < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\sqrt{2} \cos X < -1 \Rightarrow 1 + \sqrt{2} \cos X < 0$$

یعنی در این همسایگی عبارت مخرج برابر صفر است و تابع $y = 1 + \sqrt{2} \cos X$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+} \frac{x-1}{1 + \sqrt{2} \cos x} = -\infty$$

از مقادیر منفی به صفر نزدیک می‌شود.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

ابتدا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [0] = 0$$

از طرف دیگر اگر $x > 1$ باشد، آن‌گاه:

$$0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow -1 < -\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow [f(x)] = \left[-\frac{1}{x} \right] = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) = -1$$

$$\Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] - \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = 0 - (-1) = 1$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

در ابتدا صورت کسر را با فاکتورگیری ساده تر می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(a-1) + x^2(2a-b) + 1}{ax+b} = 0$$

چون حد تابع در بی نهایت صفر شده است، باید درجه مخارج از درجه صورت بیشتر باشد، چون مخارج درجه اول است، پس باید ضریب جملات درجه ۲ و ۳ صورت صفر شود.

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ 2a-b=0 \Rightarrow 2a=b \xrightarrow{a=1} b=2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه های ۶۵ تا ۶۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

(کاظم اجلالی)

طبق قضیه فشردگی داریم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} 2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \left(2 + 6(x-2)^2\right) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{3f(x)-1} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 1} = 2 \Rightarrow 3 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 1 = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه های ۷۵ تا ۷۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مسرطاهر شعاعی)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x[x]}{\sqrt[3]{x^3} + 2\sqrt[4]{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x + 2|x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{-x} = 1$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه های ۷۸ تا ۸۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(عیب شفیع)

برای آن که $(x+5) \rightarrow -3$ ، کافی است $x \rightarrow -8$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -8} f(x+5) = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x-3}}{\sqrt[3]{x+2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \left(\frac{\sqrt{1-x-3}}{\sqrt[3]{x+2}} \times \frac{\sqrt{1-x+3}}{\sqrt{1-x+3}} \times \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - 2\sqrt[3]{x} + 4}{(\sqrt[3]{x})^2 - 2\sqrt[3]{x} + 4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(1-x-9) \times (4+4+4)}{(x+8)(3+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \left(\frac{-x-8}{x+8} \right) \times \frac{12}{6} = -1 \times 2 = -2 \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مهمدرضا شوکتی بیرق)

چون حد صورت برابر صفر است، پس باید حد مخرج نیز برابر صفر شود. در غیر این صورت حاصل حد صفر خواهد شد.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (a - \cos bx) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{2 \sin^2 bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{2 \left(\frac{bx}{x}\right)^2} = \frac{2x^2}{b^2 x^2} = \frac{2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow b = \pm 2 \Rightarrow a + b = 3 \text{ یا } a + b = -1$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(گوروش شاهمنصوریان)

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x^2+1} & ; x \geq 0 \\ (-1) \times (-1) & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow h(x) = \begin{cases} 1 & ; x \geq 0 \\ 1 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(x) = 1 ; D_h = \mathbb{R}$$

بنابراین تابع h در $x = 0$ پیوسته است.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۸۷ تا ۹۲)

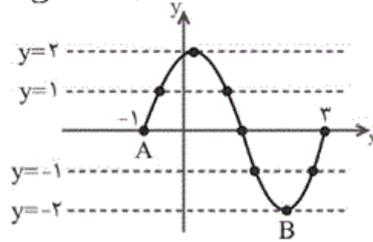
۴

۳

۲

۱ ✓

(عادل حسینی)



نکته: اگر g تابعی پیوسته باشد، تابع $f(x) = [g(x)]$ در نقاطی که مقدار g صحیح شود و تابع مینیمم نداشته باشد، ناپیوسته است.

نمودار فوق را در نظر بگیرید، از ۹ نقطه تلاقی، تابع در دو نقطه A و B پیوسته خواهد بود، زیرا در A پیوستگی راست خواهد داشت، همچنین در B مینیمم دارد، پس تابع در ۷ نقطه این بازه ناپیوسته است.
(دیفرانسیل- هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۷ تا ۹۲)

۴

۳

۲

۱

(مهدی رضا شوکتی بیرق)

تابع $f(x) = x + 1 - \cos x$ یک تابع پیوسته است و داریم:

$$0 = f(0) < 1 < f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} < 2$$

پس بنا به قضیه مقدار میانی، خط $y = 1$ نمودار تابع f را در بازه $(0, \frac{\pi}{3})$ قطع می‌کند.

