



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



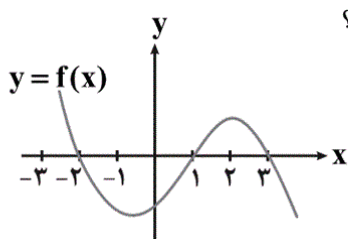
<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

۱۲۹- اگر $\alpha = \sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}$ و $\beta = \sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}$ ؛ آن‌گاه حاصل $A = (\alpha^3 + \beta^3 - 2\alpha\beta)(\alpha^3 + \beta^3 + 2\alpha\beta)$ کدام است؟
 (۱) $10\sqrt{2} + 2$ (۲) $10\sqrt{2}$ (۳) $10\sqrt{2} - 2$ (۴) $10\sqrt{2} + 1$

۱۳۰- مجموعه جواب نامعادله $|2x-1| < x^2 + 1$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ (۲) $(-2, -1) \cup (0, +\infty)$
 (۳) $(-2, 0)$ (۴) $\mathbb{R} - [-2, 0]$

۱۳۱- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل روبه‌رو باشد، دامنه تابع $y = \log(x.f(x))$ کدام است؟



- (۱) $(-2, 0) \cup (3, +\infty)$
 (۲) $(-2, 0) \cup (1, 3)$
 (۳) $(-\infty, -2) \cup (1, 3)$
 (۴) $(-2, 1) \cup (3, +\infty)$

۱۳۲- از میان ۸ ریاضی‌دان، ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق می‌توان یک کمیته ۳ نفره تشکیل داد به‌طوری که حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد؟

- (۱) ۸۰۴ (۲) ۶۸۳ (۳) ۸۴۰ (۴) ۶۰۵

۱۳۳- در جعبه‌ای ۵ مهره قرمز، ۳ مهره آبی و ۲ مهره زرد وجود دارد. از این جعبه ۴ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن که دقیقاً یک مهره قرمز و حداقل یک مهره زرد خارج شود، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{7}$ (۲) $\frac{3}{14}$ (۳) $\frac{11}{14}$ (۴) $\frac{3}{7}$

۱۳۴- مجموع طول نقاطی که روی خط $y = 2x - 3$ قرار دارند و فاصله آن‌ها از خط $5x + 2y = 11$ برابر $\sqrt{29}$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{9}$ (۲) $\frac{24}{9}$ (۳) $\frac{19}{9}$ (۴) $\frac{38}{9}$

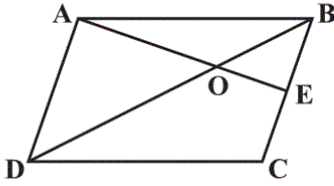
۱۳۵- حاصل ضرب جواب‌های حقیقی معادله $\sqrt{-(x+3)(2x+1)} = (x+1)(2x+5)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{11}{2}$ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۷

۱۳۶- در مثلث ABC با طول اضلاع $3\sqrt{2}$ ، $4\sqrt{2}$ و $5\sqrt{2}$ ، فاصله محل برخورد نیم‌سازهای داخلی از اضلاع مثلث کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

۱۳۷- در شکل زیر، چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است. اگر $\frac{S_{\triangle OBE}}{S_{\triangle OAD}} = \frac{4}{121}$ باشد، آن گاه نسبت $\frac{BE}{EC}$ کدام است؟



$$\frac{2}{7} \quad (2)$$

$$\frac{2}{5} \quad (4)$$

$$\frac{2}{11} \quad (1)$$

$$\frac{2}{9} \quad (3)$$

۱۲۶- جملات یک دنباله حسابی را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات در هر دسته برابر شماره آن دسته باشد؛ جمله اول دسته بیستم کدام است؟

(۱), (۵, ۹), (۱۳, ۱۷, ۲۱), (۲۵, ۲۹, ۳۳, ۳۷), ...

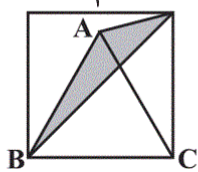
$$761 \quad (1)$$

$$765 \quad (2)$$

$$757 \quad (3)$$

$$769 \quad (4)$$

۱۲۷- مثلث متساوی الاضلاع ABC درون یک مربع به طول ضلع ۲ قرار گرفته است. مساحت مثلث رنگی کدام است؟ $(\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2})$



$$\sqrt{3}-1 \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (3)$$

۱۳۹- اگر $4^x - 2^{x+2} = 32$ و $\log(x+1) + \log(2y-x) = 1$ باشد، آن گاه مقدار y کدام است؟

$$2/75 \quad (4)$$

$$2/5 \quad (3)$$

$$2/25 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۱۴۱- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1-\sqrt{\cos x}} & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ a \sin \pi x + a & -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=0$ پیوسته است؟

$$\text{هیچ مقدار } a \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۱۴۲- در یک مسابقه علمی که چهار نفر شرکت کننده دارد، احتمال پیروزی شرکت کننده اول $\frac{1}{5}$ و احتمال پیروزی شرکت کننده دوم $\frac{1}{8}$ است. در صورتی که شرکت کننده اول پیروز شود، احتمال پیروزی شرکت کننده دوم برابر $\frac{1}{4}$ خواهد بود. احتمال اینکه حداقل یکی از دو شرکت کننده اول یا دوم پیروز شوند کدام است؟

$$\frac{13}{40} \quad (4)$$

$$\frac{2}{5} \quad (3)$$

$$\frac{5}{8} \quad (2)$$

$$\frac{11}{40} \quad (1)$$

۱۴۳- واریانس داده‌های بین چارک اول و سوم داده‌های زیر کدام است؟

۳, ۷, ۱۸, ۵, ۱۹, ۱۰, ۱۴, ۲۴, ۳, ۲۵, ۳۱, ۱, ۴

۳۳ (۴)

۳۱ (۳)

۳۰ (۲)

۳۲ (۱)

۱۴۴- مجموع ۱۰ داده آماری ۱۵۰ و واریانس آن‌ها ۱۶ می‌باشد. اگر هر داده را ۳ برابر کرده و سپس ۶ واحد از آن کم کنیم؛ ضریب تغییرات داده‌ها چند برابر می‌شود؟

$\frac{13}{39}$ (۴)

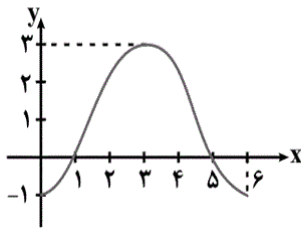
$\frac{15}{13}$ (۳)

$\frac{15}{39}$ (۲)

$\frac{13}{15}$ (۱)

ریاضی، مثلثات -

۱۴۶- اگر قسمتی از نمودار تابع $y = a + 2 \sin(\pi(bx - \frac{1}{4}))$ به صورت زیر باشد، حاصل $a - b$ کدام می‌تواند باشد؟



$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

۱۴۷- معادله مثلثاتی $\frac{\cos 2x + 4 \sin x - 3}{\sin x - 1} = 3$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

ریاضی، کاربرد مشتق -

۱۵۱- اگر نقطه $A(2, 1)$ یکی از اکسترم‌های نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، عرض از مبدأ خط واصل اکسترم‌های این تابع کدام است؟

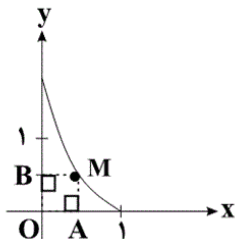
۴ (۴)

۵ (۳)

صفر (۲)

-۳ (۱)

۱۵۲- نقطه $M(x, y)$ روی منحنی $y = 2(x-1)^2$ ، $0 < x < 1$ در ناحیه اول محورهای مختصات چنان انتخاب شده است که مساحت مستطیل $AMBO$ بیشترین مقدار باشد، اندازه مساحت مستطیل کدام است؟



$\frac{5}{32}$ (۱)

$\frac{4}{32}$ (۲)

$\frac{8}{27}$ (۳)

$\frac{9}{27}$ (۴)

ریاضی، مشتق -

۱۴۹- تابع $f(x) = |x| \sqrt[3]{x^3 - x}$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۵۰- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x|x|$ ، در نقطه $(1,1)$ ، منحنی را در نقطه‌ای دیگر قطع می‌کند. طول این نقطه تقاطع کدام است؟

- (۱) $-1 + \sqrt{2}$ (۲) $-1 - \sqrt{2}$ (۳) -1 (۴) $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

ریاضی، هندسه -

۱۵۳- اگر مختصات دو سر قطر کوچک یک بیضی $B(3,8)$ و $B'(3,2)$ و خروج از مرکز آن $\frac{2}{3}$ باشد، طول قطر کانونی آن کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{\sqrt{5}}$ (۲) $\frac{18\sqrt{5}}{5}$ (۳) $\frac{9}{5}$ (۴) $\frac{81}{5}$

۱۵۴- معادله دایره‌ای به شعاع ۳ که در ربع اول در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور طول‌ها مماس باشد، کدام است؟

- (۱) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$ (۲) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$
(۳) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 16 = 0$ (۴) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

ریاضی، تابع -

۱۴۵- اگر $f(x) = \frac{1}{4}x - 8$ ، $g(x) = x^3$ باشد، حاصل $(f \circ g)^{-1}(8) - (f^{-1} \circ g^{-1})(8)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -16 (۳) 36 (۴) -36

ریاضی، احتمال -

۱۵۵- در یک کیسه ۴ توپ آبی، ۳ توپ قرمز و ۵ توپ سبز وجود دارد. احتمال پرباد بودن توپ برای توپ آبی $\frac{3}{5}$ ، برای توپ قرمز، $\frac{2}{3}$

و برای توپ سبز، $\frac{2}{5}$ است. به تصادف یک توپ از کیسه بیرون می‌آوریم؛ با چه احتمالی این توپ پر باد است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{7}{15}$ (۳) $\frac{8}{15}$ (۴) $\frac{3}{5}$

ریاضی، ترکیبی -

۱۴۸- در تابع $f(x) = \frac{3x - \sqrt{x^2 + 16x}}{ax^n + b}$ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = c$ باشند، آن‌گاه عدد حقیقی c کدام است؟ ($c \neq 0$)

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۴۰- اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - \sqrt{x^2 + a}}{x - 3} = b$ ، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟ (b عدد حقیقی و مخالف صفر است).

- (۱) 18 (۲) 27 (۳) 9 (۴) -6

۱۲۸- تمام محدوده a کدام باشد تا سهمی به معادله $y = (a+6)x^2 + (a-2)x + 1$ از ناحیه چهارم محورهای مختصات عبور نکند؟

- (۱) $-2 < a < -6$ (۲) $a \leq -2$ (۳) $a \geq -2$ (۴) $a > 5$

۱۳۸- نمودار تابع $y = \sqrt{1-2x}$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. نمودار جدید خط $y = x + 9$ را در نقطه $A(\alpha, \beta)$ قطع می‌کند. حاصل $\alpha + \beta$ چقدر است؟

۳ (۴)

-۱ (۳)

۹ (۲)

-۲۰ (۱)

۱۲۹-

(میشم فلاح)

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$A = (\alpha^3 + \beta^3 - 2\alpha\beta)(\alpha^3 + \beta^3 + 2\alpha\beta) = (\alpha^3 + \beta^3)^2 - 4(\alpha\beta)^2$$

$$= \alpha^6 + \beta^6 + 2(\alpha\beta)^3 - 4(\alpha\beta)^2$$

$$\alpha\beta = \sqrt[3]{(\sqrt{5} + 7)(\sqrt{5} - 7)} = 1$$

$$A = 5\sqrt{2} - 7 + 5\sqrt{2} + 7 + 2 - 4 = 10\sqrt{2} - 2$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۳ تا ۶۸)

۴

۳✓

۲

۱

۱۳۰-

(علی مرشد)

نکته: اگر $|u| < a$ آن‌گاه $-a < u < a$ است ($a > 0$). از طرفی

می‌دانیم که به ازای هر x ، مقدار $x^2 + 1$ مثبت است:

$$|2x - 1| < x^2 + 1 \Rightarrow -x^2 - 1 < 2x - 1 < x^2 + 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x^2 - 1 < 2x - 1 \Rightarrow x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \\ 2x - 1 < x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \end{array} \right.$$

بنابراین جواب نامعادله به صورت $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ خواهد بود.

$$(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - [-2, 0]$$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳)

۴✓

۳

۲

۱

۱۳۱-

(محمدرامین روانبفش)

همانطور که می‌دانید عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد، پس داریم:

$$x.f(x) > 0 \xrightarrow{\text{هم علامت‌اند } f(x) \text{ و } x} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{x > 0, f(x) > 0} x \in (1, 3) \\ \xrightarrow{x < 0, f(x) < 0} x \in (-2, 0) \end{array} \right.$$

بنابراین دامنه تابع $y = \log(x.f(x))$ برابر $(-2, 0) \cup (1, 3)$ است.

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۸)

۴

۳

۲✓

۱

تعداد کل حالاتی که می‌توان کمیته ۳ نفره تشکیل داد:

$$\binom{19}{3} = \frac{19 \times 18 \times 17}{3 \times 2} = 969$$

تعداد کمیته‌های سه نفره که هیچ ریاضی‌دان عضو آن نیست:

$$\binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2} = 165$$

تعداد کل کمیته‌هایی که حداقل یک ریاضی‌دان در آن عضو است:

$$969 - 165 = 804$$

(شمارش، بدون شمردن) (ریاضی، صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

-۱۳۳

(سهند ولی‌زاده)

فضای نمونه‌ای انتخاب ۴ مهره از بین ۱۰ مهره است:

$$n(S) = \binom{10}{4} = 210$$

$$\text{دقیقاً یک قرمز و حداقل یک زرد: } \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{2} + \binom{5}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{10}{4}}$$

$$= \frac{30 + 15}{210} = \frac{45}{210} = \frac{3}{14}$$

(آمار و احتمال) (ریاضی، صفحه‌های ۱۴۶، ۱۴۷ و ۱۵۰)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

-۱۳۴

(مصطفی کرمی)

نقطه $M(a, 2a-3)$ را روی خط $y = 2x - 3$ در نظر می‌گیریم و فرمول فاصله نقطه از خط را می‌نویسیم:

$$\sqrt{29} = \frac{|5a + 4a - 6 - 11|}{\sqrt{29}}$$

$$\Rightarrow |9a - 17| = 29 \Rightarrow \begin{cases} 9a_1 - 17 = 29 \Rightarrow a_1 = \frac{46}{9} \\ 9a_2 - 17 = -29 \Rightarrow a_2 = \frac{-12}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 = \frac{34}{9}$$

(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۸ و ۹)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

اگر $2x^2 + 7x = t$ فرض شود، داریم:

$$(x+1)(2x+5) = 2x^2 + 7x + 5 = t + 5$$

$$(x+3)(2x+1) = 2x^2 + 7x + 3 = t + 3$$

حال معادله ساده‌تری بر حسب t به شکل زیر خواهیم داشت:

$$t + 5 = \sqrt{-t - 3} \xrightarrow{\text{با شرط } -5 \leq t \leq -3 \text{ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.}} t^2 + 10t + 25 = -t - 3$$

$$\Rightarrow t^2 + 11t + 28 = 0 \Rightarrow (t+4)(t+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = -7 \end{cases} \text{ غیرقابل قبول}$$

$t = -4$

$$2x^2 + 7x = -4 \Rightarrow 2x^2 + 7x + 4 = 0 \Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{4}{2} = 2$$

(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

۴

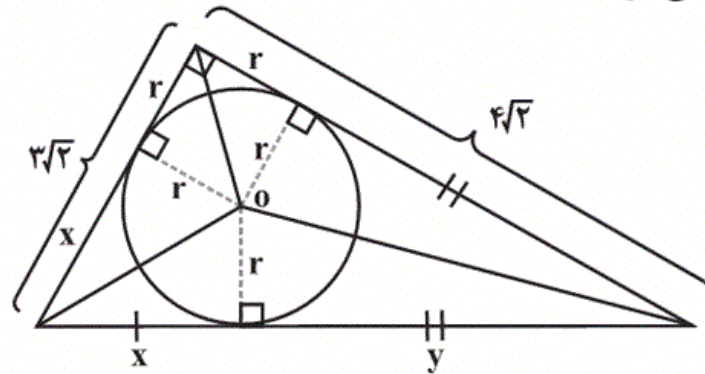
۳

۲✓

۱

با توجه به اندازه اضلاع، مثلث قائم‌الزاویه است.

محل برخورد نیم‌سازهای داخلی مرکز دایره محاطی داخلی است پس فاصله آن از هر سه ضلع مثلث یکسان است که همان شعاع دایره (r) است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:



با توجه به شکل داریم:

$$x + y = 5\sqrt{2} \Rightarrow (3\sqrt{2} - r) + (4\sqrt{2} - r) = 5\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، برگرفته از تمرین ۳، صفحه ۳۰)

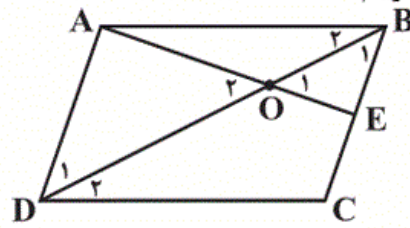
۴

۳✓

۲

۱

با استفاده از خواص خطوط موازی و مورب داریم:



$$AD \parallel BE \xrightarrow{\text{مورب } DB} \left. \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{زز}} \triangle OBE \sim \triangle OAD$$

$$\Rightarrow \frac{S_{OBE}}{S_{OAD}} = \left(\frac{BE}{AD}\right)^2 = \frac{4}{121} \Rightarrow \frac{BE}{AD} = \frac{2}{11}$$

در متوازی الاضلاع داریم: $AD = BC$ ، بنابراین:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{2}{11} \Rightarrow \frac{BE}{BC - BE} = \frac{2}{11 - 2}$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{2}{9}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱، ۳۲، ۴۲ تا ۴۴ و ۴۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

تعداد جملات قبل از ورود به دسته بیستم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 19 = \frac{(19)(20)}{2} = 190$$

دسته بیستم: $(a_{191}, \dots, a_{210})$

۱، ۵، ۹، ۱۳، ۱۷، ۲۱، ...

با توجه به دنباله حسابی داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)(4) = 4n - 3$$

$$a_{191} = 4(191) - 3 = 761$$

(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

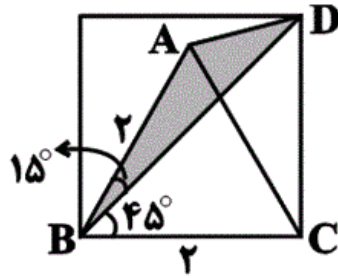
۴

۳

۲

۱ ✓

چون مثلث ABC متساوی الاضلاع است، پس $AB = BC = 2$ می باشد.
 به علاوه BD قطر مربع و برابر با $2\sqrt{2}$ است. زاویه $\hat{ABD}$ برابر با $15^\circ = 45^\circ - 60^\circ$ است. پس:



$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \times BD \times \sin 15^\circ$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$$

(مثلثات) (ریاضی ۱، صفحه های ۳۳ تا ۳۵)

۴

۳

۲✓

۱

اول مقدار x را از معادله $4^x - 2^{x+2} = 32$ حساب می کنیم:

$$\xrightarrow{2^x=t} t^2 - 4t - 32 = 0 \Rightarrow (t+4)(t-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 8 \end{cases}$$

غیرقابل قبول $t = -4$

$$\Rightarrow 2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

حال $x = 3$ را در معادله دوم جایگذاری می کنیم:

$$\log(x+1) + \log(2y-x) = 1$$

$$\xrightarrow{x=3} \log((4)(2y-3)) = \log 10$$

$$\Rightarrow 4(2y-3) = 10 \Rightarrow 8y - 12 = 10 \Rightarrow 8y = 22$$

$$\Rightarrow y = 2/75$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی ۲، صفحه های ۱۰۳، ۱۰۴ و ۱۱۲ تا ۱۱۴)

۴✓

۳

۲

۱

برای پیوستگی تابع در نقطه $x=0$ ، حدود چپ و راست و مقدار تابع در این نقطه باید با هم برابر باشند:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sqrt{\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \sqrt{\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)}{1 - \sqrt{\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x) = 2 \times 2 = 4\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a \sin \pi x + a) = 0 + a \Rightarrow a = 4$$

(مدر و پیوستگی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۲)

۴

۳✓

۲

۱

(کیا مقدس‌نیاک)

$P(A)$: احتمال پیروزی شرکت کننده اول

$P(B)$: احتمال پیروزی شرکت کننده دوم

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{1}{8}, P(B|A) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right) = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{8 + 5 - 2}{40} = \frac{11}{40}$$

(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۲)

۴

۳

۲

۱✓

داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$1, 3, \boxed{3, 4}, 5, 7, \boxed{10}, 14, 18, \boxed{19, 24}, 25, 31$$

$$Q_1 = \frac{3+4}{2} = 3.5 \quad Q_2 \quad Q_3 = \frac{19+24}{2} = 21.5$$

داده‌های بین چارک اول و سوم: ۴, ۵, ۷, ۱۰, ۱۴, ۱۸, ۱۹

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{4+5+7+10+14+18+19}{7} = 11$$

$$\sigma^2 = \frac{(-7)^2 + (-6)^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 3^2 + 7^2 + 8^2}{7}$$

$$= \frac{224}{7} = 32$$

(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۵۵، ۱۵۷ تا ۱۵۹، ۱۶۱ و ۱۶۲)

۴

۳

۲

۱✓

(رضا ذاکر)

میانگین داده‌ها $15 = \frac{150}{10}$ و انحراف معیار آن‌ها برابر $4 = \sqrt{16}$ است.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4}{15}$$

اگر هر داده را ۳ برابر کرده و سپس ۶ واحد از آن کم کنیم؛ میانگین داده‌های جدید از ۳ برابر میانگین داده‌های قبلی ۶ واحد کمتر می‌شود:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = 3\bar{x}_{\text{قدیم}} - 6 = 3(15) - 6 = 39$$

همچنین انحراف معیار داده‌ها نیز ۳ برابر می‌شود:

$$\sigma_{\text{جدید}} = 3 \times \sigma_{\text{قدیم}} = 3 \times 4 = 12$$

$$\Rightarrow CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\bar{x}_{\text{جدید}}} = \frac{12}{39} \Rightarrow \frac{CV_{\text{جدید}}}{CV_{\text{قدیم}}} = \frac{\frac{12}{39}}{\frac{4}{15}} = \frac{15}{13}$$

(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۵۵، ۱۵۷ تا ۱۶۰ و ۱۶۰)

۴

۳✓

۲

۱

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = a + 2 \sin(b\pi x - \frac{\pi}{2}) = a - 2 \sin(\frac{\pi}{2} - b\pi x) \\ = a - 2 \cos(b\pi x)$$

از آنجا که دوره تناوب تابع برابر ۶ می‌باشد، داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = 6 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

از آنجا که تابع مد نظر ما تابع کسینوسی می‌باشد هر دو مقدار b قابل قبول است. با توجه به نمودار تابع داریم:

$$\begin{cases} y_{\max} = 3 = |-2| + a \\ y_{\min} = -1 = -|-2| + a \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

$$a - b = 1 - (-\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$$

پس داریم:

$$a - b = 1 - (\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$$

(مثلاًت) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۸۳ و ۸۸ تا ۹۴)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷)

۴

۳✓

۲

۱

$$\cos 2x + 4 \sin x - 3 = 3 \sin x - 3$$

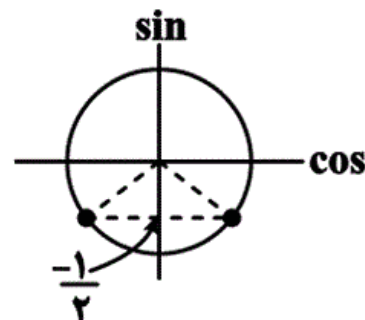
$$\Rightarrow \cos 2x + \sin x = 0 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow (2 \sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \text{ (ریشه مخرج)} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، در بازه $[0, 2\pi]$ معادله $\sin x = -\frac{1}{2}$ فقط

دو ریشه دارد.



(مثلاًت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۳ تا ۴۸)

۴

۳

۲✓

۱

(شهرام ولایی)

نقطه $A(2,1)$ روی تابع $f(x)$ قرار دارد. پس باید در معادله آن صدق کند:

$$A(2,1) \Rightarrow 8 + 4b + d = 1 \Rightarrow 4b + d = -7$$

$$f(x) = x^3 + bx^2 + d \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 3(2)^2 + 2b(2) = 0 \Rightarrow 12 + 4b = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ d = 5 \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow B(0,5) \\ x = 2 \Rightarrow A(2,1) \end{cases}$$

نقاط $A(2,1)$ و $B(0,5)$ روی خط واصل اکسترمم‌های این تابع قرار دارند. همان‌طور که می‌بینید عرض از مبدأ این خط برابر ۵ است.

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹)

۴

۳✓

۲

۱

(رضا ذاکر)

معادله مساحت مستطیل را می‌نویسیم:

$$S = xy = x \times 2(x-1) = 2x(x^2 - 2x + 1) = 2x^3 - 4x^2 + 2x, \quad 0 < x < 1$$

برای یافتن نقاط بحرانی کافی است ریشه معادله $S'(x) = 0$ را بیابیم:

$$S'(x) = 6x^2 - 8x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{بحرانی نیست } x=1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

x	۰	$\frac{1}{3}$	۱
$S'(x) = 6x^2 - 8x + 2$	+	۰	-
$S(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x$	۰	$\nearrow \frac{8}{27}$	$\searrow ۰$

ماکزیمم مطلق

از جدول فوق دیده می‌شود که بیش‌ترین مقدار مساحت مستطیل، برابر

$$\frac{8}{27} \text{ است.}$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۰)

۴

۳✓

۲

۱

تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = |x| \sqrt[3]{x(x-1)(x+1)}$$

تابع بالا حاصل ضرب یک تابع قدرمطلق و یک تابع رادیکالی است. می‌دانیم که تابع رادیکالی در $x = 0, \pm 1$ مشتق‌ناپذیر است. با توجه به آن که تابع قدرمطلق در $x = \pm 1$ مشتق‌پذیر (و ناصفر) است؛ پس تابع f در $x = \pm 1$ مشتق‌ناپذیر است. با توجه به آن که هم تابع قدرمطلق و هم تابع رادیکالی در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر هستند. برای بررسی مشتق‌پذیری در $x = 0$ باید از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \sqrt[3]{x(x-1)(x+1)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \sqrt[3]{x}}{x} \times \sqrt[3]{(x-1)(x+1)} = 0 \times (-1) = 0 \end{aligned}$$

پس تابع در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۲)

۴

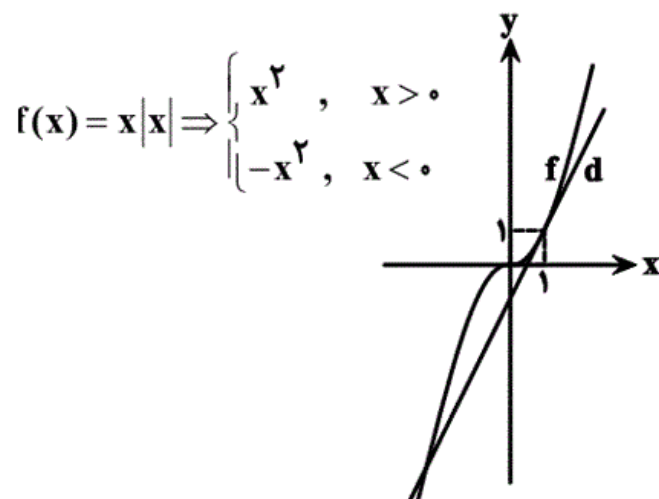
۳✓

۲

۱

(محمدرجاء مفسنی)

مطابق شکل ابتدا باید ضابطه خط d را بیابیم. شیب این خط برابر با شیب خط مماس بر منحنی در $x = 1$ است:



$$f(x) = x|x| \Rightarrow \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$$x > 0: f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$$

۴

۳

۲✓

۱

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 9 + \frac{4}{9}a^2 \Rightarrow \frac{5}{9}a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = \frac{81}{5} \Rightarrow a = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

$$\text{قطر کانونی} = 2a = 2 \times \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{18}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۲)

۴

۳

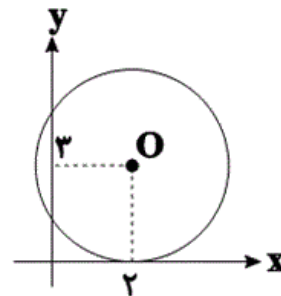
۲ ✓

۱

(امیر نزهت)

۱۵۴-

با توجه به اطلاعات مسئله، شکل زیر را رسم می کنیم.



$$\begin{cases} O(2, 3) \\ R = 3 \end{cases}$$

مطابق شکل داریم:

حال معادله دایره را می نویسیم:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$$

(هندسه) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۸ و ۱۴۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(\lambda) = (g \circ f)^{-1}(\lambda) = b \Rightarrow (g \circ f)(b) = \lambda$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}b - \lambda\right)^3 = \lambda \Rightarrow \frac{1}{4}b - \lambda = 2 \Rightarrow b = 40$$

$$(f \circ g)^{-1}(\lambda) - (f^{-1} \circ g^{-1})(\lambda) = 4 - 40 = -36$$

در نتیجه:

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ و ۲۴ تا ۲۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

با توجه به این که تعداد توپ‌ها برابر ۱۲ است، احتمال آبی بودن آن $\frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$ ،

احتمال قرمز بودن آن $\frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$ و احتمال سبز بودن آن $\frac{۵}{۱۲}$ است.

$$\begin{array}{l} \nearrow \text{آبی} \quad \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{احتمال پر باد بودن}} \frac{۳}{۵} \rightarrow \frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۱}{۵} \\ \rightarrow \text{قرمز} \quad \frac{۱}{۴} \xrightarrow{\text{احتمال پر باد بودن}} \frac{۲}{۳} \rightarrow \frac{۱}{۴} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۶} \\ \searrow \text{سبز} \quad \frac{۵}{۱۲} \xrightarrow{\text{احتمال پر باد بودن}} \frac{۲}{۵} \rightarrow \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۱}{۶} \end{array}$$

$$\text{احتمال کل: } \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۶+۵+۵}{۳۰} = \frac{۱۶}{۳۰} = \frac{۸}{۱۵}$$

(احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۸)

۴

۳✓

۲

۱

$$\Rightarrow n=1, a=2$$

چون c عددی حقیقی مخالف صفر است، باید حد مخرج کسر صفر باشد؛ چون حد صورت صفر است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - \sqrt{x^2 + 16x}}{2x + b} = c \Rightarrow 4 + b = 0 \Rightarrow b = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - \sqrt{x^2 + 16x}}{2x - 4} : \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8x(x-2)}{2(x-2)(3x + \sqrt{x^2 + 16x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8x}{2(3x + \sqrt{x^2 + 16x})} = \frac{2}{3} = c$$

(ترکیبی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۲)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳ و ۵۸ تا ۶۴)

۴

۳

۲

۱✓

در محاسبه حد داده شده وقتی x به ۳ میل می کند، مخرج به صفر میل می کند؛ باید صورت هم به صفر میل کند تا جواب حد نامتناهی نشود.

$$6 - \sqrt{9 + a} = 0 \Rightarrow 6 = \sqrt{9 + a} \Rightarrow 36 = 9 + a \Rightarrow a = 27$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 27}}{x - 3} \times \frac{2x + \sqrt{x^2 + 27}}{2x + \sqrt{x^2 + 27}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - (x^2 + 27)}{(x - 3)(2x + \sqrt{x^2 + 27})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x - 3)(x + 3)}{12(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x + 3)}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{27}{\frac{3}{2}} = 18$$

(ترکیبی) (ریاضی ۲، صفحه های ۱۳۰ تا ۱۳۲)

(ریاضی ۳، صفحه های ۵۱ تا ۵۳)

۴

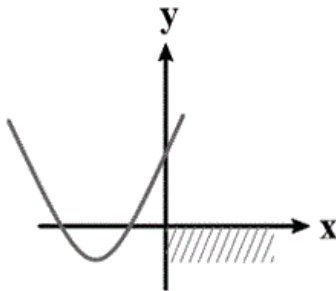
۳

۲

۱ ✓

در حالت های زیر نمودار سهمی از ناحیه چهارم عبور نمی کند.

حالت اول:



$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + 6 > 0 \Rightarrow a > -6 \\ b > 0 \Rightarrow a - 2 > 0 \Rightarrow a > 2 \\ \Delta > 0 \Rightarrow (a - 2)^2 - 4(a + 6)(1) > 0 \\ \Rightarrow a^2 - 8a - 20 > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 10 \\ a < -2 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow a > 10 \quad (1)$$

۴

۳ ✓

۲

۱

(شهرام ولایی)

در عبارت داده شده به جای x ، $(x+1)$ قرار داده و یک واحد به عبارت اضافه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt{1-2(x+1)}+1 = \sqrt{-2x-1}+1 \\
 \sqrt{-2x-1}+1 &= x+9 \Rightarrow \sqrt{-2x-1} = x+8 \\
 \Rightarrow -2x-1 &= x^2+16x+64 \\
 \Rightarrow x^2+18x+65 &= 0 \Rightarrow (x+13)(x+5) = 0 \\
 \Rightarrow \begin{cases} x = -13 & \text{غیر قابل قبول} \\ x = -5 & \text{قابل قبول} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$x = -5 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(-5, 4)$$

$$(-5, 4) = (\alpha, \beta) \Rightarrow \alpha + \beta = -5 + 4 = -1$$

در نتیجه:

(ترکیبی) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴، ۵۲ و ۵۳)

۴

۳✓

۲

۱