سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)
https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)
https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ریاضیات گسسته دوازدهم ، آشنایی با نظریه‌ی اعداد -

۱۵۷- چند عدد چهاررقمی وجود دارد به طوری که هر یک از آنها در تقسیم بر عدد ۱۵، باقی‌ماندهٔ ۸ و در تقسیم بر عدد ۱۸، باقی‌ماندهٔ ۱۱ داشته باشند؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۹۹ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۱۱

۱۵۸- به ازای چند مقدار دو رقمی و طبیعی n، دو عدد $4n+1$ و $3n-2$ نسبت به هم اول‌اند؟

۱) ۱۱ ۲) ۸ ۳) ۸۲ ۴) ۷۹

ریاضیات گسسته دوازدهم ، همنهشتی -

۱۵۹- شخصی در یک مسابقهٔ علمی شرکت کرده است و با پاسخ دادن به سؤالات ۷ و ۱۲ امتیازی، مجموعاً ۱۷۵ امتیاز کسب نموده است. اگر پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل داشته باشد و یا فاقد امتیاز باشد، این شخص به چند طریق توانسته این امتیاز را به‌دست آورد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶۰- از رابطهٔ هم‌نهشتی $۲۶۴b \overset{۲۸}{\equiv} ۹۶a$، کدام نتیجه‌گیری زیر نادرست است؟

۱) $۵۰a \overset{۷}{\equiv} ۲۹b$ ۲) $۲۶a \overset{۱۴}{\equiv} ۱۲b$ ۳) $a-b \overset{۷}{\equiv} ۰$ ۴) $۱۲a \overset{۱۴}{\equiv} ۳۳b$

۱۵۱- به ازای چند مقدار طبیعی a، معادلهٔ سیالهٔ $(3a+2)x+(2a-3)y=39$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب است؟

۱) هیچ ۲) بی‌شمار ۳) ۱ ۴) ۲

۱۵۲- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم دو عدد $9a-7$ و $2a-3$ بر ۱۱ یکسان باشد، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $4a-5$ بر ۲۲ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۵۳- کمترین مقدار طبیعی a چقدر باشد تا باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $3^{11}+16a-1$ بر ۱۳، برابر ۳ باشد؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۱۵۴- اگر روز ۹ تیر سال ۱۴۲۶ هجری شمسی، سه شنبه بوده و این سال، سال کبیسه نباشد، ۱۶ اردیبهشت سال ۱۴۲۷، چه روزی از هفته خواهد بود؟

۱) چهارشنبه ۲) پنج‌شنبه ۳) جمعه ۴) شنبه

۱۵۵- چند نقطه با مختصات طبیعی بر روی خط $۵۷x+۲۱y=۱۱۲۵$ وجود دارد؟

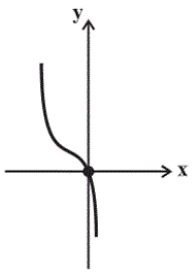
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۵۶- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۵^{۴۰}-۸^{۴۰}$ بر ۱۵ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

حسابان دوازدهم ، تابع

۹۱- نمودار تابع $y=x^{۳}$ را ابتدا ۱ واحد به چپ می‌بریم. سپس نسبت به محور xها قرینه کرده و بعد در راستای عمودی منبسط می‌کنیم. در نهایت آن را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا به نمودار زیر برسیم. این نمودار خط $y=۴$ را با کدام طول قطع می‌کند؟



۱) $-۱/۵$ ۲) -۲

۳) $-۲/۵$ ۴) -۳

۹۲- نمودار تابع $y=f(x)$ از نقطهٔ $A(a,۳a)$ و نمودار تابع $y=-\frac{۱}{۳}f\left(۱+\frac{x}{۲}\right)+۱$ از نقطهٔ متناظر A یعنی A' عبور می‌کند.

