سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)
https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)
https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

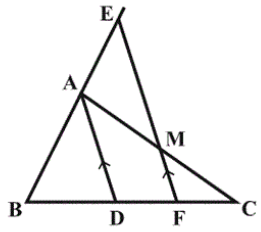
هندسه ۱ دهم ، ترسیم هاي هندسي و استدلال - ۱ سوال

۱۲۱- در چهارضلعی $ABCD$، $\hat{B}=۹۰^\circ$ و رأس C محل تقاطع نیمساز زاویهٔ داخلی A و عمودمنصف ضلع AD است. اگر $AB=۴$ و مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر ۱۸ باشد، محیط این چهارضلعی کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

هندسه ۱ دهم ، قضيه‌ي تالس، تشابه و كاربردها ي آن - ۲ سوال -

۱۲۲- در شکل زیر، از نقطهٔ M وسط پاره‌خط AC، خطی موازی AD رسم شده است. اگر $\frac{AD}{EF}=\frac{۳}{۵}$ باشد، حاصل $\frac{BD}{CD}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۲۳- مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویهٔ حادهٔ ۳۰° مفروض است. نسبت طول‌های دو قطعه‌ای که ارتفاع وارد بر وتر، روی وتر ایجاد می‌کند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

هندسه ۱ دهم ، چند ضلعي ها - ۲ سوال -

۱۲۴- در دو چندضلعی با تعداد اضلاع متفاوت، تفاضل تعداد قطرها از دو برابر تعداد اضلاع، یکسان است. اختلاف تعداد رئوس این دو چندضلعی کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۵- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $\left(\hat{A}=۹۰^\circ\ ,\ \hat{C}=۵\hat{B}\right)$، از نقطهٔ H پای ارتفاع وارد بر وتر، دو عمود HD و HE به‌ترتیب بر اضلاع AB و AC رسم شده است. نسبت مساحت چهارضلعی $ADHE$ به مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۱۱۱- کدام‌یک از معادلات هم‌نهشتی زیر در $\mathbb{Z}$ جواب ندارد؟

۱) $51x\overset{6}{\equiv}10$ ۲) $4x\overset{6}{\equiv}18$ ۳) $3x\overset{9}{\equiv}15$ ۴) $12x\overset{18}{\equiv}30$

۱۱۲- معادلهٔ $73x\overset{23}{\equiv}1$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دو رقمی چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۳- اگر روز اول فروردین شنبه باشد، دومین جمعه در مهر ماه، کدام روز این ماه است؟

۱) دهم ۲) یازدهم ۳) دوازدهم ۴) سیزدهم

۱۱۴- اگر معادلهٔ هم‌نهشتی $ax\overset{b}{\equiv}c$ در $\mathbb{Z}$ دارای جواب و $a\overset{12}{\equiv}8$ و $b\overset{8}{\equiv}4$ باشد، آنگاه c کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۶ ۴) ۴۲

۱۱۵- اگر $75x\overset{12}{\equiv}54$، آنگاه عدد x به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۸ می‌تواند تعلق داشته باشد؟

۱) $[3]$ ۲) $[4]$ ۳) $[5]$ ۴) $[6]$

۱۱۶- اگر عدد چهار رقمی $\overline{a2bc}$ بر اعداد ۲، ۳، ۵ و ۱۱ بخش‌پذیر باشد، آنگاه مجموع ارقام این عدد کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

۱۱۷- اگر معادلهٔ هم‌نهشتی $ax\overset{15}{\equiv}18$ در $\mathbb{Z}$ فاقد جواب باشد، آنگاه کدام معادلهٔ زیر قطعاً در $\mathbb{Z}$ جواب ندارد؟ $(a\in\mathbb{Z})$

۱) $ax\overset{6}{\equiv}8$ ۲) $ax\overset{10}{\equiv}12$ ۳) $ax\overset{8}{\equiv}10$ ۴) $ax\overset{4}{\equiv}6$

۱۱۸- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد چهار رقمی $M=\overline{a47b}$ بر ۳۳، برابر ۲ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم بزرگ‌ترین عدد طبیعی M بر ۴ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۹- اگر عدد طبیعی پنج رقمی $\overline{a111a}$ مضرب ۱۱ باشد، آنگاه چند عدد طبیعی چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۹ به‌صورت $\overline{babb}$ وجود دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲۰- چند عدد طبیعی سه رقمی x وجود دارد که در روابط $3x\overset{5}{\equiv}2$ و $4x\overset{7}{\equiv}3$ صدق کند؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

آمار و احتمال ، آشنایي با مباني رياضي - ۳ سوال -

۱۳۱- اگر گزاره‌های $p\Rightarrow\sim q$ و $q\Rightarrow\sim r$ به‌ترتیب نادرست و درست باشند، آنگاه ارزش گزاره‌های $(r\Rightarrow p)\Leftrightarrow(\sim r\Rightarrow\sim p)$ و $(p\wedge q)\Rightarrow(r\Leftrightarrow q)$ به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) نادرست - نادرست ۲) نادرست – درست ۳) درست – نادرست ۴) درست – درست

۱۳۲- اگر A، B و C سه مجموعهٔ دو به دو متمایز و $A\cup B\subseteq A\cap C$ باشد، آنگاه کدام یک از مجموعه‌های زیر با سایرین متفاوت است؟

۱) $B-A$ ۲) $A-C$ ۳) $C-B$ ۴) $B-C$

۱۳۳- اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، آنگاه متمم مجموعهٔ $\left[A'\cap(A\cup B)\right]\cap\left[A\cap(A'\cup B')\right]$ همواره برابر کدام است؟ (U مجموعهٔ مرجع است.)

۱) $\varnothing$ ۲) A ۳) A' ۴) U

آمار و احتمال ، احتمال - ۲ سوال -

۱۳۴- در یک کلاس ۱۲ دانش‌آموز در ۴ ردیف سه نفره نشسته‌اند. اگر دو نفر به تصادف از این کلاس انتخاب کنیم، احتمال آنکه دو نفر انتخابی از یک ردیف نباشند، کدام است؟

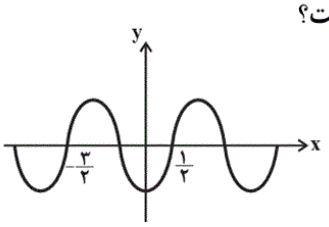
۱) $\frac{۱۰}{۱۱}$ ۲) $\frac{۹}{۱۱}$ ۳) $\frac{۸}{۱۱}$ ۴) $\frac{۶}{۱۱}$

۱۳۵- اگر $S=\{a,b,c,d\}$ فضای نمونهٔ یک آزمایش تصادفی باشد و $P(a)$، $P(b)$، $P(c)$ و $P(d)$ یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $\frac{۱}{۱۲}$ تشکیل دهند، آنگاه $P(d)$ چند برابر $P(a)$ است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

حسابان دوازدهم ، مثلثات - ۱۰ سوال -

۸۱- قسمتی از نمودار تابع $y=\sin\left(\left(ax+۳\right)\frac{\pi}{۲}\right)$ به‌صورت شکل زیر است. مقدار مثبت a کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۸۲- اگر کم‌ترین مقدار تابع $y=|a|+۳a\sin\left(a\pi x+\frac{\pi}{۲}\right)$ برابر ۴- باشد، دورهٔ تناوب آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۱

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۸۳- اگر دورهٔ تناوب، ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x)=(\sin\pi x+\cos\pi x)^{۲}$ را به‌ترتیب با T، M و m نشان دهیم، حاصل $M+m-T$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۱

۸۴- اگر $f(x)=\tan\left(\frac{\pi x}{۲}\right)$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=f(x)+f(x+۱)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{N}$

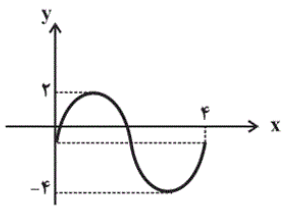
۳) $\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}\right\}$ ۴) $\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq ۲k,k\in\mathbb{Z}\right\}$

۸۵- برد تابع $\tan x+\frac{\tan x}{|\tan x|}$ با دامنهٔ $\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right)-\{۰\}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۲) $\mathbb{R}$

۳) $\mathbb{R}-[-۱,۱]$ ۴) $\mathbb{R}-\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right]$

۸۶- اگر نمودار تابع $f(x)=a+b\sin cx$ به‌صورت شکل زیر باشد، مقدار $f\left(\frac{۳۱}{۳}\right)$ کدام است؟

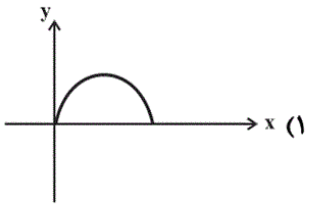


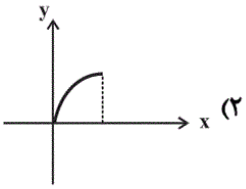
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$

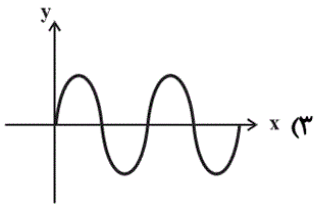
۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

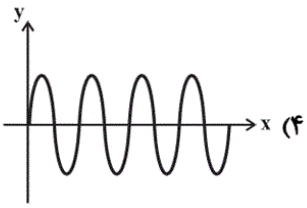
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۷- نمودار تابع $y = \sin x \cos^{۳} x - \cos x \sin^{۳} x$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ کدام است؟

۱) 

۲) 

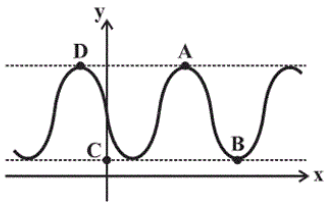
۳) 

۴) 

۸۸- برای $x \in \left(\frac{\pi}{۸},\frac{۳\pi}{۸}\right) - \left\{\frac{\pi}{۴}\right\}$، اگر $\tan(۲x) = \frac{۲}{m-۳}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(۱,۵) - \{۳\}$ ۲) $(۳,۵)$ ۳) $(۵,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R} - [۱,۵]$

۸۹- نمودار تابع $f(x) = -۳\sin\left(\frac{\pi}{۲}x\right) + ۴$ به‌صورت شکل زیر است. مساحت چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟



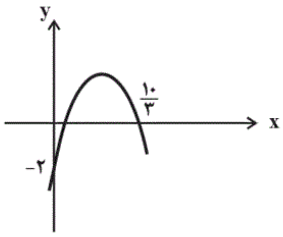
۱) ۳۵

۲) ۴۵

۳) ۲۴

۴) ۲۷

۹۰- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = ۴\sin\left(\frac{\pi x}{k}\right) + a$ به‌صورت شکل زیر است. دورهٔ تناوب این تابع کدام است؟



۱) ۶

۲) ۸

۳) ۱۰

۴) ۱۲

هندسه ۳- دوازدهم ، ماتریس،و کاربردها - ۱۰ سوال -

۱۰۱- اگر $A = \left[i^{۲} - j\right]_{۲\times۳}$ و $B = \left[j^{۲} - i\right]_{۳\times۲}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس AB کدام است؟

۱) صفر ۲) ۹ ۳) ۳۶ ۴) ۵۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۲- اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{۲\times۲}$ و $a_{ij}=\frac{(۲i-j)!}{i!j!}$ آنگاه حاصل $\left|A\left|A\right|+\left|۲A\right|\right|$ کدام است؟

۱) ۵-　　۲) $\frac{۵}{۴}$　　۳) ۱-　　۴) $\frac{۱۷}{۸}$

۱۰۳- معادلهٔ $\begin{vmatrix} x & ۱ & x^۲ \\ x^۲ & x & ۱ \\ ۱ & x^۲ & x \end{vmatrix}=۰$ چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۱۰۴- اگر $A=\begin{bmatrix} x & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} x & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و دترمینان ماتریس AB با دترمینان وارون آن برابر باشد، آنگاه مجموع مقادیر x کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۱۶　　۳) ۸-　　۴) ۱۶-

۱۰۵- اگر $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} |A| & |B| \\ |A^{-۱}| & |B^{-۱}| \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $|A|$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$　　۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$　　۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۱۰۶- به ازای کدام مقدار a، دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & a \end{bmatrix}$ در صورت افزودن یک واحد به تمامی درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن تغییر نمی‌کند؟

۱) $\frac{۱۹}{۲}$　　۲) ۹　　۳) $\frac{۱۱}{۷}$　　۴) $\frac{۶۵}{۷}$

www.riazisara.ir　　دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۷- اگر $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{۱}{۵۴۰}$ باشد، آنگاه $\begin{vmatrix} ۱۰a & ۶b & ۱۲c \\ ۳۵d & ۲۱e & ۴۲f \\ ۱۵g & ۹h & ۱۸i \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۴

۱۰۸- اگر A ماتریسی وارون‌پذیر از مرتبهٔ ۲ و $|B-I| = ۲$ باشد، حاصل دترمینان ماتریس $I - A^{-۱}BA$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

۱۰۹- A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۳ و $AB = I$ است. اگر $|A^۲| = ۲$ و $|B^۲ - B + I| = ۳$ باشد، دترمینان ماتریس $(A^۲ - A + I)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

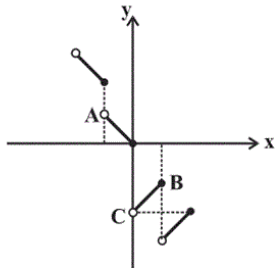
۱۱۰- اگر دترمینان ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} b & c \\ e & f \end{bmatrix}$، $D = \begin{bmatrix} a & b & c \\ n & n+۱ & n+۲ \\ d & e & f \end{bmatrix}$ به‌ترتیب برابر (-۴)، ۲، (-۲) و (-۶) باشد، n کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱

۳) ۱ ۴) ۲

ریاضي پایه - دوازدهم ، تابع - ۵ سوال -

۹۶- قسمتی از نمودار تابع $y = |x| + [-۲x]$ به‌صورت زیر می‌باشد. مساحت مثلث ABC کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۷- در تابع خطی f داریم: $f(x)+f^{-1}(x)=\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$. مقدار $f^{-1}(1)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۸- اگر $\{(7,2),(4,0),(3,-1),(-3,4),(-2,5),(1,1),(2,2),(-1,2)\}=g$ و $f(x)=\sqrt{x+a}-1$ باشد، مجموعهٔ دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ سه عضو خواهد داشت. $g(a)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۴

۹۹- اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=2[x]-[x]^2$ باشد، مجموع اعضای برد تابع fog کدام است؟($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۰- با توجه به توابع $f=\{(2,3),(3,-1),(-1,4)\}$ و $g=\{(3,2),(2,-1),(-1,3)\}$، حاصل‌ضرب اعضای برد تابع $h=\frac{fog^{-1}}{f^{-1}og}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

ریاضي پایه - دوازدهم ، توان هاي گويا و عبارت هاي جبري - ۲ سوال

۹۲- اگر $a^3+b^3=2$ باشد، حاصل $\frac{a^2+a+1}{b^2+b+1}$ همواره کدام است؟ $(a\neq 0,1)$

۱) $-\frac{b-1}{a-1}$ ۲) $-\frac{b}{a}$

۳) $\frac{b-1}{a-1}$ ۴) $\frac{b}{a}$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۳- ساده شدهٔ عبارت $\frac{۴\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}-\sqrt{۷}}-\sqrt[۳]{۷\sqrt{۷}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$

۲) $\sqrt{۳}+۲$

۳) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$

۴) $\sqrt{۳}-۱$

ریاضي پایه - دوازدهم ، مجموعه ، الگو و دنباله - ۲ سوال -

۹۴- بین دو عدد a و b، ۷ واسطهٔ هندسی قرار می‌دهیم، به‌طوری‌که تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با جملات مثبت می‌دهند. اگر دومین واسطهٔ هندسی ۲ و ششمین واسطهٔ هندسی ۳۲ باشد، جملهٔ چهارم این دنباله کدام است؟ (a جملهٔ اول دنباله است.)

۱) ۱۶

۲) ۸

۳) ۴

۴) ۲

۹۱- اگر $(۱۳-a^۲,۱۴)\cap(۲,۳+a^۲)=\varnothing$ باشد، مجموعهٔ تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $[\sqrt{۵},+\infty)$

۲) $(-\sqrt{۵},\sqrt{۵})$

۳) $\mathbb{R}-[-\sqrt{۵},\sqrt{۵}]$

۴) $[-\sqrt{۵},\sqrt{۵}]$

ریاضي پایه - دوازدهم ، جبرو معادله - ۱ سوال -

۹۵- اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که در ردیف اول ۲ عدد قرار داشته باشد و در هر کدام از ردیف‌های بعد، به تعداد عددهای ردیف قبل ۳ عدد اضافه شود. اولین عدد دستهٔ هجدهم کدام است؟

۱: ردیف اول ۲

۳: ردیف دوم ۴ ۵ ۶ ۷

۸: ردیف سوم ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵

⋮

۱) ۴۴۲

۲) ۴۴۳

۳) ۴۲۲

۴) ۴۲۳

هندسه ۱ - گواه - دهم ، ترسیم هاي هندسي و استدلال - ۱ سوال

www.riazisara.ir

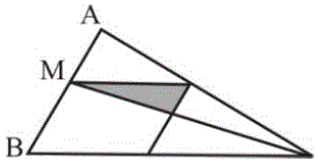
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۶- در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=۹۰^\circ)$، از نقطهٔ O محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث، دو عمود OH و OH' به ترتیب بر دو ضلع AB و AC رسم شده است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از وتر، برابر $۲\sqrt{۲}$ باشد، طول HH' کدام است؟

۱) ۴
۲) $۲\sqrt{۶}$
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) ۳

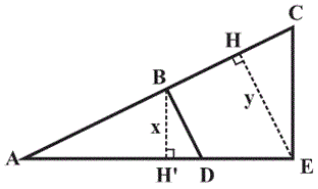
هندسه ۱ - گواه - دهم ، قضیه‌ي تالس، تشابه و کاربردها ي آن - ۲ سوال

۱۲۷- در شکل زیر اگر $\frac{MA}{MB}=\frac{۲}{۳}$ باشد، آنگاه مساحت مثلث سایه زده چند درصد مساحت متوازی‌الاضلاع است؟



۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) ۲۵
۴) ۳۰

۱۲۸- در شکل مقابل، اگر $AD=۸$، $DE=۴$، $AB=۶$ و $BC=۱۰$ باشد، نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۵}{۹}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

هندسه ۱ - گواه - دهم ، چند ضلعي ها - ۲ سوال -

۱۲۹- متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور C و D در نقطهٔ E روی ضلع AB متقاطع‌اند. اگر $CE=۶$ و $DE=۸$ باشد، محیط متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۲۰
۴) ۴۰

۱۳۰- در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، دو قطر بر هم عمودند. اگر طول قاعده‌های این ذوزنقه ۱۴ و ۲ باشد، اندازهٔ ساق کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

آمار و احتمال - گواه ، آشنایي با مباني رياضي - ۳ سوال

۱۳۶- اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی یک رقمی باشد، کدام‌یک از گزاره‌های سوری زیر نادرست است؟

۱) $\forall x\in A,\exists y\in A;x\geq y$

۲) $\forall x\in A,\exists y\in A;x<y$

۳) $\exists x\in A,\forall y\in A;x+y\geq ۱۰$

۴) $\exists x\in A,\forall y\in A;|x-y|\leq ۴$

۱۳۷- یکی از افرازهای مجموعهٔ A به‌صورت $\{\{a\},\{b\},\{\{a,b\},\{c\}\}\}$ است. تعداد افرازهای مجموعهٔ A که فاقد مجموعهٔ تک‌عضوی باشند، کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

۱۳۸- اگر $A\cap B=\{a,b\}$، مجموعهٔ A دارای ۶ عضو و مجموعهٔ $(A-B)\times(B-A)$ دارای ۲۰ عضو باشد، مجموعهٔ B چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۳۲

۲) ۶۴

۳) ۲۵۶

۴) ۱۲۸

آمار و احتمال - گواه ، احتمال - ۲ سوال -

۱۳۹- از مجموعهٔ $\{۱۰۱,۱۰۲,۱۰۳,...,۶۰۰\}$، یک عدد به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد مضرب ۵ می‌باشد ولی بر ۶ بخش‌پذیر نیست، یا مضرب ۵ نیست ولی بر ۶ بخش‌پذیر است؟

۱) ۰/۳

۲) ۰/۳۲

۳) ۰/۳۶

۴) ۰/۴

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۱۴۰- اگر $S=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ فضای نمونهٔ یک آزمایش تصادفی و $A=\{a_1,a_3,a_5\}$، $B=\{a_2,a_3,a_4,a_6\}$ و $C=\{a_3\}$ سه پیشامد از این فضای نمونه باشند به‌طوری که $P(A)=\frac{3}{10}$ و $P(B)=\frac{4}{5}$، آنگاه $P(C)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{20}$

۲) $\frac{1}{10}$

۳) $\frac{1}{5}$

۴) $\frac{1}{4}$

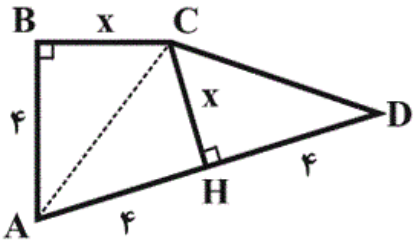
www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۲۱- (محمد خندان)

از نقطهٔ C، عمود CH را بر ضلع AD رسم می‌کنیم. نقطهٔ C روی نیمساز زاویهٔ داخلی A قرار دارد، پس مطابق شکل $AH = AB = ۴$ و $BC = CH = x$ است.



از طرفی C روی عمودمنصف ضلع AD قرار دارد، پس $HD = AH = ۴$ و $AC = CD$ است. مطابق شکل داریم:

$$S_{ABCD} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} + S_{\overset{\Delta}{ACD}}$$

$$\Rightarrow ۱۸ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times x + \frac{۱}{۲} \times x \times ۸ \Rightarrow ۶x = ۱۸ \Rightarrow x = ۳$$

$$\overset{\Delta}{CHD} : CD^۲ = CH^۲ + HD^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow CD = ۵$$

$$\text{محیط } ABCD = AB + BC + CD + DA = ۴ + ۳ + ۵ + ۸ = ۲۰$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۲- (مبشره ضرابیه)

$$\overset{\Delta}{BEF} : AD \parallel EF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BD}{BF} = \frac{AD}{EF} = \frac{۳}{۵}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}} \frac{BD}{BF - BD} = \frac{۳}{۵ - ۳} \Rightarrow \frac{BD}{DF} = \frac{۳}{۲} \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{CAD} : MF \parallel AD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CD}{DF} = \frac{AC}{AM} = \frac{۲}{۱} \quad (۲)$$

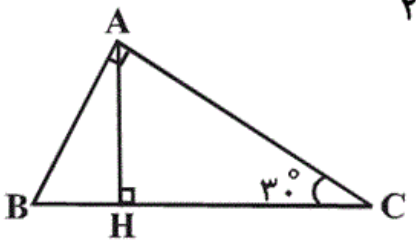
$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{\frac{BD}{DF}}{\frac{CD}{DF}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۲}{۱}} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{۳}{۴}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۲۳- (حسین حاجیلو)

در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع روبه‌رو به زوایای ۳۰° و ۶۰°، به‌ترتیب $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول وتر است. طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:



$$\frac{AB^۲}{AC^۲}=\frac{BH\times BC}{CH\times BC}$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{CH}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^۲=\left(\frac{\frac{۱}{۲}BC}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}BC}\right)^۲=\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)^۲=\frac{۱}{۳}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۴۱ و ۴۲ و چندضلعی‌ها، صفحهٔ ۶۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۴- (مبشره ضرابیه)

فرض کنید تعداد اضلاع این دو چندضلعی را m و n در نظر بگیریم. در این صورت داریم:

$$۲m-\frac{m(m-۳)}{۲}=۲n-\frac{n(n-۳)}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴m-m^۲+۳m=۴n-n^۲+۳n$$

$$\Rightarrow -m^۲+۷m=-n^۲+۷n\Rightarrow m^۲-n^۲=۷(m-n)$$

$$\Rightarrow (m-n)(m+n)=۷(m-n)$$

$$\xrightarrow{m\neq n} m+n=۷$$

با توجه به اینکه یک چندضلعی حداقل ۳ ضلع دارد، پس تنها مقادیر ممکن برای تعداد اضلاع این دو چندضلعی، $m=۴$ و $n=۳$ است. بنابراین $m-n=۱$ می‌باشد.

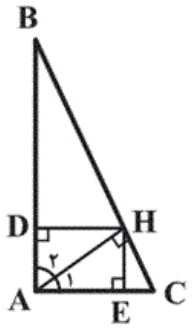
(هندسه ۱- چندضلعی‌ها، صفحهٔ ۵۵)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۵- (امیرحسین ابومحبوب)

$$\hat{A}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ \xrightarrow{\hat{C}=۵\hat{B}} ۶\hat{B}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۱۵^\circ$$



بنابراین $\hat{C}=۷۵^\circ$ است و در نتیجه در مثلث AHC، $\hat{A}_۱=۱۵^\circ$ می‌باشد.

می‌دانیم در یک مثلث قائم‌الزاویه، اگر یکی از زوایای حاده برابر ۱۵° باشد، آنگاه طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ طول وتر است. بنابراین داریم:

$$\overset{\Delta}{AHB}: \hat{B}=۱۵^\circ \Rightarrow HD=\frac{۱}{۴}AB$$

$$\overset{\Delta}{AHC}: \hat{A}_۱=۱۵^\circ \Rightarrow HE=\frac{۱}{۴}AC$$

چهارضلعی $ADHE$ مستطیل است. در نتیجه داریم:

$$\frac{S_{ADHE}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{HD\times HE}{\frac{۱}{۲}AB\times AC}=۲\times\frac{HD}{AB}\times\frac{HE}{AC}=۲\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۸}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها، صفحهٔ ۶۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۱۱

معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگـر و فقـط اگـر $(a,m) \mid b$،

داریم:

گزینهٔ «۱»: $۱۰ \nmid ۳ = (۵۱,۶)$

گزینهٔ «۲»: $۱۸ \mid ۲ = (۴,۶)$

گزینهٔ «۳»: $۱۵ \mid ۳ = (۳,۹)$

گزینهٔ «۴»: $۳۰ \mid ۶ = (۱۲,۱۸)$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحهٔ ۲۵)

✓[۱] [۲] [۳] [۴]

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۲- (جواد حاتمی)

$$۷۳x \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۴x \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \overset{۲۳}{\equiv} ۲۴ \xrightarrow[(۴,۲۳)=۱]{\div ۴} x \overset{۲۳}{\equiv} ۶$$

$$\Rightarrow x = ۲۳k + ۶ \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$۱۰ \le x \le ۹۹ \Rightarrow ۱۰ \le ۲۳k + ۶ \le ۹۹ \Rightarrow ۴ \le ۲۳k \le ۹۳$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} ۱ \le k \le ۴$$

بنابراین معادلهٔ موردنظر، ۴ جواب در مجموعهٔ اعداد طبیعی دو رقمی دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۳- (امیرحسین ابومحبوب)

ابتدا محاسبه می‌کنیم که روز اول مهر در این سال چه روزی از هفته است.