توجه کنید که f در بازه $(0, \frac{\pi}{3})$ صعودی اکید است. بنابراین سایر گزینه‌ها نمی‌تواند درست باشد.
(دیفرانسیل- هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

۴

۳

۲

۱

(فرزاد فارسی جانی)

با توجه به نمودار، عبارت مخرج باید ریشه مضاعف داشته باشد؛ زیرا علامت تابع در همسایگی ریشه مخرج یکسان است. عبارت $x^2 + bx + 4$ در دو حالت زیر ریشه مضاعف دارد:

$$\begin{cases} b = 4 \Rightarrow x^2 + bx + 4 = (x + 2)^2 \\ b = -4 \Rightarrow x^2 + bx + 4 = (x - 2)^2 \end{cases}$$

اما در حالت $b = 4$ ، تابع f به صورت $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ساده می‌شود که نمودار آن در همسایگی $x = -2$ متفاوت با نمودار صورت سؤال است.

(دیفرانسیل- هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

۴

۳

۲

۱

(علی شهرابی)

با توجه به حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ، عبارت‌های صورت و مخرج تابع f باید هم‌درجه باشند، بنابراین $a = 0$ است.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{bx^2 + 2x}{2x^2 - x + c}$$

اگر $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ باشد، $x = 1$ باید ریشه عبارت مخرج باشد:

$$\Rightarrow 2(1)^2 - (1) + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx^2}{2x^2} = \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4$$

همچنین داریم:

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4x^2 + 2x}{2x^2 - x - 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x(2x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x}{x-1} = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مسئله بهرام‌پور)

ضابطه تابع f را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{bx}{2x+2-a} & ; x > a \\ \frac{bx}{a+2} & ; x \leq a \end{cases}$$

وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، تابع تعریف نمی‌شود، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $a + 2 = 0$ و در نتیجه

$a = -2$ است. بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = \frac{bx}{2x+6}$ و دامنه آن $(-2, +\infty)$ است

و همچنین در $+\infty$ مجانب افقی برابر $y = \frac{b}{2}$ دارد $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx}{2x} = \frac{b}{2} \right)$

در نتیجه $\frac{b}{2} = 2$ و $b = 4$ است.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

اگر α گنگ باشد، اعداد α^2 و $\log \alpha$ می‌توانند گویا باشند، مثلاً:

$$\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha^2 = 2 \in \mathbb{Q}$$

$$\alpha = \sqrt{10} \Rightarrow \log \alpha = \log \sqrt{10} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$$

اما $\frac{1}{\alpha+1}$ همواره گنگ است. زیرا مجموع عدد گنگ α و عدد گویای ۱ همواره گنگ است. پس $\alpha+1$ گنگ است. از طرفی وارون یک عدد گنگ، الزاماً گنگ است.

لذا $\frac{1}{\alpha+1}$ همواره گنگ است.

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه ۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

(مفتر منصوری)

$$\frac{3x-3}{90} + \frac{x^3-x}{90} = \frac{70}{90} \Rightarrow 30+x-3+10x+3-x=70$$

$$\Rightarrow 10x+30=70 \Rightarrow 10x=40 \Rightarrow x=4$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۷ و ۸)

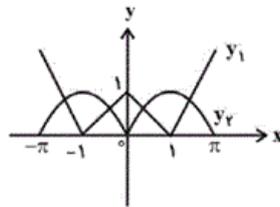
۴

۳ ✓

۲

۱

(همایون شریک)



$$\begin{cases} y_1 = ||x| - 1| \\ y_2 = |\sin x| \end{cases}$$

محل برخورد نمودارهای توابع y_1 و y_2 جواب‌های مسأله است.

بنابراین معادله چهار جواب دارد.

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

(میرغفور باقری)

فرض کنید $M = (x, y)$ نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر باشد. داریم:

$$A = (1, -2), \quad B = (-2, 4)$$

$$|BM| = 2|AM| \Rightarrow BM^2 = 4AM^2$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-4)^2 = 4(x-1)^2 + 4(y+2)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 + 16y + 16$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 12x + 24y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 + 8y = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+4)^2 = 20$$

معادله اخیر مربوط به دایره‌ای به مرکز $O = (2, -4)$ و شعاع $R = 2\sqrt{5}$ است.
(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مهرداد ملوندی)

$$7x^2 + 2(y-1)^2 = 14 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{7} = 1$$

$$\begin{cases} a^2 = 7 \\ b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 7 - 2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

با توجه به معادله، بیضی از نوع قائم با مرکز $O = (0, 1)$ است. اگر شعاع دایره مورد نظر را R در نظر بگیریم، آنگاه با توجه به فرض داریم:

$$2R = 2c \Rightarrow R = c = \sqrt{5}$$

$$\text{معادله دایره: } x^2 + (y-1)^2 = 5 \xrightarrow{y=x} x^2 + (x-1)^2 = 5$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x + 1 = 5 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۵۲ تا ۶۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

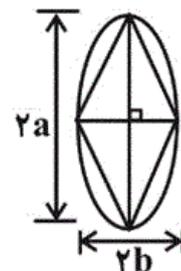
(مسئله مسند کریمی)

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\begin{cases} a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \\ b^2 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت لوزی: } S = \frac{1}{2}(2a)(2b) = 2ab = 2 \times 5 \times \frac{1}{2} = 5$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)



۴

۳

۲ ✓

۱

(علیرضا شریف‌فطیمی)

رأس سهمی دقیقاً وسط فاصله کانون تا خط هادی سهمی قرار دارد. $S = (2, 3)$
رأس این سهمی قائم است که رو به بالا باز می‌شود و $a = 1$ می‌باشد. داریم:

$$(x-2)^2 = 4(y-3) \xrightarrow{x=0} (0-2)^2 = 4(y-3) \Rightarrow y = 4$$

نقطه برخورد سهمی با محور عرض‌ها، نقطه $A(0, 4)$ است.

$$SA = \sqrt{(0-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۴

۳ ✓

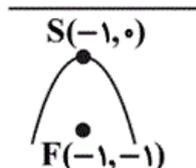
۲

۱

(مسئله مسند کریمی)

$$y = mx^2 + 2mx + m \Rightarrow y = m(x+1)^2 \Rightarrow (x+1)^2 = \frac{1}{m}y$$

در این سهمی قائم، مختصات رأس سهمی به صورت $(-1, 0)$ و در نتیجه فاصله رأس از خط هادی برابر ۱ است. چون دهانه سهمی رو به پایین باز می‌شود، پس پارامتر سهمی، عددی منفی بوده که برابر است با $a = -1$.



کانون سهمی نقطه‌ای است که طول آن همان طول رأس سهمی و عرض آن برابر عرض رأس سهمی به علاوه a است، یعنی $(-1, -1)$.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

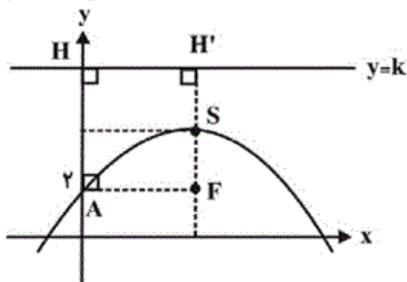
۴

۳

۲ ✓

۱

(مسیر فایلو)



معادله خط هادی این سهمی را به صورت $y = k$ در نظر می‌گیریم، از آن‌جا که فاصله نقطه $A = (0, 2)$ که روی این سهمی قرار دارد، از کانون و خط هادی یکسان است، داریم:

$$AF = AH \Rightarrow 3 = k - 2 \Rightarrow k = 5$$

فاصله رأس تا خط هادی نصف فاصله کانون تا خط هادی است، بنابراین داریم:

$$FH' = 5 - 2 = 3 \Rightarrow SH' = \frac{FH'}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مفتر، منصور)

اگر بردار a' تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار b باشد، آنگاه داریم:

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b \Rightarrow \frac{a \cdot b}{|b|^2} = \frac{(2, 3, -1) \cdot (3, -1, 2)}{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \frac{6 - 3 - 2}{9 + 1 + 4} = \frac{1}{14}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

(امیر ممبرطاهری)

$$|2a - b|^2 = 4|a|^2 + |b|^2 - 4a \cdot b$$

$$\Rightarrow 36 = 4 \times 9 + 36 - 4a \cdot b \Rightarrow a \cdot b = 9$$

از طرفی می‌دانیم:

$$|a \times b|^2 + (a \cdot b)^2 = |a|^2 |b|^2 \Rightarrow |a \times b|^2 = 9 \times 36 - 81 = 243$$

$$\Rightarrow |a \times b| = 9\sqrt{3}$$

مساحت مثلث مذکور برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} |(a - b) \times (a + 2b)| = \frac{1}{2} |\underbrace{a \times a}_0 + 2a \times b - b \times a - \underbrace{2b \times b}_0|$$

$$= \frac{1}{2} |4a \times b| = 2|a \times b| \Rightarrow S = 2(9\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها، صفحه‌های ۲۰، ۳۰ و ۳۲)

۴

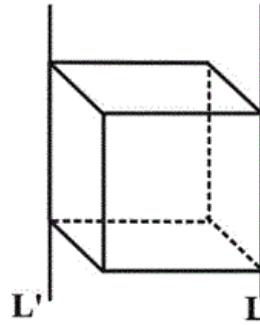
۳

۲ ✓

۱

(مسئله همدم‌گیریمی)

دو خط L و L' موازی یکدیگرند. از طرفی یال‌های واقع بر این دو خط در یک وجه مکعب قرار ندارند، پس با توجه به شکل زیر روشن است فاصله L و L' برابر اندازه قطر وجه مکعب است. لذا داریم:



$$A = (2, 3, -1) \in L'$$

$$B = (1, 2, 13) \in L$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = (-1, -1, 14)$$

$$u_L = (1, 1, 4)$$

$$\text{فاصله نقطه } A \text{ از خط } L = \text{فاصله بین } L' \text{ و } L = \frac{|\overline{AB} \times u_L|}{|u_L|}$$

$$= \frac{|(-18, 18, 0)|}{|(1, 1, 4)|} = \frac{18\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 6$$

اگر طول هر یال مکعب را با a نمایش دهیم، داریم:

$$\text{قطر وجه مکعب} = 6 \Rightarrow a\sqrt{2} = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{حجم مکعب} = a^3 = (3\sqrt{2})^3 = 27 \times 2\sqrt{2} = 54\sqrt{2}$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه، صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مهردار ملونری)

فرض کنید n_1 و n_2 به ترتیب بردارهای نرمال صفحه‌های P_1 و P_2 و u بردار هادی فصل مشترک این دو صفحه باشد، داریم:

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= (3, -2, 4) \\ n_2 &= (1, 2, -4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow u = n_1 \times n_2 = (0, 16, 8)$$

بردار هادی فصل مشترک دو صفحه فاقد مؤلفه x است، پس فصل مشترک صفحه‌های P_1 و P_2 بر محور x ها عمود است.

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه، صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

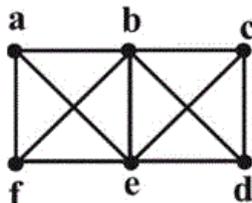
۴

۳

۲

۱ ✓

(مهردار ملونری)



با توجه به نمودار، ۴ مسیر به طول ۳ از a به b وجود دارد که عبارت‌اند از:

$afeb, aefb, aecb, aedb$

(ریاضیات گسسته - گراف، صفحه ۱۳)

۴

۳ ✓

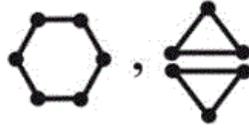
۲

۱

تمام درایه‌های روی قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت یک گراف r -منتظم برابر r است. پس:

$$\overbrace{r \times r \times \dots \times r}^{p \text{ مرتبه}} = 64 \Rightarrow r^p = 64 = 2^6 = 4^3 = 8^2 = 64^1$$

چون $r \leq p-1$ ، پس $r=2$ و $p=6$ است. با این شرایط دو گراف با



نمودارهای روبه‌رو وجود دارد:

در این گراف، حداکثر دو دور وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - گراف، صفحه‌های ۱۲، ۱۴ و ۲۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$p \times q = 30 \xrightarrow{q=p-1} p(p-1) = 30 \Rightarrow p=6, q=5$$

با توجه به نمودارهای زیر، ۳ درخت از مرتبه ۶ وجود دارد که در



(ریاضیات گسسته - گراف، صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$130 = bq + q, 0 \leq q < b \Rightarrow 130 = q(b+1), q < b \quad (1)$$

$$130 = 2 \times 5 \times 13 \xrightarrow{(1)} \begin{cases} q=1, b=129 \\ q=2, b=64 \\ q=5, b=25 \\ q=10, b=12 \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد، صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

(هومن نورائی)

$$\left. \begin{array}{l} (\overline{a1})_8 = 1 + 8 + 64a \\ (\overline{8b})_9 = b + 72 \end{array} \right\} \Rightarrow 9 + 64a = b + 72 \Rightarrow b = 64a - 63$$

با توجه به آن که $1 \leq a \leq 7$ و $0 \leq b \leq 8$ ، a تنها می‌تواند ۱ باشد، زیرا در غیر این صورت b از ۸ بزرگ‌تر می‌شود، پس داریم:

$$a = 1 \Rightarrow b = 64 - 63 = 1$$

پس این عدد در مبنای 10 برابر است با: $(\overline{8b})_9 = b + 72 = 1 + 72 = 73$ نمایش عدد 73 در مبنای 7 به صورت $(133)_7$ است که مجموع ارقام آن برابر 7 می‌باشد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مهرداد ملونری)

گزینه «۱» نادرست است. «اگر n عددی مرکب باشد، حداقل یک مقسوم‌علیه اول کوچک‌تر یا مساوی \sqrt{n} دارد.»

گزینه «۲» نادرست است. اگر $a | b$ و $c | d$ ، آنگاه $c | d$.

گزینه «۳» درست است. طبق لم اقلیدس اگر $a | bc$ و $(a, b) = 1$ ، آنگاه $a | c$.

گزینه «۴» نادرست است. اگر p اول باشد آنگاه گزاره درست خواهد بود.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد، صفحه‌های ۳۸ تا ۴۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

(هنریک سرکیسیان)

$$(30, 6x + 3) = (30, 10y + 5) \Rightarrow 3(10, 2x + 1) = 5(6, 2y + 1)$$

$$\Rightarrow 5 \mid 3(10, 2x + 1) \xrightarrow{(5, 3)=1} 5 \mid (10, 2x + 1)$$

$$\Rightarrow 5 \mid 2x + 1 \Rightarrow 2x + 1 = 5k (*)$$

چون $2x + 1$ فرد است، پس طبق رابطه $(*)$ ، $5k$ و در نتیجه k فرد می‌باشد و

$$\text{داریم } k = 2q + 1 \quad (q \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 5(2q + 1) \Rightarrow 2x + 1 = 10q + 5 \Rightarrow x = 5q + 2$$

یعنی باقی‌مانده تقسیم x بر 5 برابر 2 است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مهرداد ملونری)

$$[a, 60] = 360 \Rightarrow [a, 2^2 \times 3 \times 5] = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$\Rightarrow a = 2^2 \times 3^2 \times 5^\alpha \quad (\alpha = 0 \text{ یا } 1)$$

$$(a, 108) = (2^2 \times 3^2 \times 5^\alpha, 2^2 \times 3^3) = 2^2 \times 3^2 = 36$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مهدی رضا دلورنژاد)

با توجه به این که $10 = 5 \times 2$ و $20 = 5 \times 2^2$ ، پس شرط لازم و کافی برای این

که $[a, 10] = 20$ بخش‌پذیر باشد این است که a مضرب 4 باشد. داریم:

$$10 \leq 4k \leq 99 \Rightarrow 3 \leq k \leq 24$$

$$\Rightarrow \text{تعداد اعداد مورد نظر} = 24 - 2 = 22$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد، صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

فرض کنید $a = a'd$ و $b = b'd$ که در آن $(a', b') = 1$ و $M = a'b'd$ باشد.

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$7a'b'd = 13d + 2 \Rightarrow d(7a'b' - 13) = 2$$

$$\xrightarrow{d \neq 1} \begin{cases} d = 2 \\ 7a'b' - 13 = 1 \Rightarrow a'b' = 2 \Rightarrow \{a', b'\} = \{1, 2\} \end{cases}$$

$$a + b = d(a' + b') = 2 \times 3 = 6$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