اگر اندازهٔ پاره‌خط AA' برابر $\sqrt{۱۰}$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۱۲}{۱۷}$ ۴) $\frac{۵}{۱۷}$

۹۳- تابع $f(x)=|x-۱|-|x-۵|$ مفروض است. تابع $g=-f^{۲}$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر اکیداً نزولی است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $\left[۲,\frac{۵}{۲}\right]$

۳) $\left[۴,\frac{۹}{۲}\right]$ ۴) $\left[\frac{۷}{۲},\frac{۱۱}{۲}\right]$

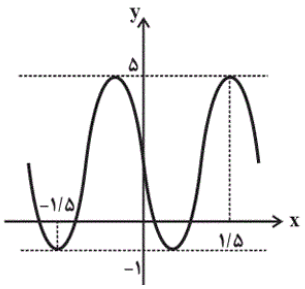
۹۴- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $p(x)$ بر $x^{۲}+۳x+۲$، $۲x+۱$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $p(x-۱)-p(x-۲)$ بر x کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حسابان دوازدهم ، مثلثات -

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۹۵- اگر نمودار زیر بخشی از نمودار تابع $f(x)=a+b\sin(cx)\cos(cx)$ باشد، حاصل $\frac{ac}{b}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۲\pi}{۳}$
۲) $\frac{۲\pi}{۳}$
۳) $\frac{\pi}{۶}$
۴) $-\frac{\pi}{۶}$

۹۶- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\frac{\sin x\cos x}{\sin\left(۲x+\frac{\pi}{۴}\right)-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos ۲x}$ کدام است؟

۱) ۲π
۲) $\frac{\pi}{۳}$
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) $\frac{\pi}{۴}$

۹۷- اگر کسینوس یک زاویه، نصف تانژانت آن زاویه باشد، مقدار سینوس آن زاویه کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۵}-۱}{۴}$
۲) $\frac{\sqrt{۱۷}-۱}{۴}$
۳) $\frac{۱-\sqrt{۱۷}}{۶}$
۴) $\frac{۱-\sqrt{۱۵}}{۶}$

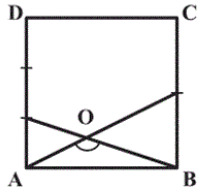
۹۸- اگر $f(x)=\frac{۲\cos x-|\cos x|}{۳}$ باشد، تعداد جواب‌های معادلهٔ $۹(f(x))^۲-۱=۰$ در بازهٔ $\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

۹۹- تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\frac{۱-\cos x}{\sin x}=\tan ۲x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۱۰۰- در مربع شکل زیر با طول ضلع واحد، اندازهٔ $\hat{O}$ کدام است؟ (AD به سه قسمت مساوی و BC به دو قسمت مساوی تقسیم شده است.)



۱) $\frac{۲\pi}{۳}$
۲) $\frac{۳\pi}{۴}$
۳) $\frac{\pi}{۴}$
۴) $\frac{\pi}{۳}$

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۳۱- اگر $2A+B=I$ و $A-B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۱-

۱۳۲- اگر $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $|AB|-|BA|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۵- ۴) ۱۰-

۱۳۳- اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\left|\frac{1}{8}A\right|\left|4A^3\right|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۳۴- اگر برای ماتریس A، رابطهٔ $A^2=A+I$ برقرار باشد، آنگاه ماتریس A^4+I با کدام یک از ماتریس‌های زیر برابر است؟

۱) $3A+2I$ ۲) $2A+I$

۳) $A+3I$ ۴) $3A^2$

۱۳۵- اگر $A=\begin{bmatrix}0 & -\tan 60^\circ\\ \tan 30^\circ & 0\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{bmatrix}\sin 60^\circ & 0\\ \cos 60^\circ & 0\end{bmatrix}\times A^{10}\times\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & 0\\ \sin 60^\circ & 0\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{4} & 0\\ -\frac{1}{4} & 0\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{4} & 0\\ -\frac{3}{4} & 0\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4} & 0\\ \frac{1}{4} & 0\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-\frac{3\sqrt{3}}{4} & 0\\ \frac{3}{4} & 0\end{bmatrix}$

۱۳۶- اگر $(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $5A^2$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) ۱۶ ۴) $\frac{16}{5}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۷- اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A=\begin{bmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$، چهار برابر مجموع درایه‌های ماتریس وارون آن باشد، مجموع مقادیر ممکن بـرای x کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۱۳۸- مجموعهٔ نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ یکسان از دو خط تعریف شده با معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ قرار دارنـد، بـر روی کدام خط زیر واقع‌اند؟

۱) $-9x+12y=\frac{3}{2}$ ۲) $-3x-4y=-\frac{1}{2}$

۳) $6x-8y=1$ ۴) $3x-4y=\frac{5}{2}$

۱۳۹- دترمینان کدام‌یک از ماتریس‌های زیر با افزودن هر عدد حقیقی دلخواه غیرصفر به تمام درایه‌های آن، همواره ثابت است؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

