سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)
https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)
https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

هندسه ۱ دهم ، ترسیم های هندسی و استدلال - ۳

۱۳۱- حداکثر چند نقطه در صفحهٔ شامل نقطهٔ A و خط d وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ واحد و از خط d هم به فاصله ۳ واحد باشد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) بی‌شمار

۱۳۲- بخشی از روش رسم نیمساز زاویهٔ $x\hat{O}y = ۱۲۰^\circ$ این‌گونه است: «به مرکز O کمانی به شعاع واحد رسم می‌کنیم تا Ox و Oy را در نقاط A و B قطع کند. سپس به مرکزهای A و B دو کمان به شعاع‌های R که $R > a$ رسم می کنیم.» کمترین مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۱۳۳- می‌خواهیم به کمک روش رسم عمودمنصف یک پاره‌خط، از نقطه‌ای خارج یک خط، خطی موازی با آن رسم کنیم. برای انجام این کار حداقل چند کمان باید رسم کنیم؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

هندسه ۱ دهم ، استدلال (هندسه‌ی ۱) - ۲ سوال

۱۳۴- در مثلثی به طول اضلاع ۵، ۵ و ۶ واحد، O نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها است. فاصلهٔ O از ضلع بزرگتر این مثلث چند واحد است؟

۱) ۰/۶۲۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸۷۵ ۴) ۱

۱۳۵- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $\left(\hat{A} = ۹۰^\circ\right)$، AD نیمساز زاویهٔ داخلی A و $AB < AD < AC$ است. اگر زاویهٔ B در بازهٔ (α,β) قرار داشته باشد، بیشترین مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

۱) ۱۵° ۲) $۲۲/۵^\circ$ ۳) ۳۰° ۴) $۳۷/۵^\circ$

۱۲۱- اگر a و b دو عدد صحیح باشند، آنگاه کدام گزارهٔ زیر همواره درست است؟

۱) اگر $a+b$ عددی زوج باشد، آنگاه ab عددی زوج است.
۲) اگر $a+b$ عددی زوج باشد، آنگاه ab عددی فرد است.
۳) اگر $a+b$ عددی فرد باشد، آنگاه ab عددی فرد است.
۴) اگر $a+b$ عددی فرد باشد، آنگاه ab عددی زوج است.

۱۲۲- کدام‌یک از احکام زیر فاقد مثال نقض است؟

۱) برای هر عدد طبیعی n، حداقل یکی از دو عدد $۲^n-۱$ یا $۲^n+۱$، عددی اول است.
۲) میانگین اعداد طبیعی ۱ تا n، برابر $\frac{n+۱}{۲}$ است.
۳) مربع هر عدد حقیقی، بزرگتر یا مساوی با آن عدد است.
۴) اگر α و β دو عدد گنگ و $\alpha+\beta$ گویا باشد، آنگاه $\alpha-\beta$ نیز عددی گویا است.

۱۲۳- اگر a، b و c سه عدد صحیح باشند، آنگاه چه تعداد از روابط زیر همواره برقرار است؟

الف) اگر $a\mid b+c$، آنگاه $a\mid b$ یا $a\mid c$.
ب) اگر $a\mid bc$، آنگاه $a\mid b$ یا $a\mid c$.
پ) اگر $a\mid ۲b$، آنگاه $a\mid b^۲$.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲۴- اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a^۴\mid b^۳$، آنگاه کدام گزینه نمی‌تواند همواره صحیح باشد؟ $(a\neq ۰)$

۱) $a^۵\mid b^۵$ ۲) $a^۳\mid b^۲$ ۳) $a^{۱۹}\mid b^{۱۵}$ ۴) $a^۶\mid b^۷$

۱۲۵- تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعهٔ $A=\{n,n+۱,...,۲n\}$ مضرب ۴ است. تعداد اعضای مجموعهٔ A کدام می‌تواند باشد؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۵۴ ۴) ۶۵

۱۲۶- اگر A، B و C سه مجموعهٔ غیرتهی باشند، آنگاه کدام دسته از گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند؟

۱) $B=C$ و $A-B=A-C$
۲) $A'\cup B'\cup C'=C'$ و $A\cap B\subseteq C$
۳) $B=C$ و $B-A=C-A$
۴) $A'\cap B'\cap C'=C'$ و $A\cup B\subseteq C$

۱۲۷- به ازای چند مقدار طبیعی و دو رقمی n، $n^۲+۱۲$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۱۲۸- برای اثبات نامساوی $۴x^۲+y^۲\geq ۲(xy-y-۲x-۲)$ به‌صورت بازگشتی، به کدام رابطهٔ بدیهی می‌رسیم؟ $(x,y\in\mathbb{R})$

۱) $(۲x-y)^۲+(۲x-۲)^۲+(y-۲)^۲\geq ۰$
۲) $(۲x+y)^۲+(۲x-۲)^۲+(y-۲)^۲\geq ۰$
۳) $(۲x-y)^۲+(۲x+۲)^۲+(y+۲)^۲\geq ۰$
۴) $(۲x+y)^۲+(۲x+۲)^۲+(y+۲)^۲\geq ۰$

۱۲۹- چند نقطه با مختصات طبیعی روی منحنی $۳x^۲+xy-۲y-۱۶=۰$ قرار دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۳۰- اعداد صحیح a_1، a_2 و a_3 سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت غیرصفر هستند. اگر $a_2 \mid a_1$ و $a_3 \mid a_2$، مجموع این سه جمله چند برابر جملهٔ اول است؟ $(a_1, a_2, a_3 \neq 0)$

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

آمار و احتمال ، آشنایي با مباني رياضي - ۵ سوال

۱۳۶- اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی دامنهٔ متغیر گزاره‌نماهای زیر باشد، مجموعهٔ جواب کدام گزاره‌نما تهی است؟

۱) $۲^n < n^۲$ ۲) $n^۲ < ۸n - ۱۵$

۳) $n! \leq \frac{n^۲}{۲}$ ۴) $۲n^۲ < ۵ - ۳n$

۱۳۷- اگر p و q دو گزارهٔ دلخواه باشند، ارزش گزارهٔ $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ چگونه است؟

۱) همواره درست است. ۲) معادل ارزش گزارهٔ p است.

۳) معادل ارزش گزارهٔ $p \vee q$ است. ۴) معادل ارزش گزارهٔ q است.

۱۳۸- اگر گزاره‌های $q \Rightarrow r$ و $p \Rightarrow \sim q$ به‌ترتیب درست و نادرست باشند، آنگاه ارزش گزاره‌های $(r \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow (\sim r \Rightarrow p)$ و $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim r \Leftrightarrow q)$ به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) درست – درست ۲) درست – نادرست

۳) نادرست – درست ۴) نادرست – نادرست

۱۳۹- کدام‌یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز منطقی با گزارهٔ مرکب $p \Leftrightarrow q$ نیست؟

۱) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ ۲) $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$

۳) $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ ۴) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$

۱۴۰- ارزش کدام‌یک از گزاره‌های سوری زیر نادرست است؟(P مجموعهٔ اعداد اول است)

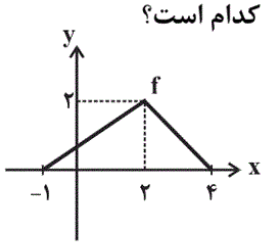
۱) $\forall x \in \mathbb{R} - \{۰\}; \left|۹x + \frac{۱}{x}\right| \geq ۶$ ۲) $\forall a, b \in \mathbb{N}; \binom{۲a+b}{a} = \binom{۲a+b}{a+b}$

۳) $\forall x \in \mathbb{N}; ۳^{x+۱} - ۲^{x+۱} \in P$ ۴) $\exists A; A \subseteq \{A\}$

حسابان دوازدهم ، تابع - ۱۰ سوال

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۸۱- اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، مساحت سطح محدود به نمودار $y = f(x+1) - 1$ و محور xها کدام است؟

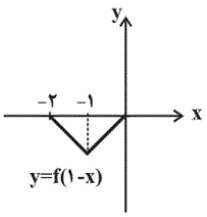


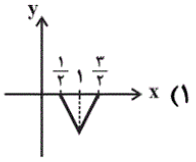
۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) $\frac{۴}{۵}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

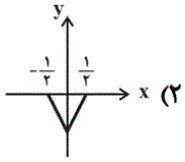
۸۲- نمودار تابع $y = x^۲ - ۱$ را ابتدا یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم، سپس با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای افقی آن را منقبض می‌کنیم و در نهایت آن را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم. نمودار تابع جدید در کدام نقطه با طول مثبت، نیمساز ربع اول را قطع می‌کند؟

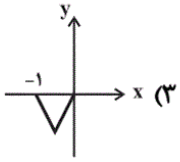
۱) $\frac{۴}{۵}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

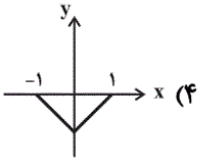
۸۳- اگر شکل مقابل مربوط به نمودار تابع $y = f(۱-x)$ باشد، نمودار تابع $y = f(۲x)$ کدام است؟



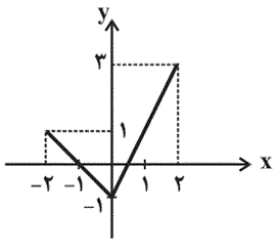
۱)


۲)


۳)


۴)


۸۴- نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر است. دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{f(۱-x)}$ کدام است؟