برای این کار، فاصلهٔ اول فروردین تا اول مهر را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\underbrace{۳۰}_{\text{فروردین}} + \underbrace{۵ \times ۳۱}_{\text{اردیبهشت تا شهریور}} + \underbrace{۱}_{\text{مهر}} = ۱۸۶$$

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{b}{\equiv} c$ دارای جواب است، هرگاه $(a,b) \mid c$. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv_{12} 8 \xrightarrow{4 \mid 12} a \equiv_4 8 \equiv_4 0 \Rightarrow 4 \mid a \\ b \equiv_8 4 \xrightarrow{4 \mid 8} b \equiv_4 4 \equiv_4 0 \Rightarrow 4 \mid b \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \mid (a,b) \xrightarrow{(a,b) \mid c} 4 \mid c$$

در بین گزینه‌ها تنها عدد ۳۶ بر ۴ بخش‌پذیر است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$۷۵x \overset{۱۲}{\equiv} ۵۴ \Rightarrow ۳x \overset{۱۲}{\equiv} ۶ \xrightarrow[(۳,۱۲)=۳]{\div ۳} x \overset{\frac{۱۲}{۳}}{\equiv} ۲$$

$$\Rightarrow x \overset{۴}{\equiv} ۲ \Rightarrow x = ۴k + ۲ \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

اگر k عددی زوج باشد، آنگاه داریم:

$$x = ۴(۲m) + ۲ \Rightarrow x = ۸m + ۲ \Rightarrow x \in [۲]_۸$$

اگر k عددی فرد باشد، آنگاه داریم:

$$x = ۴(۲m + ۱) + ۲ \Rightarrow x = ۸m + ۶ \Rightarrow x \in [۶]_۸$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۶- (مبشره ضرابیه)

اگر عددی بر اعداد ۲ و ۵ بخش‌پذیر باشد، قطعاً بر ۱۰ نیز بخش‌پذیر و رقم یکان آن برابر صفر است. بنابراین $c = ۰$ است و داریم:

$$\overline{a۲b۰}^{۳} \equiv ۰ \Rightarrow a + ۲ + b \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow a + b \overset{۳}{\equiv} -۲ \overset{۳}{\equiv} ۱$$

$$\Rightarrow a + b = ۱ \text{یا} ۴ \text{یا} ۷ \text{یا} ۱۰ \text{یا} ۱۳ \text{یا} ۱۶$$

$$\overline{a۲b۰}^{۱۱} \equiv ۰ \Rightarrow ۰ - b + ۲ - a \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow a + b \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \Rightarrow a + b = ۲ \text{یا} ۱۳$$

بنابراین $a + b = ۱۳$ و در نتیجه مجموع ارقام عدد چهاررقمی $\overline{a۲bc}$، برابر ۱۵ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۷- (امیرحسین ابومحبوب)

اگر معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{۱۵}{\equiv} ۱۸$ در $\mathbb{Z}$ فاقد جواب باشد، آنگاه $(a,۱۵) \nmid ۱۸$. با توجه به اینکه $۵ \times ۳ = ۱۵$ و $۳ \mid ۱۸$، پس لزوماً a مضرب ۵ است. در این‌صورت معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{۱۰}{\equiv} ۱۲$ قطعاً در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب ندارد، زیرا $(a,۱۰)$ برابر یکی از دو عدد ۵ یا ۱۰ است که هیچ‌کدام مقسوم‌علیه عدد ۱۲ نیستند.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۸- (مهرداد ملوندی)

$$\overline{a۴۷b}^{۳۳} \equiv ۲ \xrightarrow{۳\mid ۳۳} \overline{a۴۷b}^{۳} \equiv ۲ \Rightarrow a+۴+۷+b \overset{۳}{\equiv} ۲$$

$$\Rightarrow a+b \overset{۳}{\equiv} -۹ \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow a+b=۳k\left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\overline{a۴۷b}^{۳۳} \equiv ۲ \xrightarrow{۱۱\mid ۳۳} \overline{a۴۷b}^{۱۱} \equiv ۲ \Rightarrow b-۷+۴-a \overset{۱۱}{\equiv} ۲$$

$$\Rightarrow b-a \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \Rightarrow \begin{cases} b-a=۵ \\ b-a=-۶ \end{cases}$$

بزرگ‌ترین عدد طبیعی M به ازای $a=۹$ حاصل می‌شود. دو عـدد $a=۹$ و $b=۳$، در دو شـــرط $a+b=۳k\left(k \in \mathbb{Z}\right)$ و $b-a=-۶$

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۹- (امیرحسین ابومحبوب)

$$\overline{a۱۱۱a}^{۱۱} \equiv ۰ \Rightarrow a-۱+۱-۱+a \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲a \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۲$$

$$\xrightarrow[(۲,۱۱)=۱]{\div ۲} a \overset{۱۱}{\equiv} ۶ \Rightarrow a=۶$$

$$\overline{babb}^{۹} \equiv ۰ \Rightarrow ۳b+۶ \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۳b \overset{۹}{\equiv} -۶ \xrightarrow[(۳,۹)=۳]{\div ۳} b \overset{\frac{۹}{۳}}{\equiv} -۲ \Rightarrow b \overset{۳}{\equiv} ۱$$

$$\Rightarrow b=۱,۴,۷$$

بنابراین سه عدد ۱۶۱۱، ۴۶۴۴ و ۷۶۷۷، اعداد طبیعی چهاررقمی مورد نظـر هستند.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۰- (هومن نورائی)

$$۳x \overset{۵}{\equiv} ۲ \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow[(۳,۵)=۱]{\div ۳} x \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow x = ۵k + ۴ \left(k \in \mathbb{Z}\right) \quad (۱)$$

$$۴x \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۴\left(۵k + ۴\right) \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۲۰k + ۱۶ \overset{۷}{\equiv} ۳$$

$$\Rightarrow ۲۰k \overset{۷}{\equiv} -۱۳ \overset{۷}{\equiv} -۲۰ \xrightarrow[(۲۰,۷)=۱]{\div ۲۰} k \overset{۷}{\equiv} -۱$$

$$\Rightarrow k = ۷m - ۱ \left(m \in \mathbb{Z}\right) \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow x = ۵\left(۷m - ۱\right) + ۴ \Rightarrow x = ۳۵m - ۱$$

$$۱۰۰ \leq x \leq ۹۹۹ \Rightarrow ۱۰۰ \leq ۳۵m - ۱ \leq ۹۹۹ \Rightarrow ۱۰۱ \leq ۳۵m \leq ۱۰۰۰$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} ۳ \leq m \leq ۲۸$$

بنابراین ۲۶ مقدار برای m و در نتیجه ۲۶ عدد طبیعی سه رقمی x وجود دارد که در دو معادلهٔ داده شده صدق کند.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۱-

ارزش گزارهٔ $p \Rightarrow \sim q$ نادرست است، پس p درست و $\sim q$ نادرست است. در نتیجه ارزش گزارهٔ q درست است. از طرفی هر دو گزارهٔ $q \Rightarrow \sim r$ و q درست هستند، پس $\sim r$ درست و در نتیجه r نادرست است.

بنابراین داریم:

$$(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim r \Rightarrow \sim p) \equiv (F \Rightarrow T) \Leftrightarrow (T \Rightarrow F)$$

$$\equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow q) \equiv (T \wedge T) \Rightarrow (F \Leftrightarrow T) \equiv T \Rightarrow F \equiv F$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۶ تا ۱۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۲- (مرتضی فهیم‌علوی)

$$B \subseteq A \cup B \xrightarrow{A \cup B \subseteq A \cap C} B \subseteq A \cap C$$

$$\xrightarrow{A \cap C \subseteq A} B \subseteq A \qquad (1)$$

$$A \subseteq A \cup B \xrightarrow{A \cup B \subseteq A \cap C} A \subseteq A \cap C$$

$$\xrightarrow{A \cap C \subseteq C} A \subseteq C \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow B \subseteq A \subseteq C$$

بنابراین مجموعه‌های $B-A$، $A-C$ و $B-C$ برابر تهی هستند ولی با توجه به متمایز بودن مجموعه‌های B و C، مجموعهٔ $C-B$ مخالف تهی است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۳- (محمد هجری)

$$[A' \cap (A \cup B)] \cap [A \cap (A' \cup B')]$$

$$= \left[\underbrace{(A' \cap A)}_{\varnothing} \cup (A' \cap B)\right] \cap \left[\underbrace{(A \cap A')}_{\varnothing} \cup (A \cap B')\right]$$

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فضای نمونهٔ این آزمایش، شامل حالت‌های انتخاب ۲ دانش‌آموز از میان ۱۲ دانش‌آموز است، بنابراین داریم:

$$n(S)=\binom{۱۲}{۲}=\frac{۱۲\times ۱۱}{۲}=۶\times ۱۱$$

پیشامد موردنظر شامل آن است که ابتدا ۲ ردیف از ۴ ردیف به طور تصادفی انتخاب شود و سپس از میان ۳ دانش‌آموز هر کدام از این دو ردیف، یک دانش‌آموز انتخاب گردد. در این صورت داریم:

$$n(A)=\binom{۴}{۲}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱}=۶\times ۳\times ۳$$

$$P(A)=\frac{۶\times ۳\times ۳}{۶\times ۱۱}=\frac{۹}{۱۱}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال، صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۵- (امیرحسین ابومحبوب)

فرض کنید $P(a)=x$ باشد، در این‌صورت داریم:

$$P(b)=x+\frac{۱}{۱۲}\ ,\ P(c)=x+\frac{۲}{۱۲},P(d)=x+\frac{۳}{۱۲}$$

$$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱$$

$$\Rightarrow x+x+\frac{۱}{۱۲}+x+\frac{۲}{۱۲}+x+\frac{۳}{۱۲}=۱$$

$$\Rightarrow ۴x+\frac{۱}{۲}=۱\Rightarrow ۴x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۸}$$

$$\frac{P(d)}{P(a)}=\frac{\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۸}}=\frac{\frac{۳}{۸}}{\frac{۱}{۸}}=۳$$

(آمار و احتمال- احتمال، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۸۱- (طاهر دادستانی)

$$y=\sin\left(\frac{a\pi}{۲}x+\frac{۳\pi}{۲}\right)=-\cos\left(\frac{a\pi}{۲}x\right)$$

با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب برابر ۲ است. پس داریم:

$$T=۲=\frac{۲\pi}{\left|a\frac{\pi}{۲}\right|}=\frac{۴}{|a|}\Rightarrow |a|=۲\Rightarrow a=\pm ۲$$

(حسابان ۲- مثلثات، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۲ (سعید علم‌پور)

در توابع مثلثاتی به فرم $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$، کم‌ترین مقدار تابع برابر $c - |a|$ می‌باشد.

بنابراین در این سؤال داریم:

$$y_{min} = |a| - ۳|a| = -۲|a| = -۴ \Rightarrow |a| = ۲$$

$$\Rightarrow \text{دورهٔ تناوب} : T = \frac{۲\pi}{|a\pi|} = \frac{۲}{|a|} \xrightarrow{|a|=۲} T = ۱$$

(حسابان ۲- مثلثات، صفحهٔ ۲۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۸۳ (علی شهرابی)

ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \underbrace{\sin^۲ \pi x + \cos^۲ \pi x}_{۱} + \underbrace{۲\sin \pi x \cos \pi x}_{\sin ۲\pi x}$$

$$\Rightarrow f(x) = ۱ + \sin ۲\pi x$$

دورهٔ تناوب این تابع برابر است با $T = \frac{۲\pi}{|۲\pi|} = ۱$.

می‌دانیم ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a + b\sin cx$ به ترتیب $a + |b|$ و $a - |b|$ است، پس مینیمم و ماکزیمم تابع $y = ۱ + \sin ۲\pi x$ به‌ترتیب برابر است با $m = ۱ - |۱| = ۰$ و $M = ۱ + |۱| = ۲$.

$$\Rightarrow M + m - T = ۲ + ۰ - ۱ = ۱$$

(حسابان ۲- مثلثات، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۴- (کاظم اجلالی)

$$f(x)=\tan\left(\frac{\pi x}{۲}\right)\Rightarrow \frac{\pi x}{۲}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x\neq ۲k+۱,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$f(x+۱)=\tan\left(\frac{\pi x}{۲}+\frac{\pi}{۲}\right)\Rightarrow \frac{\pi x}{۲}+\frac{\pi}{۲}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x\neq ۲k, k\in\mathbb{Z}$$

دامنهٔ تابع y از اشتراک مجموعه‌های بالا به دست می‌آید که برابر $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ است.

(حسابان ۲- مثلثات، صفحهٔ ۳۲)

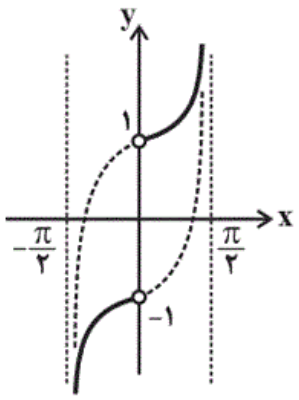
۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۸۵- (کاظم اجلالی)

می‌توانیم تابع f را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\tan x-۱ & ;-\frac{\pi}{۲}<x<۰\\ \tan x+۱ & ;۰<x<\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است و برد آن به‌صورت $\mathbb{R}-[-۱,۱]$ است.



(حسابان ۲- مثلثات، صفحهٔ ۳۲)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۶ (علی شهرابی)

$$\max(f)=۲\Rightarrow a+|b|=۲ \qquad (۱)$$

$$\min(f)=-۴\Rightarrow a-|b|=-۴ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} |b|=۳\ ,\ a=-۱$$

دورهٔ تناوب تابع برابر ۴ است، پس داریم:

$$\frac{۲\pi}{|c|}=۴\Rightarrow |c|=\frac{\pi}{۲}$$

با توجه به نمودار باید $bc>۰$ باشد، پس هر دو حالت $\begin{cases} b=۳ \\ c=\frac{\pi}{۲} \end{cases}$ یا $\begin{cases} b=-۳ \\ c=-\frac{\pi}{۲} \end{cases}$ قابل قبول است. بنابراین ضابطهٔ f به‌صورت

$f(x)=-۱+۳\sin\frac{\pi x}{۲}$ است و داریم:

$$f\left(\frac{۳۱}{۳}\right)=-۱+۳\sin\frac{۳۱\pi}{۶}=-۱+۳\sin\left(۵\pi-\frac{\pi}{۶}\right)$$

$$=-۱-۳\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right)=-۱-۳\left(\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{۵}{۲}$$

(حسابان ۲- مثلثات، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

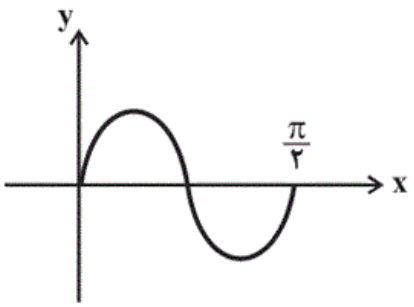
-۸۷

ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$y = \sin x \cos x\left(\cos^{۲} x - \sin^{۲} x\right) = \frac{۱}{۲}\sin ۲x.\cos ۲x$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\sin ۴x\right) \Rightarrow y = \frac{۱}{۴}\sin ۴x$$

دورهٔ تناوب این تابع $T = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$ است. پس نمودار آن در بـازهٔ $\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$ به‌صورت زیر است.



از آنجا که بازهٔ $[۰,\pi]$ شامل ۲ دورهٔ تناوب تابع اسـت، نمـودار گزینـهٔ «۳» پاسخ صحیح است.

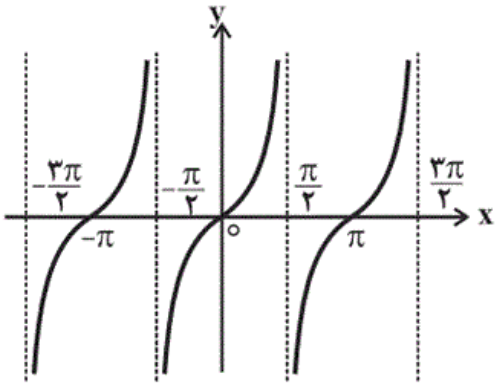
(حسابان ۲- مثلثات، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

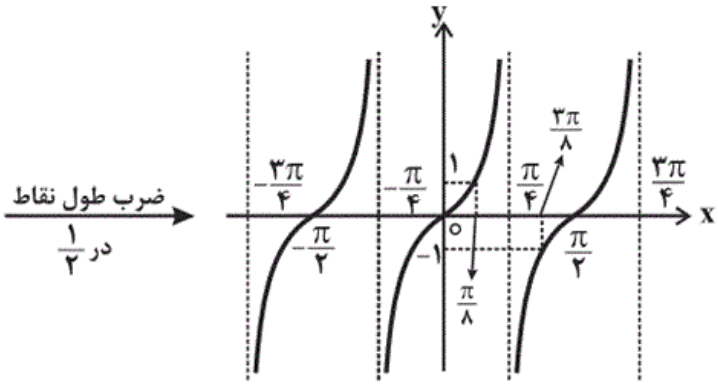
۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۸

نمودار تابع $y=\tan(2x)$ را با انقباض افقی نمودار تابع $y=\tan x$ رسم می‌کنیم:





با توجه به نمودار بالا داریم:

$$\frac{\pi}{8}<x<\frac{3\pi}{8}\ ,\ x\neq\frac{\pi}{4}\Rightarrow\left|\tan(2x)\right|>1\Rightarrow\left|\frac{2}{m-3}\right|>1$$

$$\Rightarrow|m-3|<2\Rightarrow 1<m<5$$

اما واضح است که مقدار $m=3$ قابل قبول نیست.

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

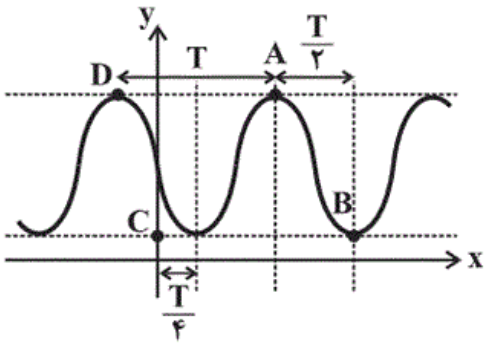
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۹

برای تابع f داریم:

$$\begin{cases}\max(f) = |-۳| + ۴ = ۷ \\ \min(f) = -|-۳| + ۴ = ۱\end{cases}$$

از طرفی چهارضلعی $ABCD$ ذوزنقه است.



$$\Rightarrow \begin{cases} AD = T = ۴ \\ BC = T + \frac{۱}{۴}T = ۵ \\ \text{ارتفاع} = \max(f) - \min(f) = ۶ \end{cases} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۶(۴+۵)}{۲} = ۲۷$$

(حسابان ۲- مثلثات، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۰- (سعید علم‌پور)

با توجه به نمودار داریم:

$$f(۰) = -۲ \Rightarrow ۴\sin(۰) + a = -۲ \Rightarrow a = -۲$$

$$f\left(\frac{۱۰}{۳}\right) = ۰ \Rightarrow ۴\sin\left(\frac{۱۰\pi}{۳k}\right) - ۲ = ۰ \Rightarrow \sin\left(\frac{۱۰\pi}{۳k}\right) = \frac{۱}{۲}$$

طول دومین نقطه (در سمت راست محور y ها) که سینوس آن $\frac{۱}{۲}$ باشد، برابر $\frac{۵\pi}{۶}$ است.

$$\Rightarrow \frac{۱۰\pi}{۳k} = \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow k = ۴$$

$$\Rightarrow f(x) = ۴\sin\left(\frac{\pi}{۴}x\right) - ۲$$

$$\Rightarrow \text{دورهٔ تناوب} = T = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۴}} = ۸$$

(حسابان ۲- مثلثات، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۱-

طبق تعریف ماتریس‌های A و B داریم:

$$A=\begin{bmatrix}1^2-1 & 1^2-2 & 1^2-3\\ 2^2-1 & 2^2-2 & 2^2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1^2-1 & 2^2-1\\ 1^2-2 & 2^2-2\\ 1^2-3 & 2^2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 3\\ -1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -4\\ -4 & 14\end{bmatrix}$$

$$|AB|=5\times 14-(-4)(-4)=70-16=54$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۲-

طبق تعریف ماتریس A داریم:

$$a_{11}=\frac{1!}{1!1!}=1\ ,\ a_{12}=\frac{0!}{1!2!}=\frac{1}{2}$$

$$a_{21}=\frac{3!}{2!1!}=3\ ,\ a_{22}=\frac{2!}{2!2!}=\frac{1}{2}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 3 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=1\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times 3=-1$$

$$\|A|A|+|2A|=|-A|+|2A|=(-1)^2|A|+2^2|A|=5|A|=-5$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

$$\Rightarrow x^6+x^3+1-3x^3=0\Rightarrow x^6-2x^3+1=0\Rightarrow\left(x^3-1\right)^2=0$$

$$\Rightarrow x^3-1=0\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x=1$$

بنابراین معادله فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$AB=\begin{bmatrix} x & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^۲-۴ & x-۲ \\ ۳x-۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

دترمینان وارون یک ماتریس، عکس دترمینان آن ماتریس است، بنابراین اگر دترمینان یک ماتریس با دترمینان وارون آن برابر باشد، آنگاه دترمینان آن ماتریس برابر ± ۱ است. در نتیجه داریم:

$$|AB|=\pm ۱ \Rightarrow \begin{vmatrix} x^۲-۴ & x-۲ \\ ۳x-۲ & ۲ \end{vmatrix}=\pm ۱$$

$$\Rightarrow ۲\left(x^۲-۴\right)-\left(x-۲\right)\left(۳x-۲\right)=\pm ۱$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۸-۳x^۲+۲x+۶x-۴=\pm ۱ \Rightarrow -x^۲+۸x-۱۲=\pm ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲-۸x+۱۳=۰ \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=-\dfrac{b}{a}=۸ \\ x^۲-۸x+۱۱=۰ \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=-\dfrac{b}{a}=۸ \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر x، برابر $۸+۸=۱۶$ است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۵- (مبشره ضرابیه)

$$|B| = ۱\times ۴ - ۲\times ۳ = -۲ \Rightarrow |B^{-۱}| = -\frac{۱}{۲}$$

$$|A| = |A||B^{-۱}| - |B||A^{-۱}| = -\frac{۱}{۲}|A| + ۲|A^{-۱}| \Rightarrow \frac{۳}{۲}|A| = \frac{۲}{|A|}$$

$$\Rightarrow |A|^{۲} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow |A| = \pm\frac{۲}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \pm\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۶- (محمدمهدی ابوترابی)

دترمینان ماتریس را در دو حالت با استفاده از دستور ساروس به‌دست آورده

و با هم برابر قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & a \end{vmatrix} = (۵a + ۸۴ + ۹۶) - (۱۰۵ + ۴۸ + ۸a) = -۳a + ۲۷$$

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۶ & ۶ \\ ۷ & ۸ & a+۱ \end{vmatrix} = (۱۲a + ۱۲ + ۸۴ + ۹۶) - (۱۲۶ + ۹۶ + ۸a + ۸)$$

$$= ۴a - ۳۸$$

$$\Rightarrow -۳a + ۲۷ = ۴a - ۳۸ \Rightarrow ۷a = ۶۵ \Rightarrow a = \frac{۶۵}{۷}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۷-

اگر ۲ را از سطر اول، ۷ را از سطر دوم و ۳ را از سطر سوم فاکتور بگیریم،

آنگاه داریم:

$$۲\times ۷\times ۳\begin{vmatrix} ۵a & ۳b & ۶c \\ ۵d & ۳e & ۶f \\ ۵g & ۳h & ۶i \end{vmatrix}$$

سپس ۵ را از ستون اول، ۳ را از ستون دوم و ۶ را از ستون سوم فاکتور

می‌گیریم. دترمینان مورد نظر برابر است با:

$$(۲\times ۷\times ۳)\times(۵\times ۳\times ۶)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = ۷\times ۵۴۰\times \frac{۱}{۵۴۰} = ۷$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

$$= A^{-۱}(I-B)A = -A^{-۱}(B-I)A$$

$$\left|I-A^{-۱}BA\right| = (-۱)^{۲}\left|A^{-۱}(B-I)A\right| = \left|A^{-۱}\right|\left|B-I\right|\left|A\right|$$

$$= \frac{۱}{|A|}|B-I||A| = |B-I| = ۲$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۹- (مبشره ضرابیه)

برای دو ماتریس مربعی هم مرتبهٔ A و B، رابطهٔ $|AB|=|A||B|$ برقـرار است، بنابراین داریم:

$$\left|A^{۲}\left(B^{۲}-B+I\right)\right|=\left|A^{۲}\right|\times\left|B^{۲}-B+I\right|$$

$$\Rightarrow\left|A^{۲}B^{۲}-A^{۲}B+A^{۲}\right|=۲\times۳=۶ \qquad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$A^{۲}B^{۲}=A\times\underbrace{A\times B}_{I}\times B=AB=I \qquad (۲)$$

$$A^{۲}B=A\times\underbrace{A\times B}_{I}=A \qquad (۳)$$

$$(۱),(۲),(۳)\Rightarrow\left|I-A+A^{۲}\right|=۶\Rightarrow\left|A^{۲}-A+I\right|=۶$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

دترمینان ماتریس D را بر حسب سطر دوم به دست می‌آوریم. داریم:

$$|D| = n\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} + (n+1)\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

$$+(n+2)\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$= -n|C| + (n+1)|B| - (n+2)|A|$$

$$\Rightarrow -6 = (-n)(-2) + (n+1)\times 2 - (n+2)(-4)$$

$$\Rightarrow -6 = 2n + 2n + 2 + 4n + 8 \Rightarrow 8n = -16 \Rightarrow n = -2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

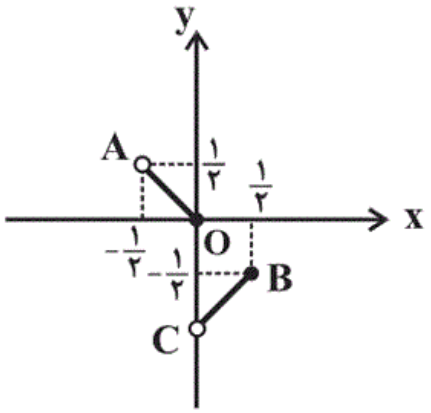
۹۶-

تابع $y=|x|+[-2x]$ را با توجه به جدول زیر به‌صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$-2x$	$-1\le -2x<0$	$0\le -2x<1$
$[-2x]$	-1	0
x	$0<x\le \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x\le 0$

$$y=\begin{cases} -x & ;-\frac{1}{2}<x\le 0 \\ x-1 & ;0<x\le \frac{1}{2} \end{cases}$$

برای محاسبهٔ مساحت مثلث ABC، کافی است مساحت مثلث‌های OBC و OAC را با هم جمع کنیم؛ زیرا نقاط A، O و B روی یک خط $(y=-x)$ قرار دارند:



۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۹۷

اگر $f(x)=ax+b$ باشد، $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$ است، داریم:

$$f(x)+f^{-1}(x)=ax+b+\frac{x-b}{a}=\frac{a^2+1}{a}x+\frac{ab-b}{a}$$

$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)x+\left(b-\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}\Rightarrow 2a^2-5a+2=0\Rightarrow a=2 \text{ یا } \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=2: b-\frac{b}{2}=\frac{b}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow b=1 \\ a=\frac{1}{2}: b-2b=-b=\frac{1}{2}\Rightarrow b=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

بنابراین دو ضابطه برای f و f^{-1} قابل قبول خواهد بود:

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2}; a=2, b=1\Rightarrow f^{-1}(1)=0 \\ 2x+1; a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}\Rightarrow f^{-1}(1)=3\end{cases}$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

زوج مرتب‌های تابع g را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$g=\{(-۳,۴),(-۲,۵),(-۱,۲),(۱,۱),(۲,۲),(۳,-۱),(۴,۰),(۷,۲)\}$$

$$\Rightarrow D_g=\{-۳,-۲,-۱,۱,۲,۳,۴,۷\}$$

دامنهٔ تابع f نیز برابر $D_f=[-a,+\infty)$ است. هم‌چنین مقدار تابع f در $x=۱-a$ برابر صفر است.

حال برای $D_{\frac{g}{f}}$ داریم: $D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x\mid f(x)=۰\}$

$$=[-a,+\infty)\cap\{-۳,-۲,-۱,۱,۲,۳,۴,۷\}-\{۱-a\}$$

برای اینکه $D_{\frac{g}{f}}$ شامل سه عضو باشد، از آنجا که یک عضو از مجموعهٔ اشتراک باید حذف شود، مقدار $(-a)$ را از بین مقادیر ۲ یا ۳ باید انتخاب کنیم. با امتحان کردن، به سادگی $a=-۲$ به‌دست می‌آید. در این‌صورت داریم: $D_f=[۲,+\infty),f(۳)=۰$

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$D_f=[0,+\infty),\ D_g=\mathbb{R},\ D_{fog}=\{x\mid x\in D_g, g(x)\in D_f\}$$

$$\Rightarrow D_{fog}=\{x\mid x\in\mathbb{R}, 2[x]-[x]^2\geq 0\}$$

اگر فرض کنیم $t=[x]$ نامعادلهٔ بالا به‌صورت $2t-t^2\geq 0$ به‌دست می‌آید که جواب آن $0\leq t\leq 2$ است. بنابراین داریم:

$$0\leq t=[x]\leq 2\Rightarrow 0\leq x<3$$

$$\Rightarrow D_{fog}=[0,3)$$

اکنون برد fog را به‌دست می‌آوریم: $(fog)(x)=\sqrt{2[x]-[x]^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases}[x]=0:(fog)(x)=0\\ [x]=1:(fog)(x)=1\\ [x]=2:(fog)(x)=0\end{cases}\Rightarrow R_{fog}=\{0,1\}$$

مجموع اعضای برد fog برابر ۱ است.

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۶ تا ۵۲ و ۶۶ تا ۶۸)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$g=\{(۳,۲),(۲,-۱),(-۱,۳)\}\Rightarrow g^{-۱}=\{(۲,۳),(-۱,۲),(۳,-۱)\}$$

$$f=\{(۲,۳),(۳,-۱),(-۱,۴)\}\Rightarrow f^{-۱}=\{(۳,۲),(-۱,۳),(۴,-۱)\}$$

$$h(x)=\frac{fog^{-۱}}{f^{-۱}og}(x)=\frac{f\left(g^{-۱}(x)\right)}{f^{-۱}\left(g(x)\right)}\Rightarrow x\in D_g\cap D_{g^{-۱}}=\{-۱,۲,۳\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-۱:h=\dfrac{f\left(g^{-۱}(-۱)\right)}{f^{-۱}\left(g(-۱)\right)}=\dfrac{f(۲)}{f^{-۱}(۳)}=\dfrac{۳}{۲}\\ x=۲:h=\dfrac{f\left(g^{-۱}(۲)\right)}{f^{-۱}\left(g(۲)\right)}=\dfrac{f(۳)}{f^{-۱}(-۱)}=\dfrac{-۱}{۳}\\ x=۳:h=\dfrac{f\left(g^{-۱}(۳)\right)}{f^{-۱}\left(g(۳)\right)}=\dfrac{f(-۱)}{f^{-۱}(۲)}\end{cases}$$ تعریف نشده

چون $۲\notin D_{f^{-۱}}$، $h(۳)$ تعریف نمی‌شود. بنابراین $R_h=\left\{-\frac{۱}{۳},\frac{۳}{۲}\right\}$ است که حاصل‌ضرب اعضای آن برابر $-\frac{۱}{۲}$ خواهد شد.

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۵۴ تا ۷۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۲- (طاهر دادستانی)

$$a^۳+b^۳-۲=۰\Rightarrow\left(a^۳-۱\right)+\left(b^۳-۱\right)=۰$$

$$\Rightarrow(a-۱)\left(a^۲+a+۱\right)+(b-۱)\left(b^۲+b+۱\right)=۰$$

$$\Rightarrow(a-۱)\left(a^۲+a+۱\right)=-(b-۱)\left(b^۲+b+۱\right)$$

$$\Rightarrow\frac{a^۲+a+۱}{b^۲+b+۱}=\frac{۱-b}{a-۱}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۹۳- (میلاد منصوری)

$$x=\frac{۴\sqrt{۳}\left(۲+\sqrt{۳}+\sqrt{۷}\right)}{\left(۲+\sqrt{۳}-\sqrt{۷}\right)\left(۲+\sqrt{۳}+\sqrt{۷}\right)}-\sqrt[۳]{\sqrt{۷^۳}}$$

$$=\frac{۴\sqrt{۳}\left(۲+\sqrt{۳}+\sqrt{۷}\right)}{\left(۲+\sqrt{۳}\right)^۲-۷}-\sqrt{۷}=\frac{۴\sqrt{۳}\left(۲+\sqrt{۳}+\sqrt{۷}\right)}{۷+۴\sqrt{۳}-۷}-\sqrt{۷}$$

$$=\frac{۴\sqrt{۳}\left(۲+\sqrt{۳}+\sqrt{۷}\right)}{۴\sqrt{۳}}-\sqrt{۷}=۲+\sqrt{۳}+\sqrt{۷}-\sqrt{۷}$$

$$=۲+\sqrt{۳}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۴۸ تا ۶۷)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\Rightarrow \frac{aq^{۶}}{aq^{۲}} = q^{۴} = ۱۶ \xrightarrow[q>۰]{\text{جملات دنباله مثبت‌اند}} q = ۲$$

$$a_{۳} = aq^{۲} = ۲ \xrightarrow{q=۲} a = \frac{۱}{۲}$$

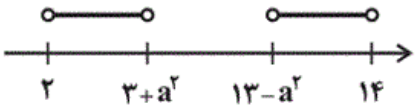
$$\Rightarrow a_{۴} = aq^{۳} = \frac{۱}{۲}(۲)^{۳} = ۴$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۹۱ (سعید علم‌پور)

برای این‌که تساوی داده شده برقرار باشد، بازه‌ها باید به‌صورت زیر باشند:



$$\Rightarrow ۳ + a^{۲} \leq ۱۳ - a^{۲} \Rightarrow ۲a^{۲} \leq ۱۰ \Rightarrow a^{۲} \leq ۵$$

$$\Rightarrow a \in \left[-\sqrt{۵}, \sqrt{۵}\right]$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۳ تا ۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۵- (سعید علم‌پور)

تعداد اعداد ردیف‌ها عبارت است از: ۲,۵,۸,... ، که یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n = ۲ + ۳(n-۱) = ۳n - ۱$ است. در ردیف هفدهم $a_{۱۷} = ۳(۱۷) - ۱ = ۵۰$ عدد وجود دارد. برای اینکه ببینیم آخرین عدد ردیف هفدهم چندمین عدد طبیعی است، کافی است مجموع ۱۷ جملهٔ اول دنبالهٔ a_n را حساب کنیم:

$$\Rightarrow S_{۱۷} = \frac{۱۷}{۲}(۲ + ۵۰) = ۴۴۲$$

پس اولین عدد ردیف هجدهم برابر است با:

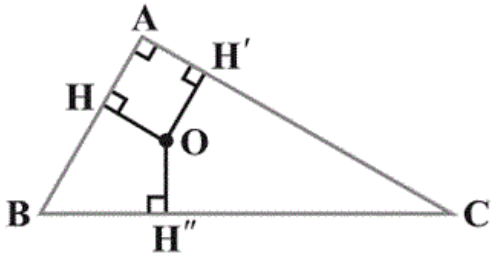
$$۴۴۲ + ۱ = ۴۴۳$$

(حسابان ۱- جبر و معادله، صفحه‌های ۲ تا ۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

چهارضلعی $AHOH'$ به دلیل داشتن چهار زاویهٔ قائمه و برابری دو ضلع مجاور آن، مربع است و در نتیجه داریم:

$$HH' = \sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۴$$

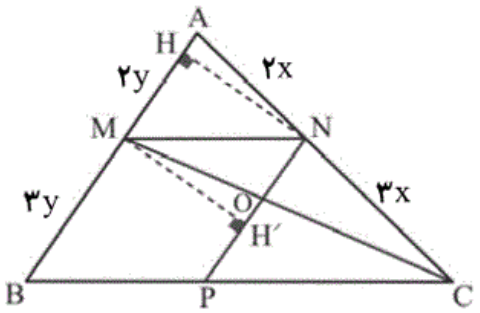


(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال، صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

چهارضلعی MNPB متوازی‌الاضلاع است، بنابراین $MN \| BC$ و $NP \| AB$.



$$\overset{\Delta}{AMC} : ON \| AM \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{NC}{AC} = \frac{ON}{AM} \quad (۱)$$

طبق فرض $\frac{MA}{MB} = \frac{۲}{۳}$ و از اینکه $MN \| BC$ نتیجه می‌شود که $\frac{AN}{NC} = \frac{MA}{MB} = \frac{۲}{۳}$، پس فرض می‌کنیم $AN = ۲x$ و $NC = ۳x$، $MA = ۲y$ و $MB = ۳y$ باشد. داریم:

$$(۱) \Rightarrow \frac{۳x}{۵x} = \frac{ON}{۲y} \Rightarrow ON = \frac{۶}{۵}y$$

چون NP با AB موازی است بنابراین فاصلهٔ بین دو خط ثابت است، یعنی $NH = MH'$، پس ارتفاع‌های مثلث OMN و متوازی‌الاضلاع BMNP با هم برابرند. در نتیجه نسبت مساحت‌های آنها برابر است با:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OMN}}}{S_{BMNP}} = \frac{\frac{۱}{۲}ON \times MH'}{BM \times MH'} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{ON}{BM}\right) = \frac{۱}{۲} \times \frac{\frac{۶}{۵}y}{۳y} = \frac{۱}{۵} = ۲۰٪$$

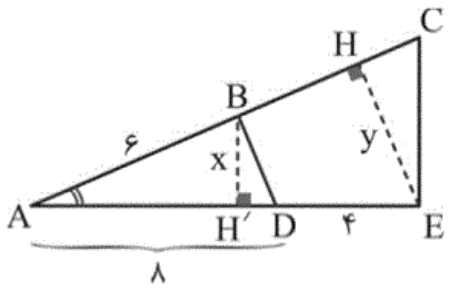
(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۱ و ۳۴ تا ۳۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۸-

مطابق شکل، داریم:



$$\begin{cases} A\hat{H}'B = A\hat{H}E = ۹۰^\circ \xrightarrow{\text{تساوی زاویه‌ها}} \overset{\Delta}{ABH'} \sim \overset{\Delta}{AEH} \\ \hat{A} \text{ مشترک} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{BH'}{EH} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۶}{۸+۴} = \frac{۱}{۲}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۹-

در متوازی‌الاضلاع زوایای مجاور مکمل‌اند.

$$\hat{D}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha+۲\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۹۰^\circ$$

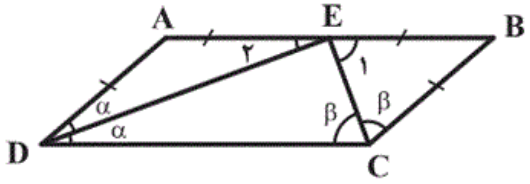
$$D\hat{E}C=۱۸۰^\circ-(\alpha+\beta)=۱۸۰^\circ-۹۰^\circ=۹۰^\circ$$

پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم $AB=CD=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰$. از طرفی بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{E}_۱=\beta$ و $\hat{E}_۲=\alpha$ است، پس مثلث‌های BEC و ADE متساوی‌الساقین هستند. در نتیجه $BE=BC$ و $AE=AD$ است. از طرفی در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند، پس می‌توان نوشت:

$$CD=AB=AE+BE=AD+AD=۲AD$$

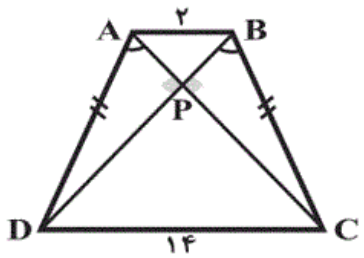
$$\Rightarrow ۱۰=۲AD \Rightarrow AD=BC=۵$$

$$\text{محیط متوازی‌الاضلاع}=۲(AD+CD)=۲\times(۵+۱۰)=۳۰$$



(هندسه ۱- چندضلعی‌ها، صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴



در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطرها برابر یکدیگرند، پس دو مثلث ADC و BDC به حالت تساوی سه ضلع هم‌نهشت هستند و در نتیجه $D\hat{A}C = D\hat{B}C$ است، پس دو مثلث PBC و PAD، بنا به حالت (وتر و یک زاویهٔ حاده) هم‌نهشت هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} AP = BP \xrightarrow{A\hat{P}B=۹۰^\circ} \overset{\Delta}{APB} \text{ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.} \\ PC = PD \xrightarrow{C\hat{P}D=۹۰^\circ} \overset{\Delta}{CPD} \text{ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AP = \frac{\sqrt{۲}}{۲} AB = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۲ = \sqrt{۲} \\ PD = \frac{\sqrt{۲}}{۲} CD = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۱۴ = ۷\sqrt{۲} \end{cases}$$

با به‌کار بردن قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ PAD، داریم:

$$AD^۲ = AP^۲ + PD^۲$$

$$\Rightarrow AD^۲ = (\sqrt{۲})^۲ + (۷\sqrt{۲})^۲ = ۲ + ۹۸ = ۱۰۰ \Rightarrow AD = ۱۰$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها، صفحه‌های ۶۱ تا ۶۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۶- (سؤال ۶۹ کتاب آبی ریاضیات گسسته و آمار و احتمال)

گزینهٔ «۱» درست است، چون به ازای $\forall x \in A$، می‌توان y را برابر x در نظر گرفت.

گزینهٔ «۲» نادرست است، زیرا اگر $x = ۹$ باشد، آنگاه بـه ازای $\forall y \in A$، $x \geq y$ است.

گزینهٔ «۳» درست است، چون اگر $x = ۹$ باشد، آنگـاه بـه ازای $\forall y \in A$، $۹ + y \geq ۱۰$ است.

گزینهٔ «۴» درست است، چون اگر $x = ۵$ باشد، آنگـاه بـه ازای $\forall y \in A$، $|۵ - y| \leq ۴$ است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۷- (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۳)

با توجه به افراز داده شده، مجموعهٔ A دارای ۴ عضو است. افرازهـای مـورد نظر به یکی از دو صورت زیر هستند:

$$\text{تعداد افرازها} = \binom{۴}{۴} + \frac{\binom{۴}{۲}}{۲!} = ۱ + ۳ = ۴$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحهٔ ۲۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۸- (سؤال ۲۰۶ کتاب آبی ریاضیات گسسته و آمار و احتمال)

$$n(A)=۶\ ,\ n(A\cap B)=۲$$

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۶-۲=۴$$

$$n\big[(A-B)\times(B-A)\big]=n(A-B)\times n(B-A)$$

$$\Rightarrow ۲۰=۴\times n(B-A)\Rightarrow n(B-A)=۵$$

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۵=n(B)-۲\Rightarrow n(B)=۷$$

بنابراین مجموعهٔ B، $۲^{۷}=۱۲۸$ زیرمجموعه دارد.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۹-

اگر پیشامد «بخش‌پذیر بودن بر ۵» و «بخش‌پذیر بودن بر ۶» را به‌ترتیب با A و B نمایش دهیم، آنگاه هدف مسئله یافتن $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]$ است. داریم:

$$n(S)=۶۰۰-۱۰۰=۵۰۰$$

$$n(A)=\left[\frac{۶۰۰}{۵}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۵}\right]=۱۲۰-۲۰=۱۰۰$$

$$n(B)=\left[\frac{۶۰۰}{۶}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۶}\right]=۱۰۰-۱۶=۸۴$$

$$n(A\cap B)=\left[\frac{۶۰۰}{۳۰}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۳۰}\right]=۲۰-۳=۱۷$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۱۰۰}{۵۰۰}-\frac{۱۷}{۵۰۰}=\frac{۸۳}{۵۰۰}$$

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{۸۴}{۵۰۰}-\frac{۱۷}{۵۰۰}=\frac{۶۷}{۵۰۰}$$

$$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)$$

$$=\frac{۸۳}{۵۰۰}+\frac{۶۷}{۵۰۰}=\frac{۱۵۰}{۵۰۰}=۰/۳$$

تذکر: $(A-B)$ و $(B-A)$ دو پیشامد ناسازگار هستند.

(آمار و احتمال- احتمال، صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

✓۱ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۴۰ (سؤال ۳۴۷ کتاب آبی ریاضیات گسسته و آمار و احتمال)

$$P(B) = P(\{a_۲, a_۳, a_۴, a_۶\}) = \frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow P(B') = P(\{a_۱, a_۵\}) = \frac{۱}{۵}$$

$$P(A) = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow P(\{a_۱, a_۵\}) + P(a_۳) = \frac{۳}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۵} + P(C) = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow P(C) = \frac{۳}{۱۰} - \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۱۰}$$

(آمار و احتمال- احتمال، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا