رياضي ۱ ، شمارش

۵۰- با حروف کلمهٔ PETROS ، چند کلمهٔ ۴ حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت که حرف R در آن باشد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۴۰

رياضي ۱ ، عبارت هاي جبري

۴۳- توان چهارم عبارت $\sqrt{۳\sqrt{۳}-\sqrt{۱۵}}-\sqrt{۳\sqrt{۳}+\sqrt{۱۵}}$ کدام است؟

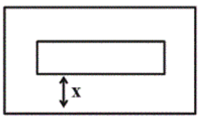
۱) ۱۶ ۲) ۲۷ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۴۵- اگر حاصل‌ضرب دو عدد مثبت ۹ و مجموع مربعات آن‌ها ۱۸ باشد، مجموع مکعبات این دو عدد کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۴ ۴) ۶۰

رياضي ۱ ، معادله درجه دوم

۴۴- در اتاقی مستطیل شکل با طول اضلاع ۸ و ۹ واحد، فرشی مستطیل شکل انداخته‌ایم که فاصلهٔ اضلاع آن از اضلاع متناظر دیوار مقدار ثابت x است. اگر مساحتی از سطح زمین که پوشیده نشده است برابر ۱۶ واحد مربع باشد، مقدار x کدام است؟



۱) ۲

۲) ۱/۵

۳) ۱

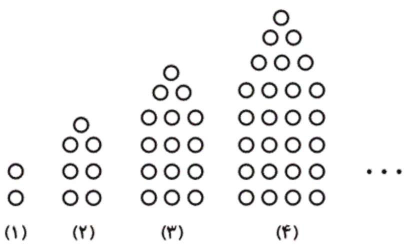
۴) ۰/۵

۴۲- اگر عدد مساحت یک شش‌ضلعی منتظم، $\sqrt{۳}$ برابر عدد محیط آن باشد، طول ضلع آن کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۴

رياضي ۱ ، الگو و دنباله

۴۱- با توجه به الگوی زیر، تعداد دایره‌های شکل هشتم کدام است؟



۱) ۹۴

۲) ۱۰۰

۳) ۱۱۵

۴) ۱۰۴

رياضي ۱ ، دامنه و برد تابع

۴۷- برای تابع خطی f مقدار تابع برای $x=-۲$ و $x=۴$ به‌ترتیب ۵ و -۷ است. چند x طبیعی در نامعادلهٔ $|f(x)|\leq ۶$ صدق می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

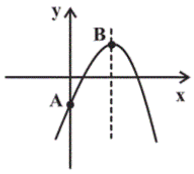
رياضي ۱ ، انواع تابع -

۴۸- اگر تابع ثابت f از نقطهٔ $(-2 , 3)$ بگذرد، حاصل $f^2(4)+3f(-1)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) صفر ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

رياضي ۱ ، سهمي

۴۶- در سهمی روبه‌رو با ضابطهٔ $f(x)=-2x^2+16x-24$، شیب خط گذرنده از نقاط A و B کدام است؟



۱) ۳

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۸

رياضي ۱ ، تركيب

۴۹- مجموعهٔ $A=\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , \dots , 10\}$ چند زیرمجموعهٔ حداقل ۳ عضوی دارد؟

۱) ۹۵۶ ۲) ۹۶۲ ۳) ۹۶۸ ۴) ۹۷۴

حسابان ۱ ، مجموع جملات دنباله هاي حسابي و هندسي

۵۱- در دنبالهٔ حسابی با جمله عمومی $a_n = 4n-1$، مقدار $a_1+a_3+a_5+\dots+a_{35}$ کدام است؟

۱) ۱۲۶۰ ۲) ۱۲۶۶ ۳) ۱۲۷۲ ۴) ۱۲۷۸

حسابان ۱ ، معادلات درجه دوم

۵۲- اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^2-20x-8=0$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حسابان ۱ ، معادلات گوياو گنگ

۵۴- علی کاری را در X روز و حسین همان کار را در زمانی ۴ برابر زمان علی انجام می‌دهد. اگر هر دو با هم کار کنند، کار در ۱۲ روز به اتمام می‌رسد. اگر حسین به تنهایی کار کند، کار را در چند روز انجام می‌دهد؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰

حسابان ۱ ، قدر مطلق و ويژگي هاي آن -

۵۳- معادلهٔ $x^2-2x-1+|x+2|=0$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد جواب

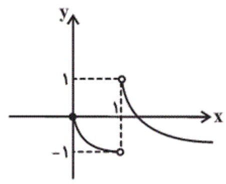
حسابان ۱ ، آشنایی با هندسه تحلیلی

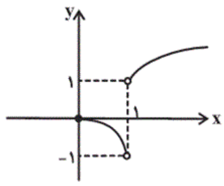
۵۵- مجموع عرض نقاطی از منحنی $y = x^{۲} + ۳x + ۱$ که از دو نقطهٔ $A(۲\,,\,۱)$ و $B(۸\,,\,۳)$ به یک فاصله هستند، کدام است؟

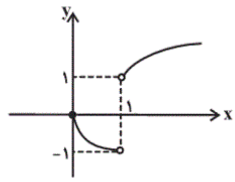
۱) ۴۸ ۲) ۵۰ ۳) ۵۲ ۴) ۵۴

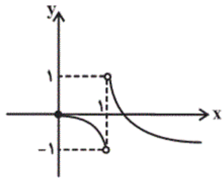
حسابان ۱ ، انواع تابع

۵۶- نمودار تابع $f(x) = \dfrac{|x-۱|\sqrt{x}}{x-۱}$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۵۹- مساحت محصور بین نمودار تابع $y = [۲x]$ و محور x ها در بازهٔ $[۰\,,\,\dfrac{۵}{۳}]$ کدام است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) $\dfrac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\dfrac{۵}{۲}$

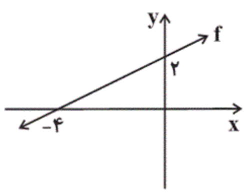
حسابان ۱ ، وارون تابع

۵۷- اگر تابع $y = x(۱-\dfrac{k}{|x|})$ وارون‌پذیر باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k \geq ۰$ ۲) $k \leq ۰$ ۳) $k \leq ۱$ ۴) $k \geq -۱$

حسابان ۱ ، اعمال روی توابع

۵۸- نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. حاصل $(fof)(۲۰)$ کدام است؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

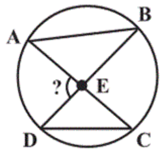
حسابان ۱ ، تابع نمایی -

۶۰- داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید ۳۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار باقیماندهٔ آن در بدن پس از t ساعت از رابطهٔ $A(t) = ۳۰ \times (۰/۹)^{t}$ برحسب میلی‌گرم به دست می‌آید. چه درصدی از دارو پس از ۲ ساعت از بدن دفع می‌شود؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰ ۳) ۸۱ ۴) ۱۹

هندسه‌ي ۲ ، مفاهيم اوليه و زاويه ها در دايره

۸۱- در دایرهٔ شکل زیر، به شعاع R، دو وتر AB و CD مشخص شده‌اند. اگر رابطهٔ $AB=\sqrt{۲}CD=\sqrt{۲}R$ برقرار باشد، آن‌گاه زاویهٔ AED چقدر است؟



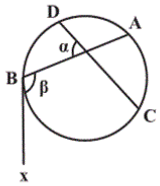
۱) ۷۵°

۲) ۹۰°

۳) ۱۰۵°

۴) ۱۲۰°

۸۲- در شکل زیر، طول دو وتر AB و CD برابر و فاصلهٔ مرکز دایره تا نزدیک‌ترین نقطهٔ روی وتر AB به آن، برابر نصف شعاع است. اگر $\beta=۳\alpha$ و Bx مماس بر دایره باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ ABC چند درجه است؟



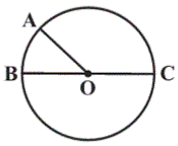
۱) ۲۰

۲) ۳۰

۳) ۴۰

۴) ۶۰

۸۳- در شکل زیر، O مرکز دایره است. اگر طول کمان AB و مساحت قطاع AOB به‌ترتیب $\frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi$ و π باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) ۱/۵

۲) ۳

۳) ۶

۴) ۱۲

هندسه‌ي ۲ ، رابطه هاي طولي در دايره

۸۴- در مثلث ABC، $AB=۱۲$ و $AC=۱۵$ است. دایرهٔ گذرنده از رأس A و مماس بر ضلع BC در وسط آن، اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط B' و C' قطع می‌کند. اگر $CC'=۴$ باشد، طول BB' کدام است؟

۱) ۳/۲　　۲) ۴　　۳) ۴/۸　　۴) ۵

۸۵- دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ در نقطهٔ M مماس خارج‌اند. اگر TT' مماس مشترک خارجی دو دایره باشد، حاصل $MT^۲+MT'^۲$ کدام است؟

۱) ۶　　۲) ۱۳　　۳) ۱۸　　۴) ۲۴

۸۶- طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس درون برابر ۲ واحد و مساحت ناحیهٔ محدود بین آن‌ها ۲۰π واحد مربع است. طول شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چند برابر طول شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟

۱) ۳　　۲) ۲

۳) $\frac{۳}{۲}$　　۴) $\frac{۴}{۳}$

هندسه‌ي ۲ ، چندضلعي محاطي و محيطي

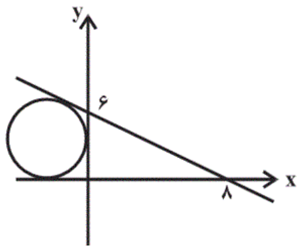
۸۷- در مثلثی اندازهٔ کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین ارتفاع به‌ترتیب ۱۲ و ۲۰ واحد است. اگر محل تقاطع ارتفاع‌ها روی محیط مثلث باشد، آن‌گاه اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث چقدر است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۱۰

۸۸- اگر طول ضلع شش‌ضلعی منتظم محاط در یک دایره $\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه طول ضلع شش‌ضلعی منتظم محیط بر این دایره کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۸۹- در شکل زیر، شعاع دایره کدام است؟



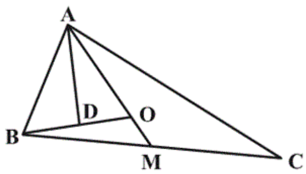
۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) ۳
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) ۴

۹۰- اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ محیطی به طول قاعده‌های ۳ و ۶ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

هندسه ۱، نسبت و تناسب در هندسه

۷۳- در شکل زیر، M نقطه‌ای دلخواه روی BC است. اگر AO = ۳OM و نقطهٔ D وسط BO باشد، آنگاه نسبت مساحت مثلث ABD به مساحت مثلث BOM کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

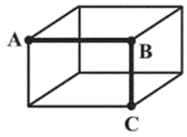
هندسه ۱، چند ضلعي ها و ويژگي هاي آنها

۷۸- قطرهای یک ذوزنقه بر هم عمودند. اگر وسط‌های اضلاع مجاور ذوزنقه را به هم وصل کنیم، یک چهارضلعی به محیط ۲۸ و مساحت ۴۸ تشکیل می‌شود. طول پاره‌خطی که وسط‌های ساق‌های ذوزنقه را به‌هم وصل می‌کند، کدام است؟

۱) ۵
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۴

هندسه ۱، خط ، نقطه و صفحه

۷۹- در مکعب‌مستطیل زیر چند یال وجود دارد که با هر دو یال AB و BC متنافر باشد؟



۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۸۰- چه تعداد از عبارت‌های زیر همواره درست است؟

الف) اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط یکی از صفحه‌ها با هر خط صفحهٔ دیگر موازی است.

ب) اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط یکی از صفحه‌ها با صفحهٔ دیگر موازی است.

پ) از هر نقطهٔ خارج یک صفحه، بی‌شمار خط موازی با آن صفحه می‌توان رسم کرد.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

هندسه ۱، استدلال

۷۱- کدام یک از قضایای زیر را نمی‌توان به صورت قضیهٔ دو شرطی نوشت؟

۱) اگر محیط دو دایره برابر باشد، آن‌گاه مساحت آن‌ها نیز برابر است.

۲) اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، آن‌گاه مساحت آن‌ها نیز برابر است.

۳) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، آن‌گاه قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

۴) اگر ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین باشد، آن‌گاه دو قطر آن برابر یکدیگرند.

۷۲- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای فاصلهٔ نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها از دو ضلع مثلث ۱/۵ و ۲ واحد است. طول وتر مثلث کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) $۲/۵\sqrt{۲}$

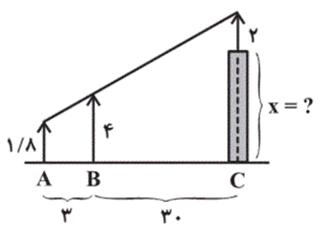
۳) ۵ ۴) $۵\sqrt{۲}$

هندسه ۱، قضيه ي تالس

۷۴- ذوزنقهٔ ABCD به طول قاعده‌های ۴ و ۱۲ مفروض است. از محل تقاطع قطرهای این ذوزنقه خطی موازی قاعده‌ها رسم می‌کنیم تا ساق‌ها را در نقاط E و F قطع کند. اندازهٔ EF کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۷۵- مطابق شکل روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع ۲ متر نصب شده است. در فاصلهٔ ۳۰ متری ساختمان، یک تیر برق ۴ متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصلهٔ ۳ متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند. اگر فاصلهٔ چشمان ناظر از زمین ۱/۸ متر باشد، ارتفاع ساختمان چقدر است؟



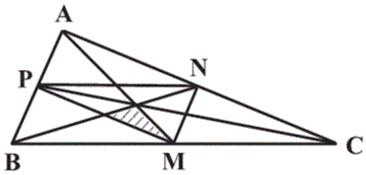
۱) ۲۶

۲) ۲۴

۳) ۲۲

۴) ۲۰

۷۶- در شکل زیر، نقاط M، N و P وسط‌های اضلاع مثلث ABC هستند. مساحت قسمت هاشورخورده چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



۱) $\frac{۱}{۱۲}$

۲) $\frac{۱}{۱۶}$

۳) $\frac{۱}{۱۸}$

۴) $\frac{۱}{۲۴}$

۷۷- کم‌ترین محیط چهارضلعی‌های شبکه‌ای با مساحت ۳ که تعداد نقاط درونی آن حداقل بوده و قطرهای آن منصف یکدیگرند، کدام است؟

۱) ۶

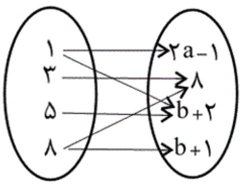
۲) $۳+۲\sqrt{۲}$

۳) ۸

۴) $۳+۲\sqrt{۵}$

ریاضي ۱- سوالات موازي ، مفهوم تا

۶۷- اگر نمودار پیکانی مقابل مربوط به یک تابع باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) ۵

۲) ۷

۳) ۱۲

۴) ۱۷

ریاضي ۱- سوالات موازي ، شمارش

۷۰- با ارقام ۸ و ۷ و ۵ و ۴ و ۰ چند عدد زوج ۴ رقمی بزرگ‌تر از ۵۰۰۰ با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۷۸

ریاضي ۱- سوالات موازي ، توان هاي گويا

۶۳- اگر m یک عدد طبیعی فرد باشد، حاصل عبارت $\sqrt[۶m]{(-a)^۲}$ همواره کدام است؟

۱) $\sqrt[۳m]{-a}$ ۲) $\sqrt[۳m]{a}$ ۳) $a^{۳m}$ ۴) $\sqrt[۳m]{|a|}$

ریاضي ۱- سوالات موازي ، دنباله هاي حسابي و هندسي -

۶۱- در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی و غیرصفر a_n، حاصل $\dfrac{a_۷ + a_{۱۳}}{a_{۱۰}}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۳}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\dfrac{۲}{۳}$

رياضي ۱- سوالات موازي ، انواع تابع

۶۵- اگر تابع $f(x) = (۲a - b)x^۲ + \dfrac{a}{۳}x$ یک تابع همانی باشد، مقادیر a و b کداماند؟

۱) $\begin{cases} a = ۳ \\ b = ۶ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} a = ۶ \\ b = ۳ \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} a = -۳ \\ b = -۶ \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} a = -۶ \\ b = -۳ \end{cases}$

۶۶- نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ چند نقطهٔ مشترک دارند؟

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۴ \ ; & ۰ < |x| < ۲ \\ ۱ \ ; & x = ۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = \begin{cases} ۱ - |x| \ ; & |x| < ۲ \\ ۲ \ ; & |x| \geq ۲ \end{cases}$$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

رياضي ۱- سوالات موازي ، تعیین علامت

۶۴- اگر جدول تعیین علامت عبارت درجه دوم $p(x) = (a^۲ - ۹)x^۲ + mx + b^۲ - ۴$ به‌صورت زیر، a و b اعداد طبیعی و $a < b$ باشد، حاصل $۲a + b$ کدام است؟

x		۰		۳	
p	−	۰	+	۰	−

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۳

رياضي ۱- سوالات موازي ، جایگشت -

۶۸- به چند طریق می‌توان ۳ کتاب مختلف ریاضی و ۵ کتاب مختلف فیزیک را در یک قفسه چید به‌طوری‌که کتاب‌های ریاضی کنار هم و کتاب‌های فیزیک نیز کنار هم باشند؟

۱) $۸!$ ۲) $۳! \times ۵!$ ۳) $۳! \times ۵! \times ۲!$ ۴) $۵! \times ۲!$

رياضي ۱- سوالات موازي ، ترکیب

۶۹- با حروف کلمهٔ SISTERS چند کلمهٔ ۷ حرفی بدون توجه به معنا می‌توان نوشت به‌طوری که هیچ دو حرف Sای کنار هم نباشند؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۳۰۰

رياضي ۱- سوالات موازي ، روابط بين نسبت هاي مثلثاتي

۶۲- حاصل عبارت تعریف‌شدهٔ $\dfrac{\sin^{4} x+\cos^{2} x-1}{\sin^{2} x-1}$ کدام است؟

۱) $\cos^{2} x$ ۲) $\sin^{2} x$ ۳) $-\sin^{2} x$ ۴) ۱

هندسهٔ ۱- سوالات موازی ، ترسیم های هندسی -

۱۰۲- در مثلث ABC، نقاط D و E را به‌ترتیب روی اضلاع AB و AC به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD = AE$ باشد. از D عمودی بر AB و از E عمودی بر AC رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. نقطهٔ M همواره بر کدام یک از خطوط زیر واقع است؟

۱) نیمساز زاویهٔ A
۲) ارتفاع نظیر رأس A
۳) عمودمنصف BC
۴) میانهٔ نظیر رأس A

هندسهٔ ۱- سوالات موازی ، خط ، نقطه و صفحه

۱۰۸- کدام گزینه در فضا درست است؟

۱) دو صفحهٔ موازی با یک خط، موازی یکدیگرند.
۲) دو خط موازی با یک صفحه، موازی یکدیگرند.
۳) دو خط عمود بر یک خط، موازی یکدیگرند.
۴) دو خط موازی با یک خط، موازی یکدیگرند.

۱۰۹- سه صفحهٔ دو به دو متقاطع را در نظر بگیرید. فصل مشترک‌های این سه صفحه نسبت به هم چگونه می‌تواند باشد؟

۱) موازی
۲) همرس
۳) منطبق
۴) هر سه حالت امکان‌پذیر است.

۱۱۰- سه خط متمایز L_1، L_2 و L_3، در نقطهٔ A یکدیگر را قطع می‌کنند. چند صفحه وجود دارد که شامل همهٔ این خطوط باشد؟

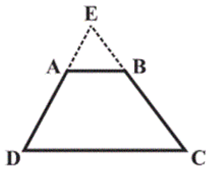
۱) بی‌شمار صفحه
۲) حداکثر یک صفحه
۳) دقیقاً یک صفحه
۴) چنین صفحه‌ای وجود ندارد.

هندسهٔ ۱- سوالات موازی ، استدلال

۱۰۱- درون مثلث ABC، نقطهٔ M از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. اگر زاویه‌های AMB، AMC و BMC با اعداد ۷، ۸ و ۹ متناسب باشند، آن‌گاه نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های این مثلث در کجا واقع است؟

۱) داخل مثلث
۲) خارج مثلث
۳) وسط یک ضلع مثلث
۴) روی یک رأس مثلث

۱۰۳- در شکل زیر، امتداد ساق‌های ذوزنقه در نقطهٔ E متقاطع‌اند. نقطهٔ F را روی AE طوری انتخاب می‌کنیم که طول AE واسطهٔ هندسی بین طول‌های EF و ED باشد. نسبت مساحت مثلث ABF به مساحت مثلث ABC برابر با کدام نیست؟



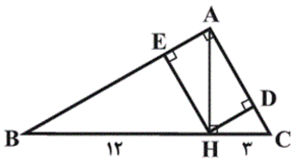
۱) $\frac{BF}{AC}$

۲) $\frac{AF}{DF}$

۳) $\frac{AB}{CD}$

۴) $\frac{EF}{AE}$

۱۰۴- در شکل زیر، اگر AH ارتفاع نظیر ضلع BC باشد، آنگاه مساحت مستطیل $ADHE$ کدام است؟



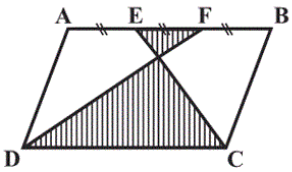
۱) ۱۴/۴

۲) ۱۵/۲

۳) ۱۲/۶

۴) ۱۳/۸

۱۰۵- در شکل زیر، اگر مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ برابر ۱۹۲و $AE = EF = FB$ باشد، مساحت قسمت هاشورزده کدام است؟



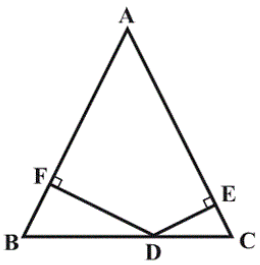
۱) ۶۰

۲) ۷۶

۳) ۷۲

۴) ۸۰

۱۰۶- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. اگر $AF = ۷$ و $AE = ۱۱$ باشد، مجموع طول‌های دو پاره‌خط DE و DF کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۳}$

۲) $۴\sqrt{۳}$

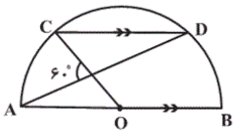
۳) $۶\sqrt{۳}$

۴) $۸\sqrt{۳}$

۱۰۷- مساحت یک چند ضلعی شبکه‌ای ۱۰/۵ واحد مربع است. تعداد نقاط درونی این چندضلعی چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

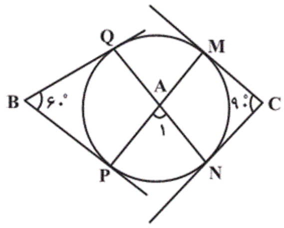
۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۹۱- در شکل زیر، O مرکز دایره و $AB \parallel CD$ است. اندازهٔ کمان CD کدام است؟



۱) °۶۰
۲) °۹۰
۳) °۱۰۰
۴) °۱۲۰

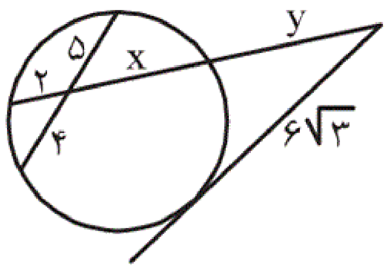
۹۲- در شکل زیر، اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}_1$ چند درجه است؟



۱) ۶۰
۲) ۷۵
۳) ۹۰
۴) ۱۵۰

هندسه ۲ - گواه ، رابطه هاي طولي در دايره

۹۳- در شکل زیر، مقدار y کدام است؟



۱) ۶
۲) ۷/۵
۳) ۸
۴) ۹

هندسه ۲ - گواه ، چندضلعي محاطي و محيطي

۹۴- در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$، طول ساق قائم AD برابر ۶ است. اگر دایره به قطر ساق BC بر ساق قائم AD مماس باشد، حاصل‌ضرب دو قاعدهٔ AB و CD کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

۹۵- اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد، برابر ۱۵ واحد است. طول خط‌المرکزین این دو دایره چند واحد است؟

۱) $۱۲\sqrt{۲}$ ۲) $۷\sqrt{۶}$ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۹۶- در مثلث $ABC\ (AB < AC)$ ضلع BC را از هر دو طرف، به اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ADE، بر روی کدام جزء مثلث ABC است؟

۱) عمود منصف BC
۲) میانه نظیر ضلع BC
۳) ارتفاع وارد بر ضلع BC
۴) نیمساز داخلی زاویهٔ A

۹۷- در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{۳}$ واحد، طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ محیطی و محاطی خارجی کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۹۸- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، طول یک ضلع قائم ۸ و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن ۳ واحد است. اندازهٔ وتر این مثلث کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۹۹- در یک ذوزنقهٔ محیط بر دایره، طول خط واصل بین وسط‌های دو ساق آن ۱۲واحد است. محیط ذوزنقه کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۴ ۳) ۴۶ ۴) ۴۸

۱۰۰-نسبت شعاع دایرهٔ محاطی یک شش ضلعی منتظم به شعاع دایرهٔ محیطی آن، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\cos ۱۵^\circ$ ۴) $\sin ۱۵^\circ$

هندسه ۱ - گواه ، ترسيم هاي هندسي

۱۱۱- در کدام‌یک از ترسیم‌های زیر، یک شکل منحصربه‌فرد حاصل نمی‌شود؟

۱) رسم یک لوزی با معلوم‌بودن طول‌های دو قطر

۲) رسم یک مستطیل با معلوم‌بودن طول یک قطر و طول یک ضلع

۳) رسم یک مربع با معلوم‌بودن طول قطر

۴) رسم یک متوازی‌الاضلاع با معلوم‌بودن طول یک قطر و طول یک ضلع

هندسه ۱ - گواه ، چند ضلعي ها و ويژگي هاي آنها -

۱۱۶- با افزودن یک رأس به یک n ضلعی منتظم، ۹واحد به تعداد قطرهای آن افزوده می‌شود. اندازهٔ هر زاویهٔ این n ضلعی کدام است؟

۱) ۱۳۵° ۲) ۱۴۰°

۳) ۱۴۴° ۴) ۱۵۰°

۱۱۷- اندازهٔ دو ضلع مقابل از چهارضلعی محدبی برابرند. وسط‌های دو قطر و وسط‌های دو ضلع دیگر این چهارضلعی را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل همواره کدام است؟

۱) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ۲) متوازی‌الاضلاع

۳) لوزی ۴) نامشخص

هندسه ۱ - گواه ، خط ، نقطه و صفحه

۱۱۹-در فضا، اگر ... یکی از ... را قطع کند، لزوماً دیگری را هم قطع می‌کند.

۱) خطی / دو خط موازی

۲) صفحه‌ای / دو صفحهٔ متقاطع

۳) خطی / دو خط متقاطع

۴) صفحه‌ای / دو خط موازی

۱۲۰- خط d با صفحهٔ P متقاطع است. از نقطهٔ A خارج خط d و صفحهٔ P چند خط می‌توان رسم کرد، به‌طوری که با P موازی و با d متقاطع باشند؟

۱) فقط یک
۲) حداکثر یک
۳) هیچ
۴) بی‌شمار

هندسه ۱ - گواه ، استدلال -

۱۱۲- نقیض چه تعداد از گزاره‌های زیر، درست نوشته شده است؟

الف) گزاره: « a بزرگ‌تر از b است.» - نقیض گزاره: « b بزرگ‌تر از a است.»

ب) گزاره: «مربع هر عدد صحیح، بزرگ‌تر از صفر است.» - نقیض گزاره: «مربع هر عدد صحیح، کوچک‌تر یا مساوی صفر است.»

پ) گزاره: «محل همرسی عمودمنصف‌های هر مثلث، داخل یا خارج مثلث است.» - نقیض گزاره: «محل همرسی عمودمنصف‌های هر مثلث، روی محیط آن مثلث است.»

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

هندسه ۱ - گواه ، قضيه ي تالس -

۱۱۳- در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

۱) ۱۱/۵
۲) ۱۱/۶
۳) ۱۲/۲
۴) ۱۲/۸

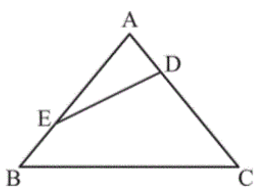
هندسه ۱ - گواه ، تشابه مثلث ها

۱۱۴- در مثلث ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، ارتفاع AH و میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم. اگر طول HB و HC به‌ترتیب ۴ و ۹ واحد باشد، آنگاه مساحت مثلث AMH کدام است؟

۱) ۴/۵
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷/۵

هندسه ۱ - گواه ، كاربردهايي از تالس و تشابه مثلث ها -

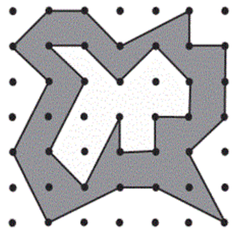
۱۱۵- در چهارضلعی $BCDE$، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند. اگر $BC = ۲۰$ و $DE = ۱۲$، آن‌گاه مساحت چهارضلعی چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۰/۵۶
۲) ۰/۶۴
۳) ۰/۷۲
۴) ۰/۸۰

هندسه ۱ گواه ، مساحت و كاربردهاي ان

۱۱۸- مساحت قسمت رنگی در شکل زیر چقدر است؟



۱) ۸/۵

۲) ۱۵

۳) ۱۷/۵

۴) ۲۰

۵۰-

(علی شهرابی)

حرف R اول باشد: $\frac{۱}{R}\times\frac{۵}{}\times\frac{۴}{}\times\frac{۳}{}=۶۰$

حرف R دوم باشد: $\frac{۵}{}\times\frac{۱}{R}\times\frac{۴}{}\times\frac{۳}{}=۶۰$

حرف R سوم باشد: $\frac{۵}{}\times\frac{۴}{}\times\frac{۱}{R}\times\frac{۳}{}=۶۰$

حرف R چهارم باشد: $\frac{۵}{}\times\frac{۴}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۱}{R}=۶۰$

پس در کل $۴\times ۶۰=۲۴۰$ کلمه می‌توان ساخت.

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن- صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۴۳-

(مهدی ملارمضانی)

برای محاسبهٔ توان چهارم عبارت داده شده، کافی است عبارت را دو بار به توان ۲ برسانیم:

$$(\sqrt{۳\sqrt{۳}+\sqrt{۱۵}}-\sqrt{۳\sqrt{۳}-\sqrt{۱۵}})^۲=(۳\sqrt{۳}+\sqrt{۱۵})+(۳\sqrt{۳}-\sqrt{۱۵})$$
$$-۲\sqrt{(۳\sqrt{۳}+\sqrt{۱۵})(۳\sqrt{۳}-\sqrt{۱۵})}=۶\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲۷-۱۵}$$
$$=۶\sqrt{۳}-۲(۲\sqrt{۳})=۲\sqrt{۳}$$

یک بار دیگر عبارت حاصل را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow (۲\sqrt{۳})^۲=۱۲$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۴۵-

(علی شهرابی)

$$a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab\Rightarrow ۱۸=(a+b)^۲-۲(۹)$$
$$\Rightarrow (a+b)^۲=۳۶\Rightarrow a+b=۶$$
$$a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)=۶^۳-۳(۹)(۶)=۵۴$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۴۴- (محمد هجری)

$$S_{\text{نپوشیده}} = S_{\text{اتاق}} - S_{\text{فرش}}$$

$$۱۶ = ۸ \times ۹ - (۸ - ۲x)(۹ - ۲x) \Rightarrow ۱۶ = -۴x^۲ + ۳۴x$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۱۷x + ۸ = ۰ \Rightarrow (۲x - ۱)(x - ۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۸ & \text{غ ق ق} \\ x = ۰/۵ & \checkmark \end{cases}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها- صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

۴۲- (علی شهرابی)

$$\text{مساحت} = \sqrt{۳} \times \text{محیط} \Rightarrow \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = \sqrt{۳} \times ۶a \Rightarrow \frac{۳}{۲}a^۲ = ۶a$$

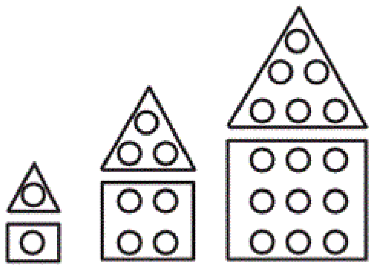
$$\Rightarrow a^۲ - ۴a = ۰ \Rightarrow a(a - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۰ & \times \\ a = ۴ & \checkmark \end{cases}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها- صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

۴۱- (مهدی ملارمضانی)

با توجه به شکل‌های داده شده، جدول زیر را داریم:



شمارهٔ مرحله	۱	۲	۳	...	۸
تعداد دایره‌ها	$(۱)^۲ + ۱$	$۲^۲ + ۳$	$۳^۲ + ۶$	...	

در هر مرحله، تعداد دایره‌ها از مجموع دنبالهٔ مربعی $(۱, ۴, ۹, ... \Rightarrow n^۲)$

و دنبالـهٔ مثلثـی $(۱, ۳, ۶, ۱۰, ... \Rightarrow \frac{n(n+۱)}{۲})$ تشـکیل شـده اسـت.

بنابراین داریم:

$$\text{تعداد دایره‌های شکل هشتم} = ۸^۲ + \frac{۸(۸+۱)}{۲} = ۱۰۰$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله- صفحه‌های ۱۴ تا ۲۰)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

۴۷- *(محمد هجری)*

فرض کنید $f(x)=ax+b$:

$$\begin{cases} f(-۲)=-۲a+b=۵ \\ f(۴)=۴a+b=-۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=-۲ \\ b=۱ \end{matrix} \Rightarrow f(x)=-۲x+۱$$

حال نامعادله را حل می‌کنیم:

$$|-۲x+۱|\le ۶ \Rightarrow -۶\le ۲x-۱\le ۶ \Rightarrow -۲/۵\le x\le ۳/۵$$

واضح است که به ازای اعداد طبیعی۳، ۲ و ۱ نامعادله برقرار است.

(ریاضی ۱- ترکیبی- صفحه‌های ۹۱ تا ۱۰۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۴۸- *(مهدی ملارمضانی)*

تابع ثابت f، از نقطهٔ $(۳\,,-۲)$ می گذرد، بنابراین ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=۳$ است. حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$f(۴)=f(-۱)=۳\Rightarrow f^۲(۴)+۳f(-۱)=۹+۳(۳)=۱۸$$

(ریاضی ۱- تابع- صفحهٔ ۱۱۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۴۶- *(محمد هجری)*

$$f(x)=-۲x^۲+۱۶x-۲۴=-۲(x^۲-۸x+۱۶)+۸$$

$$=-۲(x-۴)^۲+۸\Rightarrow \begin{cases} x_A=۰\Rightarrow y_A=-۲۴ \\ x_B=۴\Rightarrow y_B=۸ \end{cases}$$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۸-(-۲۴)}{۴-۰}=۸$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۴۹- *(علی شهرابی)*

تعداد کل زیرمجموعه‌های A برابر است با: $۲^{۱۰}=۱۰۲۴$

مجموع تعداد زیرمجموعه‌های بدون عضو، یک عضوی و ۲ عضوی A را حساب می‌کنیم:

$$\binom{۱۰}{۰}+\binom{۱۰}{۱}+\binom{۱۰}{۲}=۱+۱۰+۴۵=۵۶$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های حداقل ۳ عضوی A برابر است با:

$$۱۰۲۴-۵۶=۹۶۸$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن- صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶ و ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۵۱- *(علی شهرابی)*

جملات شمارهٔ فرد دنبالهٔ $a_n = 4n - 1$ از a_1 تا a_{35} را می‌نویسیم:

$$\underset{a_1}{\underset{\downarrow}{3}} \ , \ \underset{a_3}{\underset{\downarrow}{11}} \ , \ 19 \ , \ \dots \ , \ \underset{a_{35}}{\underset{\downarrow}{139}}$$

این اعداد جملات یک دنبالهٔ حسابی‌اند که جملهٔ اول و آخر آن به‌ترتیب $a_1 = 3$ و $a_{35} = 139$ و تعدادشان $n = 18$ است. مجموع این اعداد برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{18}{2}(3 + 139) = 9 \times 142 = 1278$$

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۵۲- *(محمد هجری)*

برای حل سوال از اتحاد زیر کمک می‌گیریم:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

فرض کنید $A = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$. حال A^3 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^3 = (\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3 + 3\sqrt[3]{ab}A$$

$$\Rightarrow A^3 = a + b + 3\sqrt[3]{ab}A$$

$$\Rightarrow A^3 = 3\sqrt[3]{P}A + S$$

$$\xrightarrow[P=\frac{c}{a}]{S=\frac{-b}{a}} S = 20 \ , \quad P = -8 \Rightarrow A^3 = -6A + 20$$

$$\Rightarrow A^3 + 6A - 20 = 0 \Rightarrow A^3 - 8 + 6A - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (A-2)(A^2 + 2A + 4) + 6(A-2) = 0$$

$$(A-2)(\underbrace{A^2 + 2A + 10}_{\text{ریشه ندارد}}) = 0 \Rightarrow A = 2$$

دقت کنید بدون حل کردن معادلهٔ بالا نیز می‌توان با جای‌گذاری گزینه‌ها به پاسخ رسید.

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۵۴ (ایمان شهروی)

مدت زمان انجام کار توسط علی: X

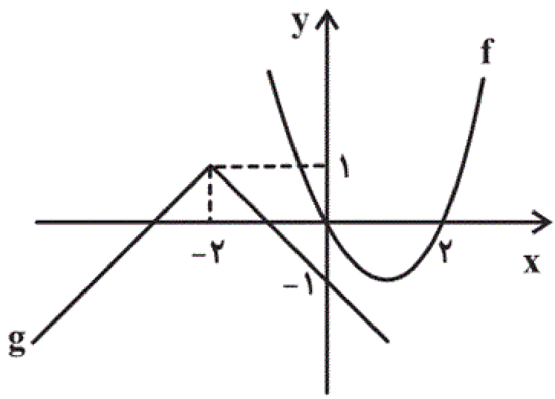
مدت زمان انجام کار توسط حسین: $۴X$

$$\Rightarrow \frac{۱}{X}+\frac{۱}{۴X}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow \frac{۵}{۴X}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow ۶۰=۴X\Rightarrow \begin{cases} X=۱۵ \\ ۴X=۶۰ \end{cases}$$

(حسابان ۱ــ جبر و معادله- صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓



معادله جواب ندارد ← f و g تقاطع ندارند

(حسابان ۱ــ جبر و معادله- صفحه‌های ۷ تا ۱۶ و ۲۳ تا ۲۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۵۵–　(محمد هجری)

مختصات نقطهٔ وسط A و B را به دست آورده و شیب عمودمنصف پاره‌خط AB را محاسبه می‌کنیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۲+۸}{۲} = ۵$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۱+۳}{۲} = ۲$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۳-۱}{۸-۲} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{mm'=-۱} m' = -۳$$

معادلهٔ عمودمنصف: $y - y_M = m'(x - x_M)$

$$\Rightarrow y - ۲ = -۳(x-۵) \Rightarrow y = -۳x + ۱۷$$

حال خط عمودمنصف را با منحنی سهمی تقاطع می‌دهیم:

$$x^۲ + ۳x + ۱ = -۳x + ۱۷ \Rightarrow x^۲ + ۶x - ۱۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۸)(x-۲) = ۰ \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_۱ = -۸ \Rightarrow y_۱ = ۴۱ \\ x_۲ = ۲ \Rightarrow y_۲ = ۱۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_۱ + y_۲ = ۵۲$$

(حسابان ۱– جبر و معادله- صفحه‌های ۷ تا ۱۳ و ۲۹ تا ۳۶)

۱　　۲　　۳✓　　۴

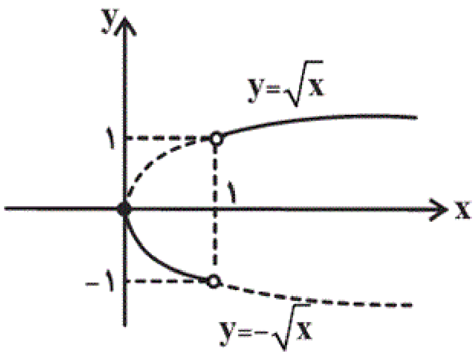
۵۶–

ابتدا توجه کنید که:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-۱)\sqrt{x}}{x-۱} & x>۱\\[2mm] \dfrac{-(x-۱)\sqrt{x}}{x-۱} & ۰\le x<۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x>۱\\ -\sqrt{x} & ۰\le x<۱\end{cases}$$

بنابراین، نمودار تابع به شکل زیر است:

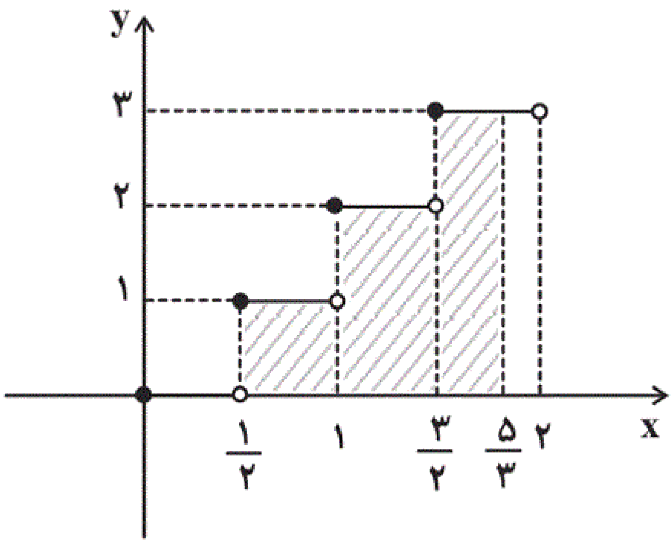


(حسابان ۱– ترکیبی- صفحه‌های ۲۷ و ۴۴ تا ۴۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۵۹– (امیرهوشنگ خمسه)

ابتدا نمودار $y = [2x]$ را رسم می‌کنیم.



$$S = 1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2+3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=2$$

(حسابان ۱ – تابع – صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

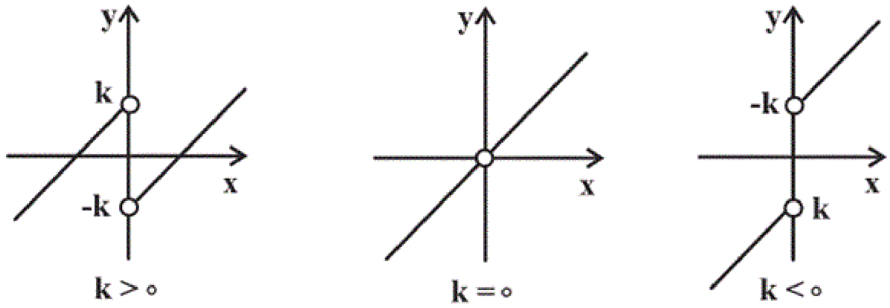
۱ ۲ ۳✓ ۴

۵۷– (قاسم کتابچی)

$$y=\begin{cases} x-k & ; \quad x>0 \\ x+k & ; \quad x<0 \end{cases}$$

برد ضابطهٔ اول $y>-k$ و برد ضابطهٔ دوم $y<k$ است. برای آن‌که تابع وارون‌پذیر باشد باید یک به یک باشد، پس باید بردها اشتراک نداشته باشند:

$$k \le -k \Rightarrow k \le 0$$



(حسابان ۱ – تابع – صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۵۸– (علی شهرابی)

با توجه به نمودار، تابع f از نقاط $A(0, 2)$ و $B(-4, 0)$ می‌گذرد.

$$m_{AB} = \frac{2-0}{0+4} = \frac{1}{2} \Rightarrow y-2 = \frac{1}{2}(x-0) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x+2$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x+2)+2 = \frac{1}{4}x+3 \Rightarrow f(f(20)) = \frac{1}{4}\times 20+3 = 8$$

(حسابان ۱– تابع- صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۶۰– (امیرهوشنگ خمسه)

روش اول:

مقداری از دارو که بعد از ۲ ساعت در بدن می‌ماند از $A(2) = 30\times(0/9)^2$ قابل محاسبه است که $A(2) = 24/3$ می‌شود، لذا مقدار دفع شدهٔ دارو پس از ۲ ساعت $30-24/3 = 5/7$ میلی‌گرم می‌باشد. درصد دفع شدهٔ دارو از رابطهٔ زیر قابل محاسبه است.

$$\frac{5/7}{30}\times 100 = 19$$

روش دوم:

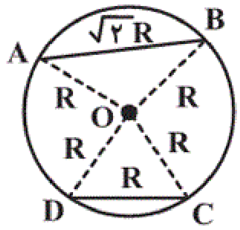
دقت کنید رابطهٔ داده شده دنبالهٔ هندسی است با قدرنسبت ۰/۹، پس بعد از دو ساعت $0/9\times 0/9\times 100 = 81$ درصد در بدن مانده و $100-81 = 19$ درصد از بین رفته است.

(حسابان ۱– توابع نمایی و لگاریتمی- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۸۱- (محمد هجری)

ابتدا اندازهٔ کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ را پیدا می‌کنیم.



در مثلث AOB، اضلاع به اندازه‌های R، R و $\sqrt{۲}R$ هستند. در نتیجه $\overset{\Delta}{AOB}$ قائم‌الزاویه است و در نتیجه $\overset{\frown}{AB} = ۹۰^\circ$. در مثلث COD، اضلاع به اندازه‌های R، R و R هستند. در نتیجه $\overset{\Delta}{COD}$ متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه $\overset{\frown}{CD} = ۶۰^\circ$. می‌دانیم:

$$\begin{cases} \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ \\ \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = ۹۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۵۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} = ۲۱۰^\circ$$

با توجه به این‌که $A\hat{E}D = \dfrac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{۲}$ نتیجه می‌گیریم:

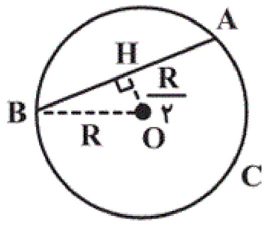
$$A\hat{E}D = \frac{۲۱۰^\circ}{۲} = ۱۰۵^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۲ و ۱۶)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$✓ $\boxed{۴}$

(محمد خندان)

چون طول وترهای AB و CD برابر است، پس طول دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ نیز برابر است. نزدیک‌ترین نقطه روی وتر AB تا مرکز دایره، وسط آن است، پس داریم:



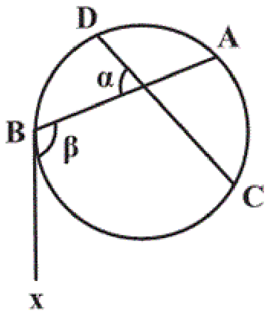
$$\begin{cases} \overset{\Delta}{BHO} \text{ قائم‌الزاویه} \\ OH = \dfrac{BO}{۲} \end{cases} \Rightarrow O\hat{B}H = ۳۰^\circ \Rightarrow B\hat{O}H = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow A\hat{O}B = ۱۲۰^\circ \xrightarrow{A\hat{O}B \text{ زاویهٔ مرکزی}} \overset{\frown}{AB} = ۱۲۰^\circ$$

حال با توجه به برابری کمان‌های AB و CD داریم:

$$\begin{cases} \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BD} \\ \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AC} \end{cases} \xrightarrow{\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}} \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

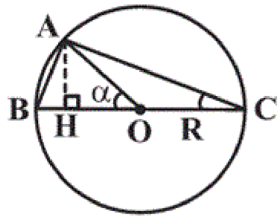
$$\Rightarrow \text{زاویهٔ بین دو وتر}\ \alpha = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} = \alpha$$



۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۸۳- (محمد خندان)

مطابق آن‌چه که در کار در کلاس صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی آمده، اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایرهٔ $C(O,R)$ بر حسب درجه مساوی α باشد، طول کمان ایجاد شده روی دایره برابر $L=\frac{\pi R}{180}\alpha$ و مساحت قطاع برابر $S=\frac{\pi R^2}{360}\alpha$ است. حال داریم:



$$\begin{cases} L=\frac{\pi R}{180}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi \Rightarrow R\alpha=60\sqrt{3} \\ S=\frac{\pi R^2}{360}\alpha=\pi \Rightarrow R^2\alpha=360 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R=2\sqrt{3} \Rightarrow BC=2R=4\sqrt{3} \\ \alpha=\widehat{AB}=30^\circ \Rightarrow \text{(زاویهٔ محاطی)}\ A\hat{C}B=\frac{\widehat{AB}}{2}=15^\circ \end{cases}$$

مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است (کمان BC نصف محیط دایره است و $B\hat{A}C=90^\circ$) و یک زاویهٔ آن برابر 15° است. طبق تمرین کتاب درسی هندسهٔ دهم، در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ 15° داشته باشد، طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ طول وتر است. پس داریم:

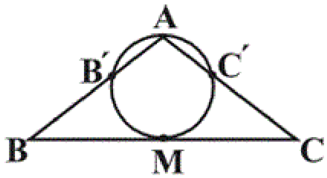
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}BC\times AH=\frac{1}{2}BC\times\frac{BC}{4}=\frac{(BC)^2}{8}=\frac{(4\sqrt{3})^2}{8}=\frac{48}{8}=6$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۲ تا ۱۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۸۴- (سیدسروش کریمی‌مداحی)

BM و CM بر دایره مماس هستند، بنابراین:



$$BM^{2} = BB'.AB \quad , \quad CM^{2} = CC'.AC$$

با توجه به این‌که M وسط ضلع BC است، پس:

$$BM = CM \Rightarrow BB'.AB = CC'.AC$$

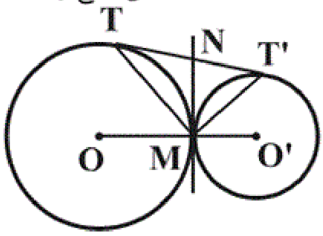
طبق فرض سؤال می‌دانیم: $AB = ۱۲$ ، $AC = ۱۵$ و $CC' = ۴$، بنابراین:

$$BB' \times ۱۲ = ۴ \times ۱۵ \Rightarrow BB' = ۵$$

(هندسه ۲- صفحهٔ ۱۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۸۵- (علی فتح‌آبادی)



می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده بر یک دایره از هر نقطهٔ خارج آن برابر یکدیگرند. مطابق شکل، اگر مماس مشترک داخلی دو دایره، مماس مشترک خارجی آنها را در نقطهٔ N قطع نماید، داریم:

$$\left.\begin{matrix} NT = NM \\ NT' = NM \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} NT = NT' \\ MN = \frac{۱}{۲}TT' \end{cases}$$

بنابراین در مثلث MTT' ، MN میانهٔ نظیر ضلع TT' و طول آن نصف طول ضلع TT' است، پس این مثلث قائم‌الزاویه است $\left(\widehat{TMT'} = ۹۰^\circ\right)$. از طرفی در دو دایرهٔ مماس خارج به شعاع R و R'، طول مماس مشترک خارجی برابر $۲\sqrt{RR'}$ است، بنابراین داریم:

$$MT^{۲} + MT'^{۲} = TT'^{۲} = \left(۲\sqrt{RR'}\right)^{۲} = ۴RR' = ۴ \times ۲ \times ۳ = ۲۴$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۸۶- (علیرضا احدی)

اگر شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر را با R و شعاع دایرهٔ کوچک‌تر را با R' نمایش دهیم، داریم:

$$d = R - R' = ۲ \qquad (*)$$

$$S - S' = ۲۰\pi \Rightarrow \pi R^{۲} - \pi R'^{۲} = ۲۰\pi$$

$$\Rightarrow (R - R')(R + R') = ۲۰ \xrightarrow{(*)} R + R' = ۱۰$$

$$\begin{cases} R + R' = ۱۰ \\ R - R' = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = ۶ \\ R' = ۴ \end{cases} \Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۸۷- (محمد خندان)

اگر محل تقاطع ارتفاع‌ها در مثلثی روی محیط آن باشد، مثلث قائم‌الزاویه است. (محل تقاطع روی رأس قائمه است.) حال با توجه به قضیهٔ فیثاغورس و رابطهٔ مساحت در مثلث داریم:

$$\begin{cases} S = \dfrac{a \times h_a}{۲} \\ S = \dfrac{b \times h_b}{۲} \\ S = \dfrac{c \times h_c}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{۲S}{h_a} \\ b = \dfrac{۲S}{h_b} \\ c = \dfrac{۲S}{h_c} \end{cases} \xrightarrow[a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}]{\text{فیثاغورس}} \frac{۱}{h_a^{۲}} = \frac{۱}{h_b^{۲}} + \frac{۱}{h_c^{۲}}$$

چون وتر، بزرگ‌ترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس کوچک‌ترین ارتفاع بر آن وارد می‌شود، پس:

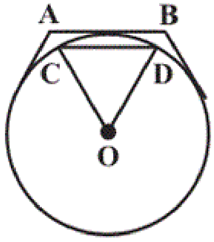
$$\begin{cases} h_a = ۱۲ \\ h_b = ۲۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۱۲^{۲}} = \frac{۱}{۲۰^{۲}} + \frac{۱}{h_c^{۲}} \Rightarrow h_c = ۱۵$$

حال با استفاده از رابطهٔ $\frac{۱}{r} = \frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c}$ می‌توان شعاع دایرهٔ محاطی داخلی را محاسبه کرد.

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۸– (محمد خندان)

با توجه به تمرین ۷ صفحهٔ ۳۰ کتاب درسی می‌توان نوشت:



(۱) طول ضلع n ضلعی منتظم محاط در دایره : $CD = 2r\sin\frac{180^\circ}{n}$

(۲) طول ضلع n ضلعی منتظم محیط بر دایره : $AB = 2r\tan\frac{180^\circ}{n}$

$$(1)\ ,\ (2) \Rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{\sin\frac{180^\circ}{n}}{\tan\frac{180^\circ}{n}} = \cos\frac{180^\circ}{n}$$

$$\xrightarrow{CD=\sqrt{3}\ ,\ n=6} \frac{\sqrt{3}}{AB} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 2$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

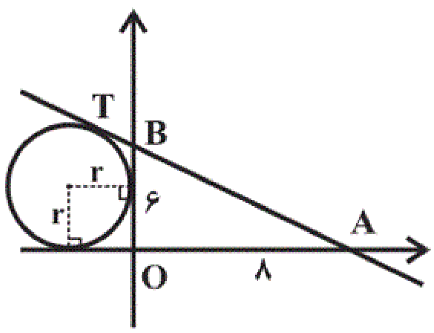
۸۹– (رضا عباسی‌اصل)

مطابق شکل، دایرهٔ مورد نظر دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع OB در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB است. داریم:

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow AB = 10$$

$$P = \frac{6+8+10}{2} = 12$$

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$



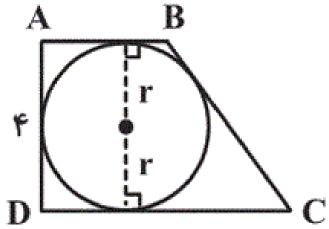
شعاع دایرهٔ محاطی خارجی : $r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{24}{12-6} = \frac{24}{6} = 4$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

$\overset{\Delta}{BHC}: BC^۲ = BH^۲ + CH^۲ \Rightarrow (۹ - x)^۲ = x^۲ + ۳^۲$

$\Rightarrow ۸۱ - ۱۸x + x^۲ = x^۲ + ۹ \Rightarrow ۱۸x = ۷۲ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow AD = ۴$



حال با توجه به این که طول AD برابر با طول قطر دایرهٔ محاطی است، پس داریم:

$AD = ۲r = ۴ \Rightarrow r = ۲$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۷۳- (محسن رجبی)

دو مثلث BOM و ABO در ارتفاع رسم‌شده از رأس B مشترک هستند، پس:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABO}}}{S_{\overset{\Delta}{BOM}}} = \frac{OA}{OM} = ۳ \qquad (۱)$$

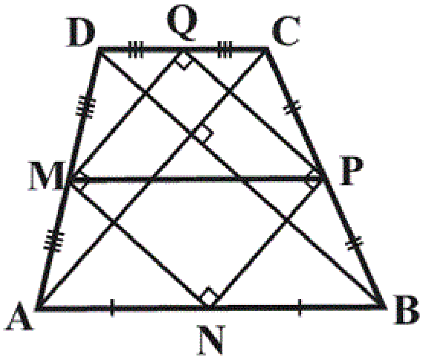
دو مثلث ABD و ABO در ارتفاع رسم‌شده از رأس A مشترک هستند، پس:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ABO}}} = \frac{BD}{BO} = \frac{۱}{۲} \qquad (۲)$$

۱✓ ۲ ۳ ۴

۷۸- (محمد خندان)

می‌دانیم اگر وسط‌های اضلاع یک چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل یک متوازی‌الاضلاع است. چون قطرهای ذوزنقهٔ ABCD بر هم عمودند، پس چهارضلعی MNPQ مستطیل است. با توجه به شکل داریم:



$$\text{محیط}(MNPQ) = ۲۸ \Rightarrow ۲(MN + NP) = ۲۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MN \times NP = ۴۸ \\ MN + NP = ۱۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MN = ۸ \\ NP = ۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} MP^۲ = MN^۲ + NP^۲ = ۸^۲ + ۶^۲$$

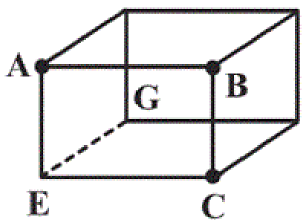
$$\Rightarrow MP = ۱۰$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها- صفحهٔ ۶۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۷۹- (محمد هجری)

تنها یالی که هم با یال AB و هم با یال BC متنافر باشد یال EG است.

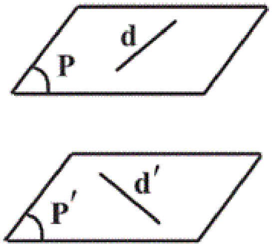


(هندسه ۱- تجسم فضایی- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۰- (محمد هجری)

مورد «الف» نادرست است. برای مثال در شکل زیر دو صفحهٔ P و P' موازی هستند ولی دو خط d و d' متنافر می‌باشند.



مورد «ب» درست است. چون اگر خطی واقع بر یکی از صفحه‌ها با صفحهٔ دیگر موازی نباشد، آن‌گاه حداقل یک نقطهٔ اشتراک با آن دارد، پس دو صفحه دارای حداقل یک نقطهٔ اشتراک هستند که با موازی بودن آن‌ها در تناقض است.

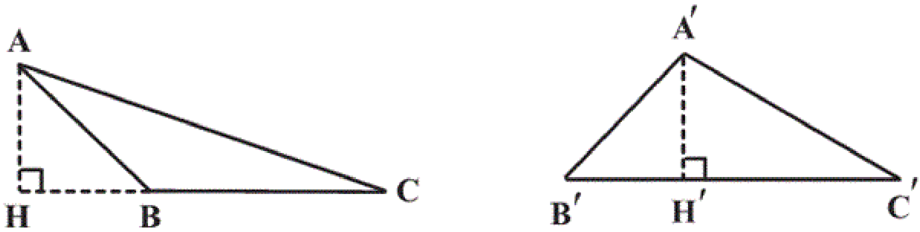
مورد «پ» درست است. اگر A نقطه‌ای خارج از صفحهٔ P باشد، بی‌شمار خط از A می‌گذرد که با P موازی باشد و همهٔ این خطوط در صفحه‌ای که از A می‌گذرد و با P موازی است قرار دارند.

(هندسه ۱- تجسم فضایی- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۱ | ۲ | ۳✓ | ۴

۷۱- (فرشاد فرامرزی)

در سایر گزینه‌ها قضیه و عکس آن برقرار است، پس هر سه قضیه دو شرطی هستند. اما برای عکس گزینهٔ «۲»: «اگر دو مثلث هم‌مساحت باشند، آن‌گاه هم‌نهشت هستند.» مثال نقض وجود دارد و این قضیه دو شرطی نیست.



$$\begin{cases} AH = A'H' \\ BC = B'C' \end{cases} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}$$

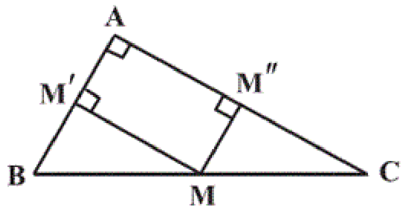
اما $\overset{\Delta}{ABC} \ncong \overset{\Delta}{A'B'C'}$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال- صفحهٔ ۲۵)

۱ | ۲✓ | ۳ | ۴

۷۲- (عادل حسینی)

در مثلث قائم‌الزاویه نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها در وسط وتر واقع است. پس با توجه به شکل داریم:



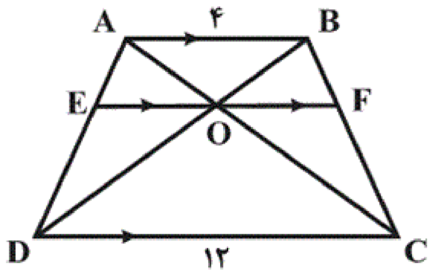
$\hat{A} = \hat{M}' = \hat{M}'' = ۹۰^\circ \Rightarrow AM''MM'$ مستطیل است

$$\Rightarrow \begin{cases} AM'' = MM' \\ AM' = MM'' \end{cases} \xrightarrow[AM'=M'B]{AM''=M''C} \begin{cases} AC = ۲AM'' = ۲MM' = ۴ \\ AB = ۲AM' = ۲MM'' = ۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{ABC \text{ قائم‌الزاویه}} BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ \Rightarrow BC = ۵$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴



با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس در دو مثلث ACD و BCD داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ACD}: OE \parallel CD \Rightarrow \dfrac{OE}{CD}=\dfrac{AE}{AD} \\ \overset{\Delta}{BCD}: OF \parallel CD \Rightarrow \dfrac{OF}{CD}=\dfrac{BF}{BC} \end{array}\right\} \xrightarrow{\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BC}} OE=OF$$

پس طول EF دو برابر طول OE است. $(EF=OE+OF=۲OE)$

حال با نوشتن دوباره تعمیم قضیهٔ تالس در دو مثلث ABD و ACD داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABD}: OE \parallel AB \Rightarrow \dfrac{OE}{AB}=\dfrac{DE}{AD} \\ \overset{\Delta}{ACD}: OE \parallel CD \Rightarrow \dfrac{OE}{CD}=\dfrac{AE}{AD} \end{array}\right. \overset{(+)}{\Rightarrow} \dfrac{OE}{AB}+\dfrac{OE}{CD}=\underbrace{\dfrac{DE}{AD}+\dfrac{AE}{AD}}_{۱}$$

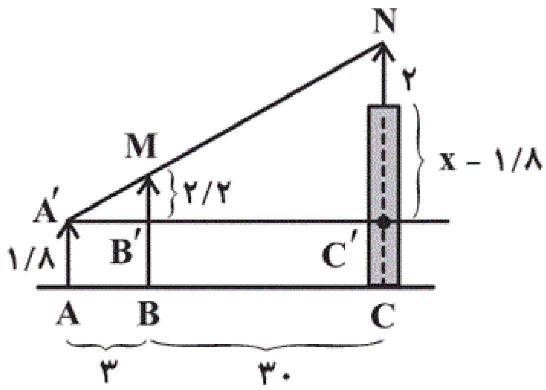
$$\Rightarrow \dfrac{OE}{۴}+\dfrac{OE}{۱۲}=۱ \Rightarrow OE=۳ \Rightarrow EF=۲OE=۶$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن- صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۱ ☐ ۲ ☐✓ ۳ ☐ ۴ ☐

(سینا محمدپور)

مطابق شکل، از نقطهٔ A' (چشم ناظر) خطی افقی رسم می‌کنیم. داریم:



$$\overset{\Delta}{A'NC'} : B'M \parallel C'N \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{B'M}{C'N} = \frac{A'B'}{A'C'} \Rightarrow \frac{۲/۲}{x+۰/۲} = \frac{۳}{۳۳}$$

$$\Rightarrow x+۰/۲ = ۲/۲\times۱۱ = ۲۴/۲ \Rightarrow x = ۲۴/۲-۰/۲ = ۲۴$$

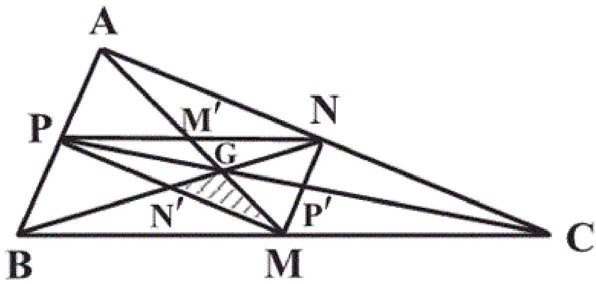
(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن- صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(محمد هجری)

اگر وسط‌های سه ضلع مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث با مساحت برابر ایجاد می‌شود، پس $S_{\overset{\Delta}{PMN}} = \frac{۱}{۴} S_{\overset{\Delta}{ABC}}$ است. پاره‌خط‌های MM'، NN' و PP' که هر کدام بخشی از میانه‌های مثلث ABC هستند، خود میانه‌های مثلث PMN می‌باشند. اگر سه میانهٔ هر مثلثی را رسم کنیم، شش مثلث با مساحت برابر ایجاد می‌شود. پس $S_{\overset{\Delta}{GMN'}} = \frac{۱}{۶} S_{\overset{\Delta}{PMN}}$ است،

بنابراین:



$$S_{\overset{\Delta}{GMN'}} = \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۴} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲۴} S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها- صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۷۷- *(محمد خندان)*

طبق فرمول پیک اگر تعداد نقاط مرزی b و تعداد نقاط درونی i باشد، اندازهٔ مساحت چندضلعی شبکه‌ای مورد نظر برابر $S = \frac{b}{۲} + i - ۱$ است. حداقل تعداد نقاط درونی یک چندضلعی‌شبکه‌ای برابر صفر است، پس $i = ۰$ می‌باشد. حال داریم:

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ \xrightarrow[i=۰]{S=۳} ۳ = \frac{b}{۲} + ۰ - ۱ \Rightarrow b = ۸$$

چون در چهارضلعی‌های مورد نظر، قطرها منصف یکدیگرند، پس از خانواده متوازی‌الاضلاع هستند و اشکال به صورت‌های زیر می‌باشند:

با توجه به اشکال مشخص می‌شود که کم‌ترین محیط متعلق به مستطیل است، پس:

$$\text{حداقل محیط} = ۲ \times (۳ + ۱) = ۸$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۶۷- *(رحیم مشتاق‌نظم)*

چون $(۸,۸)$ و $(۸,b+۱)$ عضو تابع هستند، لذا: $b + ۱ = ۸$ پس: $b = ۷$. از طرفی چون $(۱,b+۲)$ و $(۱,۲a-۱)$ نیز عضو تابع هستند، پس $۲a - ۱ = b + ۲$. لذا: $۲a - ۱ = ۹$، پس $a = ۵$. $a + b = ۵ + ۷ = ۱۲$

(ریاضی ۱- تابع- صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۷۰– (داوود بوالحسنی)

چون عدد بزرگ‌تر از ۵۰۰۰ باید باشد، پس رقم هزارگان آن می‌تواند ۵، ۷ یا ۸ باشد. برای آن‌که عدد زوج باشد، حالت‌های زیر امکان‌پذیر است:

حالت اول: رقم یکان صفر باشد: $\boxed{3}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1} \Rightarrow 3\times 3\times 2\times 1=18$

۸,۷,۵

حالت دوم: رقم یکان ۸ باشد: $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1} \Rightarrow 2\times 3\times 2\times 1=12$

۷,۵   ۸

حالت سوم: رقم یکان ۴ باشد: $\boxed{3}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1} \Rightarrow 3\times 3\times 2\times 1=18$

۵،۷،۸   ۴

طبق اصل جمع داریم: $18+12+18=48$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن- صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

۱   ۲✓   ۳   ۴

۶۳– (رحیم مشتاق‌نظم)

در عبارت $\sqrt[6m]{(-a)^2}$ زیر رادیکال نامنفی است و جواب رادیکال با فرجهٔ زوج، عددی نامنفی خواهد بود، بنابراین گزینهٔ «۴» صحیح است.

$$\sqrt[6m]{(-a)^2}=\sqrt[3m]{|a|}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری- صفحه‌های ۴۸ تا ۶۱)

۱   ۲   ۳   ۴✓

۶۱– (ناصر اسکندری)

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به صورت $a_n=a_1+(n-1)d$ است، پس:

$$\frac{a_7+a_{13}}{a_{10}}=\frac{a_1+6d+a_1+12d}{a_1+9d}=\frac{2a_1+18d}{a_1+9d}=\frac{2(a_1+9d)}{a_1+9d}=2$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱   ۲   ۳✓   ۴

۶۵– (ناصر اسکندری)

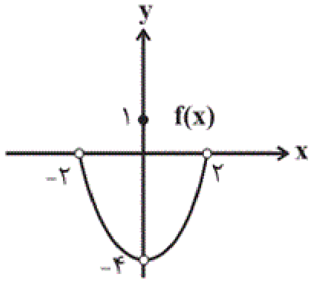
فرم کلی تابع همانی به‌صورت $f(x)=x$ می‌باشد، پس باید ضریب x یک شود و ضریب x^2 نیز صفر شود:

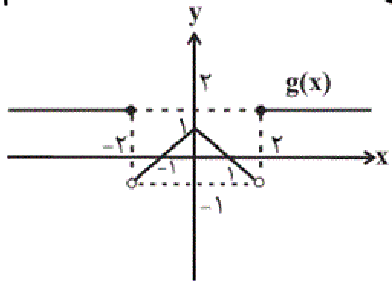
$$\begin{cases}\dfrac{a}{3}=1\Rightarrow a=3\\ 2a-b=0\xrightarrow{a=3}2(3)-b=0\Rightarrow 6-b=0\Rightarrow b=6\end{cases}$$

(ریاضی ۱- تابع- صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲)

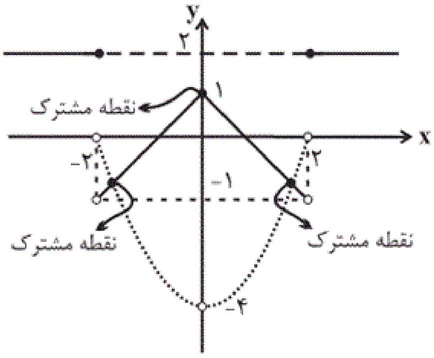
۱✓   ۲   ۳   ۴

نمودار توابع f و g در شکل‌های زیر رسم شده‌اند:





در شکل زیر، نموداری که به‌صورت نقطه‌چین نشان داده شده است، مربوط به تابع $f(x)$ است:



همان‌طور که از نمودار بالا پیداست، نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ سه نقطهٔ مشترک دارند.
(ریاضی ۱- تابع- صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۶۴- *(مهدی نصرالهی)*

چون در تعیین علامت عبارت درجهٔ دوم ax^2+bx+c، بین دو ریشه مخالف علامت a است، پس ضریب x^2 باید منفی باشد، در نتیجه:

$$a^2-9<0 \Rightarrow a^2<9 \Rightarrow -3<a<3 \xrightarrow{a\in N} a=1 \text{ یا } a=2$$

از طرفی ریشه‌های معادلهٔ $p(x)=0$، ۳ و ۰ می‌باشند.

$$x=0 \Rightarrow (a^2-9)(0)^2+m(0)+b^2-4=0$$

$$\Rightarrow b^2=4 \Rightarrow b=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} b=2\in N \\ b=-2\notin N \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \xrightarrow[1<2]{a<b}$$

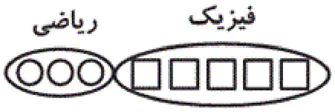
$$\Rightarrow b=2\,,\, a=1 \Rightarrow 2a+b=2+2=4$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها- صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۶۸- *(ناصر اسکندری)*

اگر کتاب‌های ریاضی را با ◯ و کتاب‌های فیزیک را با □ نمایش دهیم، کتاب‌های فیزیک در کنار هم !۵ و کتاب‌های ریاضی در کنار هم !۳ جایگشت دارند. همچنین مجموعهٔ کتاب‌های فیزیک و مجموعهٔ کتاب‌های ریاضی با هم !۲ جایگشت دارند.



پس طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۳!\times ۵!\times ۲!$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن- صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۳۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۶۹- *(داوود بوالحسنی)*

ابتدا حروف I ، T ، E ، R را به !۴ حالت کنار هم قرار می‌دهیم. سپس از ۵ جای خالی که در شکل زیر با دایره آن‌ها را نشان داده‌ایم، ۳ جای خالی انتخاب می‌کنیم

◯R◯E◯T◯I◯

و S ها را در این خانه‌ها به ۱ حالت قرار می‌دهیم، پس کل حالت‌ها برابر است با:

$$۴!\times\binom{۵}{۳}\times ۱=۲۴۰$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن- صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۴۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۶۲- *(وهاب نادری)*

$$\frac{\sin^۴ x+\cos^۲ x-۱}{\sin^۲ x-۱}=\frac{\sin^۴ x+۱-\sin^۲ x-۱}{\sin^۲ x-۱}$$

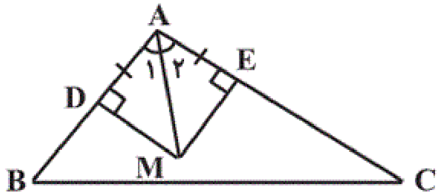
$$=\frac{\sin^۲ x(\sin^۲ x-۱)}{\sin^۲ x-۱}=\sin^۲ x$$

(ریاضی ۱- مثلثات- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۲- (محمد خندان)

مطابق شکل در دو مثلث AMD و AME داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AM = AM \\ AD = AE \\ \hat{D} = \hat{E} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع برابر}} \overset{\Delta}{AMD} \cong \overset{\Delta}{AME} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$$

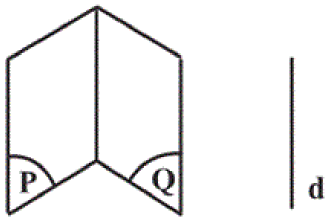
بنابراین نقطهٔ M روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال- صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

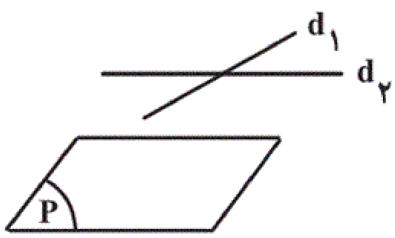
✓۱ ۲ ۳ ۴

۱۰۸- (محمدابراهیم گیتی‌زاده)

گزینهٔ «۱» نادرست است. در شکل زیر، دو صفحهٔ متقاطع P و Q هر دو با خط d موازی‌اند.



گزینهٔ «۲» نادرست است. در شکل زیر، دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ هر دو با صفحهٔ P موازی‌اند.



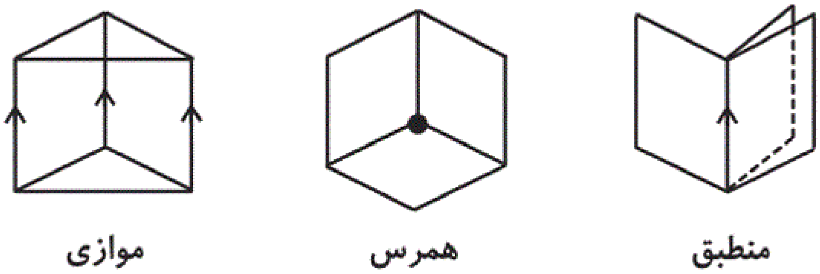
گزینهٔ «۳» نادرست است. اگر سه یال همرس یک مکعب را درنظر بگیریم، آن‌گاه هر دو یال بر یال سوم عمودند. ولی دو یال مورد نظر متقاطع‌اند.

(هندسه ۱- تجسم فضایی- صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۱ ۲ ۳ ✓۴

۱۰۹– (علی فتح‌آبادی)

فصل مشترک‌های سه صفحهٔ دو به دو متقاطع، سه حالت زیر را می‌توانند نسبت به هم داشته باشند:

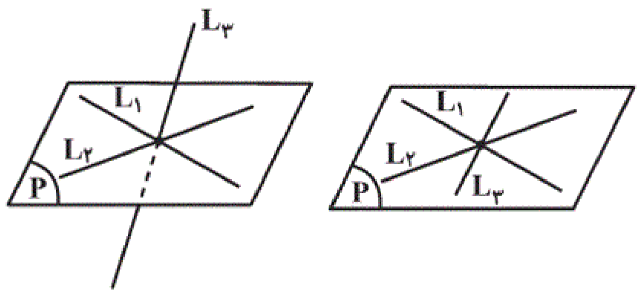


(هندسه ۱- تجسم فضایی- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۰– (حسین حاجیلو)

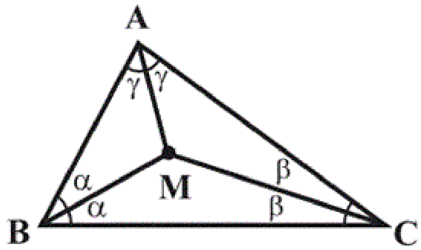
اگر خط $L_۳$، دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را در نقطهٔ مشترک آن‌ها یعنی در نقطهٔ A قطع کند، در این صورت هر سه خط از یک نقطه می‌گذرند. در این حالت، خط $L_۳$ هم می‌تواند در صفحهٔ گذرنده از خطوط متقاطع $L_۱$ و $L_۲$ واقع شود و هم می‌تواند در داخل آن صفحه قرار نگیرد. بنابراین حداکثر یک صفحه شامل این سه خط وجود دارد.



(هندسه ۱- تجسم فضایی- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۰۱ (سینا محمدپور)



نقطهٔ همرسی نیمسازها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است، بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases}\widehat{AMB}=۷k\\ \widehat{AMC}=۸k \Rightarrow \widehat{AMB}+\widehat{AMC}+\widehat{BMC}=۲۴k=۳۶۰^\circ\\ \widehat{BMC}=۹k\end{cases}$$

$$\Rightarrow k=۱۵^\circ$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\widehat{AMB}=۱۰۵^\circ\\ \widehat{AMC}=۱۲۰^\circ\\ \widehat{BMC}=۱۳۵^\circ\end{cases}$$

از طرفی مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰ درجه است، پس:

$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=۹۰^\circ\\ \widehat{MBC}+\widehat{BMC}+\widehat{MCB}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+۱۳۵^\circ+\beta=۱۸۰^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma=۴۵^\circ$$

به روش مشابه $\alpha=۳۰^\circ$ و $\beta=۱۵^\circ$ به‌دست می‌آید.

پس اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABC، برابر $\hat{A}=۲\gamma=۹۰^\circ$، $\hat{B}=۲\alpha=۶۰^\circ$ و $\hat{C}=۲\beta=۳۰^\circ$ است.

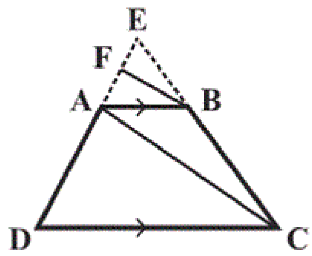
پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است و در هر مثلث قائم‌الزاویه، نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها روی رأس قائمه است.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

(حسین حاجیلو)

$$\left.\begin{array}{l} AE^{2} = EF.ED \Rightarrow \dfrac{EF}{AE} = \dfrac{AE}{ED} \\ AB \parallel CD \Rightarrow \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AE}{ED} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{EF}{AE} = \frac{EB}{EC} \qquad (*)$$



از رابطهٔ (*)، طبق عکس قضیهٔ تالس در مثلث EAC، داریم $BF \parallel AC$، پس طول ارتفاع وارد بر ضلع BF در مثلث ABF و طول ارتفاع وارد بر ضلع AC در مثلث ABC با هم برابرند و داریم:

$$k = \frac{S_{\overset{\Delta}{ABF}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \underbrace{\frac{BF}{AC}}_{\text{گزینه(۱)}} \xrightarrow{\text{تالس در مثلث } EAC} k = \underbrace{\frac{EF}{AE}}_{\text{گزینه(۴)}} \overset{(*)}{=} \frac{EB}{EC}$$

$$\xrightarrow{\text{تالس در مثلث } ECD} k = \underbrace{\frac{AB}{CD}}_{\text{گزینه(۳)}}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن- صفحه‌های ۳۰ تا ۳۷)

۱   ۲✓   ۳   ۴

مطابق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AB^۲ = BC\times BH = ۱۵\times ۱۲ = ۱۸۰ \Rightarrow AB = ۶\sqrt{۵}$$

$$AC^۲ = BC\times CH = ۱۵\times ۳ = ۴۵ \Rightarrow AC = ۳\sqrt{۵}$$

$$DH \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{DH}{AB} = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{DH}{۶\sqrt{۵}} = \frac{۳}{۱۵}$$

$$\Rightarrow DH = \frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$$

$$EH \parallel AC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{EH}{AC} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{EH}{۳\sqrt{۵}} = \frac{۱۲}{۱۵}$$

$$\Rightarrow EH = \frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵}$$

$$S_{ADHE} = DH\times EH = \frac{۶\sqrt{۵}}{۵}\times\frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵} = \frac{۷۲}{۵} = ۱۴/۴$$

(هندسه ۱– قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن– صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷ و ۴۱ تا ۴۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

در مثلث‌های متشابه OEF و ODC، نسبت مساحت‌ها با توان دوم نسبت تشابه برابر است:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OEF}}}{S_{\overset{\Delta}{ODC}}} = \left(\frac{EF}{DC}\right)^۲ \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{OEF}}}{S_{\overset{\Delta}{ODC}}} = \frac{۱}{۹}$$

اگر $S_{\overset{\Delta}{OEF}} = S$ باشد، $S_{\overset{\Delta}{ODC}} = ۹S$ است. حال از E به D وصل می‌کنیم، داریم:

$$\frac{OD}{OF} = ۳ \Rightarrow OD = ۳OF \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{EOD}} = ۳S_{\overset{\Delta}{EOF}} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{EOD}} = ۳S$$

مساحت مثلث DEC، نصف مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است، زیرا هر دو ارتفاع و قاعدهٔ یکسانی دارند.

$$S_{\overset{\Delta}{DEC}} = \frac{۱}{۲}S_{ABCD} \Rightarrow ۱۲S = \frac{۱}{۲}\times ۱۹۲ \Rightarrow S = ۸$$

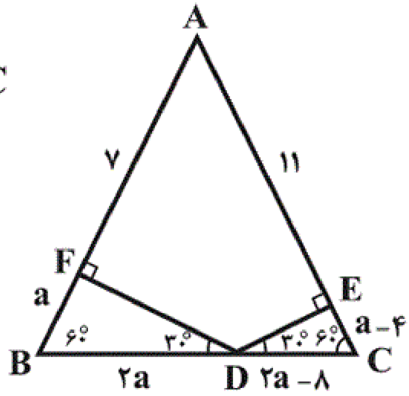
مساحت قسمت رنگی $= ۱۰S = ۸۰$

(هندسه ۱– قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن– صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۶- *(رضا عباسی‌اصل)*

مثلث‌های BFD و DEC، مثلث‌هایی قائم‌الزاویه هستند که اندازهٔ زاویه‌های حادهٔ آنها 30° و 60° است. اگر $BF = a$ باشد، آنگاه داریم:



$$AB = AC \Rightarrow AF + BF = AE + EC$$
$$\Rightarrow 7 + a = 11 + EC \Rightarrow EC = a - 4$$
$$BD = 2BF = 2a$$
$$DC = 2EC = 2a - 8$$
$$BC = AB \Rightarrow 4a - 8 = a + 7$$
$$\Rightarrow a = 5 \Rightarrow BC = 12$$

مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ روی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن، برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است، بنابراین داریم:

$$DE + DF = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها- صفحه‌های ۶۴ و ۶۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۷- *(رسول محسنی‌منش)*

اگر یک چندضلعی شبکه‌ای b نقطهٔ مرزی و i نقطهٔ درونی داشته باشد، آنگاه طبق فرمول پیک $S = \frac{b}{2} + i - 1$ است، از طرفی می‌دانیم که همواره $b \geq 3$ و $i \geq 0$، پس داریم:

$$10/5 = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow b = 2(11/5 - i) = 23 - 2i$$

$$\xrightarrow{b \geq 3} 23 - 2i \geq 3 \Rightarrow i \leq 10 \xrightarrow{i \geq 0} 0 \leq i \leq 10$$

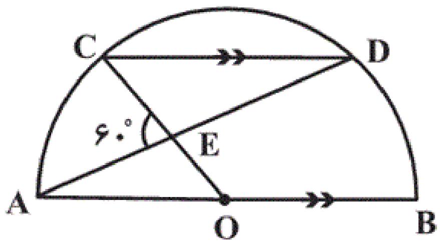
پس i می‌تواند یازده مقدار $0, 1, 2, \dots, 10$ را داشته باشد.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۹۱ *(کتاب آبی)*

چون $AB \parallel CD$ است، اندازهٔ دو کمان AC و BD برابر است. در مثلث AEO ، زاویهٔ AEC ، زاویهٔ خارجی است، پس داریم:



$$A\hat{E}C = E\hat{A}O + E\hat{O}A = ۶۰^\circ \quad (۱)$$

$$(۲)\quad \begin{cases} E\hat{O}A = \overset{\frown}{AC} \ (\text{زاویهٔ مرکزی}) \\ E\hat{A}O = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \ (\text{زاویهٔ محاطی}) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \overset{\frown}{AC} + \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = ۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۴۰^\circ$$

چون AB قطر دایره است، پس اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AB}$ ، ۱۸۰° است، پس:

$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{BD} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۴۰^\circ + \overset{\frown}{CD} + ۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۱۰۰^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۲ تا ۱۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۹۲ *(کتاب آبی)*

طبق روابط زاویه‌های خارجی و داخلی دایره داریم:

$$\hat{B} = ۶۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{QM} + \overset{\frown}{MN} + \overset{\frown}{PN} - \overset{\frown}{QP}}{۲}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{QM} + \overset{\frown}{MN} + \overset{\frown}{PN} - \overset{\frown}{QP} = ۱۲۰^\circ \quad (۱)$$

$$\hat{C} = ۹۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{QM} + \overset{\frown}{QP} + \overset{\frown}{PN} - \overset{\frown}{MN}}{۲}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{QM} + \overset{\frown}{QP} + \overset{\frown}{PN} - \overset{\frown}{MN} = ۱۸۰^\circ \quad (۲)$$

رابطهٔ (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم، داریم:

$$\Rightarrow ۲\overset{\frown}{QM} + ۲\overset{\frown}{PN} = ۳۰۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{QM} + \overset{\frown}{PN} = ۱۵۰^\circ$$

اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}_۱$ برابر با $\dfrac{\overset{\frown}{QM} + \overset{\frown}{PN}}{۲}$ است، پس $\hat{A}_۱ = ۷۵^\circ$ است.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

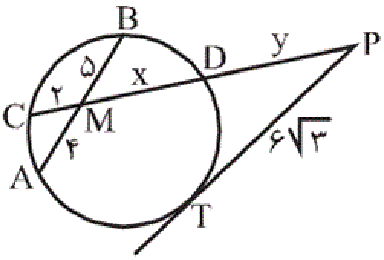
۹۳- (کتاب آبی)

$$MA\times MB=MC\times MD \Rightarrow 4\times 5=2\times x \Rightarrow x=10$$

$$PT^2=PD\times PC \Rightarrow (6\sqrt{3})^2=y(y+10+2)$$

$$\Rightarrow 108=y^2+12y \Rightarrow y^2+12y-108=0$$

$$\Rightarrow (y+18)(y-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=-18 & \text{غ ق ق} \\ y=6 \end{cases}$$



(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۹۴- (کتاب آبی)

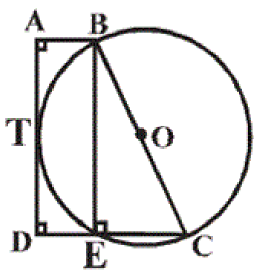
فرض می‌کنیم این دایره، قاعدهٔ CD را در نقطهٔ E قطع کند.

زاویهٔ محاطی $\hat{E}$ روبه‌رو به قطر BC در دایره قرار دارد، پس $\hat{E}=90^\circ$.

بنابراین چهارضلعی ABED مستطیل است و $AB=DE$. اگر از مرکز دایره به نقطهٔ T (نقطهٔ تماس دایره و ساق AD) وصل کنیم، آن‌گاه $OT\perp AD$، پس $DC\parallel AB\parallel OT$ است و طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم:

$$\frac{AT}{DT}=\frac{OB}{OC}=1\Rightarrow AT=DT=\frac{AD}{2}=3$$

برای قاطع DEC و مماس DT در این دایره، داریم:



$$DE\times DC=DT^2 \xrightarrow{AB=DE} AB\times DC=3^2=9$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ و ۱۸ و ۱۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۵- (کتاب آبی)

می‌دانیم اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ (در صورت وجود) برابر است با: $\sqrt{OO'^{2}-(R-R')^{2}}$. برای این دو دایره داریم:

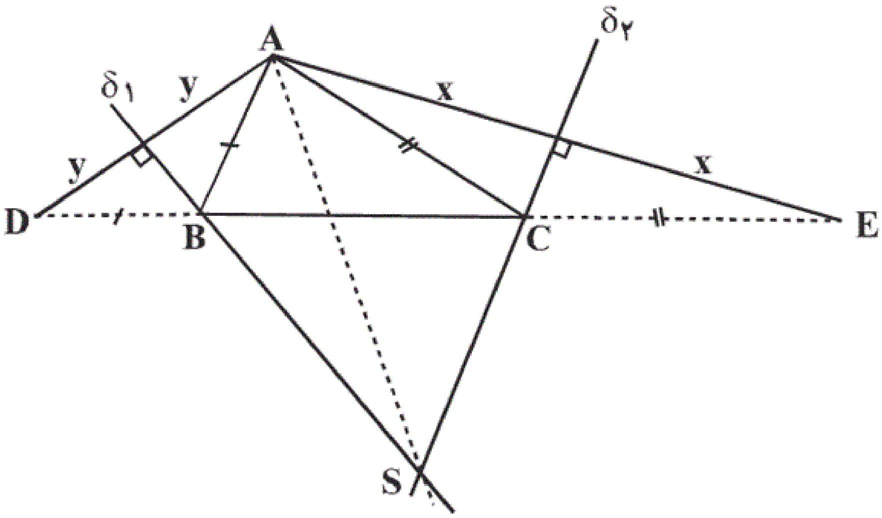
$$\sqrt{OO'^{2}-(14-6)^{2}}=15 \Rightarrow OO'^{2}-64=225$$

$$\Rightarrow OO'^{2}=289 \Rightarrow OO'=17$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

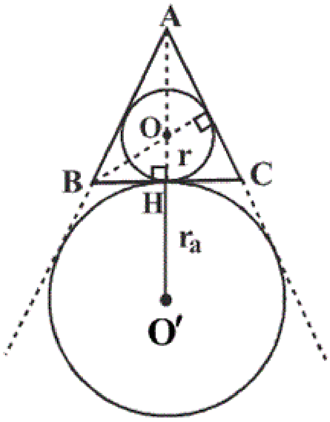
مثلث متساوی‌الساقین BAD و CAE، عمودمنصف‌های اضلاع AD و AE، همان نیمسازهای زاویه‌های روبه‌روی قاعده، یعنی $A\hat{B}D$ و $A\hat{C}E$ هستند، به عبارت دیگر می‌توان گفت که نیمسازهای زاویه‌های خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ بر δ_1 و δ_2 واقع هستند و می‌دانیم که در هر مثلث، هر دو نیمساز خارجی و نیمساز داخلی زاویهٔ سوم همرس‌اند، یعنی S روی امتداد نیمساز زاویهٔ داخلی A واقع است.



(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

همان‌طور که می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها، همان نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی است، پس مرکز دایرهٔ محاطی داخلی، همان مرکز دایرهٔ محیطی است (نقطهٔ O در شکل زیر). پس مطابق شکل باید مجموع طول شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی را حساب کنیم:



$$r = OH = \frac{۱}{۳}AH = \frac{۱}{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a) = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a$$

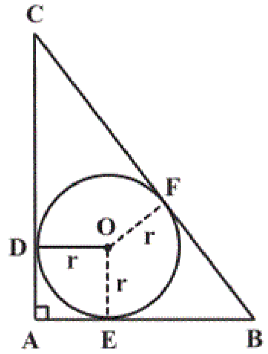
$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳}{۲}a - a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$\Rightarrow OO' = r + r_a = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a + \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}a \qquad (*)$$

$$a = \sqrt{۳} \xrightarrow{(*)} OO' = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \times \sqrt{۳} = ۲$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

✓۱ ۲ ۳ ۴



$$r = P - a \Rightarrow ۳ = \frac{a+b+۸}{۲} - a \Rightarrow ۶ = b - a + ۸ \Rightarrow a - b = ۲ \quad (*)$$

قضیهٔ فیثاغورس : $a^۲ = b^۲ + ۸^۲ \Rightarrow a^۲ - b^۲ = ۶۴$

$$\Rightarrow (a-b)(a+b) = ۶۴$$

$$\xrightarrow{(*)} ۲(a+b) = ۶۴ \Rightarrow a+b = ۳۲ \quad (**)$$

$$(*),(**) \Rightarrow \begin{cases} a-b=۲ \\ a+b=۳۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a=۱۷ \\ b=۱۵ \end{cases}$$

بنابراین اندازهٔ وتر این مثلث برابر ۱۷ است.

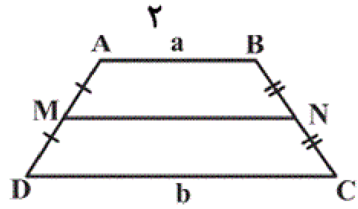
(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۵، ۲۶ و ۳۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۹- *(کتاب آبی)*

طول پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، میانگین طول دو قاعدهٔ ذوزنقه است. یعنی در شکل زیر:

$$MN = \frac{a+b}{۲}$$



طبق فرض: $MN = ۱۲ \Rightarrow \frac{a+b}{۲} = ۱۲ \Rightarrow a+b = ۲۴ \quad (*)$

اما طبق فرض سؤال ذوزنقهٔ $ABCD$ محیطی است، می‌دانیم که در هر چهارضلعی محیطی مجموع ضلع‌های روبه‌رو با هم برابر است، یعنی در ذوزنقهٔ محیطی $ABCD$ داریم: $AB + CD = AD + BC$. پس:

$$\text{محیط } ABCD = AB + CD + AD + BC$$

$$= AB + CD + AB + CD = a + b + a + b = ۲(a+b)$$

$$\xrightarrow{(*)} \text{محیط } ABCD = ۲ \times ۲۴ = ۴۸$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۰۰ (کتاب آبی)

$$A\hat{O}B = \frac{۳۶۰^\circ}{۶} = ۶۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}H = ۳۰^\circ$$

اگر مطابق شکل، شش ضلعی منتظمی را درون دایره‌ای به شعاع R محاط کنیم و از مرکز دایره، عمودی بر هر یک از ضلع‌های این شش‌ضلعی منتظم وارد کنیم، طول این عمود، برابر شعاع دایرهٔ محاطی شش ضلعی منتظم است، بنابراین:

$$\overset{\Delta}{AOH} : \cos(A\hat{O}H) = \frac{OH}{OA}$$

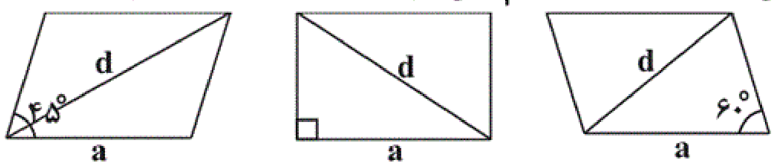
$$\Rightarrow \cos ۳۰^\circ = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

-۱۱۱ (کتاب آبی)

با معلوم بودن طول یک قطر و یک ضلع از یک متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاعی منحصر به فرد رسم نمی‌شود. (به شکل‌های زیر توجه کنید.)



(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

نکته: با افزودن یک رأس به n ضلعی، $(n-1)$ قطر به آن افزوده می‌شود، زیرا:

$$\frac{(n+1)(n-2)}{2}-\frac{n(n-3)}{2}=\frac{n^2-n-2-n^2+3n}{2}$$

$$=\frac{2n-2}{2}=n-1$$

بنابراین: $n-1=9$ و در نتیجه $n=10$.

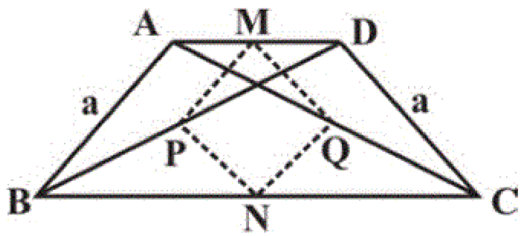
اندازهٔ هر زاویهٔ ۱۰ضلعی منتظم برابر است با:

$$\frac{8\times180^\circ}{10}=144^\circ$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها- صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$✓ $\boxed{4}$

مطابق شکل، فرض کنید که در چهار ضلعی محدب $ABCD$، داریم $AB = CD = a$، یعنی طول دو ضلع AB و CD که در مقابل هم هستند، با هم برابر است. وسط‌های دو قطر AC و BD و هم‌چنین دو ضلع AD و BC را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم تا یک چهار ضلعی پدید بیاید.



می‌دانیم که اگر وسط دو ضلع مثلث را به هم وصل کنیم، پاره‌خط حاصل موازی ضلع سوم مثلث است و طول آن، نصف طول ضلع سوم است. M و P را به هم وصل کرده‌ایم، پس در مثلث ABD طول پاره‌خط MP، نصف طول ضلع AB است، یعنی $MP = \frac{a}{2}$.

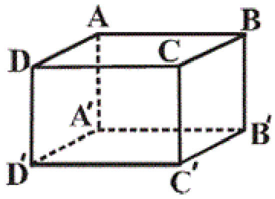
با نظیر همین استدلال در مثلث‌های ACD، ABC و BCD می‌توان نتیجه گرفت که به ترتیب $MQ = \frac{a}{2}$، $NQ = \frac{a}{2}$ و $PN = \frac{a}{2}$ یا به عبارت دیگر $MP = MQ = NQ = PN$، یعنی در چهار ضلعی $MNPQ$، طول همهٔ اضلاع با هم برابر است، اگر طول اضلاع یک چهار ضلعی محدب با هم برابر باشد، آن چهار ضلعی، لوزی است.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها- صفحه‌های ۶۱ و ۶۴)

$\boxed{1}$ $\quad$ $\boxed{2}$ $\quad$ $\boxed{3}$✓ $\quad$ $\boxed{4}$

۱۱۹- (کتاب تابستان)

نادرستی سایر گزینه‌ها را می‌توان در یک مکعب مستطیل نشان داد:



(۱) AB، خط BB' را قطع کرده ولی CC' که موازی BB' است را قطع نکرده است.

(۲) صفحهٔ $ABCD$، صفحهٔ $CBB'C'$ را قطع کرده ولی صفحهٔ $A'B'C'D'$ را که با صفحهٔ $CBB'C'$ متقاطع است، قطع نکرده و با آن موازی است.

(۳) AB، خط BB' را قطع کرده ولی $B'C'$ که متقاطع با BB' است را قطع نکرده است.

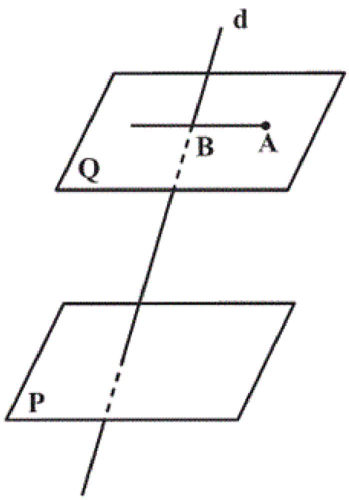
اما اگر صفحه‌ای، یکی از دو خط موازی متمایز را قطع کند، لزوماً دیگری را هم قطع می‌کند.

(هندسه ۱- تجسم فضایی- صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

۱۲۰- (کتاب تابستان)

از نقطهٔ A، صفحهٔ Q را موازی با صفحهٔ P رسم می‌کنیم. می‌دانیم اگر خطی یکی از دو صفحهٔ موازی را قطع کند، لزوماً دیگری را نیز قطع می‌کند، پس خط d و صفحهٔ Q در نقطه‌ای مانند B متقاطع هستند. حال خطی که نقاط A و B را به یکدیگر وصل می‌کند، متقاطع با خط d و موازی با صفحهٔ P است (زیرا خط گذرنده از نقاط A و B در صفحه‌ای موازی با صفحهٔ P قرار دارد). واضح است که این خط تنها خط با ویژگی‌های خواسته شده است.



(هندسه ۱- تجسم فضایی- صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

(کتاب آبی) **-۱۱۲**

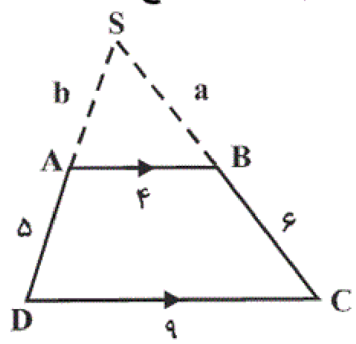
صورت درست نقیض گزاره‌های الف، ب و پ به‌ترتیب به‌صورت « a کوچک‌تر یا مساوی b است.»، «عدد صحیحی وجود دارد که مربع آن، کوچک‌تر یا مساوی صفر است.» و «مثلثی وجود دارد که محل همرسی عمودمنصف‌های آن، داخل یا خارج مثلث نیست» می‌باشد. دقت کنید که ارزش درستی نقیض یک گزاره، دقیقاً عکس ارزش درستی آن گزاره است، در حالی که در موارد ب و پ، ارزش گزاره و نقیض نوشته شده برای آن‌ها، هر دو نادرست است. همچنین در صورتی که a مساوی b باشد، نادرستی ارزش گزاره و نقیض نوشته‌شده برای آن در مورد الف نیز به سادگی قابل مشاهده است.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال- صفحهٔ ۲۳)

✓۱ ۲ ۳ ۴

(کتاب آبی) **-۱۱۳**

مطابق شکل، ساق‌های ذوزنقه ABCD به طول اضلاع $AB = ۴$ ، $CD = ۹$ ، $AD = ۵$ و $BC = ۶$ را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.



$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{b+۵} = \frac{a}{a+۶} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹b = ۴b + ۲۰ \Rightarrow b = ۴ \\ \frac{a}{a+۶} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹a = ۴a + ۲۴ \Rightarrow a = ۴/۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{SAB محیط مثلث} = ۴ + ۴/۸ + ۴ = ۱۲/۸$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن- صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۱ ۲ ۳ ✓۴

$$AH^{۲} = BH \times HC = ۴ \times ۹ = ۳۶ \Rightarrow AH = ۶$$

از طرفی چون $BC = BH + HC = ۴ + ۹ = ۱۳$ و AM میانهٔ وارد بر وتـر

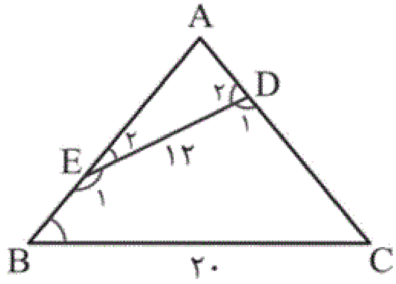
است، پس $BM = MC = \frac{۱۳}{۲}$ و در نتیجه داریم:

$$HM = BM - BH = \frac{۱۳}{۲} - ۴ = \frac{۵}{۲}$$

$$S_{\overset{\Delta}{AHM}} = \frac{۱}{۲} AH \times HM = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times \frac{۵}{۲} = ۷/۵$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن- صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓



$$\begin{cases} \hat{B}+\hat{D}_۱ = ۱۸۰^\circ \\ \hat{D}_۱+\hat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B}=\hat{D}_۲$$

$$\begin{cases} \hat{C}+\hat{E}_۱ = ۱۸۰^\circ \\ \hat{E}_۱+\hat{E}_۲ = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{C}=\hat{E}_۲$$

چون $\hat{B}=\hat{D}_۲$ و $\hat{C}=\hat{E}_۲$، پس دو مثلث ABC و ADE، طبق حالت تساوی زاویه‌ها با هم متشابه‌اند و داریم:

$$k=\frac{DE}{BC}=\frac{۱۲}{۲۰}=\frac{۳}{۵} \text{ (نسبت تشابه)}$$

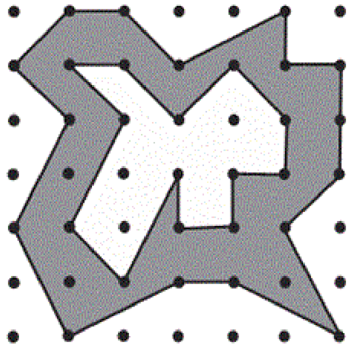
$$\frac{S(\overset{\Delta}{ADE})}{S(\overset{\Delta}{ABC})}=k^۲ \Rightarrow \frac{S(\overset{\Delta}{ADE})}{S(\overset{\Delta}{ABC})}=\frac{۹}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \frac{S(\overset{\Delta}{ABC})-S(\overset{\Delta}{ADE})}{S(\overset{\Delta}{ABC})}=\frac{۲۵-۹}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \frac{S(BCDE)}{S(\overset{\Delta}{ABC})}=\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۶۴}{۱۰۰}=۰/۶۴$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن- صفحه‌های ۳۲، ۳۹ و ۴۷)

۱ | ۲✓ | ۳ | ۴



$$= S_۲ - S_۱$$ مساحت قسمت هاشورخورده

$$= (\frac{b_۲}{۲} - ۱ + i_۲) - (\frac{b_۱}{۲} - ۱ + i_۱)$$

$$= (\frac{۱۶}{۲} - ۱ + ۱۹) - (\frac{۱۳}{۲} - ۱ + ۳)$$

$$= ۲۶ - ۸/۵ = ۱۷/۵$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