



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضیات گسسته دوازدهم ، آشنایی با نظریه‌ی اعداد -

۱۶۶- عدد $a + (1391)^{2012}$ مضرب ۱۱ است. کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۱۶۷- اگر روز ۱۵ خرداد در یک سال، روز دوشنبه باشد، آنگاه روز ۱۳ آبان در آن سال، چه روزی از هفته است؟

- (۱) شنبه (۲) یکشنبه (۳) پنجشنبه (۴) جمعه

۱۶۸- اگر a عددی باشد که بر ۲ بخش پذیر نیست و $a+2 \mid b$ ، در این صورت عدد $3 + 3b^2 + 2a^2$ همواره بر کدام عدد بخش پذیر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۶۹- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۱، باقی‌مانده از مربع خارج قسمت به اندازه ۱۳۲ واحد کمتر است. مجموع ارقام عدد a کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۱۷۰- در یک تقسیم، مقسوم ۲۰ برابر باقی‌مانده است و باقی‌مانده حداکثر مقدار خود را دارد. مقسوم کدام است؟ (مقسوم علیه و خارج قسمت اعداد طبیعی‌اند).

- (۱) ۲۴۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۴۰۰ (۴) ۳۸۰

ریاضیات گسسته دوازدهم ، همنهشتی

۱۶۱- هرگاه $2x+7$ و $11x+5$ ، در یک دسته همنهشتی به پیمانه ۷ قرار داشته باشند، باقی‌مانده تقسیم $x^3 - 1$ بر ۷ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۶۲- اگر $3 \equiv 5x + 6y \pmod{7}$ و $4 \equiv 2x + 3y \pmod{7}$ ، آنگاه x به کدام صورت است؟ $(x, y, k \in \mathbb{Z})$

- (۱) $7k$ (۲) $7k + 3$ (۳) $7k - 5$ (۴) $7k - 1$

۱۶۳- اگر $7 \equiv 3a \pmod{11}$ و $5a \equiv 2b \pmod{11}$ ، آنگاه باقی‌مانده تقسیم عدد b بر ۱۱ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۶۴- باقی مانده تقسیم عدد 2^{25} بر ۲۱ کدام است؟

۱۱ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

۱۶۵- چند عدد شش رقمی به صورت $\overline{xy3152}$ وجود دارد که بر ۳۶ بخش پذیر باشد؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

حسابان دوازدهم ، تابع

۹۱- اگر دامنه تابع f برابر $[-2, 3]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = 1 - 3f(2x - 1)$ کدام است؟

$[-5, 5]$ (۴)

$[-2, \frac{1}{2}]$ (۳)

$[-\frac{1}{2}, 2]$ (۲)

$[0, \frac{5}{2}]$ (۱)

۹۲- اگر $f(x) = |x|$ و $g(2x) = 1 - f(2x - 1)$ باشد، مساحت سطح محدود به نمودار $y = g(x)$ و محور x ها کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۲ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۹۳- حدود k کدام باشد تا تابع $y = 2x - k[x]$ ، اکیداً صعودی باشد؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

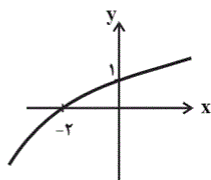
$(-\infty, 0)$ (۲)

$[0, +\infty)$ (۱)

$[2, +\infty)$ (۴)

$(-\infty, 2]$ (۳)

۹۴- اگر نمودار تابع $y = -f(x)$ به صورت شکل زیر و جواب نامعادله $f(|x|) > f\left(\frac{x+4}{3}\right)$ بازه (a, b) باشد، حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟



۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۹۵- اگر باقی مانده تقسیم $2x + bx^4 + ax^5$ بر $x + 1$ برابر ۴ باشد، باقی مانده تقسیم $x^2 + ax^2 - 2bx$ بر $x - 2$ کدام است؟

-۸ (۲)

-۱۶ (۱)

۱۶ (۴)

۸ (۳)

۹۶- تابع متناوب f با دامنه \mathbb{R} و دوره تناوب ۲، در بازه $[0, 2)$ به صورت $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{2-x} & ; 1 \leq x < 2 \end{cases}$ تعریف شده است. مقدار

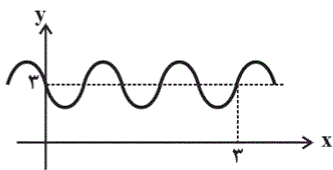
$f(-1/81)$ کدام است؟

- (۱) ۰/۹
(۲) ۰/۸۱
(۳) ۰/۰۹
(۴) ۰/۳

۹۷- دوره تناوب تابع $f(x) = \tan^3 x + \cot^3 x - 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$
(۲) $\frac{2\pi}{3}$
(۳) $\frac{\pi}{6}$
(۴) $\frac{\pi}{2}$

۹۸- اگر نمودار تابع $f(x) = a + \cos\left(b\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ به صورت زیر باشد، مقدار $f(ab)$ کدام است؟



- (۱) $\frac{6 + \sqrt{3}}{2}$
(۲) $\frac{6 - \sqrt{3}}{2}$
(۳) $\frac{7}{2}$
(۴) $\frac{5}{2}$

۹۹- خط $L: 2x - y = 1$ نمودار تابع $y = \tan(-x + 1)$ را در کدام ناحیه قطع می کند؟ $\left(-\frac{\pi}{2} < x - 1 < \frac{\pi}{2}\right)$

- (۱) اول
(۲) دوم
(۳) سوم
(۴) چهارم

۱۰۰- خط $y = -\frac{1}{2}$ ، نمودار تابع $f(x) = 2 \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - 1$ را در بازه $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ چند بار قطع می کند؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۴۱- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ داده شده‌اند. مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس AB کدام است؟

۱۴ (۲)

۱۶ (۱)

۱۰ (۴)

۱۲ (۳)

۱۴۲- دو ماتریس A و $A - I$ وارون هم هستند. ماتریس A^T کدام است؟

$A + I$ (۲)

$2A + I$ (۱)

$2A - I$ (۴)

$A - I$ (۳)

۱۴۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^T \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

$\begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$ (۲)

$\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$ (۱)

$\begin{bmatrix} -16 \\ 8 \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} 16 \\ -8 \end{bmatrix}$ (۳)

۱۴۴- A و B دو ماتریس 2×2 و تعویض پذیر هستند. اگر $A + B = -AB$ باشد، وارون ماتریس $A + I$ کدام است؟

$A + B$ (۲)

$B + I$ (۱)

$B - A$ (۴)

$B - I$ (۳)

۱۴۵- ماتریس $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ به صورت $a_{ij} = i + 1$ تعریف شده است. اگر مجموع درایه‌های این ماتریس برابر ۱۲۰ باشد، n کدام

است؟

۸۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

۱۴۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{12} کدام است؟

۱۲۸ (۲)

-۱۲۸ (۱)

۶۴ (۴)

-۶۴ (۳)

۱۴۷- فرض کنید A ماتریسی مربعی و $A^2 = 3I$ باشد. وارون ماتریس $4A + 7I$ کدام است؟

$4A - 7I$ (۲)

$4A + 7I$ (۱)

$-4A - 7I$ (۴)

$-4A + 7I$ (۳)

۱۴۸- به ازای چند مقدار k ، دستگاه

$$\begin{cases} (k+1)x + 5y = 3 \\ 2x + (2k+3)y = k+2 \end{cases}$$
 بی‌شمار جواب دارد؟

۱ (۲)

هیچ (۱)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱۴۹- کدام دستگاه زیر به ازای تمامی مقادیر k ، همواره دارای جواب منحصر به فرد است؟ ($k \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} k^2x + y = 1 \\ x + 4y = 3 \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} kx + 2y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} k^2x + 2y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} kx + y = -1 \\ 4x + ky = 2 \end{cases} \quad (۳)$$

۱۵۰- با توجه به رابطه $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-2y \\ 2x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، حاصل $x+y$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

$$\left. \begin{array}{l} 5^2 \equiv 25 \equiv 3 \\ 5^3 \equiv 125 \equiv 4 \end{array} \right\} \xrightarrow{\times} 5^{11} \equiv 12 \equiv 1 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 5^{22} \equiv 1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 201} 5^{2010} \equiv 1 \xrightarrow{\times 5^2} 5^{2012} \equiv 25 \equiv 3$$

بنابراین $a + 3$ باید مضرب ۱۱ باشد و در نتیجه کوچک‌ترین عدد طبیعی a برابر است با $11 - 3 = 8$.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امیرمسین ابومصوب)

۱۶۷ -

با توجه به اینکه تعداد روزهای هفته برابر ۷ است، کافی است تعداد روزهای بین ۱۵ خرداد تا ۱۳ آبان را به دست آورده و باقی‌مانده تقسیم آن را بر ۷

$$\text{تعداد روزها} = 16 + 3 \times 31 + 30 + 13 = 152 \Rightarrow 152 \equiv 5 \pmod{7}$$

آبان مهر تیر تاشهریور خرداد

یکشنبه	شنبه	جمعه	پنجشنبه	چهارشنبه	سه‌شنبه	دوشنبه
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

حال مطابق جدول اگر روز مبدأ یعنی دوشنبه را معادل صفر فرض کنیم، روز شنبه معادل ۵ است، پس ۱۳ آبان باید روز شنبه باشد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه ۲۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی ایمانی)

$$a+2 \text{ فرد است} \Rightarrow a \text{ فرد است} \Rightarrow 2 \mid a$$

$$b \mid a+2 \Rightarrow \text{فرد است } b$$

$$a \text{ فرد است} \Rightarrow a^2 = 8t+1 \quad (t \in \mathbb{Z})$$

$$b \text{ فرد است} \Rightarrow b^2 = 8t'+1 \quad (t' \in \mathbb{Z})$$

$$2a^2 + 3b^2 + 3 = 2(8t+1) + 3(8t'+1) + 3 = 16t + 24t' + 8 = 8q$$

به عنوان مثال نقض برای سایر گزینه‌ها $a=1$ و $b=1$ را در نظر بگیرید.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، مشابه تمرین ۱۰ صفحه ۱۶)

۴

۳

۲

۱

(نوید مپیری)

$$a = 31q + r, r = q^2 - 132 \quad \text{طبق داده‌های سؤال می‌توانیم بنویسیم:}$$

$$\Rightarrow a = 31q + q^2 - 132$$

چون $0 \leq r < 31$ ، پس خواهیم داشت:

$$0 \leq q^2 - 132 < 31 \Rightarrow 132 \leq q^2 < 163$$

$$\Rightarrow \sqrt{132} \leq q < \sqrt{163} \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} q = 12$$

$$\Rightarrow a = 31 \times 12 + 144 - 132 = 384 \Rightarrow a = 15 \text{ مجموع ارقام}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۴

۳

۲

۱

(سید عادل رضا مرتضوی)

$$a = bq + r \quad ; \quad 0 \leq r < b \xrightarrow{\text{بیشترین مقدار } r \text{ را دارد.}} r = b - 1$$

$$a = 20r \Rightarrow 20r = bq + r \Rightarrow 19r = bq$$

$$\Rightarrow 19(b-1) = bq \Rightarrow \frac{b-1}{b} = \frac{q}{19} \Rightarrow \begin{cases} b = 19 \\ q = b-1 = 18 \end{cases}$$

$$a = 20(b-1) = 20(19-1) = 20 \times 18 = 360$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۴

۳

۲

۱

$$[2x + 7]_7 = [11x + 5]_7 \Rightarrow 11x + 5 \equiv 2x + 7 \Rightarrow 9x \equiv 2 \Rightarrow 2x \equiv 2$$

$$\xrightarrow{\div 2} x \equiv 1 \Rightarrow x^3 - 1 \equiv 1^3 - 1 \equiv 0$$

(رياضيات گسسته - آشنائي با نظريه اعداد، صفحه‌هاي ۱۸ تا ۲۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(هومن نورائي)

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \equiv 4 \\ \xrightarrow{\times 2} 4x + 6y \equiv 8 \\ \left. \begin{array}{l} 5x + 6y \equiv 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x \equiv -5 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x = 7k - 5 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(رياضيات گسسته - آشنائي با نظريه اعداد، صفحه‌هاي ۱۸ تا ۲۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(امير حسين ابومسيوب)

$$\left\{ \begin{array}{l} 3a \equiv 7 \Rightarrow 15a \equiv 35 \\ 5a \equiv 2b \Rightarrow 15a \equiv 6b \end{array} \right. \Rightarrow 6b \equiv 35 \Rightarrow 6b \equiv 24 \xrightarrow{\div 6} b \equiv 4$$

(رياضيات گسسته - آشنائي با نظريه اعداد، صفحه‌هاي ۱۸ تا ۲۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مرتضى فاهيم علوي)

$$2^6 = 64 \equiv 1 \xrightarrow{\text{به توان ۵}} 2^{30} \equiv 1$$

$$\xrightarrow{\times 2^5} 2^{35} \equiv 32 \equiv 11$$

(رياضيات گسسته - آشنائي با نظريه اعداد، صفحه‌هاي ۱۸ تا ۲۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

چون عدد موردنظر بر ۳۶ بخش پذیر است، پس باید بر ۴ و ۹ بخش پذیر باشد. عدد $xy3152$ قطعاً بر ۴ بخش پذیر است، چون دو رقم سمت راست آن یعنی ۵۲ بر ۴ بخش پذیر است. بنابراین کافی است شرط بخش پذیری بر

$$xy3152 \equiv x + y + 11 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow x + y \equiv -11 \equiv 7 \pmod{9}$$

۹ را بررسی کنیم:

$$\Rightarrow x + y = 7 \text{ یا } 16$$

$$x + y = 7 \xrightarrow{x \neq 0} \begin{cases} x = 1, y = 6 \\ x = 2, y = 5 \\ x = 3, y = 4 \\ x = 4, y = 3 \\ x = 5, y = 2 \\ x = 6, y = 1 \\ x = 7, y = 0 \end{cases} \text{ و } x + y = 16 \Rightarrow \begin{cases} x = 7, y = 9 \\ x = 8, y = 8 \\ x = 9, y = 7 \end{cases}$$

بنابراین در مجموع، ده عدد به صورت $xy3152$ وجود دارد که بر ۳۶ بخش پذیر باشد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عرفان صادقی)

کافی است نامعادله زیر را حل کنیم:

$$-2 \leq 2x - 1 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq 2x \leq 4$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 2 \Rightarrow D_g = \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

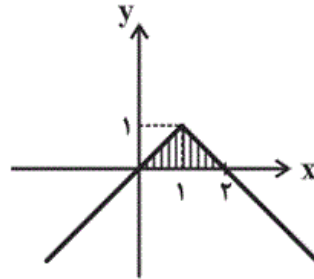
 ۱

$$g(2x) = 1 - f(2x - 1) \Rightarrow g(x) = 1 - f(x - 1) = 1 - |x - 1|$$

با انتقال یک واحد نمودار تابع f به سمت راست، قرینه کردن آن نسبت به

محور x ها و سپس انتقال یک واحد آن به بالا، نمودار تابع $y = g(x)$

حاصل می‌شود و داریم:



$$\text{مساحت سطح هاشورخورده} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

(مسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

می‌دانیم تابع مورد نظر، از پاره‌خط‌هایی تشکیل شده است که شیب آن‌ها

مثبت است. بنابراین، با توجه به اینکه $[x]$ در عدد صحیح z ناپیوسته است،

برای اکیداً صعودی بودن تابع $y = 2x - k[x]$ ، کافی است حد راست آن

در $x = z$ ، بزرگ‌تر یا مساوی با حد چپ آن در $x = z$ باشد. پس داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow z^+} (2x - k[x]) = 2z - kz \\ \lim_{x \rightarrow z^-} (2x - k[x]) = 2z - k(z - 1) = 2z - kz + k \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{شرط صعودی بودن} : 2z - kz \geq 2z - kz + k \Rightarrow k \leq 0$$

(مسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در دو حالت $x \geq 0$ و $x < 0$ ، نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0: x < \frac{x+4}{3} \Rightarrow 3x < x+4 \Rightarrow x < 2 \xrightarrow{\cap(x \geq 0)} 0 \leq x < 2 \\ x < 0: -x < \frac{x+4}{3} \Rightarrow -3x < x+4 \Rightarrow x > -1 \xrightarrow{\cap(x < 0)} -1 < x < 0 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\cup} -1 < x < 2 \Rightarrow a = -1, b = 2$$

پس حداکثر $b - a$ برابر است با: $2 - (-1) = 3$.

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۴

۳

۲

۱

(طاهر درستانی)

۹۵- 

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1: a(-1)^5 + b(-1)^4 + 2(-1) = 4$$

$$\Rightarrow a - b = -6 \quad (1)$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2: r = (2)^3 + a(2)^2 - 2b(2) = 8 + 4a - 4b$$

$$= 8 + 4(a - b) \xrightarrow{(1)} 8 + 4(-6) = -16$$

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۴

۳

۲

۱

(سیرمیلار موسوی پاشمی)

۹۶- 

در توابع متناوب با دوره تناوب T داریم:

$$f(x) = f(x + kT) \xrightarrow{T=2} f(x) = f(x + 2k) \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

حال با قرارداد $k = 5$ خواهیم داشت:

$$f(-8/11) = f(-8/11 + 2 \times 5) = f(1/19) = \sqrt{2 - 1/19} = 0/9$$

(مسئله ۲- مثلثات، صفحه ۲۴)

۴

۳

۲

۱

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x} - 1 = \frac{\sin^2 3x + \cos^2 3x}{\sin 3x \cos 3x} - 1$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 6x} - 1 = \frac{2}{\sin 6x} - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\sin 6x} - 1$$

به راحتی می‌توان نشان داد که اگر دوره تناوب تابع g ، T باشد، دوره

تناوب تابع $\frac{1}{g}$ (با شرط متناوب بودن) نیز T است. بنابراین در این سؤال،

دوره تناوب تابع f و دوره تناوب تابع $y = \sin 6x$ یکسان هستند.

$$\Rightarrow T_f = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

(مسئله ۲- مثلثات، صفحه ۲۷)

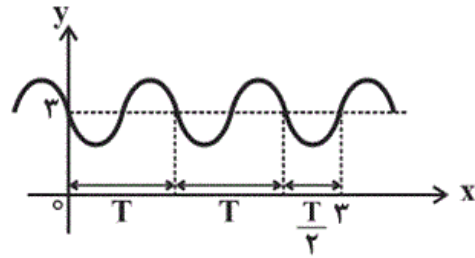
۴

۳

۲

۱ ✓

$$f(x) = a + \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\pi x\right) = a + \sin b\pi x$$



مطابق شکل داریم:

$$\frac{5}{2}T = 3 \Rightarrow T = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow |b| = \frac{5}{3}$$

چون در همسایگی $x = 0$ ، نمودار تابع بالا فرم نزولی دارد، $b = -\frac{5}{3}$ قابل

قبول است.

$$f(0) = a = 3 \Rightarrow f(x) = 3 - \sin \frac{5\pi}{3}x$$

$$\Rightarrow f(ab) = f(-5) = 3 + \sin \frac{25\pi}{3} = 3 + \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{6 + \sqrt{3}}{2}$$

(مسئله ۲- مثلثات، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

 ۴

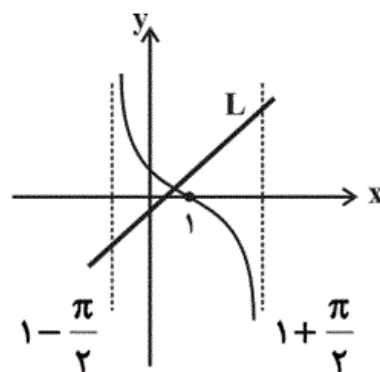
 ۳

 ۲

 ۱

خط L مشاهده می‌کنیم که در ناحیه اول نمودارهای دو تابع همدیگر را قطع

می‌کنند.



(مسئله ۲- مثلثات، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۴

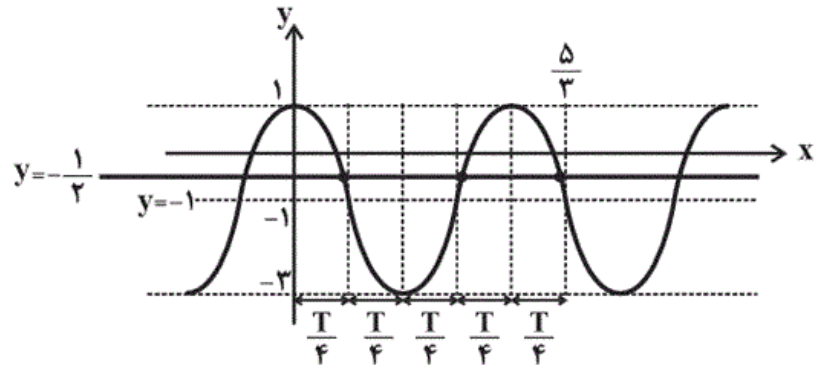
۳

۲

۱ ✓

روش اول:

نمودار تابع f و خط $y = -\frac{1}{2}$ در شکل زیر رسم شده‌اند.



لازم به ذکر است که دوره تناوب تابع f برابر است با $T = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{4}{3}$.

همچنین طول بازه $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ برابر $\frac{5T}{4}$ است.

مطابق شکل، خط موردنظر نمودار تابع f را در بازه $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ سه بار قطع

می‌کند.

روش دوم:

$$f(x) = 2 \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

یعنی کافی است، تعداد نقاط تلاقی نمودار تابع $y = \cos\frac{3\pi x}{2}$ را با خط

$y = \frac{1}{4}$ در بازه $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ به دست آوریم.

(مسئله ۲- مثلثات، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۴

۳✓

۲

۱

ستون دوم ماتریس AB ، یک ماتریس ستونی است که از ضرب کردن تمام سطرهای ماتریس A در ستون دوم ماتریس B به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 8 + 8 - 2 = 14$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۴

۳

۲

۱

$$A(A - I) = I$$

$$\Rightarrow A^2 - A \times I = I$$

$$\Rightarrow A^2 - A = I$$

$$\Rightarrow A^2 = A + I \xrightarrow{\times A} A^3 = A^2 + A = (A + I) + A = 2A + I$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴

۳

۲

۱

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -2 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = -8I$$

$$A^3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -8 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربرد، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

$$\Rightarrow (A+I)(B+I) = I$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که ماتریس $B+I$ وارون ماتریس $A+I$ است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربرد، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱ ✓

ماتریس A به صورت زیر می باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & \dots & 3 \\ 4 & 4 & \dots & 4 \\ 5 & 5 & \dots & 5 \\ 6 & 6 & \dots & 6 \end{bmatrix}$$

n ستون

مجموع درایه های هر ستون برابر $2+3+4+5+6=20$ است. در نتیجه:

$$20 \times n = 120 \Rightarrow n = 6$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه های ۱۰ و ۱۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -4I$$

$$A^{12} = (A^4)^3 = (-4I)^3 = -64I = \begin{bmatrix} -64 & 0 \\ 0 & -64 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه های ماتریس A^{12} برابر (-128) است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه های ۱۷ تا ۲۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$A^2 = 3I \xrightarrow{\times 16} 16A^2 = 48I \Rightarrow 16A^2 - 48I = \bar{0}$$

$$\Rightarrow 16A^2 - 49I = -I \Rightarrow (4A - 7I)(4A + 7I) = -I$$

$$\Rightarrow (4A + 7I)^{-1} = -(4A - 7I) = 7I - 4A$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربرد، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

شرط وجود بی‌شمار جواب برای دستگاه آن است که:

$$\frac{k+1}{2} = \frac{5}{2k+3} = \frac{3}{k+2}$$

دو معادله از این دستگاه را انتخاب کرده و حل می‌کنیم. جواب‌های مشترک

دو دستگاه مقادیری از k را که به ازای آن دستگاه بی‌شمار جواب دارد،

مشخص می‌کند.

$$\frac{k+1}{2} = \frac{5}{2k+3} \Rightarrow (2k+3)(k+1) = 10 \Rightarrow 2k^2 + 5k + 3 = 10$$

$$\Rightarrow 2k^2 + 5k - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\frac{k+1}{2} = \frac{3}{k+2} \Rightarrow (k+1)(k+2) = 6 \Rightarrow k^2 + 3k + 2 = 6$$

$$\Rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -4 \end{cases}$$

پس تنها به ازای $k = 1$ ، دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

گزینه «۲»:

$$|A| = k^2 \times 4 - 1 \times 1 = 0 \Rightarrow 4k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{2}$$

گزینه «۳»:

$$|A| = k \times k - 1 \times 4 = 0 \Rightarrow k^2 - 4 = 0 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$$

گزینه «۴»:

$$|A| = k^2 \times 1 - 2 \times (-1) = 0 \Rightarrow k^2 + 2 = 0 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد}$$

پس تنها دستگاه معادلات گزینه «۴» به ازای تمامی مقادیر k ، جواب

منحصربه‌فرد دارد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربرد، صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

۴

۳

۲

۱

فرض کنید $X = x - 2y$ و $Y = 2x + y$ باشد. اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

باشد، آنگاه داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{5 \times 4 - 3(-4)} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

A^{-1} را از سمت چپ در دو طرف معادله ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 32 \\ 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = x - 2y = 1 \\ Y = 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = 1$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