۱) $[-۳,۳]$
۲) $[-۱,۱] \cup [۲,۳]$
۳) $[-۳,۰] \cup [۱,۲]$
۴) $[-۱,\frac{۱}{۲}] \cup [۲,۳]$

۸۵- دامنه و برد تابع $y = ۲f(x-۱)$ به‌ترتیب $[-۲,۳]$ و $(-۱,۲]$ است. اشتراک دامنه و برد تابع $y = -f(\frac{x}{۲}) + ۴$ کدام است؟

۱) $[۴,۴/۵]$
۲) $(۳,۴]$
۳) $(۳,۴/۵]$
۴) $\varnothing$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۶- نقطهٔ $A(۳,-۲)$ روی نمودار تابع $y=-f(x-۱)$ با نقطهٔ $B(a,b)$ روی نمودار تابع $y=۲f(۲x+۱)-۱$ متناظر است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۴ ۴) ۳/۵

۸۷- برای تبدیل نمودار $y=۲f(۲+۳x)-۱$ به $y=f(x)$، کدام ترتیب مراحل درست است؟

۱) انتقال یک واحد به بالا، انقباض عمودی با ضریب $\frac{۱}{۲}$، انبساط افقی با ضریب ۳ و انتقال ۲ واحد به سمت راست

۲) انتقال یک واحد به بالا، انقباض عمودی با ضریب $\frac{۱}{۲}$، انتقال ۲ واحد به سمت راست و انبساط افقی با ضریب ۳

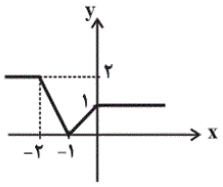
۳) انتقال دو واحد به راست، انقباض عمودی با ضریب $\frac{۱}{۲}$، انبساط افقی با ضریب ۳ و انتقال یک واحد به سمت بالا

۴) انتقال یک واحد به بالا، انبساط عمودی با ضریب ۲، انبساط افقی با ضریب ۳ و انتقال ۲ واحد به سمت راست

۸۸- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}|۲x-۳| & ;x\geq ۱\\ x^۲-x & ;x<۱\end{cases}$ را ابتدا یک واحد به راست و سپس ۲ واحد به پایین منتقل می‌کنیم. نمودار جدید در دو نقطه محور xها را قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۵/۵

۸۹- نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت شکل مقابل است. طول نمودار تابع $y=f\left(-\frac{x}{۲}\right)$ در بازهٔ $[۰,۴]$ کدام است؟



۱) $\sqrt{۵}+۲\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲}\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

۹۰- نمودار تابع $f(x)=ax-[ax]$ روی بازهٔ $[۰,۲]$ پنج نقطهٔ مشترک با محور xها دارد. حدود مثبت a کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) $۲\leq a<\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}\leq a<۳$ ۳) $۲\leq a<۵$ ۴) $\frac{۳}{۲}\leq a<۲$

هندسه ۳- دوازدهم ، ماتریس،و کاربردها - ۱۰ سوال -

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۱- اگر ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} i+j-۱ & i>j \\ ۲i & i=j \\ j-۳ & i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد، مجموع درایه‌های آن کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۱۱۲- اگر A، B و C سه ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، چه تعداد از روابط زیر همواره برقرار است؟

الف) $AB=AC\ ,\ A\neq\bar{O}\Rightarrow B=C$

ب) $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$

پ) $AB=\bar{O}\Rightarrow A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۳- اگر $A=\begin{bmatrix} x+۲y & -۱ \\ t+۱ & z \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۲x+۳y \\ y-۱ & -t+۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ باشد، حاصل $x+y+z+t$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲

۳) صفر ۴) ۱-

۱۱۴- ماتریس $A=\begin{bmatrix} -\tan x & \frac{۱}{\cos x} \\ \frac{-۱}{\cos x} & \tan x \end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس $A^{۱۰}+A^{۷}+A^{۵}$ کدام است؟ $\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\right)$

۱) $۲A+I$ ۲) $A-۲I$

۳) $۲A-I$ ۴) $-I$

۱۱۵- ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & ۱ \\ -۱ & a \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A^۳$ برابر صفر باشد، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای a کدام است؟ $(a\neq۰)$

۱) ۲- ۲) ۴- ۳) ۳- ۴) ۹-

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۱۱۶- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\ 1 & -x & -1\\ -1 & 1 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -1\\ x\end{bmatrix}=0$ باشند، آنگاه حاصل $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{16}{9}$ ۲) $\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۱۱۷- اگر $A=\begin{bmatrix}a+c & a-2b\\ 2b+1 & b\end{bmatrix}$ ماتریسی قطری و A^2 ماتریسی اسکالر باشد، بیشترین مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

۱۱۸- با توجه به رابطهٔ $\begin{bmatrix}18 & 12\\ 10 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & y\\ y & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 1\\ y & 1\end{bmatrix}$، حاصل $x+y$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

۱۱۹- اگر A و B دو ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲، $A^2=A$ و $B=3A-I$ باشد، حاصل $A^3+B^3-\left(A^2-I\right)$ کدام است؟

۱) $63A$ ۲) $9A$

۳) $63A+I$ ۴) $9A-I$

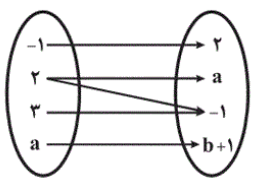
۱۲۰- اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & x\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ y & 2\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر بوده و مجموع درایه‌های آنها برابر یکدیگر باشد، مقدار مثبت $x+y$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲

۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۳

ریاضي پایه - دوازدهم ، تابع - ۱۰ سوال -

۱۰۱- نمودار پیکانی تابع f به صورت شکل زیر است. $a+b$ کدام است؟



۱) صفر ۲) ۱

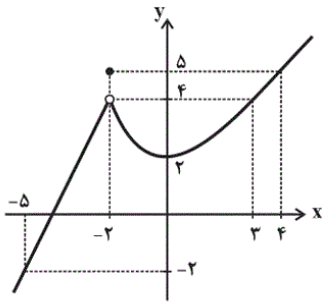
۳) ۲ ۴) -۱

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۲- دامنهٔ تابع $f=\{(-۱,۷),(۲a-b,۰),(a+۴b,۷)\}$ مجموعهٔ $\{-۱,۲,۵\}$ است. حاصل $۳a+۳b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۰۳- نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر است و داریم $f(f(a+۱))=۵$. حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای a کدام است؟



۱) -۸

۲) -۱۰

۳) -۱۵

۴) -۱۲

۱۰۴- اگر $f=\{(۴a+b,۴a^۲+b+۱),(۴a+b^۲,۲b+۱),(b^۲,۱)\}$ یک تابع همانی باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۰۵- برد تابع $f(x)=۵x-۳$ بازهٔ $[-۲,۷]$ است. دامنهٔ این تابع شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

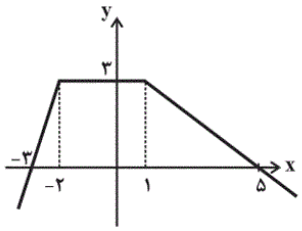
۱۰۶- اگر برد تابع $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۲ & ;-۱<x<۰\\ |x-۱|+۲ & ;۰\le x\le b\end{cases}$ بازهٔ $[a,۴)$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱

۳) -۲ ۴) -۳

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۷- نمودار تابع f به‌صورت زیر است. مقدار $f(11)+f\left(-\frac{8}{3}\right)$ کدام است؟



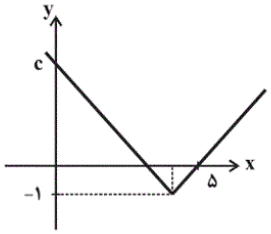
۱) -۴/۵

۲) -۳/۵

۳) -۵/۵

۴) -۲/۵

۱۰۸- نمودار تابع $f(x)=|x+a|-b$ به‌صورت زیر است. مقدار $f(c)$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) -۱

۴) صفر

۱۰۹- در تابع خطی f با شیب منفی، می‌دانیم $f(1)=2$ و $f(f(-1))=-8$ است. مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}$

۲) $\frac{7}{2}$

۳) ۳

۴) صفر

۱۱۰- خط $y=k$ و نمودار تابع $f(x)=x^2-4x+2$ با دامنهٔ $[0,5]$، در یک نقطه مشترک هستند. k چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

حسابان دوازدهم - گواه ، تابع - ۱۰ سوال

۹۱- برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x-2}$ با استفاده از نمودار تابع $g(x)=-1+\sqrt{x+1}$، کافی است ابتدا نمودار تابع g را ..... و سپس..... انتقال دهیم.

۱) ۳ واحد به راست - یک واحد به بالا

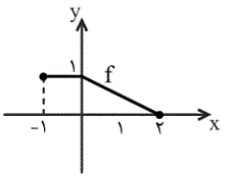
۲) ۳ واحد به چپ - یک واحد به بالا

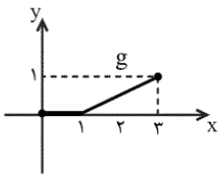
۳) ۳ واحد به راست - یک واحد به پایین

۴) یک واحد به راست - یک واحد به پایین

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۲- نمودار دو تابع f و g در شکل‌های زیر رسم شده‌اند. تابع g با کدام تابع زیر برابر است؟





۱) $-۱+f(x+۱)$

۲) $۲+f(x+۱)$

۳) $۲-f(x-۱)$

۴) $۱-f(x-۱)$

۹۳- خط $y=k$ نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۴x|$ را دقیقاً در سه نقطه قطع می‌کند. مقدار k کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) $\frac{۹}{۲}$

۴) $\frac{۱۱}{۲}$

۹۴- اگر نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، نقطهٔ A' متناظر آن روی تابع $g(x)=-۲f(x+۱)+۱$ کدام است؟

۱) $(x_۰+۱, \frac{۱-y_۰}{۲})$

۲) $(x_۰+۱, -۲y_۰+۱)$

۳) $(x_۰-۱, \frac{۱-y_۰}{۲})$

۴) $(x_۰-۱, -۲y_۰+۱)$

۹۵- اگر برد تابع f بازهٔ $R_f=[-\sqrt{۵}, ۱]$ باشد، برد تابع $g(x)=-\sqrt{۲}f(x+۱)-۳$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۹۶- نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}|x+۲|-۱$ از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) اول

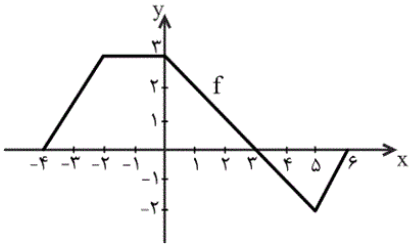
۲) دوم

۳) سوم

۴) چهارم

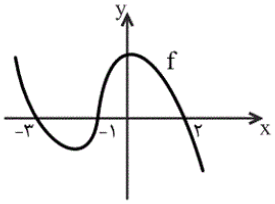
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۷- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ شکل زیر باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=f(-x)+f(2x-4)$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۵
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۷

۹۸- نمودار تابع f به شکل زیر است. مجموع جواب‌های معادلهٔ $f(2x)=0$ کدام است؟

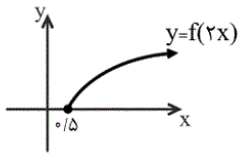


۱) صفر
۲) -2
۳) -1
۴) -4

۹۹- تابع $f(x)=x^2-1$ را در نظر بگیرید. نمودار این تابع را در راستای محور xها با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم و سپس ۳ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) ± 1
۲) ± 2
۳) صفر
۴) $\pm 0/5$

۱۰۰- اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و نمودار تابع $y=f(2x)$ به‌صورت شکل زیر باشد، زوج مرتب $(a\ ,\ b)$ کدام می‌تواند باشد؟



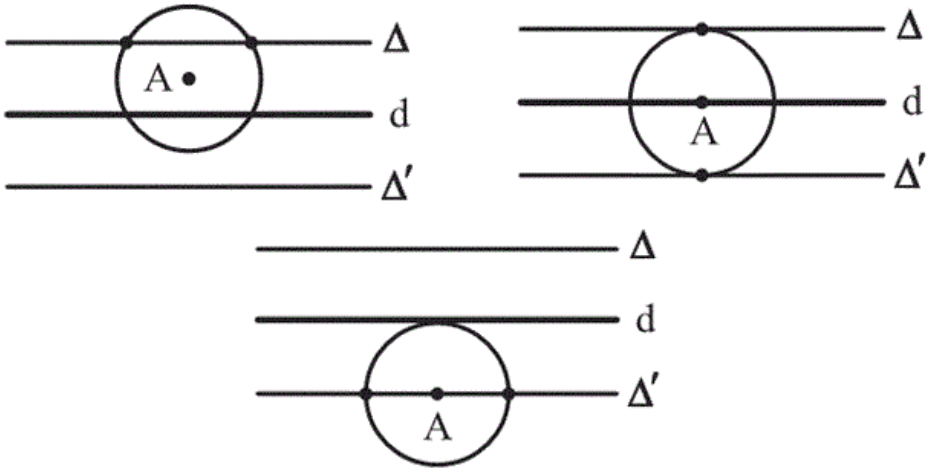
۱) $(2\ ,\ -4)$
۲) $(1\ ,\ -1)$
۳) $(-1\ ,\ 1)$
۴) $(4\ ,\ -2)$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

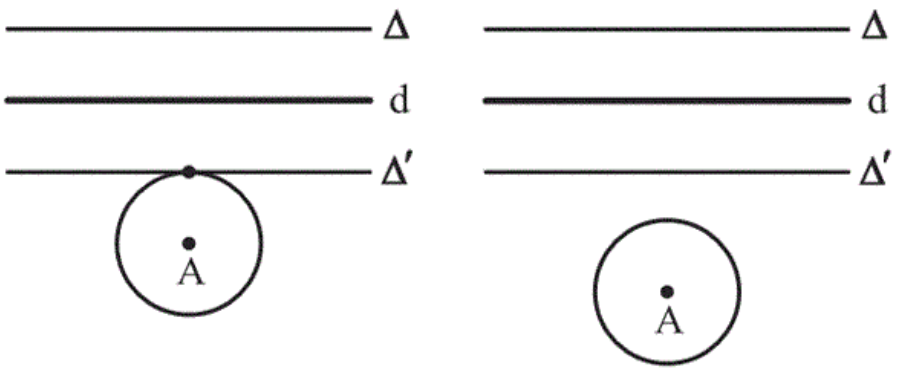
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۳۱- (مرتضی بهجت)

با توجه به شکل‌های زیر، در سه حالت، دو نقطه با چنین خاصیتی وجـود دارد که نقاط مشترک دایرهٔ $C(A,۳)$ و دو خط Δ و Δ' که هر یک بـه فاصـلهٔ ۳ از d قرار دارند، هستند.



در سایر حالت‌ها صفر یا یک نقطه با این خاصیت وجود دارد:

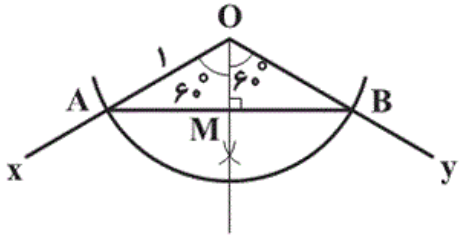


(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۲-

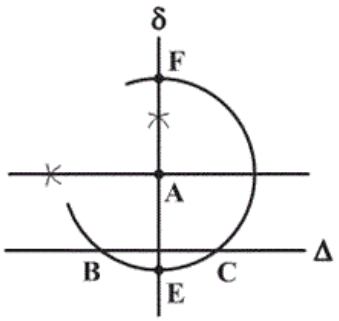
با توجه به روش رسم نیمساز و شکل زیر باید $R > \frac{AB}{۲}$ باشد، پس حداقل مقدار a برابر $AM = \frac{AB}{۲}$ است. داریم:



$$\overset{\triangle}{OAM} : \sin ۶۰^\circ = \frac{AM}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{AM}{۱} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی، صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

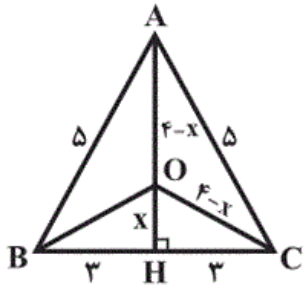
۱ ✓ ۲ ۳ ۴



(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا



نقطهٔ O، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث متساوی‌الساقین است، بنابراین از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABH، طول AH را به‌دست می‌آوریم:

$$AH = \sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴$$

با فرض $OH = x$، $OA = ۴ - x$ است. از آنجا که O از سه رأس مثلث به یک فاصله است، پس $OB = OC = ۴ - x$ می‌باشد، حال با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH، داریم:

$$OC^۲ = OH^۲ + CH^۲ \Rightarrow (۴ - x)^۲ = x^۲ + ۹$$

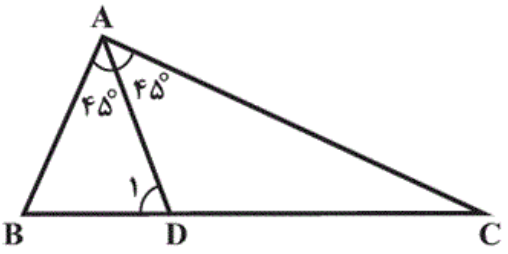
$$\Rightarrow ۱۶ - ۸x + x^۲ = x^۲ + ۹ \Rightarrow ۸x = ۷ \Rightarrow x = \frac{۷}{۸} = ۰/۸۷۵$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی، صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۵- (حسین حاجیلو)



در مثلث ABD، داریم: $AD > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{D}_1$

از طرفی می‌دانیم: $\hat{D}_1 = ۴۵^\circ + \hat{C}$ (زاویهٔ خارجی $\overset{\Delta}{ACD}$)

پس: $\hat{B} > \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{B} > ۴۵^\circ + \hat{C} \xrightarrow{\hat{C}=۹۰^\circ-\hat{B}} \hat{B} > ۴۵ + \left(۹۰^\circ - \hat{B}\right)$

$$\Rightarrow ۲\hat{B} > ۱۳۵^\circ \Rightarrow \hat{B} > ۶۷/۵^\circ \xrightarrow{\hat{B}<۹۰^\circ} ۶۷/۵^\circ < \hat{B} < ۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow \max(\beta - \alpha) = ۹۰^\circ - ۶۷/۵^\circ = ۲۲/۵^\circ$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی، صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۱- (امیرحسین ابومحبوب)

اگر $a+b$ عددی زوج باشد، آنگاه a و b یا هر دو زوج هستند که در این صورت ab عددی زوج است و یا هر دو فرد هستند که در این‌صورت ab عددی فرد است ولی در صورتی که $a+b$ عددی فرد باشد، آنگاه از بین a و b یکی زوج و دیگری فرد است که در این‌صورت ab قطعاً عددی زوج می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲ تا ۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۲- (امیرحسین ابومحبوب)

گزینهٔ «۱»: اگر $n = ۶$ باشد، آنگاه هیچ‌کدام از اعداد $۲^۶ - ۱ = ۶۳$ و $۲^۶ + ۱ = ۶۵$، عدد اول نیستند.

گزینهٔ «۲»: $۱ + ۲ + ... + n = \frac{n(n+۱)}{۲} \Rightarrow$ میانگین $= \frac{\frac{n(n+۱)}{۲}}{n} = \frac{n+۱}{۲}$

گزینهٔ «۳»: اگر $x = \frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه $\frac{۱}{۲} < \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲$ است.

گزینهٔ «۴»: اگر $\alpha = \sqrt{۲}$ و $\beta = -\sqrt{۲}$ باشد، آنگاه $\alpha + \beta = ۰$ عددی گویاست ولی $\alpha - \beta = ۲\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲ و ۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۳- (مرتضی خویم‌علوی)

هیچ‌کدام از روابط داده شده در حالت کلی صحیح نیستند. به عنوان مثال نقض داریم:

الف) اگر $a = ۲$، $b = ۳$ و $c = ۵$ باشد، آنگاه $a \mid b + c$ ولی $a \nmid b$ و $a \nmid c$.

ب) اگر $a = ۸$، $b = ۲$ و $c = ۴$ باشد، آنگاه $a \mid bc$ ولی $a \nmid b$ و $a \nmid c$.

پ) اگر $a = ۲$ و $b = ۳$ باشد، آنگاه $a \mid ۲b$ ولی $a \nmid b^۲$.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۴- (محمدجواد محسنی)

گزینهٔ «۱»: $a^{۴} \mid b^{۳} \Rightarrow a \times a^{۳} \mid b^{۳} \Rightarrow a^{۳} \mid b^{۳} \Rightarrow a \mid b \Rightarrow a^{۵} \mid b^{۵}$

گزینهٔ «۳»: $a^{۴} \mid b^{۳} \Rightarrow a^{۲۰} \mid b^{۱۵} \Rightarrow a \times a^{۱۹} \mid b^{۱۵} \Rightarrow a^{۱۹} \mid b^{۱۵}$

گزینهٔ «۴»: $a \mid b \Rightarrow a^{۶} \mid b^{۶} \Rightarrow a^{۶} \mid b^{۷}$

اما رابطهٔ گزینهٔ «۲» در حالت کلی درست نیست. به عنوان مثال نقض:

اگر $a = ۸$ و $b = ۱۶$ باشد، آنگاه $a^{۴} = ۸^{۴} = ۲^{۱۲}$ و $b^{۳} = ۱۶^{۳} = ۲^{۱۲}$ است. پس $a^{۴} \mid b^{۳}$ ولی $a^{۳} = ۸^{۳} = ۲^{۹}$ و $b^{۲} = ۱۶^{۲} = ۲^{۸}$ است، پس

$$a^{۳} \nmid b^{۲}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۵- (محمد هجری)

مجموعهٔ A، $n+۱$ عضو دارد. پس تعداد زیرمجموعه‌های آن که دو عضو دارند، برابر است با:

$$\binom{n+۱}{۲} = \frac{(n+۱)n}{۲}$$

طبق فرض سؤال می‌دانیم:

$$\frac{(n+۱)n}{۲} = ۴k \Rightarrow (n+۱)n = ۸k$$

دو عدد n و $n+۱$ متوالی هستند و هردو نمی‌توانند زوج باشند، پس یکی از آنها مضرب ۸ است.

$$\begin{cases} n = ۸q \Rightarrow n+۱ = ۸q+۱ \\ n+۱ = ۸q \end{cases}$$

پس تعداد اعضای مجموعهٔ A به‌صورت $۸q$ یا $۸q+۱$ است که در میان گزینه‌ها تنها عدد ۶۵ به‌صورت $۸ \times ۸ + ۱$ قابل نوشتن است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۶- (امیرحسین ابومحبوب)

گزینهٔ «۱»: اگر $A=\{1,2,3\}$، $B=\{2,3,4\}$ و $C=\{2,3,5\}$ باشند، آنگاه $A-B=A-C=\{1\}$ است ولی $B\neq C$ می‌باشد، بنابراین گزینهٔ «۱» نادرست است.

گزینهٔ «۲»:

$$A\cap B\subseteq C\Leftrightarrow C'\subseteq(A\cap B)'\Leftrightarrow C'\subseteq A'\cup B'$$

$$\Leftrightarrow(A'\cup B')\cup C'=A'\cup B'$$

بنابراین گزینهٔ «۲» نادرست است.

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۲۷- (سیرامیر ستوده)

$$\left.\begin{matrix}13\mid n^2+12\\13\mid 13\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{تفاضل}}13\mid n^2-1\Rightarrow 13\mid(n-1)(n+1)$$

$$\xrightarrow{\text{۱۳عدداول است}}13\mid n-1\text{ یا }13\mid n+1$$

$$\Rightarrow n=13k+1\text{ یا }n=13k-1$$

حاصل هر یک از مقادیر به ازای $k=1$ تا $k=7$، عددی دورقمی است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۸- (محمد هجری)

$$۴x^۲ + y^۲ \geq ۲(xy - y - ۲x - ۲)$$

$$\Leftrightarrow ۴x^۲ + y^۲ - ۲xy + ۲y + ۴x + ۴ \geq ۰$$

$$\overset{\times ۲}{\Leftrightarrow} ۸x^۲ + ۲y^۲ - ۴xy + ۴y + ۸x + ۸ \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (۴x^۲ - ۴xy + y^۲) + (۴x^۲ + ۸x + ۴) + (y^۲ + ۴y + ۴) \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (۲x - y)^۲ + (۲x + ۲)^۲ + (y + ۲)^۲ \geq ۰$$

رابطهٔ اخیر بدیهی است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$۳x^۲ + xy - ۲y - ۱۶ = ۰ \Rightarrow y(x-۲) = -۳x^۲ + ۱۶$$

$$\Rightarrow y = \frac{-۳x^۲ + ۱۶}{x-۲}$$

شرط لازم برای آنکه نقطه‌ای روی منحنی دارای مختصات طبیعی باشد، آن

است که $x-۲ \mid -۳x^۲ + ۱۶$. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x-۲ \mid ۳(x-۲)(x+۲) \Rightarrow x-۲ \mid ۳x^۲ - ۱۲ \\ x-۲ \mid -۳x^۲ + ۱۶ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} x-۲ \mid ۴$$

$$\Rightarrow x-۲ = \pm ۱, \pm ۲, \pm ۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow y = -۱۱ \text{ غ.ق.ق} \\ x-۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = -۱۳ \text{ غ.ق.ق} \\ x-۲ = ۲ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow y = -۱۶ \text{ غ.ق.ق} \\ x-۲ = -۲ \Rightarrow x = ۰ \text{ غ.ق.ق} \\ x-۲ = ۴ \Rightarrow x = ۶ \Rightarrow y = -۲۳ \text{ غ.ق.ق} \\ x-۲ = -۴ \Rightarrow x = -۲ \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۰-

فرض کنید $a_1 = a$، $a_2 = a + d$ و $a_3 = a + 2d$ باشد. در این‌صورت داریم:

$$\left.\begin{matrix} a \mid a+d, a+d \mid a+2d \xrightarrow{\text{خاصیت تعدی}} a \mid a+2d \\ a \mid a+d \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a \mid d \Rightarrow d = ka$$

$$a+d \mid a+2d \xrightarrow{d=ka} a+ka \mid a+2ka$$

$$\left.\begin{matrix} \xrightarrow{\div a} 1+k \mid 1+2k \\ 1+k \mid 2+2k \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1+k \mid 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+k=1 \Rightarrow k=0 \Rightarrow d=0 \text{ غ.ق.ق} \\ 1+k=-1 \Rightarrow k=-2 \Rightarrow d=-2a \end{cases}$$

بنابراین مجموع سه جمله برابر است با:

$$a_1 + a_2 + a_3 = a - a - 3a = -3a$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

گزینهٔ «۱»: نامساوی $n^۲ < ۲^n$ به ازای $n = ۳$ برقرار است، یعنی داریم:

$$۲^۳ < ۳^۲$$

گزینهٔ «۲»:

$$n^۲ < ۸n - ۱۵ \Rightarrow n^۲ - ۸n + ۱۵ < ۰ \Rightarrow (n-۳)(n-۵) < ۰$$

$$\Rightarrow ۳ < n < ۵$$

بنابراین نامساوی به ازای $n = ۴$ برقرار است.

گزینهٔ «۳»: نامساوی به ازای $n = ۲$ برقرار است، یعنی داریم: $۲! \leq \frac{۲^۲}{۲}$

گزینهٔ «۴»:

$$۲n^۲ < ۵ - ۳n \Rightarrow ۲n^۲ + ۳n - ۵ < ۰ \Rightarrow (n-۱)(۲n+۵) < ۰$$

$$\Rightarrow -\frac{۵}{۲} < n < ۱$$

نامساوی به ازای هیچ عدد طبیعی n برقرار نیست، پس مجموعهٔ جواب گزاره‌نما، تهی است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۵ و ۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۷-

روش اول: طبق جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

یعنی ارزش گزارهٔ $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ همواره درست است.

روش دوم: طبق قوانین گزاره‌ها داریم:

$$\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p) \vee (p \Rightarrow q) \equiv p \vee (\sim p \vee q)$$

$$\equiv (p \vee \sim p) \vee q \equiv T \vee q \equiv T$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

$$(\sim r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (r \Rightarrow \sim p) \equiv (F \Rightarrow T) \Leftrightarrow (T \Rightarrow F) \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow (\sim r \Leftrightarrow q) \equiv (T \wedge T) \Rightarrow (F \Leftrightarrow T) \equiv T \Rightarrow F \equiv F$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۶ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۹-

طبق قوانین گزاره‌ها داریم:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \quad \text{گزینهٔ «۲»}$$

$$\equiv [\sim p \wedge (\sim q \vee p)] \vee [q \wedge (\sim q \vee p)]$$

$$\equiv \left[(\sim p \wedge \sim q) \vee \underbrace{(\sim p \wedge p)}_{F} \right] \vee \left[\underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F} \vee (q \wedge p) \right]$$

$$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \quad \text{گزینهٔ «۱»}$$

$$\equiv \sim (p \vee q) \vee (p \wedge q)$$

$$\equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q) \quad \text{گزینهٔ «۴»}$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۶ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۴۰ (محمد هجری)

گزینهٔ «۱»: می‌دانیم گزارهٔ سوری $\forall x\in \mathbb{R}-\{0\};\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2$ صحیح است، بنابراین داریم:

$$\forall x\in \mathbb{R}-\{0\};\left|3x+\frac{1}{3x}\right|\geq 2 \Leftrightarrow \forall x\in \mathbb{R}-\{0\};3\left|3x+\frac{1}{3x}\right|\geq 3\times 2$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in \mathbb{R}-\{0\};\left|9x+\frac{1}{x}\right|\geq 6$$

گزینهٔ «۲»: اگر n و k دو عدد حسابی و $k\leq n$ باشد، آنگاه $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ است. در نتیجه با فرض $n=2a+b$ و $k=a$، این گزاره درست است.

گزینهٔ «۳»: به ازای $x=3$ داریم، $3^4-2^4=65$ است. واضح است که ۶۵ عددی اول نیست و در نتیجه گزارهٔ سوری نادرست است.

گزینهٔ «۴» اگر A مجموعهٔ تهی باشد، آنگاه $A\subseteq\{A\}$ است و در نتیجه ارزش گزارهٔ سوری درست است.

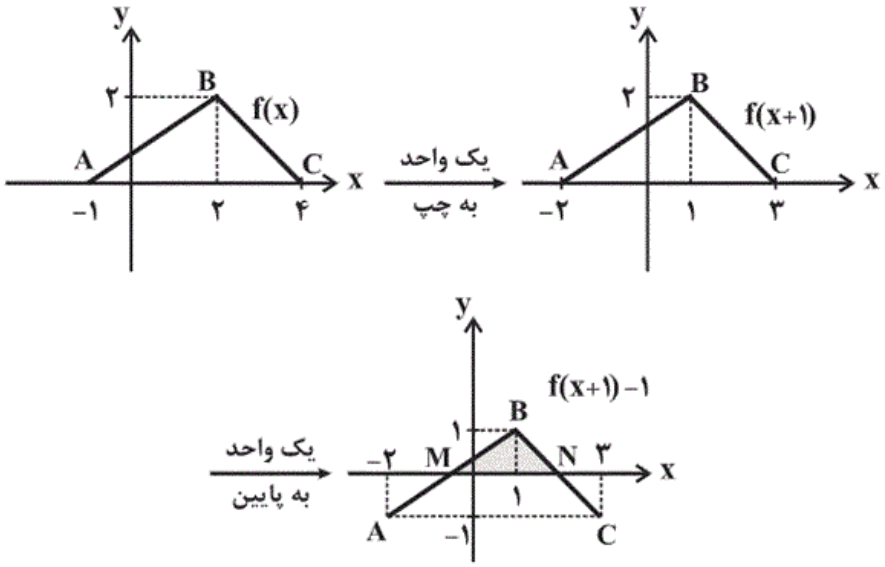
(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۱- (میلاد سجادی‌لاریجانی)

برای رسم نمودار تابع $y = f(x+1) - 1$ داریم:



طبق قضیهٔ تالس طول پاره‌خط MN، نصف طول پاره‌خط AC است و داریم:

$$MN = \frac{5}{2} \Rightarrow S_{\Delta MBN} = \frac{1}{2}(1)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۸۲- (سیدعادل حسینی)

$$y = x^2 - 1 \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{انتقال یک واحد}} y = (x+1)^2 - 1$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ ضریب}]{\text{انقباض با}} y = (2x+1)^2 - 1 \xrightarrow[\text{محور y‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = (-2x+1)^2 - 1$$

$$= (2x-1)^2 - 1 = 4x^2 - 4x$$

حال تابع به‌دست آمده را با خط $y = x$ تلاقی می‌دهیم. داریم:

$$4x^2 - 4x = x \Rightarrow 4x^2 - 5x = x(4x-5) = 0$$

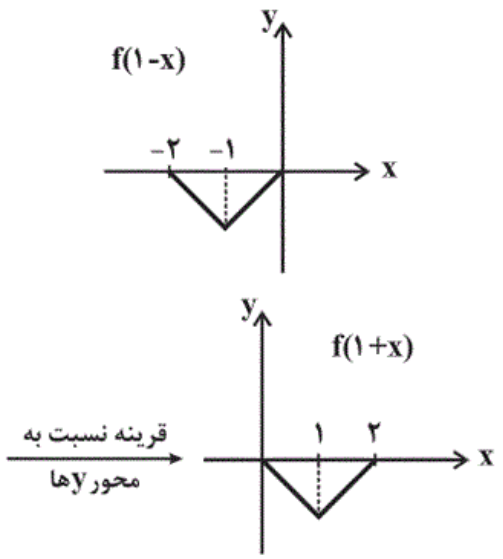
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

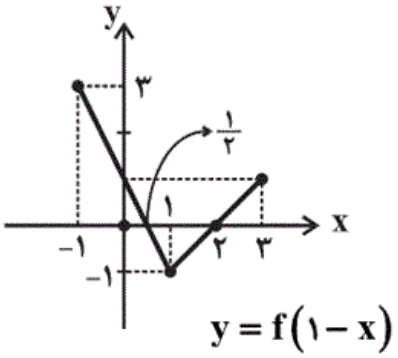
-۸۳ (محمدمصطفی ابراهیمی)



۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۸۴ (طاهر دادستانی)

با انتقال نمودار تابع f به اندازهٔ یک واحد به سمت چپ و سپس قرینه کردن آن نسبت به محور yها، نمودار تابع $y=f(۱-x)$ به‌دست می‌آید.



حال داریم:

$$D_g=\{x\mid f(۱-x)\geq ۰\}\Rightarrow D_g=\left[-۱,\frac{۱}{۲}\right]\cup[۲,۳]$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

ابتدا دامنه و برد تابع $y = f(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$-۲ < x \le ۳ \Rightarrow -۳ < x-۱ \le ۲ \Rightarrow D_f = (-۳,۲]$$

$$-۱ \le ۲f(x-۱) < ۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \le f(x-۱) < ۱$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲} \le f(x) < ۱ \Rightarrow R_f = \left[-\frac{۱}{۲},۱\right)$$

حال دامنه و برد تابع $y = -f\left(\frac{x}{۲}\right)+۴$ را حساب می‌کنیم:

$$-۳ < \frac{x}{۲} \le ۲ \Rightarrow -۶ < x \le ۴ \Rightarrow \text{دامنه} : D = (-۶,۴]$$

$$-\frac{۱}{۲} \le f(x) < ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \le f\left(\frac{x}{۲}\right) < ۱ \Rightarrow -۱ < -f\left(\frac{x}{۲}\right) \le \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳ < -f\left(\frac{x}{۲}\right)+۴ \le \frac{۹}{۲} \Rightarrow \text{برد} : R = \left(۳,\frac{۹}{۲}\right]$$

$$\Rightarrow R \cap D = (۳,۴/۵] \cap (-۶,۴] = (۳,۴]$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۶ (علی شهرابی)

نقطهٔ $(-۲,۳)$ روی تابع $y=-f(x-۱)$ است، پس داریم:

$$-۲=-f(۳-۱)\Rightarrow f(۲)=۲$$

$۲x+۱$ را مساوی ۲ قرار می‌دهیم:

$$۲x+۱=۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

در تابع دوم، به جای x، $\frac{۱}{۲}$ قرار می‌دهیم:

$$y=۲f(۲x+۱)-۱\xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}}y=۲\underbrace{f(۲)}_{۲}-۱=۳$$

پس نقطهٔ (a,b) به‌صورت $\left(\frac{۱}{۲},۳\right)$ در می‌آید و داریم:

$$a+b=\frac{۱}{۲}+۳=۳/۵$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۷- (سیدعادل حسینی)

ابتـدا مراحـل تبـدیل نمـودار $y=f(x)$ را بـه $y=2f(2+3x)-1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)\xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{انتقال ۲ واحد}}f(2+x)\xrightarrow[\text{باضریب }\frac{1}{3}]{\text{انقباض افقی}}f(2+3x)$$

$$\xrightarrow[\text{باضریب ۲}]{\text{انبساط عمودی}}2f(2+3x)\xrightarrow[\text{به سمت پایین}]{\text{انتقال ۱ واحد}}y=2f(2+3x)-1$$

اگر مراحل فوق را از نمودار تابع $y=2f(2+3x)-1$ به‌صـورت معکـوس انجام دهیم، به نمودار تابع $y=f(x)$ خواهیم رسید. بنابراین ترتیب مراحل گفته شده در گزینهٔ «۱» درست است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۸۸- (حمید علیزاده)

ضابطهٔ تابع جدید به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y=\begin{cases}|2(x-1)-3|-2 & ;x-1\geq 1\\ (x-1)^2-(x-1)-2 & ;x-1<1\end{cases}$$

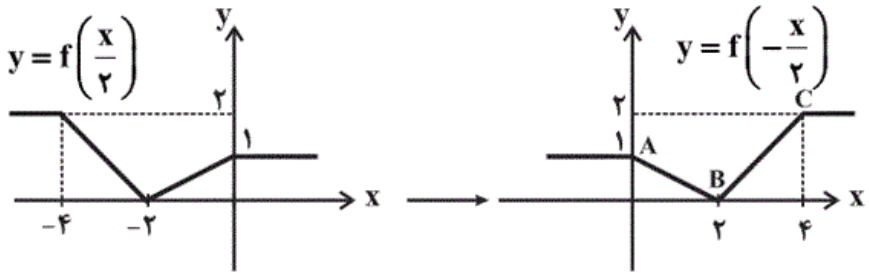
$$\Rightarrow y=\begin{cases}|2x-5|-2 & ;x\geq 2\\ x^2-3x & ;x<2\end{cases}$$

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۹-

اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را دو برابر کرده و سپس آن را نسبت به محور yها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = f\left(-\frac{x}{۲}\right)$ حاصل می‌شود.



$$AB = \sqrt{۲^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۵}$$

$$BC = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow AB + BC = ۲\sqrt{۲} + \sqrt{۵}$$

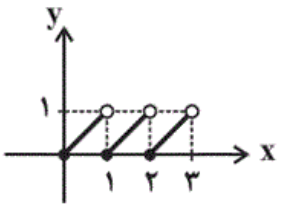
(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

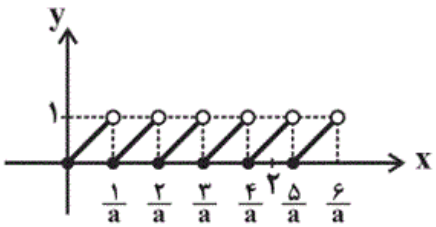
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۰ (کاظم اجلالی)

نمودار تابع $y = x - [x]$ به‌صورت زیر است:



بنابراین برای رسم نمودار تابع f کافی است طول نقاط روی نمودار تابع بالا را بر a تقسیم کنیم.



مطابق شکل فوق پنجمین نقطهٔ مشترک نمودار تابع f و محور xها نقطه‌ای به طول $\frac{۴}{a}$ است و ششمین نقطه، نقطه‌ای به طول $\frac{۵}{a}$ است. بنابراین:

$$\frac{۴}{a} \le ۲ < \frac{۵}{a} \xrightarrow{a>۰} ۴ \le ۲a < ۵ \Rightarrow ۲ \le a < \frac{۵}{۲}$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۱۱ (یاسین سپهر)

ماتریس A را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲(۱) & ۲-۳ & ۳-۳ \\ ۲+۱-۱ & ۲(۲) & ۳-۳ \\ ۳+۱-۱ & ۳+۲-۱ & ۲(۳) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۴ & ۰ \\ ۳ & ۴ & ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow A \text{ مجموع درایه‌های } = ۲۰$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۲- (محمد خندان)

هیچ‌کدام از روابط داده شده در حالت کلی برقرار نیست.

«الف»: به عنوان مثال نقض، اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $AB=AC=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ است ولی $B\neq C$ می‌باشد.

«ب»: رابطه تنها زمانی برقرار است که دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر باشند.

«پ»: به عنوان مثال نقض، اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ باشند، آنگاه $AB=\bar{O}$ است ولی $A\neq\bar{O}$ و $B\neq\bar{O}$ می‌باشد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

✓۱ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۳-

دو ماتریس هم‌مرتبه با هم برابرند هرگاه درایه‌های نظیر به نظیر برابر داشته باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x+2y=-2 \\ 2x+3y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$y-1=t+1 \xrightarrow{y=-3} t+1=-4 \Rightarrow t=-5$$

$$-t+1=z \xrightarrow{t=-5} z=6$$

با توجه به مقادیر به‌دست آمده داریم:

$$x+y+z+t=2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحهٔ ۱۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}-\tan x & \frac{۱}{\cos x}\\ \frac{-۱}{\cos x} & \tan x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\tan x & \frac{۱}{\cos x}\\ \frac{-۱}{\cos x} & \tan x\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\tan^{۲}x-\frac{۱}{\cos^{۲}x} & -\frac{\tan x}{\cos x}+\frac{\tan x}{\cos x}\\ \frac{\tan x}{\cos x}-\frac{\tan x}{\cos x} & -\frac{۱}{\cos^{۲}x}+\tan^{۲}x\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\tan^{۲}x-\left(۱+\tan^{۲}x\right) & ۰\\ ۰ & -\left(۱+\tan^{۲}x\right)+\tan^{۲}x\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=-I$$

بنابراین برای ماتریس‌های $A^{۱۰}$، $A^{۷}$ و $A^{۵}$ داریم:

$$A^{۱۰}=\left(A^{۲}\right)^{۵}=(-I)^{۵}=-I$$

$$A^{۷}=A^{۶}\times A=\left(A^{۲}\right)^{۳}\times A=(-I)^{۳}\times A=-IA=-A$$

$$A^{۵}=A^{۴}\times A=\left(A^{۲}\right)^{۲}\times A=(-I)^{۲}\times A=IA=A$$

$$A^{۱۰}+A^{۷}+A^{۵}=-I-A+A=-I$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} a & ۱ \\ -۱ & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & ۱ \\ -۱ & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^{۲}-۱ & ۲a \\ -۲a & a^{۲}-۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix} a^{۲}-۱ & ۲a \\ -۲a & a^{۲}-۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & ۱ \\ -۱ & a \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^{۳}-۳a & ۳a^{۲}-۱ \\ -۳a^{۲}+۱ & a^{۳}-۳a \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۳}$ برابر صفر است، بنابراین داریم:

$$\left(a^{۳}-۳a\right)+\left(۳a^{۲}-۱\right)+\left(-۳a^{۲}+۱\right)+\left(a^{۳}-۳a\right)=۰$$

$$\Rightarrow ۲\left(a^{۳}-۳a\right)=۰\Rightarrow ۲a\left(a^{۲}-۳\right)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۰ \text{ غ.ق.ق} \\ a^{۲}-۳=۰\Rightarrow a^{۲}=۳\Rightarrow a=\pm\sqrt{۳} \end{cases}$$

بنابراین حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای a برابر است با:

$$\sqrt{۳}\times\left(-\sqrt{۳}\right)=-۳$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\ 1 & -x & -1\\ -1 & 1 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -1\\ x\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x-3 & 2x+3 & x+3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -1\\ x\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow x(x-3)-(2x+3)+x(x+3)=0$$

$$\Rightarrow x^2-3x-2x-3+x^2+3x=0$$

$$\Rightarrow 2x^2-2x-3=0$$

اگر α و β ریشه‌های این معادله باشند، آنگاه داریم:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=1 \quad و \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=\frac{1-2\left(-\frac{3}{2}\right)}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{\frac{9}{4}}=\frac{16}{9}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

چون ماتریس A، ماتریسی قطری است، پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن برابر صفر هستند. داریم:

$$۲b+۱=۰\Rightarrow ۲b=-۱\Rightarrow b=-\frac{۱}{۲}$$

$$a-۲b=۰\Rightarrow a+۱=۰\Rightarrow a=-۱$$

با جای‌گذاری مقادیر a و b در ماتریس A داریم:

$$A=\begin{bmatrix} c-۱ & ۰ \\ ۰ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix} (c-۱)^{۲} & ۰ \\ ۰ & \left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲} \end{bmatrix}$$

ماتریس $A^{۲}$، ماتریسی اسکالر است، پس درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر یکدیگرند:

$$(c-۱)^{۲}=\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\Rightarrow\begin{cases} c-۱=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow c=\frac{۱}{۲} \\ c-۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow c=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$\max(a+b+c)=-۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=۰$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۲ و ۲۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۸- (محمد هجری)

$$\begin{bmatrix} x & ۱ \\ y & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^۲+y & xy+x \\ xy+y & y^۲+x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۸ & ۱۲ \\ ۱۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$\left(x^۲+y\right)-\left(y^۲+x\right)=\left(x^۲-y^۲\right)-\left(x-y\right)$$

$$=\left(x-y\right)\left(x+y-۱\right)=۱۸-۸=۱۰ \qquad (۱)$$

$$\left(xy+x\right)-\left(xy+y\right)=x-y=۱۲-۱۰=۲ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۲\left(x+y-۱\right)=۱۰$$

$$\Rightarrow x+y-۱=۵\Rightarrow x+y=۶$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۹- (جواد حاتمی)

$$A^۲=A\xrightarrow{\times A}A^۳=A^۲\xrightarrow{A^۲=A}A^۳=A$$

از طرفی دو ماتریس A و I تعویض‌پذیرند، بنابراین اتحادهای جبری بـرای آنها برقرار است. در نتیجه داریم:

$$B=۳A-I\Rightarrow B^۳=\left(۳A-I\right)^۳=۲۷A^۳-۲۷A^۲I+۹AI^۲-I^۳$$

$$\Rightarrow B^۳=۲۷A^۳-۲۷A^۲+۹A-I=۲۷A-۲۷A+۹A-I$$

$$\Rightarrow B^۳=۹A-I$$

$$A^۳+B^۳-\left(A^۲-I\right)=A+\left(۹A-I\right)-\left(A-I\right)=۹A$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۰- (امیرحسین ابومحبوب)

دو ماتریس A و B تعویض‌پذیرند، بنابراین داریم:

$$AB = BA = \begin{bmatrix} ۱ & x \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ y & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ y & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲+xy & -۱+۲x \\ -۲+y & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x-۱ \\ y-۲ & xy+۲ \end{bmatrix} \Rightarrow xy+۲=۳$$

$$\Rightarrow xy = ۱ \qquad (۱)$$

از طرفی مجموع درایه‌های دو ماتریس A و B برابر یکدیگر است، در نتیجه داریم:

$$x+۱ = y+۳ \Rightarrow y = x-۲ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow x(x-۲)=۱ \Rightarrow x^۲-۲x=۱ \xrightarrow{+۱} (x-۱)^۲ = ۲$$

$$\Rightarrow x-۱ = \pm\sqrt{۲}$$

$$x+y = x+(x-۲) = ۲x-۲ = ۲(x-۱)$$

$$\xrightarrow{x+y>۰} x+y = ۲\sqrt{۲}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۱- (طاهر دادستانی)

عضو ۲ از مجموعهٔ اول به دو عضو a و -۱ مرتبط شده است. برای تابع بودن لازم است که $a=-۱$ باشد. در این صورت عضو -۱ نیز به دو عضو ۲ و $b+۱$ مرتبط خواهد شد. بنابراین باید $b=۱$ باشد.

$$\Rightarrow a+b=۰$$

(ریاضی ۱- تابع، صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۲- (سیدعادل حسینی)

تابع f شامل ۳ زوج مرتب است و مجموعهٔ دامنهٔ آن نیز سه عضوی است.

بنابراین باید یکی از دو حالت زیر برقرار باشد:

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}2a-b=2\\ a+4b=5\end{array}\right.\\ \text{یا}\\ \left\{\begin{array}{l}2a-b=5\\ a+4b=2\end{array}\right.\end{array}\right\}\Rightarrow 3a+3b=7$$

(ریاضی ۱- تابع، صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۳- (سعید علم‌پور)

$$f\big(f(a+1)\big)=5\Rightarrow\begin{cases}f(a+1)=4\Rightarrow a+1=3\Rightarrow a=2\\ \text{یا}\\ f(a+1)=-2\Rightarrow a+1=-5\Rightarrow a=-6\end{cases}$$

$$\Rightarrow a \text{ حاصل‌ضرب مقادیر} = (2)(-6)=-12$$

(ریاضی ۱- تابع، صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۴- (حمید علیزاده)

با توجه به اینکه تابع $y = x$ همانی است، خواهیم داشت:

$$۴a + b = ۴a^۲ + b + ۱ \Rightarrow ۴a^۲ - ۴a + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (۲a - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

$$۴a + b^۲ = ۲b + ۱ \xrightarrow{a=\frac{۱}{۲}} ۲ + b^۲ = ۲b + ۱ \Rightarrow b^۲ - ۲b + ۱ = ۰$$

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۵- (محمد پیمانی)

$$R_f = [-۲, ۷]$$

$$\Rightarrow -۲ \le y = f(x) \le ۷ \Rightarrow -۲ \le ۵x - ۳ \le ۷$$

$$\Rightarrow ۱ \le ۵x \le ۱۰ \Rightarrow \frac{۱}{۵} \le x \le ۲$$

$$\Rightarrow D_f = \left[\frac{۱}{۵}, ۲\right]$$

این بازه شامل دو عدد صحیح ۱ و ۲ است.

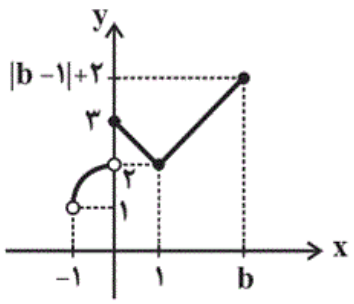
(ریاضی ۱- تابع، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۳)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس از روی شکل، برد آن را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-x^{۲}+۲ & ;-۱<x<۰\\ |x-۱|+۲ & ;۰\le x\le b\end{cases}$$



با توجه به نمودار داریم:

$$R_f=(۱,|b-۱|+۲]=(a,۴]\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ |b-۱|+۲=۴\Rightarrow|b-۱|=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b-۱=۲\Rightarrow b=۳\\ b-۱=-۲\Rightarrow b=-۱\ \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a-b=۱-۳=-۲$$

(ریاضی ۱- تابع، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۷-

f یک تابع سه‌ضابطه‌ای است که هر سه ضابطهٔ آن خطی هستند. ضابطهٔ هر کدام را می‌نویسیم:

$$\text{ضابطهٔ اول}: A(-۲,۳), B(-۳,۰) \Rightarrow m = \frac{۳-۰}{-۲+۳} = ۳$$

$$y - ۰ = ۳(x+۳) \Rightarrow y = ۳x + ۹$$

$$\text{ضابطهٔ دوم} \xrightarrow{\text{تابع ثابت}} y = ۳$$

$$\text{ضابطهٔ سوم}: C(۱,۳), D(۵,۰) \Rightarrow m = \frac{۳-۰}{۱-۵} = -\frac{۳}{۴}$$

$$y - ۰ = -\frac{۳}{۴}(x-۵) \Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۱۵}{۴}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} ۳x+۹ & ;x < -۲ \\ ۳ & ;-۲ \le x \le ۱ \\ -\frac{۳}{۴}x + \frac{۱۵}{۴} & ;x > ۱ \end{cases}$$

حال مقدار $f(۱۱)$ و $f\left(-\frac{۸}{۳}\right)$ را حساب می‌کنیم:

$$۱۱ > ۱ \Rightarrow f(۱۱) = -\frac{۳}{۴}(۱۱) + \frac{۱۵}{۴} = -\frac{۹}{۲}$$

$$-\frac{۸}{۳} < -۲ \Rightarrow f\left(-\frac{۸}{۳}\right) = ۳\left(-\frac{۸}{۳}\right) + ۹ = ۱$$

$$\Rightarrow f(۱۱) + f\left(-\frac{۸}{۳}\right) = -\frac{۹}{۲} + ۱ = -\frac{۷}{۲} = -۳/۵$$

(ریاضی ۱- تابع، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۰۸

با توجه به شکل، $-b$ برابر با -۱ است و در نتیجه $b=۱$ است.

ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=|x+a|-۱$ در آمـده اسـت. نقطـهٔ $(۵,۰)$ را در ضابطه قرار می‌دهیم:

$$f(۵)=|۵+a|-۱=۰\Rightarrow |۵+a|=۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۵+a=۱\Rightarrow a=-۴ \\ ۵+a=-۱\Rightarrow a=-۶ \text{ غ.ق.ق (با توجه به شکل)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=|x-۴|-۱$$

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۰۹

اگر فرض کنیم $f(x)=ax+b$ باشد، داریم:

$$f(۱)=a+b=۲\Rightarrow b=۲-a$$

$$f(-۱)=-a+b\Rightarrow f\big(f(-۱)\big)=f(-a+b)=a(-a+b)+b$$

$$=-a^{۲}+ab+b=-۸$$

$$\Rightarrow -a^{۲}+a(۲-a)+۲-a=-۸\Rightarrow -a^{۲}+۲a-a^{۲}+۲-a=-۸$$

$$\Rightarrow ۲a^{۲}-a-۱۰=۰\Rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ a=\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

چون شیب نمودار f منفی است، $a=\frac{۵}{۲}$ قابل قبول نیست. بنابراین داریم:

$$a=-۲\Rightarrow b=۴\Rightarrow f(x)=-۲x+۴\Rightarrow f(۲)=۰$$

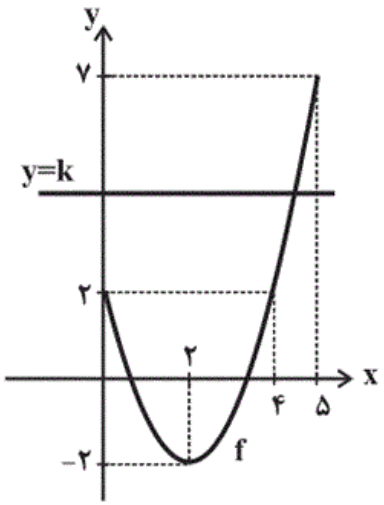
(ریاضی ۱- تابع، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۱۰ (کاظم اجلالی)

نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



اگر خط $y=k$ و نمودار تابع f در یک نقطه مشترک باشند، k می‌تواند مقادیر ۲-، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ را داشته باشد.

(ریاضی ۱- تابع، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۹۱ (سؤال ۸ کتاب آبی حسابان ۲)

برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$، کافی است ابتدا نمودار تابع $g(x)=-1+\sqrt{x+1}$ را ۳ واحد به راست انتقال دهیم تا نمودار تابع $y_1=-1+\sqrt{x-2}$ حاصل شود، سپس نمودار تابع y_1 را یک واحد به بالا انتقال دهیم تا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ به دست آید.

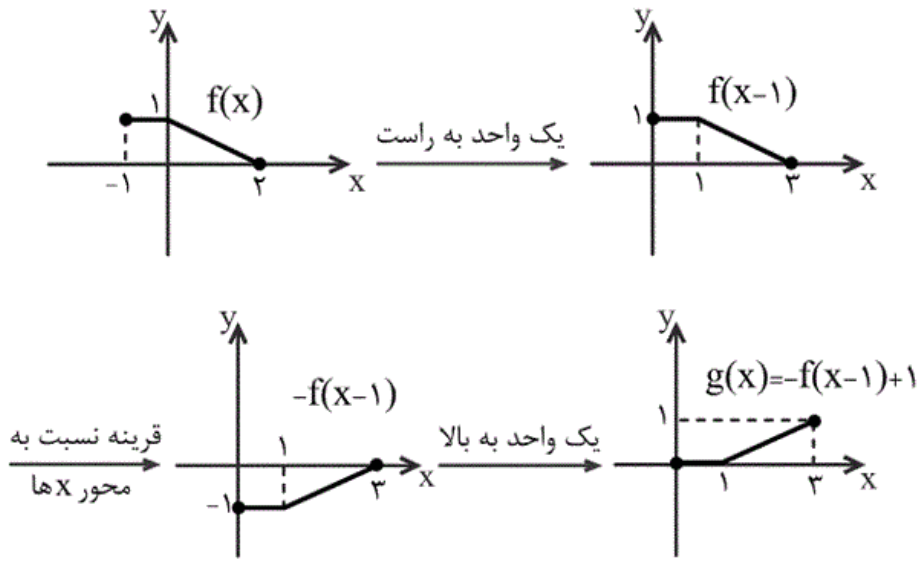
(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۲- (سؤال ۲۴ کتاب آبی حسابان ۲)

برای تشکیل تابع g به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

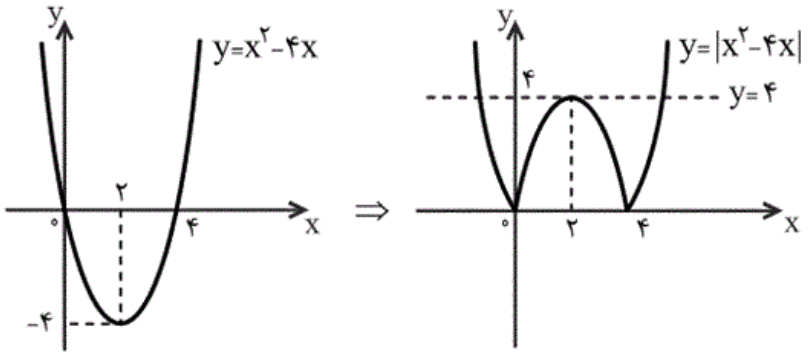


(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۳- (سؤال ۳۴ کتاب آبی حسابان ۲)

ابتدا نمودار تابع $y = x^2 - 4x$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های منفی نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



بنابراین $k = 4$ می‌باشد.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۴- (سؤال ۴۲ کتاب آبی حسابان ۲)

برای تبدیل هر نقطه روی نمودار $f(x)$ به نقطهٔ متناظر آن روی نمودار $-۲f(x+۱)+۱$، به طول نقطهٔ (-۱) واحد اضافه می‌شود، عرض آن ۲- برابر شده و سپس یک واحد به آن اضافه می‌شود.

$$A(x_۰, y_۰) \xrightarrow{-۲f(x+۱)+۱} A'(x_۰ - ۱, -۲y_۰ + ۱)$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۵- (سؤال ۴۴ کتاب آبی حسابان ۲)

انتقال افقی روی برد تابع تأثیر ندارد اما انتقال‌های عمودی و انبساط (یا انقباض) عمودی برد تابع را تغییر می‌دهند و دقیقاً همان تغییرات روی برد اعمال می‌شود.

$$R_f = [-\sqrt{۵}, ۱] \Rightarrow -\sqrt{۵} \le f(x) \le ۱$$

$$\xrightarrow[\text{برد تغییر نمی‌کند.}]{\text{در انتقال افقی}} -\sqrt{۵} \le f(x+۱) \le ۱$$

$$\xrightarrow{\times(-\sqrt{۲})} -\sqrt{۲} \le -\sqrt{۲}f(x+۱) \le \sqrt{۱۰}$$

$$\xrightarrow{-۳} -\sqrt{۲} - ۳ \le -\sqrt{۲}f(x+۱) - ۳ \le \sqrt{۱۰} - ۳$$

$$\Rightarrow -\sqrt{۲} - ۳ \le g(x) \le \sqrt{۱۰} - ۳$$

$$\Rightarrow R_g = [-\sqrt{۲} - ۳, \sqrt{۱۰} - ۳]$$

از آنجا که $-۵ < -\sqrt{۲} - ۳ \le g(x) \le \sqrt{۱۰} - ۳ < ۱$ است، برد تابع g شامل پنج عدد صحیح ۴-، ۳-، ۲-، ۱- و صفر است.

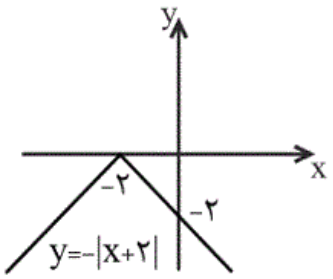
(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

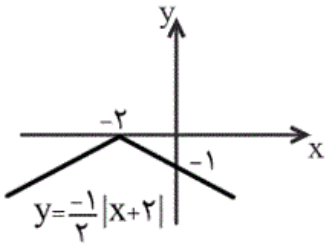
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۶- (سؤال ۴۹ کتاب آبی حسابان ۲)

نمودار تابع $y=1-\frac{1}{2}|x+2|$ را به کمک نمودار تابع $y=|x|$ رسم می‌کنیم.



عرض هر نقطه $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود.



۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

با توجه به نمودار، دامنهٔ تابع f، بازهٔ $[-۴ , ۶]$ است، دامنهٔ توابع $f(-x)$ و $f(۲x-۴)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$-۴ \le -x \le ۶ \xrightarrow{\times(-۱)} -۶ \le x \le ۴$$

$$\Rightarrow D_{f(-x)} = [-۶ , ۴]$$

$$-۴ \le ۲x-۴ \le ۶ \xrightarrow{+۴} ۰ \le ۲x \le ۱۰ \xrightarrow{\div ۲} ۰ \le x \le ۵$$

$$\Rightarrow D_{f(۲x-۴)} = [۰ , ۵]$$

بنابراین دامنهٔ تابع $g(x) = f(-x) + f(۲x-۴)$ برابر است با:

$$D_g = D_{f(-x)} \cap D_{f(۲x-۴)} = [-۶ , ۴] \cap [۰ , ۵] = [۰ , ۴]$$

پس دامنهٔ تابع g شامل ۵ عدد صحیح است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۸- (سؤال ۶۳ کتاب آبی حسابان ۲)

برای یافتن جواب‌های معادلهٔ $f(2x)=0$، کافی است جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را بر ۲ تقسیم کنیم. محل تلاقی نمودار f با محور x ها، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ است، بنابراین ۲، -1 و -3 جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ و در نتیجه $\frac{2}{2}=1$، $\frac{-1}{2}$ و $\frac{-3}{2}$ جواب‌های معادلهٔ $f(2x)=0$ هستند، بنابراین:

مجموع جواب‌های معادلهٔ $f(2x)=0$: $1+(\frac{-1}{2})+(\frac{-3}{2})=-1$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۹- (سؤال ۷۰ کتاب آبی حسابان ۲)

برای آن‌که نمودار با ضریب ۲ در راستای محور xها منبسط شود، باید در ضابطهٔ تابع، x را بر ۲ تقسیم کنیم و برای آن که نمودار تابع ۳ واحد به سمت بالا منتقل شود، باید ضابطه را با ۳ جمع کنیم. برای یافتن محل تقاطع دو نمودار جدید و اولیه باید ضابطه‌های توابع جدید و اولیه را با هم برابر قرار دهیم.

$$f(\frac{x}{۲})+۳=f(x)\Rightarrow(\frac{x}{۲})^۲-۱+۳=x^۲-۱$$
$$\Rightarrow\frac{x^۲}{۴}+۳=x^۲\Rightarrow\frac{۳}{۴}x^۲=۳\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm۲$$

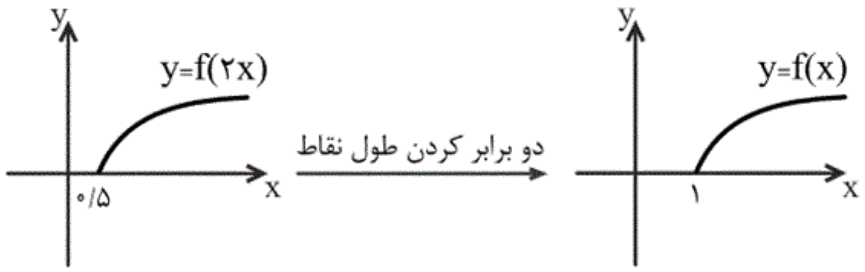
(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۰۰

از آنجا که $f(\frac{۲x}{۲}) = f(x)$ است، با دو برابر کردن طول نقاط تابع $y = f(۲x)$، نمودار تابع $f(x)$ حاصل می‌شود. بنابراین:



بنابراین دامنهٔ تابع $f(x)$ بازهٔ $[۱, +\infty)$ است. از طرفی دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{ax+b}$ برابر است با:

$$ax + b \geq ۰ \Rightarrow ax \geq -b$$

$$\xrightarrow{a \text{ مثبت}} x \geq \frac{-b}{a} \Rightarrow D_f = [\frac{-b}{a}, +\infty)$$

بنابراین $\frac{-b}{a} = ۱$ و در نتیجه $a = -b$ است. توجه کنید چون a مثبت است،

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ | ۲✓ | ۳ | ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا