



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضی عمومی، کاربرد مشتق

۸۴- مجانب مایل نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt[3]{x(1-x)^2}$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به کدام طول قطع می‌کند؟

- ۱ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) -1 (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴)

۹۱- اگر f تابع همانی و تمام نقاط تابع $f-g$ بحرانی باشند، کدام ضابطه برای g مناسب است؟

- ۱ (۱) $y=2$ (۲) $y=x-1$ (۳) $y=[x]$ (۴) $y=|x|$

۹۲- مجموع مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f به معادله $f(x) = 1 + x^2 + \sqrt{1-x^2}$ روی دامنه‌اش کدام است؟

- ۱ (۱) $2/25$ (۲) $3/25$ (۳) $4/25$ (۴) $5/25$

۹۳- برای توابع مشتق‌پذیر $f(x)$ و $g(x)$ در \mathbb{R} داریم: $f'(x) = (5-x)g(x)$ ، اگر $g(5) = \frac{-1}{3}$ ، نقطه‌ای به طول $x=5$ برای تابع

$f(x)$ چگونه است؟

- ۱ (۱) ماکزیمم نسبی
۲ (۲) مینیمم نسبی
۳ (۳) نقطه‌ای معمولی است.
۴ (۴) قابل تعیین نیست.

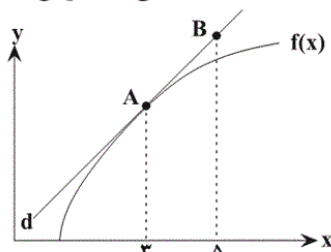
۹۴- اگر $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ باشد، به‌ازای چند مقدار صحیح k ، معادله $f(x) = k$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

ریاضی عمومی، مشتق

۸۱- مطابق شکل زیر، خط d در نقطه‌ای به طول $x=3$ بر تابع $f(x)$ مماس است. اگر $f(3) = f'(3) = 3$ باشد، آن‌گاه عرض نقطه

B کدام است؟



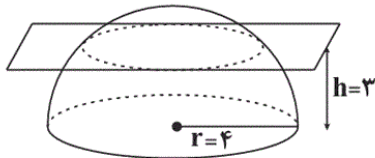
- ۱ (۱) ۶
۲ (۲) ۸
۳ (۳) ۹
۴ (۴) ۱۲

۸۳- اگر تابع f بر روی \mathbb{R} مشتق پذیر باشد و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+3) - 4}{h} = 5$ ، مشتق تابع $y = \frac{\sqrt{f(x)}}{x}$ در نقطه $x = 3$ کدام است؟

- (۱) $\frac{14}{17}$ (۲) $\frac{7}{36}$ (۳) $\frac{5}{36}$ (۴) $\frac{5}{17}$

ریاضی عمومی، هندسه -

۹۶- مطابق شکل، یک نیم کره به شعاع $r = 4$ را با صفحه‌ای موازی صفحه قاعده و به فاصله $h = 3$ از آن قطع می‌کنیم. مساحت



سطح مقطع حاصل کدام است؟

- (۱) 7π (۲) π (۳) $\frac{16\pi}{9}$ (۴) 12π

۹۷- اضلاع مکعب مستطیلی با اعداد ۱، ۱ و ۲ متناسب‌اند. نسبت سینوس زاویه‌ای که قطر مکعب مستطیل با بزرگترین یال می‌سازد به کسینوس زاویه‌ای که با کوچک‌ترین یال می‌سازد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

۹۸- مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به طول وتر $3\sqrt{2}$ را حول وترش دوران می‌دهیم، حجم شکل حاصل کدام است؟

- (۱) $9\sqrt{2}\pi$ (۲) $\frac{9}{4}\sqrt{2}\pi$ (۳) $\frac{9}{2}\sqrt{2}\pi$ (۴) $18\sqrt{2}\pi$

ریاضی عمومی، انتگرال

۱۰۹- حاصل $\int_1^8 \left(\frac{4}{x^2} - 7x\sqrt{x} \right) dx$ کدام است؟

- (۱) $-365/5$ (۲) -376 (۳) $-377/5$ (۴) -382

۱۱۰- مساحت ناحیه محصور بین نمودار دو تابع $f(x) = (x-3)^2$ و $g(x) = \frac{1}{4}|x|$ و محور x ها کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{8}{3}$

ریاضی عمومی، مشتق توابع -

۸۲- اگر $f(x) = \sqrt{\frac{x[x]}{|1-x|}}$ باشد، آن گاه حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ کدام است؟ ([] : نماد جزء صحیح)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲

۸۵- مقادیر مشتق چپ و راست کدام تابع در $x = -2$ موجود و نابرابر است؟ ([] : نماد جزء صحیح)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -2 \\ 4x & x < -2 \end{cases} \quad (۱)$$

$$g(x) = x|x-2| \quad (۲)$$

$$h(x) = x[x] \quad (۳)$$

$$i(x) = (x+2)[x] \quad (۴)$$

۸۶- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x+a} & ; x > 0 \\ \sqrt{x^2+b} + \frac{x}{a} & ; x \leq 0 \end{cases}$ در $x = 0$ مشتق پذیر باشد، آن گاه b کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۸۷- اگر $\frac{f(x)}{2} = x - |x|$ و $g(x) = 2x + 2|x|$ باشند، مشتق تابع $(fog)(x)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) وجود ندارد

ریاضی عمومی، هندسه مختصاتی و منحنی های درجه دوم

۹۹- طول قطر کوچک بیضی $4\sqrt{2}$ و فاصله یک کانون تا نزدیک ترین رأس آن ۲ است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۰۰- پاره خط $AA' = \sqrt{5}$ قطر بزرگ یک بیضی با فاصله کانونی ۲ است. خطوط مماس بر بیضی در دو سر قطر کوچک آن، دایره ای

به قطر AA' را در چهار نقطه قطع می کنند. مساحت چهارضلعی ای که این چهار نقطه رأس های آن هستند، کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) $\frac{5}{2}$

۱۰۱- فاصله دورترین نقطه دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ از نقطه $A(-1, 7)$ چه قدر است؟

(۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۴ (۴) ۱

۱۰۲- معادله دایره‌ای که مرکز آن روی محور x ها بوده و بر دو خط $y = -x$ و $y = 3\sqrt{2} - x$ مماس باشد، کدام است؟

$$\begin{aligned} (x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + y^2 &= \frac{9}{4} \quad (2) & (x - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 + y^2 &= \frac{9}{4} \quad (1) \\ (x - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 + y^2 &= \frac{9}{4} \quad (4) & (x - \frac{3\sqrt{3}}{2})^2 + y^2 &= \frac{3}{4} \quad (3) \end{aligned}$$

۱۰۸- اگر شیب مجانب‌های یک هذلولی افقی $1 + 5t$ و $1 - 3t$ باشند، خروج از مرکز این هذلولی کدام است؟

$$\sqrt{10} \quad (1) \quad 2\sqrt{3} \quad (2) \quad \sqrt{15} \quad (3) \quad \sqrt{17} \quad (4)$$

ریاضی عمومی، احتمال -

۱۰۳- در پرتاب ۳ تاس سالم، احتمال این که حاصل ضرب اعداد رو شده عددی زوج باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{8} \quad (1) \quad \frac{3}{4} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad \frac{7}{8} \quad (4)$$

۱۰۴- خانواده‌ای ۴ فرزند دارد. احتمال این که فرزندان در فصول مختلف سال به دنیا آمده باشند، کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (1) \quad \frac{1}{24} \quad (2) \quad \frac{3}{24} \quad (3) \quad \frac{3}{32} \quad (4)$$

۱۰۵- سه تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد تاس وسط، واسطه حسابی عدد دو تاس دیگر باشد، کدام است؟

$$\frac{2}{9} \quad (1) \quad \frac{1}{18} \quad (2) \quad \frac{1}{6} \quad (3) \quad \frac{1}{12} \quad (4)$$

۱۰۶- دو تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع آن‌ها عددی فرد غیر از ۹ باشد، سه سکه می‌اندازیم، اگر مجموع دو تاس عددی زوج و

بزرگ‌تر از ۴ باشد، دو سکه پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی یک سکه رو می‌آید؟

$$\frac{55}{144} \quad (1) \quad \frac{53}{144} \quad (2) \quad \frac{51}{144} \quad (3) \quad \frac{49}{144} \quad (4)$$

۱۰۷- دو تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر حاصل ضرب اعداد رو شده مضرب ۴ باشد، دو سکه و در غیر این صورت سه سکه پرتاب می‌کنیم،

چه قدر احتمال دارد حداقل یکی از سکه‌ها پشت بیاید؟

$$\frac{11}{48} \quad (1) \quad \frac{37}{48} \quad (2) \quad \frac{79}{96} \quad (3) \quad \frac{17}{96} \quad (4)$$

ریاضی عمومی، ترکیبی -

۸۸- رباتی طبق معادله $d(t) = t^4 - 8t^2 + 8$ ($0 \leq t \leq 3$) حرکت می‌کند. سرعت متوسط این ربات، بین زمان‌هایی که ربات مقادیر

ماکزیمم و مینیمم را برای مکان خود اختیار می‌کند، کدام است؟

- (۱) -۱۰ (۲) ۸ (۳) -۲۱ (۴) ۲۵

۸۹- اگر رابطه $h(x) = f(x) - (f(x))^2 + (f(x))^3$ برای هر عدد حقیقی x برقرار بوده و تابع غیرثابت f مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه

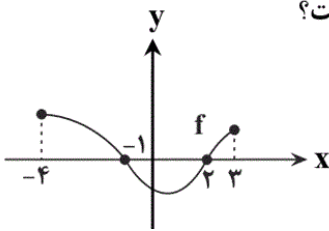
کدام گزینه درست است؟

- (۱) تابع h صعودی است هرگاه تابع f صعودی باشد.
 (۲) تابع h نزولی است هرگاه تابع f صعودی باشد.
 (۳) تابع h صعودی است هرگاه تابع f نزولی باشد.
 (۴) در حالت کلی چیزی نمی‌توان گفت.

۹۰- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ الزاماً در کدام بازه اکیداً صعودی است؟

- (۱) $(-4, -1)$
 (۲) $(-1, 0)$
 (۳) $(2, 3)$

(۴) در هیچ بازه‌ای اکیداً صعودی نیست.



۹۵- می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل در باز بسازیم که گنجایش آن ۳۰۰۰ واحد مکعب باشد. ارتفاع قوطی کدام باشد تا

مقدار فلز به کار رفته برای تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi \simeq 3$)

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۵ (۴) ۸

۸۴- گزینه «۲»

(سینا ممبرپور)

ابتدا شیب خط مجانب را می‌یابیم:

$$f(x) = \sqrt[3]{x(1-x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^3}} = 1 \Rightarrow m = 1$$

حال با استفاده از چاق و لاغر و قاعده پرتوان حاصل حد ذیل را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x(1-x)^2} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(\sqrt[3]{x(1-x)^2} - x) \times ((\sqrt[3]{x(1-x)^2})^2 + x\sqrt[3]{x(1-x)^2} + x^2)}{((\sqrt[3]{x(1-x)^2})^2 + x\sqrt[3]{x(1-x)^2} + x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(1-x)^2 - x^3}{((\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x})^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x} + x^2)} \end{aligned}$$

۴

۳

۲ ✓

۱

۹۱- گزینه «۲»

(سروش موئینی)

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: $(f - g)(x) = x - 2$ نقطه بحرانی ندارد.

گزینه «۲»: $(f - g)(x) = x - (x - 1) = 1$ و تمام نقاط نمودار آن بحرانی هستند.

گزینه «۳»: در تابع $(f - g)(x) = x - [x]$ ، فقط نقاط با طول غیرصحیح، بحرانی نیستند.

گزینه «۴»: در تابع $(f - g)(x) = x - |x|$ داریم:

$$(f - g)(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$$

پس x های منفی بحرانی نیستند.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

(همشید هسینی فواه)

می‌دانیم دامنه تابع داده شده بازه $[-1, 1]$ می‌باشد که در این بازه تابع پیوسته است،

در نتیجه داریم: $f'(x) = 2x + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = x(2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) \Rightarrow f'(x) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 1 - x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

با توجه به این که هر سه جواب به دست آمده در دامنه تابع قرار دارند، پس هر سه تا، نقطه بحرانی تابع هستند، بر این اساس خواهیم داشت:

$$f(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2/25 \text{ و } f(0) = 2 \text{ و } f(-1) = f(1) = 2$$

در نتیجه $y = 2$ و $y = 2/25$ به ترتیب ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع فوق در بازه $[-1, 1]$ هستند که مجموع آن‌ها برابر با $4/25 = y_{\max} + y_{\min}$ است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)

۴

۳

۲

۱

x	۵	
$f'(x) = (\Delta - x)g(x)$	-	+
f(x)	↘	↗

پس $x = 5$ برای f نقطه مینیمم نسبی است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹ و ۹۲ تا ۹۵)

۴

۳

۲

۱

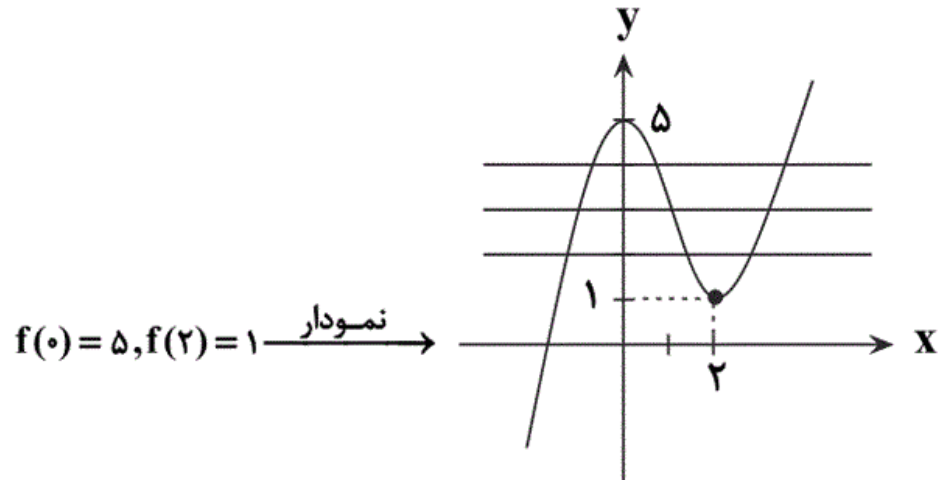
۹۴- گزینه «۳»

(بابک سارات)

خط $y = k$ باید بین ماکزیمم و مینیمم نسبی قرار گیرد. پس لازم است عرض نقاط اکسترمم $f(x)$ را به دست بیاوریم. $f(x)$ مشتق پذیر است. مشتق تابع $f(x)$ را به دست آورده و مساوی صفر قرار می دهیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

حال عرض نقاط اکسترمم را با جایگذاری در معادله اصلی $f(x)$ به دست می آوریم:



همانطور که می بینید به ازای سه مقدار صحیح $(k = 2, 3, 4)$ ، معادله $f(x) = k$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز است.

(ریاضی عمومی، صفحه های ۱۳ تا ۱۹)

۴

۳

۲

۱

۸۱- گزینه «۳»

(علی اصغر شریفی)

با توجه به آن که مشتق تابع در یک نقطه، شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه را می دهد، پس شیب پاره خط AB برابر با ۳ است. طبق تعریف شیب خط، داریم:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 3 \Rightarrow \frac{y_B - 3}{5 - 3} = 3 \Rightarrow y_B = 9$$

(ریاضی ۳، صفحه های ۱۳۰ تا ۱۳۴)

۴

۳

۲

۱

با توجه به تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+3) - f(3)}{h} = 5 \Rightarrow \begin{cases} f(3) = 4 \\ f'(3) = 5 \end{cases}$$

حال مشتق تابع داده شده را در $x=3$ محاسبه می‌کنیم:

$$y' = \frac{\frac{xf'(x)}{2\sqrt{f(x)}} - \sqrt{f(x)}}{x^2} \Rightarrow y'(3) = \frac{\frac{3 \times 5}{2 \times \sqrt{4}} - \sqrt{4}}{3^2} = \frac{7}{36}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۴۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

طبق قضیه فیثاغورس، به راحتی می‌توانیم شعاع دایره مقطع را حساب

$$r' = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

کنیم.

$$S = \pi r'^2 = 7\pi$$

پس مساحت دایره حاصل برابر است با:

(هندسه ۱، صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۴۳)

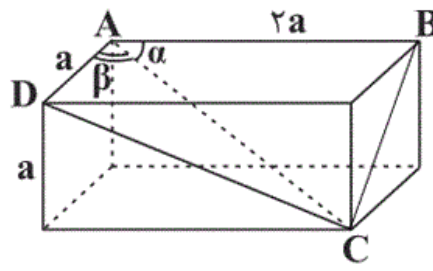
۴

۳

۲

۱ ✓

با توجه به فرضیات سوال، ابتدا طول قطرهای BC و CD را به دست می آوریم:



$$BC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

$$CD = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}a$$

از طرفی قطر مکعب مستطیل برابر است با:

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2 + 4a^2} = \sqrt{6}a$$

در نتیجه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = \sqrt{2}$$

(هندسه ۱، صفحه های ۱۰۷ تا ۱۴۳)

۴ ✓

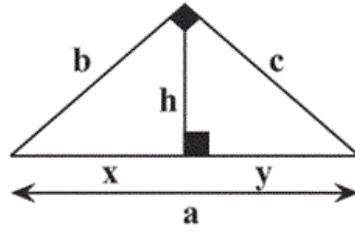
۳

۲

۱

(سوند فزنی)

اگر مثلث قائم الزاویه به اضلاع b و c حول وتر خود که (a) می باشد دوران کند دو مخروط هم قاعده ساخته می شود.



$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 x + \frac{1}{3}\pi h^2 y = \frac{1}{3}\pi h^2 (x + y)$$

$$\xrightarrow{x+y=a} V = \frac{1}{3}\pi h^2 a \xrightarrow{h=\frac{bc}{a}} V = \frac{\pi}{3} \times \frac{b^2 c^2}{a}$$

حال با توجه به شکل فوق داریم:

$$a = 3\sqrt{2}$$

$$b = c$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + b^2 \Rightarrow 9 \times 2 = 2b^2 \Rightarrow b = 3$$

$$V = \frac{\pi b^2 c^2}{3a} = \frac{\pi \times 9 \times 9}{3 \times 3\sqrt{2}} = \frac{9\pi}{\sqrt{2}} = 9 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

(هندسه ۱، صفحه های ۱۰۷ تا ۱۱۳)

۴

۳

۲

۱

(سینا همپور)

$$\int_1^8 \left(\frac{4}{x^2} - 7x\sqrt{x} \right) dx = \int_1^8 (4x^{-2} - 7x^{\frac{3}{2}}) dx = -4x^{-1} - 3x^{\frac{3}{2}} \Big|_{x=1}^{x=8}$$

$$= \left(-\frac{4}{8} - 3 \times 8 \right) - \left(-4 - 3 \right) = -377 / 5$$

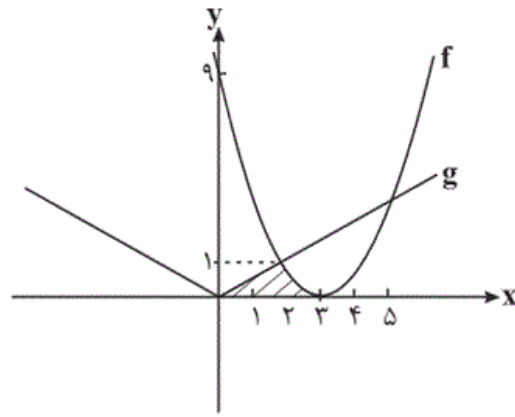
(ریاضی عمومی، صفحه های ۱۶۰ تا ۱۷۳)

۴

۳

۲

۱



با توجه به توابع رسم شده، روشن است که محل برخورد دو نمودار عبارت است از:

$$(x-3)^2 = \frac{1}{2}|x| \xrightarrow{x \geq 0} x^2 - 6x + 9 = \frac{1}{2}x \Rightarrow 2x^2 - 13x + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(2x-9) = 0 \Rightarrow x = 2$$

حال از آنجایی که از صفر تا ۲، مساحت در زیر نمودار g و از ۲ تا ۳ مساحت زیر نمودار f باید محاسبه شود، داریم:

$$S = \int_0^2 \frac{1}{2}x dx + \int_2^3 (x-3)^2 dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^2 + \frac{(x-3)^3}{3} \Big|_2^3 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۷۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

۸۲ - گزینه «۳»

(میشیر حسینی فواه)

واضح است که حد خواسته شده همان $f'_+(2)$ است. حالا با توجه به این که تابع داده شده در $x = 2$ پیوستگی راست دارد، پس برای محاسبه $f'_+(2)$ ابتدا $f(x)$ را ساده نموده و سپس $f'(x)$ را حساب کرده و در مرحله آخر $f'_+(2)$ را به دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow \begin{cases} [x] = 2 \\ |1-x| = x-1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x-1}} = \left(\frac{2x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{-2}{(x-1)^2} \right) \left(\frac{2x}{x-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'_+(2) = -\frac{1}{2}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵ تا ۷۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

گزینه‌های «۱» و «۳» در $x = -2$ پیوسته نیستند، پس در این نقطه مشتق پذیر نیستند.

$$\text{گزینه «۱»} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = (-2)^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 4(-2) = -8 \\ f(-2) = (-2)^2 = 4 \end{array} \right.$$

تابع در $x = -2$ از چپ پیوسته نیست. پس مشتق چپ موجود نیست.

$$\text{گزینه «۳»} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} h(x) = -2(-2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} h(x) = -2(-3) = 6 \\ h(-2) = -2(-2) = 4 \end{array} \right.$$

تابع در $x = -2$ از چپ پیوسته نیست. پس مشتق چپ موجود نیست.

گزینه «۲»: تابع در $x = -2$ مشتق پذیر است و مقدار مشتق آن برابر است با:

$$g(x) = x|x-2| \xrightarrow{x=-2 \text{ اطراف}} g(x) = -x(x-2) = -x^2 + 2x$$

$$g'(x) = -2x + 2 \xrightarrow{x=-2} 4 + 2 = 6$$

گزینه «۴»: مشتق چپ و راست موجود و نابرابرند.

$$\begin{aligned} i'_+(-2) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{i(x) - i(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{(x+2)[x] - 0}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} [x] = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i'_-(-2) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{i(x) - i(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x+2)[x] - 0}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} [x] = -3 \end{aligned}$$

مشتق چپ و راست موجود و نابرابرند.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵ تا ۷۴)

۴

۳

۲

۱

مقادیر مشتق چپ و راست هم باید برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{a-2}{(x+a)^2} & x > 0 \\ \frac{2x}{2\sqrt{x^2+b}} + \frac{1}{a} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(\cdot) = \frac{a-2}{a^2} \\ f'_-(\cdot) = \frac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow \frac{a-2}{a^2} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{(*)} \sqrt{b} = \frac{2}{1} \Rightarrow b = 4$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵ تا ۷۴)

۴

۳

۲

۱

(بعضی کلاسیک‌ترین)

۸۷- گزینه «۲»

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(2x + 2|x| - |2x + 2|x||) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = 0 \Rightarrow (f \circ g)'(x) = 0$$

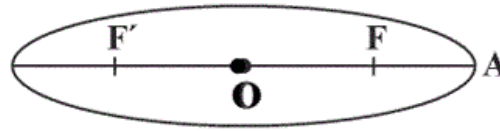
(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵ تا ۷۴)

۴

۳

۲

۱



مطابق شکل فرضی داریم:

$$2b = 4\sqrt{2} \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$$

$$FA = 2 \Rightarrow a - c = 2 \text{ (I)}$$

طبق رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ ، داریم:

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = (a - c)(a + c)$$

$$b^2 = 2(a + c) \Rightarrow 8 = 2(a + c) \Rightarrow a + c = 4 \text{ (II)}$$

$$(I), (II) \Rightarrow \begin{cases} a - c = 2 \\ a + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

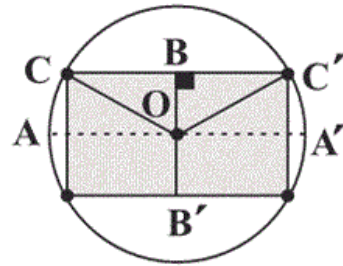
(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۳۹)

۴

۳

۲

۱ ✓



بنابراین $\frac{AA'}{2} = a$ پس شعاع دایره برابر است با $AA' = 2a$

$OC = a$ و طول OB برابر نصف طول قطر کوچک بیضی است، یعنی $OB = b$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه OBC داریم:

$$OC^2 = OB^2 + BC^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = \underbrace{a^2 - b^2}_{c^2} \Rightarrow BC = c$$

پس مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = BB' \times CC' \Rightarrow S = (2b)(2c) = 4bc \quad (*)$$

$$\text{طبق فرض: } \begin{cases} 2a = \sqrt{5} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \end{cases} \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{(*)} S = 4\left(\frac{1}{2}\right)(1) = 2$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۳۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۰۱- گزینه ۲»

نقطه $(2, 3)$ مرکز دایره است.

فاصله نقطه از مرکز برابر است با $d = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (3 - 7)^2} = 5$ از طرفی

شعاع دایره برابر است با: $R = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36 + 12} = 4$

بنابراین با توجه به شکل، بیش‌ترین فاصله ممکن ۹ است.

۴

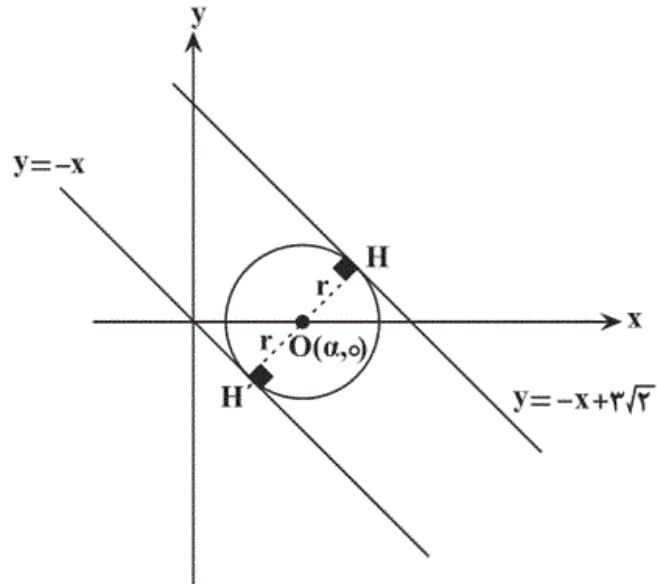
۳

۲ ✓

۱

$$\begin{cases} y = 3\sqrt{2} - x \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 3\sqrt{2} = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله دو خط} = 2r = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 2r = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$



مرکز دایره $O(\alpha, 0)$ می‌باشد. پس:

$$|OH'| = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{|1 \times \alpha + 1 \times 0 + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

معادله دایره‌ای با شعاع $\frac{3}{2}$ و مرکز $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0)$ به صورت زیر است:

$$(x - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 + (y - 0)^2 = \frac{9}{4} \quad \alpha > 0 \rightarrow (x - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۰۸ تا ۱۱۳ و ۱۳۱ تا ۱۳۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

شیب مجانب‌ها ۴ و -۴ بوده و چون هذلولی افقی است، بنابراین:

$$\frac{b}{a} = 4 \Rightarrow e = \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

۱۰۳- گزینه «۴»

(علی مرشد)

برای این که حاصل ضرب سه عدد رو شده زوج باشد، باید حداقل یکی از اعداد، زوج باشد. برای راحتی کار ابتدا حالتی را که هیچ یک از اعداد رو شده زوج نیست حساب کرده و از $n(S)$ کم می کنیم:

$$n(S) = 6 \times 6 \times 6 = 216$$

حالت $A' : 3 \times 3 \times 3 = 27 \Rightarrow$ عدد رو شده هر سه تاس فرد باشد

$$\Rightarrow P(A') = \frac{27}{216} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{27}{216} = \frac{189}{216} = \frac{7}{8}$$

(ریاضی عمومی، صفحه های ۱ تا ۱۴)

۴

۳

۲

۱

۱۰۴- گزینه «۴»

(غلامرضا نیازی)

$4^4 =$ تعداد اعضای فضای نمونه ای آزمایش
 $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ تعداد اعضای پیشامد

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4!}{4^4} = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}$$

(ریاضی عمومی، صفحه های ۱ تا ۹)

۴

۳

۲

۱

۱۰۵- گزینه «۴»

(مهمربوار مهنی)

فضای نمونه ای شامل $6 \times 6 \times 6$ عضو می باشد:

$$n(S) = 6 \times 6 \times 6$$

برای محاسبه تعداد پیشامدهای مطلوب داریم:

(۱) اعداد روشده هر سه تاس برابر باشند: ۶ حالت

$$(2) \{(1,2,3), (1,3,5), (2,3,4), (2,4,6), (3,4,5), (4,5,6)\}$$

و از برعکس کردن مؤلفه های اول و سوم نیز همین تعداد پیشامد به دست می آید. پس ۱۲ حالت.

$$n(A) = 18 \Rightarrow P(A) = \frac{18}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{12}$$

در نتیجه:

(ریاضی عمومی، صفحه های ۱ تا ۹)

۴

۳

۲

۱

۱۰۶- گزینه «۴»

(همشید مسینی فواه)

جدول مربوط به جمع عددهای ظاهرشده در پرتاب دو تاس را که به صورت زیر است، در نظر بگیرید.

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
احتمال مجموع	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$
احتمال روشن شدن ۱ سکه از ۳ سکه	$\frac{۱۴}{۳۶}$					$\frac{۱۴}{۳۶}$					
مجموع دو تاس فرد غیر از ۹	$\frac{۱۴}{۳۶}$										
احتمال روشن شدن ۱ سکه از ۲ سکه	$\frac{۱۴}{۳۶}$					$\frac{۱۴}{۳۶}$					
مجموع دو تاس زوج و بزرگ تر از ۴	$\frac{۱۴}{۳۶}$										

$$P(\text{موردنظر}) = \frac{۱۴}{۳۶} \times \frac{۳}{۸} + \frac{۱۴}{۳۶} \times \frac{۲}{۴} = \frac{۱۴}{۳۶} \left(\frac{۳}{۸} + \frac{۲}{۴} \right) = \frac{۴۹}{۱۴۴}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴)

۴

۳

۲

۱

۱۰۷- گزینه «۳»

(رضا ذاکر)

مضارب ۴	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸	۳۲	۳۶
تعداد حالات	۳	۲	۴	۱	۲	۲	۰	۰	۱

احتمال این که حاصل ضرب اعداد دو تاس مضرب ۴ باشد برابر مجموع احتمال حالات بالا یعنی $\frac{۱۵}{۳۶}$ است.

$$\begin{array}{l} \text{مضرب ۴ باشد} \rightarrow \frac{۱۵}{۳۶} \times \left(1 - \frac{۱}{۴}\right) = \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۱۵}{۴۸} \\ \text{مضرب ۴ نباشد} \rightarrow \frac{۲۱}{۳۶} \times \left(1 - \frac{۱}{۸}\right) = \frac{۷}{۱۲} \times \frac{۷}{۸} = \frac{۴۹}{۹۶} \end{array} \rightarrow \text{جمع} \rightarrow \frac{۱۵}{۴۸} + \frac{۴۹}{۹۶} = \frac{۷۹}{۹۶}$$

نکته: در پرتاب ۲ سکه احتمال حداقل یک پشت برابر $1 - \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = 1 - \frac{۱}{۴}$ است و در

پرتاب ۳ سکه احتمال حداقل یک پشت برابر $1 - \left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ = 1 - \frac{۱}{۸}$ است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴)

۴

۳

۲

۱

۸۸- گزینه «۴»

(مهمربوار مهنی)

برای این که ببینیم ربات در چه لحظاتی مقادیر ماکزیمم و مینیمم را برای مکان خود اختیار می کند، باید اکستریم‌های مطلق تابع $d(t)$ را بیابیم:

$$d'(t) = 4t^3 - 16t = 0 \Rightarrow 4t(t^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 2 \end{cases} \text{ غق ق}$$

حال مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی و هم‌چنین نقاط ابتدا و انتهای بازه

$$d(0) = 8$$

محاسبه می کنیم:

$$d(2) = -8$$

$$d(3) = 17$$

پس باید سرعت متوسط را در بازه $[2, 3]$ پیدا کنیم:

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{17 - (-8)}{1} = 25$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۹) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۳۰)

۴

۳

۲

۱

۸۹- گزینه «۱»

(طاهر دارستانی)

از دو طرف تساوی مشتق می گیریم:

$$h'(x) = f'(x) - 2f(x)f'(x) + 3f^2(x)f'(x)$$

$$h'(x) = f'(x)(1 - 2f(x) + 3f^2(x))$$

$$h'(x) = 3f'(x) \underbrace{\left((f(x) - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{9} \right)}_{\text{همواره مثبت}}$$

با توجه به تساوی بالا، $f'(x)$ و $h'(x)$ همواره هم‌علامت‌اند. پس اگر f صعودی باشد آن‌گاه h نیز صعودی خواهد بود.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵ تا ۷۴ و ۹۲ تا ۹۵)

۴

۳

۲

۱

(شهرام ولایی)

$$y \text{ دامنه } xf(x) \geq 0 \Rightarrow [-1, 0] \cup [2, 3]$$

$$y' = \frac{(1)f(x) + xf'(x)}{2\sqrt{xf(x)}}$$

$$y' > 0 \Rightarrow f(x) + xf'(x) > 0$$

برای این که y اکیداً صعودی باشد باید $y' > 0$ باشد. در بازه $(2, 3)$ تابع حتماً اکیداً صعودی است، ولی در بازه $(-1, 0)$ علامت y' نامشخص است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵ تا ۷۴ و ۹۲ تا ۹۵)

۴

۳

۲

۱

(علی اصغر شریفی)

با توجه به حجم قوطی، رابطه بین ارتفاع و شعاع استوانه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow \pi r^2 h = 3000 \xrightarrow{\pi \approx 3} r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{r^2}$$

طبق صورت سؤال، باید مساحت کل استوانه موردنظر کم‌ترین مقدار ممکن گردد.

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h = \text{مساحت جانبی} + \text{مساحت قاعده} = \text{مساحت کل استوانه}$$

با جایگذاری ارتفاع بر حسب شعاع، داریم:

$$S = \pi r^2 + \pi \left(\frac{2000}{r} \right) = \pi \left(r^2 + \frac{2000}{r} \right)$$

اگر مشتق مساحت بر حسب شعاع را برابر با صفر قرار دهیم، شعاع مطلوب به دست

$$S' = \pi \left(2r - \frac{2000}{r^2} \right) = 0 \quad \text{می‌آید:}$$

$$\Rightarrow 2r = \frac{2000}{r^2} \Rightarrow r^3 = 1000 \Rightarrow r = 10 \Rightarrow h = 10$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۹) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۳۸)

۴

۳

۲

۱