۱۴۰- در یک دستگاه معادلات خطی، $A=\begin{bmatrix} |A|+1 & |A|-2 \\ 2|A|-1 & |A|-1 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه و $B=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ مـاتریس مقـادیر معلـوم آن است. اگر درایه‌های ماتریس A همگی مثبت باشند، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس مجهولات کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳

۳) ۹ ۴) -۹

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۵۷- (آزیتا صبوری)

$$\left.\begin{array}{l} a=15q+8 \xrightarrow{\times 6} 6a=90q+48 \\ a=18q'+11 \xrightarrow{\times 5} 5a=90q'+55 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a=90\underbrace{(q-q')}_{k}-7$$

$$\Rightarrow a=90k-7 \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$1000\le a<10000 \Rightarrow 1000\le 90k-7<10000$$

$$\Rightarrow 1007\le 90k<10007 \Rightarrow 12\le k\le 111$$

تعداد اعداد چهاررقمی موردنظر $=(111-12)+1=100$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۵۸- (سروش موئینی)

$$\left.\begin{array}{l} d\mid 3n-2 \xrightarrow{\times 4} d\mid 12n-8 \\ d\mid 4n+1 \xrightarrow{\times 3} d\mid 12n+3 \end{array}\right\} \Rightarrow d\mid 11 \Rightarrow d=1 \text{یا} 11$$

کافی است تعداد حالت‌هایی را به‌دست آوریم که $d=11$ باشد:

$$d=11 \Rightarrow 11\mid 3n-2 \Rightarrow 3n-2\overset{11}{\equiv}0 \Rightarrow 3n\overset{11}{\equiv}2\overset{11}{\equiv}-9$$

$$\xrightarrow[(3,11)=1]{\div 3} n\overset{11}{\equiv}-3 \Rightarrow n=11k-3 (k\in Z)$$

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

(محمد هجری)

اگر تعداد سؤالات ۷ امتیازی را با x و تعداد سؤالات ۱۲ امتیازی را با y نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$7x+12y=175 \Rightarrow 7x \overset{12}{\equiv} 175 \xrightarrow[(7,12)=1]{\div 7} x \overset{12}{\equiv} 25 \overset{12}{\equiv} 25-2\times 12 \overset{12}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow x=12k+1 \qquad (x\in \mathbb{Z})$$

$$7(12k+1)+12y=175 \Rightarrow 12y=-84k+168$$

$$\xrightarrow{\div 12} y=-7k+14$$

تعداد سؤالات پاسخ داده شده عددی حسابی است، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \Rightarrow 12k+1\geq 0 \Rightarrow k\geq -\frac{1}{12} \\ y\geq 0 \Rightarrow -7k+14\geq 0 \Rightarrow k\leq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0\leq k\leq 2$$

بنابراین امتیاز ۱۷۵ به ۳ طریق قابل دست‌یابی بوده است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۶۰

گزینهٔ «۳»:

$$۹۶a \overset{۲۸}{\equiv} ۲۶۴b \xrightarrow{۷\mid ۲۸} ۹۶a \overset{۷}{\equiv} ۲۶۴b \Rightarrow ۹۶a - ۱۳\times ۷a \overset{۷}{\equiv} ۲۶۴b - ۳۷\times ۷b$$

$$\Rightarrow ۵a \overset{۷}{\equiv} ۵b \xrightarrow[(۵,۷)=۱]{\div ۵} a \overset{۷}{\equiv} b \Rightarrow a - b \overset{۷}{\equiv} ۰$$

گزینهٔ «۱»:

$$a \overset{۷}{\equiv} b \Rightarrow a + ۷\times ۷a \overset{۷}{\equiv} b + ۴\times ۷b \Rightarrow ۵۰a \overset{۷}{\equiv} ۲۹b$$

گزینهٔ «۲»:

$$۹۶a \overset{۲۸}{\equiv} ۲۶۴b \xrightarrow{۱۴\mid ۲۸} ۹۶a \overset{۱۴}{\equiv} ۲۶۴b$$

$$\Rightarrow ۹۶a - ۵\times ۱۴a \overset{۱۴}{\equiv} ۲۶۴b - ۱۸\times ۱۴b \Rightarrow ۲۶a \overset{۱۴}{\equiv} ۱۲b$$

اما رابطهٔ گزینهٔ «۴» در حالت کلی درست نیست.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$(3a+2)x+(2a-3)y=39$$

$$\xrightarrow{\text{شرط وجود جواب در } Z}(3a+2,2a-3)\mid 39$$

$$\text{فرض}: (3a+2,2a-3)=d \Rightarrow \begin{cases} d\mid 3a+2 \xrightarrow{\times 2} d\mid 6a+4 \\ d\mid 2a-3 \xrightarrow{\times(-3)} d\mid -6a+9 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع}} d\mid 13 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 13$$

چون $39\mid 13$ و $39\mid 1$، پس با توجه به شرط وجود جواب در Z، ایـن معادلـه در Z همواره دارای جواب است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۴ و ۲۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵۲- (محمد هجری)

مطابق فرض سؤال داریم:

$$9a-7\overset{11}{\equiv}2a-3$$

$$\Rightarrow 7a\overset{11}{\equiv}4\overset{11}{\equiv}-7$$

$$\xrightarrow[(7,11)=1]{\div 7} a\overset{11}{\equiv}-1\overset{11}{\equiv}10$$

$$\Rightarrow a=11k+10\Rightarrow 4a-5=44k+35\Rightarrow 4a-5\overset{44}{\equiv}35$$

$$\xrightarrow{22|44} 4a-5\overset{22}{\equiv}35\overset{22}{\equiv}13$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۵۳- (احمدرضا فلاح)

$$3^3\overset{13}{\equiv}27\overset{13}{\equiv}1\xrightarrow{\text{به توان }3}3^9\overset{13}{\equiv}1\xrightarrow{\times 3^2}3^{11}\overset{13}{\equiv}9$$

$$3^{11}+16a-1\overset{13}{\equiv}9+16a-1\overset{13}{\equiv}16a+8\Rightarrow 16a+8\overset{13}{\equiv}3$$

$$\Rightarrow 3a\overset{13}{\equiv}-5\overset{13}{\equiv}-5+2\times 13\Rightarrow 3a\overset{13}{\equiv}21\xrightarrow[(3,13)=1]{\div 3} a\overset{13}{\equiv}7$$

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

می‌دانیم هر سال غیرکبیسه ۳۶۵ روز است. از طرفی $۳۶۵ = ۵۲ \times ۷ + ۱ \overset{۷}{\equiv} ۱$،

پس ۹ تیر سال ۱۴۲۷ یک روز بعد از سه‌شنبه، یعنی چهارشنبه خواهد بود.

حال فاصلهٔ ۱۶ اردیبهشت و ۹ تیر را محاسبه می‌کنیم.

$$۱۵ + ۳۱ + ۹ = ۵۵ \Rightarrow ۵۵ = ۷ \times ۷ + ۶ \overset{۷}{\equiv} ۶$$

۱۵: اردیبهشت، ۳۱: خرداد، ۹: تیر

چهارشنبه	سه‌شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه	جمعه	پنج‌شنبه
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

مطابق جدول اگر چهارشنبه (۹ تیر) را معادل ۶ فرض کنیم، آنگاه پنج‌شنبه معادل صفر است. پس روز مبدأ یعنی ۱۶ اردیبهشت، روز پنج‌شنبه است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحهٔ ۲۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۵۵

$$۵۷x+۲۱y=۱۱۲۵ \xrightarrow{\div ۳} ۱۹x+۷y=۳۷۵ \Rightarrow ۱۹x \overset{۷}{\equiv} ۳۷۵$$

$$\Rightarrow -۲x \overset{۷}{\equiv} ۴ \xrightarrow[(-۲,۷)=۱]{\div(-۲)} x \overset{۷}{\equiv} -۲ \Rightarrow x=۷k-۲ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$۱۹(۷k-۲)+۷y=۳۷۵ \Rightarrow ۷y=-۱۳۳k+۴۱۳$$

$$\xrightarrow{\div ۷} y=-۱۹k+۵۹$$

$$\left.\begin{array}{l} x>۰ \Rightarrow ۷k-۲>۰ \Rightarrow k>\frac{۲}{۷} \\ y>۰ \Rightarrow -۱۹k+۵۹>۰ \Rightarrow k<\frac{۵۹}{۱۹} \end{array}\right\} \Rightarrow ۱ \le k \le ۳$$

بنابراین ۳ نقطه با مختصات طبیعی بر روی این خط وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

۱ ✓۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵۶-

طبق تمرین ۷ صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی، برای هر $n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ همواره رابطهٔ $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n$ برقرار است. بنابراین با فرض $n=۴۰$، $a=۳$ و $b=۵$ داریم:

$$(۳+۵)^{۴۰} \overset{۳\times۵}{\equiv} ۵^{۴۰}+۳^{۴۰} \Rightarrow ۸^{۴۰}-۵^{۴۰} \overset{۱۵}{\equiv} ۳^{۴۰}$$

پس کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳^{۴۰}$ بر ۱۵ را به‌دست آوریم:

$$۳^۴ \overset{۱۵}{\equiv} ۸۱ \overset{۱۵}{\equiv} ۶ \xrightarrow{\times ۳} ۳^۵ \overset{۱۵}{\equiv} ۱۸ \overset{۱۵}{\equiv} ۳$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۴}} ۳^{۲۰} \overset{۱۵}{\equiv} ۸۱ \overset{۱۵}{\equiv} ۶$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۳^{۴۰} \overset{۱۵}{\equiv} ۳۶ \overset{۱۵}{\equiv} ۶$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۲۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۱

تغییرات گفته شده را به‌ترتیب روی تابع $y = x^3$ انجام می‌دهیم:

$$y = x^3 \xrightarrow{\text{۱ واحد به چپ}} y = (x+1)^3$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به xها}} y = -(x+1)^3$$

$$\xrightarrow[\text{با ضریب k}]{\text{انبساط عمودی}} y = -k(x+1)^3$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} f(x) = -k(x+1)^3 + 2$$

نمودار تابع f از مبدأ می‌گذرد، پس: $f(0) = -k + 2 = 0 \Rightarrow k = 2$

حال معادلهٔ $f(x) = 4$ را حل می‌کنیم:

$$-2(x+1)^3 + 2 = 4 \Rightarrow (x+1)^3 = -1 \Rightarrow x+1 = -1 \Rightarrow x = -2$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۴)

۱ ✓۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۲- (حمید علیزاده)

$$A(a,3a)\in f \Rightarrow f(a)=3a$$

برای پیدا کردن مختصات نقطهٔ A' داریم:

$$\begin{cases} x_{A'}: 1+\frac{x_{A'}}{2}=a \Rightarrow x_{A'}=2a-2 \\ y_{A'}: y_{A'}=-\frac{1}{3}(3a)+1=-a+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'=(2a-2,-a+1)$$

حال طول پاره‌خط AA' را می‌یابیم:

$$|AA'|=\sqrt{(2a-2-a)^2+(-a+1-3a)^2}$$

$$=\sqrt{(a-2)^2+(4a-1)^2}=\sqrt{17a^2-12a+5}=\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow 17a^2-12a+5=10 \Rightarrow 17a^2-12a-5=0$$

$$\xrightarrow{S=-\frac{b}{a}} a \text{ مجموع مقادیر } = \frac{12}{17}$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

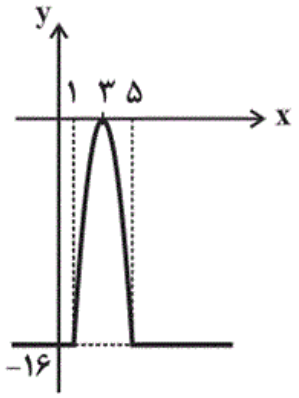
۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۳- (جهانبخش نیکنام)

$$f(x)=\begin{cases}-۴ & ;x\le ۱\\ ۲(x-۳) & ;۱\le x\le ۵\\ ۴ & ;x\ge ۵\end{cases}\Rightarrow f^۲(x)=\begin{cases}۱۶ & ;x\le ۱\\ ۴(x-۳)^۲ & ;۱\le x\le ۵\\ ۱۶ & ;x\ge ۵\end{cases}$$

و با توجه به ضابطهٔ $f^۲$، نمودار $g=-f^۲$ به‌صورت زیر خواهد بود.



با توجه به نمودار، تابع g در بازهٔ $[۳,۵]$ اکیداً نزولی است که بازهٔ $\left[۴,\frac{۹}{۲}\right]$ زیر بازه‌ای از آن است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۴- (سیدعادل حسینی)

$$p(x)=(x+۱)(x+۲)q(x)+۲x+۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}p(x-۱)=x(x+۱)q(x-۱)+۲x-۱\\ p(x-۲)=x(x-۱)q(x-۲)+۲x-۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow p(x-۱)-p(x-۲)$$

$$=x\left[(x+۱)q(x-۱)-(x-۱)q(x-۲)\right]+۲$$

در نتیجه باقی‌ماندهٔ تقسیم مورد نظر، برابر ۲ است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

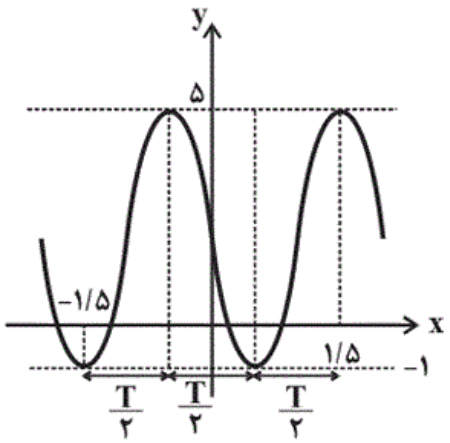
۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۵-

با استفاده از اتحاد $\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$ داریم:

$$f(x) = a + \frac{b}{۲}\sin(۲cx)$$



با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} ۱/۵T = ۳ \Rightarrow T = ۲ \\ T = \frac{۲\pi}{|۲c|} \end{cases} \Rightarrow |c| = \frac{\pi}{۲}$$

از طرفی، مقدار a میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع است و داریم:

$$\begin{cases} a = \frac{۵ + (-۱)}{۲} = ۲ \\ y_{max} = a + \frac{|b|}{۲} \xrightarrow{a=۲} ۲ + \frac{|b|}{۲} = ۵ \Rightarrow |b| = ۶ \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

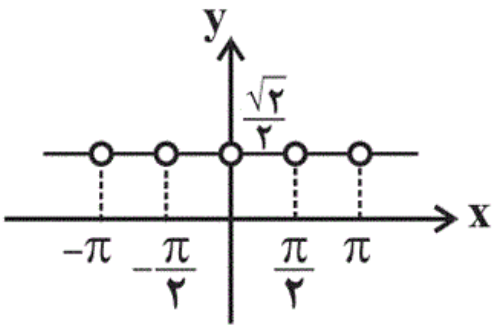
۹۶- (سیروس نصیری)

ابتدا عبارت داده شده را تا جایی که ممکن است ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2x+\cos 2x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sin 2x}{\sin 2x}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad ;x\neq\frac{k\pi}{2}$$

نمودار این تابع به‌صورت زیر است:



ملاحظه می‌شود که نمودار تابع f در هر $\frac{\pi}{2}$ واحد تکرار شده است، پس دورهٔ تناوب این تابع $T=\frac{\pi}{2}$ است.

(حسابان ۲- مثلثات، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۷- (سعید علم‌پور)

زاویهٔ مورد نظر را x در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\cos x=\frac{1}{2}\tan x\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x=\sin x\Rightarrow 2(1-\sin^2 x)=\sin x$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-2=0\xrightarrow{\sin x=t}2t^2+t-2=0$$

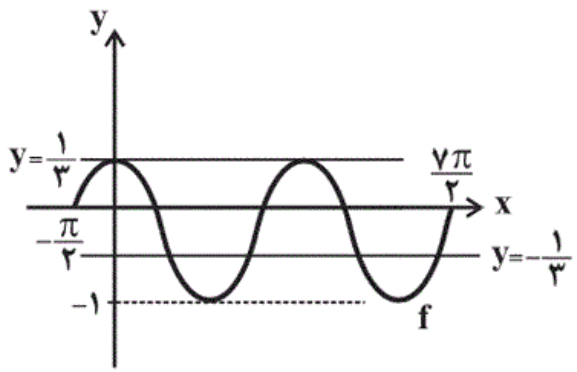
$$\Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{4}\xrightarrow{-1\le t\le 1}t=\sin x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

(حسابان ۲- مثلثات، صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{3} & ;\cos x \geq 0\\ \cos x & ;\cos x < 0\end{cases}$$



مطابق شکل فوق، خط $y=\frac{1}{3}$ نمودار را در دو نقطه و خط $y=-\frac{1}{3}$ نمودار را در ۴ نقطه قطع می‌کند. پس در مجموع در ۶ نقطه تلاقی دارند.

(حسابان ۲- مثلثات، صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۹- (میلاد سجادی‌لاریجانی)

ابتدا عبارت سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2} \qquad ;x\neq k\pi$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\tan 2x=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{3x}{2}=k\pi$$

$$\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}$$

با توجه به شرط $x\neq k\pi$، جواب‌های قابل قبول در بازهٔ $[0,2\pi]$، $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{4\pi}{3}$ هستند.

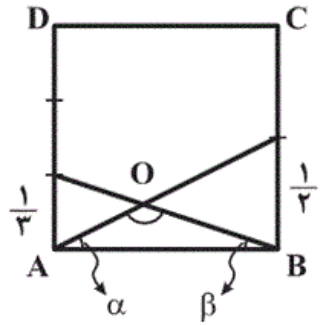
(حسابان ۲- مثلثات، صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۰- (میلاد سجادی‌لاریجانی)



در مورد مجموع زوایای داخلی مثلث AOB می‌دانیم:

$$\alpha+\beta+\hat{O}=\pi \Rightarrow \hat{O}=\pi-(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \tan\hat{O}=\tan(\pi-(\alpha+\beta)) \Rightarrow \tan\hat{O}=-\tan(\alpha+\beta) \quad (*)$$

$$\begin{cases} \tan\alpha=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱}=\frac{۱}{۲} \\ \tan\beta=\frac{\frac{۱}{۳}}{۱}=\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۱- (علی ایمانی)

$$\left.\begin{matrix} ۲A+B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ A-B=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} ۳A=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A+B=(۲A+B)-A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A+B$، برابر صفر است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۲- (امیرحسین ابومحبوب)

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & -۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲\\ ۱\\ ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\end{bmatrix}\Rightarrow |AB|=۵$$

$$BA=\begin{bmatrix}-۲\\ ۱\\ ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & ۴ & -۶\\ ۱ & -۲ & ۳\\ ۳ & -۶ & ۹\end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس BA، اگر از (-۲) در سطر اول فاکتور بگیریم، آنگاه سطرهای اول و دوم کاملاً یکسان هستند و در نتیجه دترمینان این ماتریس برابر صفر است. در نتیجه داریم:

$$|BA|-|AB|=۰-۵=-۵$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۳۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۳- (رضا عباسی‌اصل)

$$|A|=۲\times ۲-۱\times ۳=۱$$

$$|۴A^{۳}|=۴^{۲}|A|^{۳}=۱۶\times ۱=۱۶$$

$$\left|\frac{۱}{۸}A|۴A^{۳}|\right|=\left|\frac{۱}{۸}A\times ۱۶\right|=|۲A|=۲^{۲}|A|=۲^{۲}\times ۱=۴$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۴- (محمد هجری)

$$A^۴ + I = \left(A^۲\right)^۲ + I = (A+I)^۲ + I$$

$$= A^۲ + ۲A + ۲I$$

$$= A^۲ + ۲(A+I)$$

$$= A^۲ + ۲A^۲ = ۳A^۲$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۵- (پرنیان عزیزیان)

می‌دانیم $\tan ۳۰^\circ = \cot ۶۰^\circ$ است، پس داریم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & -\tan ۶۰^\circ \\ \cot ۶۰^\circ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -\tan ۶۰^\circ \\ \cot ۶۰^\circ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = -I$$

$$A^{۱۰} = \left(A^۲\right)^۵ = (-I)^۵ = -I$$

$$\begin{bmatrix} \sin ۶۰^\circ & ۰ \\ \cos ۶۰^\circ & ۰ \end{bmatrix} \times A^{۱۰} \times \begin{bmatrix} \cos ۶۰^\circ & ۰ \\ \sin ۶۰^\circ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix} \times (-I) \times \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & ۰ \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۴} & ۰ \\ \frac{۱}{۴} & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{۳}}{۴} & ۰ \\ -\frac{۱}{۴} & ۰ \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۳۶

از طرفین رابطه وارون می‌گیریم:

$$\left[(I-A)^{-1}\right]^{-1}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}^{-1}$$

$$I-A=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵} & -\frac{۲}{۵}\\ \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۵} & \frac{۲}{۵}\\ -\frac{۱}{۵} & \frac{۴}{۵}\end{bmatrix}$$

$$|A|=\frac{۲}{۵}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۱}{۵}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۸+۲}{۲۵}=\frac{۱۰}{۲۵}=\frac{۲}{۵}$$

$$\left|۵A^{۲}\right|=۲۵|A|^{۲}=۲۵\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۲}=۴$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲، ۲۳ و ۲۷ تا ۳۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مجموع درایه‌های ماتریس A برابر است با:

$$S_A = ۲x + ۴$$

وارون ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{x^۲ - ۴}\begin{bmatrix} x & -۲ \\ -۲ & x \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $A^{-۱}$ برابر است با:

$$S_{A^{-۱}} = \frac{۲x - ۴}{x^۲ - ۴}$$

طبق فرض سؤال داریم:

$$S_A = ۴S_{A^{-۱}}$$

$$\Rightarrow ۲x + ۴ = ۴\frac{۲x - ۴}{x^۲ - ۴} \Rightarrow ۲(x + ۲) = ۴ \times \frac{۲(x - ۲)}{(x - ۲)(x + ۲)}$$

$$\Rightarrow (x + ۲)^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} x + ۲ = ۲ \Rightarrow x = ۰ \\ x + ۲ = -۲ \Rightarrow x = -۴ \end{cases}$$

مجموع مقادیر $x = ۰ - ۴ = -۴$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

معادلهٔ ماتریسی داده شده را به‌صورت یک دستگاه دو معادله و دو مجهول می‌نویسیم:

$$\begin{cases} ۳x - ۴y = ۲ \\ -۶x + ۸y = ۶ \end{cases}$$

با توجه به آنکه $\frac{۲}{۶} \neq \frac{-۴}{۸} = \frac{۳}{-۶}$ است، پس دو خط موازی وغیرمنطبق‌اند، بنابراین مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از این دو خط موازی به یک فاصله باشند، روی خطی موازی با این دو خط و دقیقاً وسط آنها واقع شده‌اند.

معادلهٔ خطی موازی با دو خط $ax + by = c$ و $ax + by = c'$ که دقیقاً وسط آن دو باشد، به‌صورت $ax + by = \frac{c + c'}{۲}$ است. در نتیجه داریم:

$$-۶x + ۸y = ۶ \xrightarrow{\div(-۲)} ۳x - ۴y = -۳$$

$$\begin{cases} ۳x - ۴y = ۲ \\ ۳x - ۴y = -۳ \end{cases} \Rightarrow ۳x - ۴y = \frac{۲ + (-۳)}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times(-۳)} -۹x + ۱۲y = \frac{۳}{۲}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک ماتریس مربعی دلخواه از مرتبهٔ ۲ و B ماتریسی باشد که از افزودن عدد حقیقی دلخواه غیرصفر k به تمامی درایه‌های ماتریس A حاصل شده است. در این‌صورت داریم:

$$|A|=|B| \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+k & b+k \\ c+k & d+k \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow ad-bc=(a+k)(d+k)-(b+k)(c+k)$$

$$\Rightarrow ad-bc=ad+(a+d)k+k^2-bc-(b+c)k-k^2$$

$$\Rightarrow (a+d)k=(b+c)k \xrightarrow{\div k} a+d=b+c$$

یعنی مجموع درایه‌های قطر اصلی و قطر فرعی ماتریس A یکسان هستند.

در بین گزینه‌ها، تنها ماتریس گزینهٔ «۴» دارای این ویژگی است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۰- (محمد هجری)

دترمینان ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$|A| = (|A|+۱)(|A|-۱) - (۲|A|-۱)(|A|-۲)$$

$$\Rightarrow (|A|)^۲ - ۴|A| + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow (|A|-۱)(|A|-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} |A| = ۱ \\ |A| = ۳ \end{cases}$$

$|A| = ۱ \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ (قابل قبول نیست چون یکی از درایه‌ها منفی است)

$|A| = ۳ \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$

حال ماتریس مجهولات را به‌دست می‌آوریم:

$$X = A^{-۱}B = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۴ \\ -۱۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۳} \\ -\frac{۱۳}{۳} \end{bmatrix}$$

$$x + y = \frac{۴}{۳} - \frac{۱۳}{۳} = -\frac{۹}{۳} = -۳$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۳ تا ۳۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا