سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

هندسه 2 - 10 سوال

۱۲۱- در کدام حالت دو صفحهٔ متقاطع P و P' بر هم عمودند؟

۱) یک خط واقع در صفحهٔ P بر فصل مشترک دو صفحه عمود باشد.

۲) یک خط عمود بر صفحهٔ P، بر صفحهٔ P' هم عمود باشد.

۳) هر خط واقع در صفحهٔ P، بر دو خط موازی در صفحهٔ P' عمود باشد.

۴) یک خط موازی با صفحهٔ P، بر صفحهٔ P' عمود باشد.

۱۲۲- کدام گزینه همواره درست است؟

۱) اگر خطی بر یکی از خطوط صفحه‌ای عمود باشد بر آن صفحه عمود است.

۲) دو صفحهٔ عمود بر یک صفحه، موازی‌اند.

۳) دو صفحهٔ عمود بر یک خط، متقاطع‌اند.

۴) اگر دو صفحهٔ متقاطع بر صفحه‌ای عمود باشند، فصل مشترک آن دو صفحه نیز بر آن صفحه عمود است.

۱۲۳- اگر خط d عمودمشترک دو خط متنافر d_1 و d_2 باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) صفحهٔ شامل d و d_1، بر خط d_2 عمود است.

۲) هر صفحهٔ شامل d، بر دو خط d_1 و d_2 عمود است.

۳) هر صفحهٔ عمود بر d، با دو خط d_1 و d_2 موازی است.

۴) هر صفحهٔ موازی با d، دقیقاً یکی از خطوط d_1 و d_2 را قطع می‌کند.

۱۲۴- نقطهٔ A، خط d و صفحهٔ P مفروض‌اند. درکدام حالت، همواره تعداد خطوط گذرا از نقطهٔ A که با صفحهٔ P موازی و بر خط d عمود باشند، بی‌شمار است؟

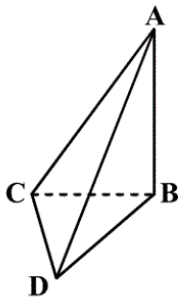
۱) $A \in P$

۲) $A \in d$

۳) $d \parallel P$

۴) $d \perp P$

۱۲۵- در شکل مقابل، AB بر صفحهٔ مثلث BCD عمود بوده و $AB = ۴$ ، $CD = ۲\sqrt{۵}$ و $AD = AC = ۵$ است. اندازهٔ عمودمشترک دو یال AB و CD کدام است؟



۱) ۳
۲) ۲
۳) $۲\sqrt{۵}$
۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۲۶- کدام گزینه همواره درست است؟

۱) اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، هر خط موازی با یکی از آن دو بر دیگری عمود است.

۲) اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، هر صفحهٔ عمود بر یکی از آن دو با دیگری موازی است.

۳) اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، هر صفحهٔ موازی با یکی از آن دو بر دیگری عمود است.

۴) از هر خطی که صفحه‌ای را قطع کرده باشد، فقط یک صفحه می‌توان عبور داد که بر آن صفحه عمود باشد.

۱۲۷- هر یک از دو صفحهٔ عمود بر هم P و P' شامل فقط یکی از دو خط متقاطع L و L' است. اگر $L \subset P$ و $L' \subset P'$، کدام نتیجه‌گیری لزوماً درست است؟

۱) L بر L' عمود است.
۲) P شامل خطی عمود بر L' است.
۳) P بر L' عمود است.
۴) صفحه‌ای شامل L و عمود بر L' وجود دارد.

۱۲۸- دو خط d و d' هر دو در فضا بر خط l عمودند. کدام ویژگی لزوماً در مورد d و d' درست است؟

۱) با صفحه‌ای موازی l، موازی‌اند.
۲) بر صفحه‌ای موازی l، عمودند.
۳) با صفحه‌ای عمود بر l، موازی‌اند.
۴) بر صفحه‌ای عمود بر l، عمودند.

۱۲۹- سه خط $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ گذرا از نقطهٔ O و دوبه‌دو بر هم عمودند. اگر صفحهٔ P شامل خط $L_۱$ و عمود بر خط $L_۲$ باشد، وضع نسبی خط $L_۳$ و صفحهٔ P کدام است؟

۱) $L_۳$ واقع در صفحهٔ P است.
۲) $L_۳$ موازی صفحهٔ P است ولی لزوماً واقع در آن نیست.
۳) $L_۳$ عمود بر صفحهٔ P است.
۴) $L_۳$ با صفحهٔ P متقاطع است ولی لزوماً عمود بر آن نیست.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۰- صفحهٔ Γ و دو نقطهٔ A و B را در فضا در نظر بگیرید. شرط لازم برای آن‌که هیچ نقطه‌ای روی Γ از A و B به یک فاصله نباشد، کدام است؟

۱) خط گذرنده از A و B بر Γ عمود باشد.

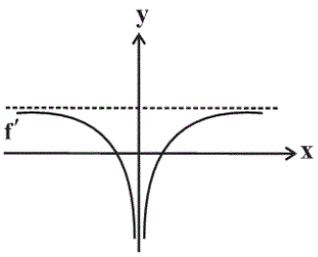
۲) خط گذرنده از A و B موازی Γ باشد.

۳) A و B از Γ به یک فاصله باشند.

۴) A و B در یک طرف Γ واقع نباشند.

دیفرانسیل و انتگرال ، کاربرد مشتق - 3 سوال -

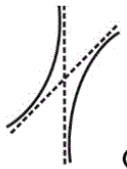
۸۱- اگر نمودار تابع f' به صورت شکل زیر باشد، نمودار تابع f به کدام صورت می‌تواند باشد؟



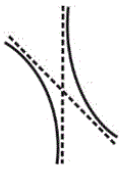
۱)

۲)

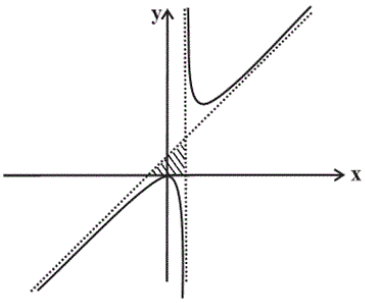
۳)



۴)



۸۲- در شکل زیر نمودار تابع $y=\frac{x^2+a}{x+c}$ رسم شده است. اگر مساحت مثلث هاشورخورده ۲ باشد، c کدام است؟



۱) -1

۲) 1

۳) -2

۴) $-\frac{3}{2}$

۸۳- اگر قسمتی از نمودار تابع $f(x)=xe^{ax^2+bx-2}$ به‌صورت شکل زیر باشد، $\frac{b}{2}$ کدام است؟

۱) 1

۲) -1

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{-1}{2}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۴- حاصل $\sum_{i=۲}^{۹۷} \frac{۱}{\sqrt{i+۳}+\sqrt{i+۲}}$ کدام است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

۸۵- حاصل $\lim_{n\to\infty} \frac{۴}{n}(\sum_{i=۱}^{n}(۲+\frac{۳i}{n}))$ کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۶

۸۶- دنبالهٔ $a_n = \int_{۱}^{n} \frac{۱}{۱+x^۲}dx$ به کدام عدد همگراست؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$
۲) $\frac{\pi}{۲}$
۳) $-\frac{\pi}{۴}$
۴) $-\frac{\pi}{۲}$

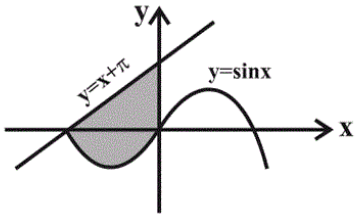
۸۷- مقدار متوسط تابع $y=\sqrt{۴-x^۲}$ در بازهٔ $[-۲,۲]$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $\frac{\pi}{۴}$
۴) $\frac{\pi}{۲}$

۸۸- حاصل $\int_{۰}^{\sqrt{۳}} \frac{dx}{۱+x^{[x]+۱}}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{\pi}{۳}$
۲) $Ln۲-\frac{\pi}{۱۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}Ln۳$
۴) $Ln۲+\frac{\pi}{۱۲}$

۸۹- در شکل زیر، مساحت ناحیهٔ سایه‌خورده، کدام است؟



۱) $۲+\frac{\pi^۲}{۴}$
۲) $۲+\frac{\pi^۲}{۲}$
۳) $\frac{\pi^۲}{۴}+۱$
۴) $\frac{\pi^۲}{۲}+۱$

۹۰- اگر $F(x)=\int_{۰}^{\sin x}\frac{dt}{۱-t^۲}$ باشد، مقدار $F''\left(\frac{\pi}{۶}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

هندسه‌ي تحليلي ، دستگاه‌هاي معادلات خطي -

۱۰۱- سه صفحه با معادلات $\begin{cases}۲x-۳y-az=۲\\ y+\frac{۳}{۴}z=۸\\ x-y+۳z=۵\end{cases}$ داده شده‌اند. اگر فصل مشترک یک جفت از صفحات با صفحهٔ سوم در بیش از یک نقطه مشترک باشد، آنگاه a کدام است؟

۱) $-\frac{۲۱}{۴}$
۲) $\frac{۲۱}{۴}$
۳) $-\frac{۵۴}{۷}$
۴) $\frac{۵۴}{۷}$

۱۰۲- اگر دترمینان ماتریس ضرایب در دستگاه معادلات $\begin{cases}ax-۵y+۲z=۷\\ x+۲y-۴z=۳\\ bx-۴y-۶z=۵\end{cases}$ برابر (۴۶-) باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۲
۲) -۲
۳) -۵
۴) ۵

۱۰۳- به ازای کدام مقدار m، فصل مشترک سه صفحهٔ زیر، یک نقطه می باشد؟

$$\begin{cases}mx+y+mz=۱۰\\ ۲x+my+z=۹\\ -۲x+y+mz=۶\end{cases}$$

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۴- در حل دستگاه سه معادله و سه مجهول به روش حذفی گاوس، ماتریس افزودهٔ $\left[\begin{array}{cccc} ۱ & ۱ & ۲ & b_۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ & b_۲ \\ -۱ & ۲ & ۴ & b_۳ \end{array}\right]$ به ماتریس

$\left[\begin{array}{cccc} ۱ & ۱ & ۲ & ۶ \\ ۰ & -۱ & -۵ & -۱۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{array}\right]$ تبدیل شده است. مقدار $b_۳$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۳ ۴) ۶

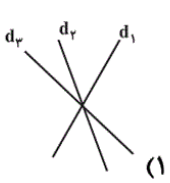
۱۰۵- $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ با دترمینان مثبت، ماتریس ضرایب دستگاه $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$ است. اگر $A^*=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه جواب این

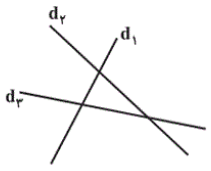
دستگاه کدام است؟ (A^* ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌های A است)

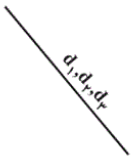
۱) $x=۱, y=۲, z=۳$ ۲) $x=۲, y=۱, z=۳$ ۳) $x=۱, y=۳, z=۲$ ۴) $x=۲, y=۳, z=۱$

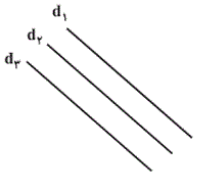
۱۰۶- اگر معادلات دستگاه $\begin{cases} x+y-۲z=۱ \\ ۲x-y+z=۶ \\ x-۵y+۸z=۹ \end{cases}$ به ترتیب معادله‌های سه صفحهٔ $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$ باشند، خط‌های $d_۱$ و $d_۲$ و $d_۳$ فصل

مشترک‌های دو به دوی این سه صفحه به کدام شکل زیر هستند؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۰۷- ماتریس افزودهٔ دستگاهی با اعمال مجاز در روش گاوس- جردن به صورت $\begin{matrix} R_۱ \\ R_۲ \\ R_۳ \end{matrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ & -۴ \\ ۰ & -۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ درآمده است. دنبالهٔ اعمال

بعدی کدام می‌تواند باشد؟

۱) $R_۲+\frac{۱}{۲}R_۳\ ,\ R_۱-\frac{۳}{۲}R_۳$ ۲) $R_۲+\frac{۱}{۲}R_۳\ ,\ R_۱+\frac{۳}{۲}R_۳$

۳) $R_۲-\frac{۱}{۲}R_۳\ ,\ R_۱-\frac{۳}{۲}R_۳$ ۴) $R_۲-\frac{۱}{۲}R_۳\ ,\ R_۱+\frac{۳}{۲}R_۳$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۸- کدام رابطه بین a و b برقرار باشد تا دستگاه معادلات $\begin{cases} x+2y=a \\ 2x-y=b \\ x+3y=1 \end{cases}$ جواب منحصربه‌فرد داشته باشد؟

۱) $7a-b=5$ ۲) $7a-5b=-3$ ۳) $5a-b=5$ ۴) $7a+b=5$

۱۰۹- اگر معادلات خطی سه مجهولی $\begin{cases} mx+ay+bz=0 \\ 2x-by+az=a-b \\ x+2ay+mz=a+1 \end{cases}$ معادلات سه صفحه باشند و هر سه صفحه از مبدأ مختصات بگذرند،

این دستگاه معادلات دارای کدام ویژگی است؟

۱) به ازای هر مقدار m، جواب غیرصفر دارد.
۲) فقط به ازای یک مقدار m، جواب منحصربه‌فرد صفر دارد.
۳) به ازای هر مقدار m، جواب منحصربه‌فرد صفر دارد.
۴) فقط به ازای یک مقدار m، جواب غیرصفر دارد.

۱۱۰- ماتریس افزودهٔ دستگاهی بعد از انجام عملیات سطری مقدماتی به صورت $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 & -8 \\ -2 & -2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ در آمده است. تعداد

جواب‌های این دستگاه کدام است؟

۱) صفر ۲) بی‌شمار ۳) ۱ ۴) ۲

ریاضیات گسسته ، احتمال -

۱۱۱- تاس سالمی را می‌ریزیم. اگر عدد فرد ظاهر شود این تاس را یک بار دیگر و اگر عدد زوج ظاهر شود این تاس را دو بار دیگر می‌ریزیم. احتمال آن که در این آزمایش دقیقاً دو بار عددی فرد رو شود کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۱۲- دو ظرف داریم، اولی شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه و دومی شامل ۷ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. یکی از دو ظرف را به دلخواه انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن، خارج می‌کنیم. احتمال این که دو مهرهٔ انتخابی، هم‌رنگ نباشند، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{8}{15}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۱۳- دو کیسه داریم، در کیسهٔ اول ۳ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ سبز و در کیسهٔ دوم ۲ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ سبز وجود دارد. یک مهره به تصادف از یکی از کیسه‌ها برداشته و در کیسهٔ دیگر می‌گذاریم و سپس یک مهره از کیسهٔ اخیر بیرون می‌کشیم. احتمال این که هر دو مهره سبز باشند، کدام است؟

۱) $\frac{21}{63}$ ۲) $\frac{23}{70}$ ۳) $\frac{45}{142}$ ۴) $\frac{64}{123}$

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۱۴- دو ظرف یکسان داریم که در اولی ۶ گوی آبی و ۳ گوی قرمز و در دومی ۳ گوی آبی و ۵ گوی قرمز وجود دارد. از یکی از ظرف‌ها گویی بیرون می‌آوریم. اگر این گوی آبی باشد، با کدام احتمال از ظرف اول انتخاب شده است؟

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۵۴ ۳) ۰/۶۰ ۴) ۰/۶۴

۱۱۵- سه مرکز مخابراتی، کار ارسال تلگراف‌ها را در یک شهر به عهده دارند که ۶۰٪ پیام‌ها توسط مرکز مخابرات A و بقیه به طور مساوی توسط مراکز B و C ارسال می‌شود و خطای مراکز A، B و C به ترتیب برابر ۱۰٪، ۲۰٪ و ۳۰٪ می‌باشد. اگر پیغامی بدون خطا ارسال شده باشد، احتمال آن که این پیام از مرکز A فرستاده شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۹}{۱۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۴) $\frac{۳}{۱۴}$

۱۱۶- توزیع احتمال متغیر تصادفی X به‌صورت $\begin{cases} P(X=i)=\frac{i}{i^۲+۲} & , i=۱,۲,۳ \\ P(X=j)=\frac{a}{۱۱} & , j=۴,۵ \end{cases}$ است. مقدار $P(۲<X<۵)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۳۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳۳}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

۱۱۷- از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰، عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر X تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد انتخاب شده باشد، $P(X\leq ۲)$ کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۳

۱۱۸- در پرتاب یک تاس، تابع جرم احتمال به صورت $P(X=x)=\frac{۲x-a}{۳۶}$ می‌باشد که x عدد رو شده است. احتمال آن که در یک بار پرتاب این تاس، عددی فرد ظاهر شود، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۸}$

۱۱۹- کیسه‌ای محتوی ۳ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است. از این کیسه به طور تصادفی و با جای‌گذاری، آن قدر مهره انتخاب می‌کنیم تا اولین مهرهٔ سفید خارج شود. احتمال این که دقیقاً ۴ انتخاب لازم باشد چند برابر آن است که حداقل ۴ انتخاب لازم باشد؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $(\frac{۳}{۸})^۲$ ۴) $(\frac{۳}{۸})^۳$

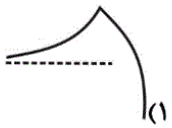
۱۲۰- به ازای کدام مقدار a، تابع $P(X=x)=\frac{۱}{۱۰۰}[۲(۱۰-x)+a], x=۱,۲,\cdots,۱۰$، یک تابع احتمال است؟

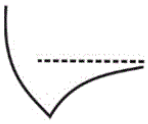
۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

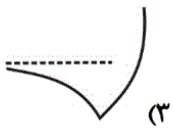
ریاضي پایه - 10 سوال

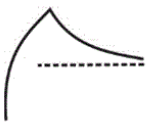
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۱- نمودار تابع $y = ۱ + |۱ - ۲^{-x}|$ شبیه کدام نمودار زیر است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۹۲- نیمه‌عمر یک ماده ۱۰۸ روز است. تقریباً چند سال طول می‌کشد که جرم باقی‌مانده از این ماده، ۱۰ درصد جرم اولیهٔ آن باشد؟

$(\log ۲ \simeq ۰/۳)$

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۹۳- فاصلهٔ نقطهٔ برخورد تابع $f(x) = ۴^x + ۲$ با محور yها، از نقطهٔ برخورد معکوس آن با محور xها کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$

۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) $۳\sqrt{۲}$

۴) $۴\sqrt{۲}$

۹۴- اگر $۲^{x+۲} + ۴^{x+۲} = ۷۲$ مفروض باشد، حاصل $\log_۴ \sqrt{x+۷}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) ۲

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

۹۵- نمودار تابع $y = ۲ - \log_{۱۰}(x+۱۰)$، محور xها را با طول $x_۰$ و محور yها را با عرض $y_۰$ قطع می‌کند. حاصل $x_۰ + y_۰$ کدام است؟

۱) ۹۰

۲) ۹۱

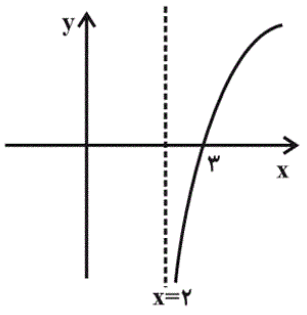
۳) ۱۰۰

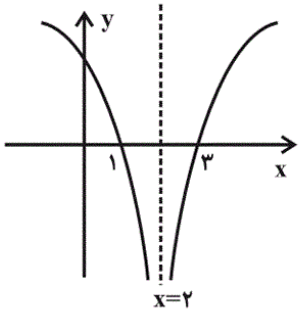
۴) ۱۰۱

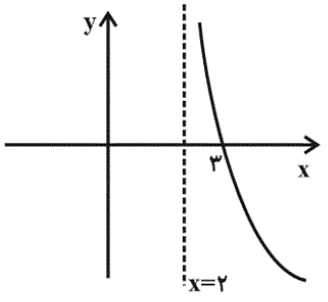
www.riazisara.ir

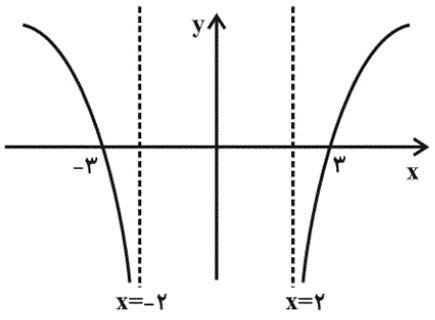
دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۶- کدام شکل، نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}\log(x^۲-۴x+۴)$ را به درستی نشان می‌دهد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۹۷- اگر $\log_{۱۰}^{۵}=a$ باشد، $\log_{۸}^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳(۱-a)}$

۲) $\frac{۲}{۳(۱+a)}$

۳) $\frac{۳}{۲(۱+a)}$

۴) $\frac{۳}{۲(۱-a)}$

۹۸- اگر $\log a$ و $\log b$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-\sqrt{۷}x+\sqrt{۲}=۰$ باشند، مقدار عبارت $(\log a)^۶(\log b)^۶(\log ab)^۴$ کدام است؟

۱) ۹۸ ۲) ۱۴ ۳) ۱۹۶ ۴) ۳۹۲

۹۹- مجموعهٔ جواب معادلهٔ $\log_{۳}\frac{۱}{۹}+\log_{[۳x+۲]}^{۴}=۰$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $[۰,\frac{۱}{۳})$

۲) $[\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$

۳) $[۰,\frac{۲}{۳})$

۴) $[\frac{۱}{۳},۱)$

۱۰۰- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $۱۰۰x=x^{\log x}$ کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۰۰ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۰

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۲۱- (محمدابراهیم کیتی‌زاده)

دو صفحه P و P' وقتی بر هم عمودند که یک خط موازی با یکی از آنها، بر صفحهٔ دیگر عمود باشد.

(هندسه ۲- هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۵۵ تا ۱۵۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۲۲- (محمدرضا دلاورنژاد)

گزینهٔ «۱» نادرست است. زیرا خط موقعی بر یک صفحه عمود است که بر دو خط متقاطع از آن صفحه عمود باشد.

گزینهٔ «۲» نادرست است. زیرا ممکن است دو صفحهٔ عمود بر یک صفحه، متقاطع باشند.

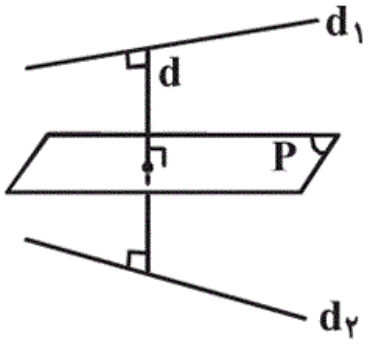
گزینهٔ «۳» نادرست است. زیرا دو صفحهٔ عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.

(هندسه ۲- هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۴۹ تا ۱۵۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۲۳- (علیرضا شریف‌خطیبی)

صفحهٔ شامل d و d_1 با خط d_2 می‌تواند متقاطع عمود یا غیر عمود باشد، بنابراین گزینهٔ «۱» صحیح نیست. اگر صفحهٔ شامل خط d بر دو خط d_1 و d_2 عمود باشد، d_1 و d_2 لزوماً موازی‌اند که با متنافر بودن آنها در تناقض است. بنابراین گزینهٔ «۲» نیز صحیح نیست. هم‌چنین صفحهٔ موازی با خط d ممکن است هر دو خط متنافر d_1 و d_2 را قطع کند، پس گزینهٔ «۴» نیز صحیح نیست.



مطابق شکل، هر صفحه مانند صفحهٔ P که بر خط d عمود است، با خطوط متنافر d_1 و d_2 موازی است.

(هندسه ۲- هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۵۶ و ۱۵۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۴- (محمدابراهیم کیتی‌زاده)

اگرخط d بر صفحهٔ P عمود باشد، صفحهٔ Q که شامل نقطهٔ A و موازی صفحهٔ P است، بر خط d عمود می‌باشد و تمام خطوط صفحهٔ Q که از نقطهٔ A می‌گذرند بر خط d عمود و با صفحهٔ P موازی هستند.

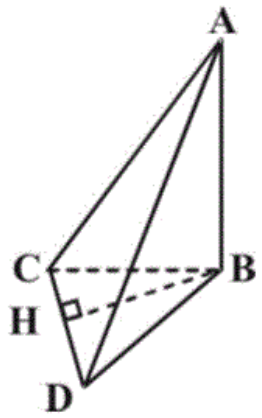
(هندسه ۲- هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۴۹ تا ۱۵۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۵ (مهرداد ملوندی)

چون AB بر صفحهٔ مثلث BCD عمود است پس $AB \perp BD$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD داریم:



$$BD^2 = AD^2 - AB^2 = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \Rightarrow BD = ۳$$

به طریق مشابه $BC = ۳$ و در نتیجه مثلث BCD متساوی‌الساقین است و ارتفاع BH، عمود مشترک AB و CD می‌باشد. در مثلث متساوی‌الساقین BCD، ارتفاع BH، میانهٔ ضلع CD نیز هست پس $CH = DH = \sqrt{۵}$ و لذا داریم:

$$BH^2 = BD^2 - DH^2 = ۹ - ۵ = ۴ \Rightarrow BH = ۲$$

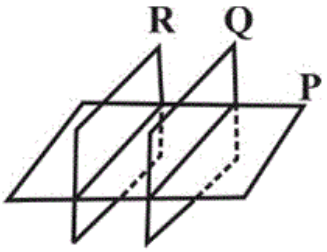
(هندسه ۲- هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۴۹ تا ۱۵۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

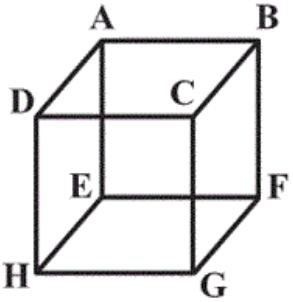
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۶- (داریوش ناظمی)

مطابق شکل اگر $P \perp Q$ و $R \parallel Q$، آنگاه $R \perp P$، یعنی اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، هر صفحهٔ موازی با یکی از آن دو بر دیگری عمود است.



به عنوان مثال نقض سایر گزینه‌ها به مکعب شکل زیر توجه کنید.



گزینهٔ «۱»: دو صفحهٔ ABCD و BCGF بر هم عمودند و EH موازی صفحهٔ ABCD است ولی EH بر صفحهٔ BCGF عمود نیست.

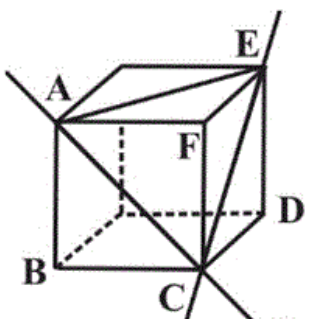
گزینهٔ «۲»: دو صفحهٔ ABCD و BCGF بر هم عمودند و صفحهٔ DCGH بر صفحهٔ ABCD عمود است ولی صفحهٔ DCGH موازی صفحهٔ BCGF نیست.

گزینهٔ «۴»: خط CG صفحهٔ ABCD را قطع کرده است ولی دو صفحهٔ BCGF و DCGH شامل این خط و عمود بر صفحهٔ ABCD هستند.

(هندسه ۲- هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۵۵ تا ۱۵۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۷- (رضا بخشنده)



می‌دانیم اگر P و P' دو صفحهٔ عمود بر هم باشند، هر کدام از این دو صفحه، شامل خطی است که بر دیگری عمود است یعنی صفحهٔ P شامل خطی مانند Δ است که بر P' عمود است. از طرفی چون Δ بر صفحهٔ P' عمود است، پس بر همهٔ خطوط صفحهٔ P' از جمله L' عمود است و از اینجا درستی گزینهٔ «۲» نتیجه می‌شود. به عنوان مثال نقض برای رد گزینهٔ «۱» مکعب بالا را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم صفحهٔ P شامل وجه $ABCF$ و صفحهٔ P' شامل وجه $CDEF$ باشد. از طرفی خط گذرنده از A و C را L و خط گذرنده از E و C را L' می‌نامیم. می‌دانیم مثلث ACE متساوی‌الاضلاع است پس زاویهٔ بین دو خط L و L' برابر 60° است.

از طرفی، فرض «عمود نبودن L' بر L» گزینهٔ «۳» را رد می‌کند، زیرا اگر L' بر P عمود باشد، آنگاه بر L نیز عمود است و این خلاف فرض اخیر است. همچنین این فرض درست، گزینهٔ «۴» را نیز رد می‌کند، زیرا اگر L' بر صفحهٔ شامل L عمود باشد آنگاه بر L عمود است و این خلاف فرض و یک تناقض است.

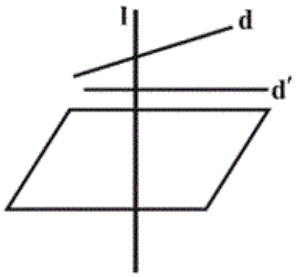
(هندسه ۲- هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۴۹ تا ۱۵۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۸

تمام خطوط عمود بر یک خط، با صفحه‌ای عمود بر آن موازی هستند.

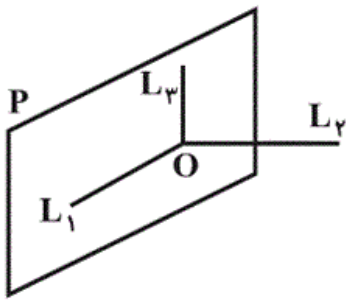


(هندسه ۲- هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۴۹ تا ۱۵۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

فرض کنید L_3 داخل صفحهٔ P نباشد. بر دو خط متقاطع L_1 و L_3، صفحه‌ای مانند P' می‌گذرد. چون L_2 بر دو خط متقاطع از صفحهٔ P' عمود است، پس $L_2 \perp P'$. از طرفی $L_2 \perp P$، پس $P \parallel P'$. از آن‌جا که دو صفحهٔ P و P'، هر دو شامل خط L_1 هستند، پس بر هم منطبق‌اند. یعنی L_3 درون صفحهٔ P قرار دارد.



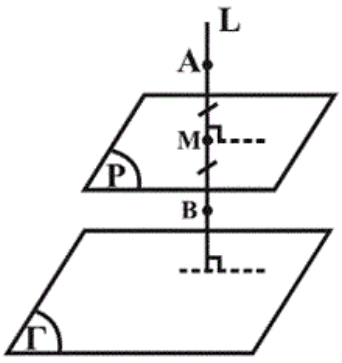
(هندسه ۲- هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۴۹ تا ۱۵۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۳۰ (حسین حاجیلو)

نقـاطی از فضـا کـه از نقـاط A و B بـه یـک فاصـله هسـتند، روی صـفحهٔ عمودمنصف AB قرار دارند. حال برای آنکه هیچ نقطه‌ای روی صفحهٔ Γ از A و B به یک فاصله نباشد، باید صفحهٔ عمودمنصف A و B هیچ نقطـهٔ مشترکی با صفحهٔ Γ نداشته باشد، یعنی با آن موازی غیرمنطبق باشد که در این صورت خط گذرنده از A و B چون بر صفحهٔ عمودمنصف، عمود است، بر هر صفحهٔ موازی با صفحهٔ عمودمنصف از جمله Γ نیز عمود است.



(هندسه ۲- هندسه فضایی: صفحهٔ ۱۵۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۱ (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

تابع f' در یک نقطه به طول مثبت، از منفی به مثبت تغییر علامت داده است.

پس تابع f در همان نقطهٔ مثبت، مینیمم نسبی دارد. بنابراین گزینهٔ «۱» می‌تواند درست باشد.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۹۸ تا ۲۱۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۸۲ (امیرهوشنگ خمسه)

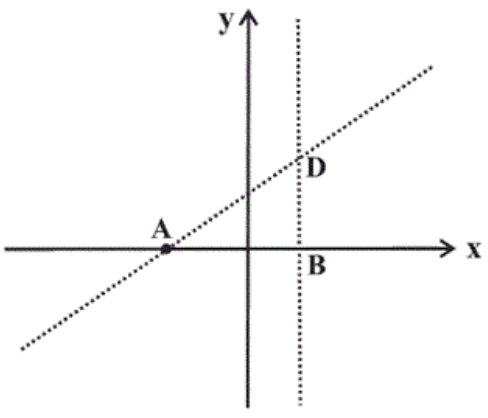
چون نمودار در مبدأ بر محور xها مماس است، پس صورت کسر دارای ریشهٔ مضاعف صفر است، لذا $a = ۰$ است.

از طرفی ریشهٔ مخرج (مجانب قائم) $x = -c$ است و با تقسیم صورت بر مخرج، معادلهٔ مجانب مایل بدست می‌آید:

$$\text{مجانب مایل: } y = x - c + \frac{c^۲}{x+c} \Rightarrow y = x - c$$

لذا محل تلاقی مجانب مایل و قائم یعنی y_D برابر است با:

$$\begin{cases} y = x - c \\ x = -c \end{cases} \Rightarrow y_D = -۲c$$



طول نقطهٔ A هم که به وضوح محل برخورد مجانب مایل با محور xها، یعنی $x = c$

است.

$$\Rightarrow S_{\underset{ABD}{\Delta}} = \frac{(AB)\times(BD)}{۲} = \frac{(۲c)(۲c)}{۲} = ۲c^۲ = ۲$$

$$\Rightarrow c = \pm ۱ \Rightarrow c = -۱ \quad \text{قابل قبول}$$

چون مجانب قائم مثبت است، باید $c < ۰$ باشد.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۸ تا ۲۱۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۸۳ (محمد خندان)

$$y = xe^{ax^۲+bx-۲} \Rightarrow y' = e^{ax^۲+bx-۲}(۱+۲ax^۲+bx)$$

$$\xrightarrow[\text{اکسترمم است.}]{x=۱} y'(۱) = ۰ \Rightarrow ۱+۲a+b = ۰ \Rightarrow ۲a+b = -۱ \qquad (۱)$$

$$\xrightarrow{(۱,\frac{۱}{e^۲})\in f} f(۱) = \frac{۱}{e^۲} \Rightarrow e^{a+b-۲} = e^{-۲} \Rightarrow a+b = ۰ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۸ تا ۲۱۰)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۴- (محمودرضا اسلامی)

$$\sum_{i=۲}^{۹۷}\left(\frac{۱}{\sqrt{i+۳}+\sqrt{i+۲}}\times\frac{\sqrt{i+۳}-\sqrt{i+۲}}{\sqrt{i+۳}-\sqrt{i+۲}}\right)$$

$$=\sum_{i=۲}^{۹۷}\frac{\sqrt{i+۳}-\sqrt{i+۲}}{i+۳-i-۲}$$

$$=\sum_{i=۲}^{۹۷}\left(\sqrt{i+۳}-\sqrt{i+۲}\right)$$

$$\underline{\underline{\text{قاعدهٔ ادغام}}}\sqrt{۹۷+۳}-\sqrt{۲+۲}=\sqrt{۱۰۰}-\sqrt{۴}=۱۰-۲=۸$$

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۱۶ تا ۲۱۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۵- (قاسم کتابچی)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۴}{n}\left(\sum_{i=۱}^{n}\left(۲+\frac{۳i}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{۴}{n}\left(\sum_{i=۱}^{n}۲+\sum_{i=۱}^{n}\frac{۳i}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۴}{n}\left(۲\sum_{i=۱}^{n}۱+\frac{۳}{n}\sum_{i=۱}^{n}i\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۴}{n}\left(۲n+\frac{۳}{n}\times\frac{n(n+۱)}{۲}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(۸+۶\frac{n+۱}{n}\right)=۸+۶=۱۴$$

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۱۱ تا ۲۱۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۶

حاصل انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{۱}^{n} \frac{۱}{۱+x^{۲}} dx = \tan^{-۱} x \Big|_{۱}^{n} = \tan^{-۱}(n) - \tan^{-۱}(۱)$$

$$= \tan^{-۱}(n) - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow a_n = \tan^{-۱} n - \frac{\pi}{۴}$$

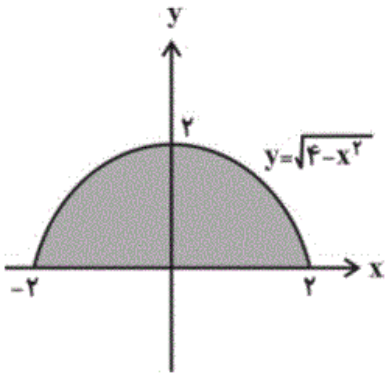
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\tan^{-۱}(n) - \frac{\pi}{۴} \right) = \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۴}$$

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۲۷ تا ۲۴۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۷- (حجت سردار)



نمودار تابع $y = \sqrt{a^۲ - x^۲}$، یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $|a|$ است که مساحت زیر آن برابر $\frac{\pi}{۲}a^۲$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\bar{f} = \frac{\int_{-۲}^{۲} \sqrt{۴ - x^۲}\,dx}{۲-(-۲)} = \frac{\frac{\pi}{۲} \times ۲^۲}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۳۶ و ۲۳۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۸۸- (محمد خندان)

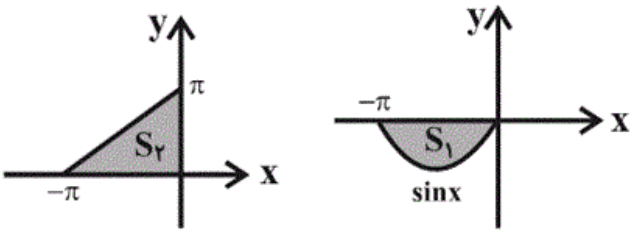
$$\int_{۰}^{\sqrt{۳}} \frac{dx}{۱ + x^{[x]+۱}} = \int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱+x} + \int_{۱}^{\sqrt{۳}} \frac{dx}{۱+x^۲}$$

$$= \mathrm{Ln}(۱+x)\Big|_{۰}^{۱} + \tan^{-۱} x \Big|_{۱}^{\sqrt{۳}}$$

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۹



$$\begin{cases} S_۱ = \int_{-\pi}^{۰} |\sin x|\,dx = \left|\int_{-\pi}^{۰} \sin x\,dx\right| = \left|(-\cos x)\Big|_{-\pi}^{۰}\right| = \cos x\Big|_{-\pi}^{۰} = ۲ \\ S_۲ = \dfrac{\pi \times \pi}{۲} = \dfrac{\pi^۲}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = S_۱ + S_۲ = ۲ + \frac{\pi^۲}{۲}$$

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۳۹ تا ۲۴۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۰-

می‌دانیم اگر $f(x)=\int_{0}^{g(x)} h(t)dt$ باشد، با استفاده از قاعدهٔ زنجیری داریم:

$$f'(x)=g'(x)\times h(g(x))$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$F'(x)=\cos x\times\frac{1}{1-\sin^2 x}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow F''(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}\Rightarrow F''\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۴۱ تا ۲۴۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۱-

با توجه به این که فصل مشترک یک جفت از صفحات با صفحهٔ سوم در بیش از یک نقطه مشترک است، پس بر آن صفحه منطبق است. از این رو دستگاه بی‌شمار جواب دارد و دترمینان ماتریس ضرایب باید صفر باشد. طبق دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ داریم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۳ & -a \\ ۰ & ۱ & \frac{۳}{۴} \\ ۱ & -۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow \left(۶ - \frac{۹}{۴} + ۰\right) - \left(-a - \frac{۳}{۲} + ۰\right) = ۰$$

$$\Rightarrow a = \frac{۹}{۴} - \frac{۳}{۲} - ۶ = \frac{-۲۱}{۴}$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۰ و ۱۴۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۲-

طبق روش کرامر داریم:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}۷ & -۵ & ۲\\ ۳ & ۲ & -۴\\ ۵ & -۴ & -۶\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & -۵ & ۲\\ ۱ & ۲ & -۴\\ b & -۴ & -۶\end{vmatrix}}=\frac{(-۸۴+۱۰۰-۲۴)-(۲۰+۱۱۲+۹۰)}{-۴۶}$$

$$=\frac{-۲۳۰}{-۴۶}=۵$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۴ و ۱۴۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ داریم:

$$|A|=\begin{vmatrix}m & ۱ & m\\ ۲ & m & ۱\\ -۲ & ۱ & m\end{vmatrix}$$

$$=(m^۳-۲+۲m)-(-۲m^۲+m+۲m)=m^۳+۲m^۲-m-۲$$

$$=m^۲(m+۲)-(m+۲)=(m^۲-۱)(m+۲)$$

$$\Rightarrow|A|=(m-۱)(m+۱)(m+۲)\neq ۰\Rightarrow m\neq ۱,-۱,-۲$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۰ و ۱۴۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۴- (امیرحسین ابومحبوب)

با توجه به دو ماتریس داریم:

$$\begin{cases} z = ۲ \\ -y - ۵z = -۱۱ \Rightarrow y = ۱ \\ x + y + ۲z = ۶ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

$$b_۳ = -x + ۲y + ۴z = -۱ + ۲ + ۸ = ۹$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۵- (محمدعلی نادرپور)

$$|A^*| = |A|^۲ \Rightarrow |A|^۲ = ۱ \xrightarrow{|A|>۰} |A| = ۱$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} A^* = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-۱}B = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ y = ۱ \\ z = ۳ \end{cases}$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۸ و ۱۳۹)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۶- (محمدابراهیم گیتی‌زاده)

بین معادله‌های P_1 و P_2، مجهول z را حذف می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\times 2}\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-y+z=6 \end{cases} \Rightarrow 5x-y=13$$

بین معادله‌های P_1 و P_3، مجدداً مجهول z را حذف می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\times 4}\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-5y+8z=9 \end{cases} \Rightarrow 5x-y=13$$

دو خط $5x-y=13$ بر هم منطبق‌اند، یعنی خطوط d_1 و d_2 بر هم منطبق‌اند. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که خط d_3 نیز بر دو خط d_1 و d_2 منطبق می‌باشد.

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی؛ صفحه‌های ۱۴۰ و ۱۴۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۷- (عنایت‌اله کشاورزی)

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_1 - \frac{3}{2}R_3 \\ R_2 + \frac{1}{2}R_3 \\ R_3 \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۷ و ۱۴۸)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۸- (کاظم باقرزاده‌چهره)

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a + 2b}{5} \\ y = \frac{2a - b}{5} \end{cases}$$

x و y باید در معادلهٔ سوم صدق کنند:

$$x + 3y = 1 \Rightarrow \frac{a + 2b}{5} + 3\left(\frac{2a - b}{5}\right) = 1$$
$$\Rightarrow a + 2b - 3b + 6a = 5 \Rightarrow 7a - b = 5$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۴۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب $(x=۰,y=۰,z=۰)$ در هر سه معادله صدق می‌کند.

$$\begin{cases} a-b=۰ \\ a+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow a=b=-۱$$

به ازای $a=-۱$ و $b=-۱$، دستگاه معادلات به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} mx-y-z=۰ \\ ۲x+y-z=۰ \\ x-۲y+mz=۰ \end{cases}$$

اگر A ماتریس ضرایب این دستگاه سه معادله سه مجهولی همگن باشد،

آنگاه داریم:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & -۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۲ & m \end{vmatrix}=\left(m^{۲}+۱+۴\right)-\left(-۱+۲m-۲m\right)=m^{۲}+۶$$

$m^{۲}+۶$ همواره مخالف صفر است، بنابراین دستگاه به ازای هر m جواب منحصربه‌فرد صفر دارد.

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۰- (سیدعادل‌رضا مرتضوی)

چون دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر صفر است و از طرفی دو صفحهٔ $x+y+2z=4$ و $-2x-2y-4z=-8$ بر هم منطبق‌اند، پس دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۱- (محمدعلی نادرپور)

حالت‌های مطلوب مسأله آن است که بار اول و دوم فرد بیاید یا بار اول زوج بیاید و بار دوم و سوم فرد بیاید. با توجه به این‌که احتمال فرد آمدن و زوج آمدن تاس هر کدام برابر $\frac{۱}{۲}$ است، داریم:

$$P(\text{دقیقاً دو بار فرد بیاید}) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۸}$$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۵ و ۸۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر A را پیشامد انتخاب دو مهرهٔ غیرهم‌رنگ و $B_۱$ و $B_۲$ را به ترتیب پیشامد انتخاب ظرف‌های اول و دوم، در نظر بگیریم، داریم:

$$P(A) = P(B_۱)P(A \mid B_۱) + P(B_۲)P(A \mid B_۲)$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۲}} + \frac{۱}{۲} \times \frac{\binom{۷}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۸}{۱۵} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲۱}{۴۵} = \frac{۱}{۲}(\frac{۸}{۱۵} + \frac{۷}{۱۵}) = \frac{۱}{۲} \times ۱ = \frac{۱}{۲}$$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۵ و ۸۶)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

$$P(\text{هر دو سبز}) = P(\text{اولی سبز و دومی سبز}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۵} \times \frac{۶}{۸} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۵}{۷} \times \frac{۳}{۶}$$

$$= \frac{۲۳}{۷۰}$$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۵ و ۸۶)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فرض کنید A پیشامد انتخاب ظرف اول، B پیشامد انتخاب ظرف دوم و C پیشامد آن باشد که گوی انتخابی آبی است. احتمال مورد نظر برابر است با $P(A \mid C)$، پس بنابر قاعدهٔ بیز داریم:

$$P(A \mid C) = \frac{P(A)P(C \mid A)}{P(A)P(C \mid A) + P(B)P(C \mid B)} = \frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{۶}{۹}}{\frac{۱}{۲} \times \frac{۶}{۹} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۸}}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳} + \frac{۳}{۱۶}} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۴۸}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} = ۰/۶۴$$

توجه کنید که احتمال انتخاب هر ظرف برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۵ تا ۸۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۵- (مهدی وقوعی)

$$P(\text{ارسال از مرکز } A \mid \text{پیغام بدون خطا}) = \frac{P(\text{پیغام از مرکز } A \text{ و بدون خطا})}{P(\text{پیغام بدون خطا})}$$

$$= \frac{۰/۶ \times ۰/۹}{۰/۶ \times ۰/۹ + ۰/۲ \times ۰/۸ + ۰/۲ \times ۰/۷}$$

$$= \frac{\frac{۵۴}{۱۰۰}}{\frac{۵۴}{۱۰۰} + \frac{۱۶}{۱۰۰} + \frac{۱۴}{۱۰۰}} = \frac{\frac{۵۴}{۱۰۰}}{\frac{۸۴}{۱۰۰}} = \frac{۵۴}{۸۴} = \frac{۹}{۱۴}$$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۵ تا ۸۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۶- (نوید مجیدی)

باید داشته باشیم $\sum_{x=۱}^{۵} P(X=x) = ۱$ ، در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۶} + \frac{۳}{۱۱} + \frac{a}{۱۱} + \frac{a}{۱۱} = ۱ \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } ۳۳}$$

$$۱۱ + ۱۱ + ۹ + ۳a + ۳a = ۳۳ \Rightarrow ۶a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۳}$$

$$P(۲ < X < ۵) = P(X=۳) + P(X=۴) = \frac{۳}{۱۱} + \frac{۱}{۳۳} = \frac{۱۰}{۳۳}$$

(ریاضیات گسسته- توزیع‌های گسستهٔ احتمال: مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۹۸)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۷- (علیرضا سیف)

تنها عددی که یک مقسوم‌علیه دارد عدد ۱ است و اعـداد اول تنهـا اعـدادی هستند که ۲ مقسوم‌علیه دارند، پس اعضای این پیشامد تصادفی عبارت‌اند از:

$$A = \{۱,۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\}$$

$$P(A) = \frac{۹}{۲۰} = ۰/۴۵$$

(ریاضیات گسسته- توزیع‌های گسستهٔ احتمال؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۸- (علیرضا سیف)

باید مجموع احتمال‌ها برابر یک باشد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sum_{i=۱}^{۶} P(X=i) = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲-a}{۳۶} + \frac{۴-a}{۳۶} + \frac{۶-a}{۳۶} + \frac{۸-a}{۳۶} + \frac{۱۰-a}{۳۶} + \frac{۱۲-a}{۳۶}$$

$$= \frac{۴۲-۶a}{۳۶} = ۱ \Rightarrow ۴۲-۶a = ۳۶ \Rightarrow a = ۱$$

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

احتمال انتخاب مهرهٔ سفید و سیاه در هر دفعه به ترتیب برابر $\frac{۳}{۸}$ و $\frac{۵}{۸}$ است،

بنابراین احتمال آنکه در بار چهارم برای اولین بار مهرهٔ سفید خارج شود برابر

است با $(\frac{۵}{۸})^{۳} \times \frac{۳}{۸}$ و احتمال آن که حداقل ۴ انتخاب لازم باشد برابر است با:

$$(\frac{۵}{۸})^{۳} \times \frac{۳}{۸} + (\frac{۵}{۸})^{۴} \times \frac{۳}{۸} + \cdots = \frac{(\frac{۵}{۸})^{۳} \times \frac{۳}{۸}}{۱ - \frac{۵}{۸}} = (\frac{۵}{۸})^{۳}$$

بنابراین نسبت احتمال‌ها برابر است با $\frac{۳}{۸}$.

(ریاضیات گسسته- توزیع‌های گسستهٔ احتمال: صفحه‌های ۹۴ تا ۹۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

شرط این که تابع مورد نظر، یک تابع احتمال باشد، آن است

که $\sum_{x=1}^{10} P(X=x)=1$ ، داریم:

$$\frac{1}{100}[2(10-1)+a]+\cdots+\frac{1}{100}[2(10-10)+a]=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100}[2(9+8+\cdots+1+0)+10a]=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100}[2\times\frac{9\times10}{2}+10a]=1$$

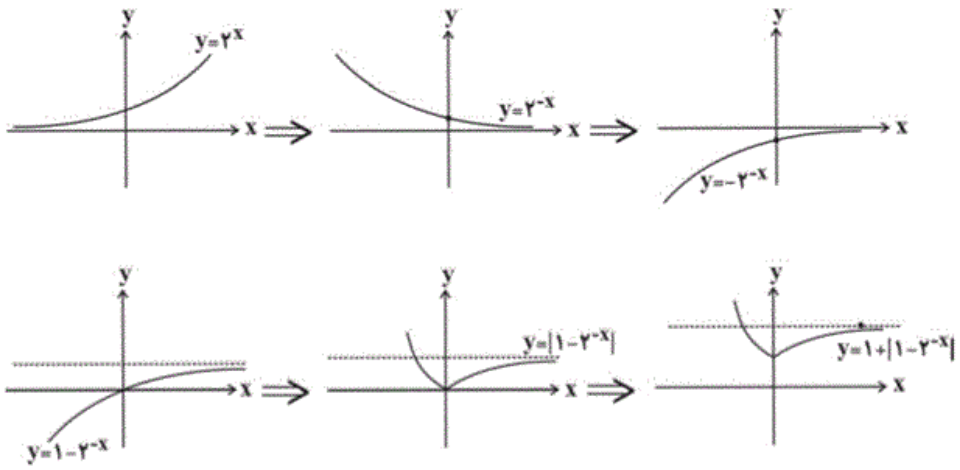
$$\Rightarrow 90+10a=100\Rightarrow a=1$$

(ریاضیات گسسته- توزیع های گسستهٔ احتمال: مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۹۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۱- (محمودرضا اسلامی)



(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۲- (حمید علیزاده)

$$m(t)=M\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$\xrightarrow{T=۱۰۸\ \text{روز}} m(t)=M\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{t}{۱۰۸}}$$

$$\frac{m(t_۰)}{M}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{t_۰}{۱۰۸}}=\frac{۱}{۱۰}=۱۰^{-۱}$$

$$\xrightarrow{\log}\frac{t_۰}{۱۰۸}(-\log ۲)=-\log ۱۰=-۱$$

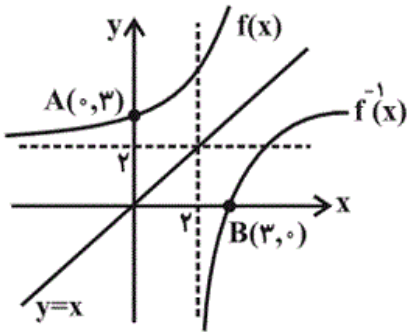
$$\Rightarrow\frac{t_۰}{۱۰۸}=\frac{۱}{\log ۲}\simeq\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow t_۰=\frac{۱۰۸۰}{۳}=۳۶۰\ \text{روز}\simeq ۱\ \text{سال}$$

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۸۶ تا ۹۵، ۱۱۳ و ۱۱۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

برای رسم معکوس آن کافی است قرینهٔ نمودار را نسبت به خط $y = x$ به‌دست آوریم.



$$\Rightarrow AB = \sqrt{OA^{۲} + OB^{۲}} = \sqrt{۹ + ۹} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷، ۱۰۳ و ۱۰۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$۲^{x+۲}+۴^{x+۲}=۷۲\Rightarrow ۲^{x+۲}+(۲^{۲})^{x+۲}=۷۲$$

$$\Rightarrow ۲^{x+۲}+(۲^{x+۲})^{۲}=۷۲$$

فرض می‌کنیم $t>۰$ و $۲^{x+۲}=t$ باشد، بنابراین:

$$t+t^{۲}=۷۲\Rightarrow t^{۲}+t-۷۲=۰\Rightarrow (t+۹)(t-۸)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=-۹ & \text{غیرقابل قبول} \\ t=۸ & \text{قابل قبول} \end{cases} \Rightarrow ۲^{x+۲}=۸=۲^{۳}\Rightarrow x+۲=۳\Rightarrow x=۱$$

$$\Rightarrow \log_{۴}^{\sqrt{x+۷}}=\log_{۴}^{\sqrt{۸}}=\log_{۲^{۲}}^{۲^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{۲}\log_{۲}^{۲}=\frac{۳}{۴}$$

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۵- (مهرداد ملوندی)

برای پیدا کردن مقدار x_0، معادلهٔ $y = 0$ را حل می‌کنیم:

$$y = 0 \Rightarrow 2 - \log_{10}^{(x_0+10)} = 0 \Rightarrow \log_{10}^{(x_0+10)} = 2$$
$$\Rightarrow x_0 + 10 = 10^2 \Rightarrow x_0 = 90$$

برای پیدا کردن مقدار y_0، مقدار $x = 0$ را در معادلهٔ تابع قرار می‌دهیم:

$$x = 0 \Rightarrow y_0 = 2 - \log_{10}^{(0+10)} = 2 - 1 = 1$$
$$\Rightarrow x_0 + y_0 = 90 + 1 = 91$$

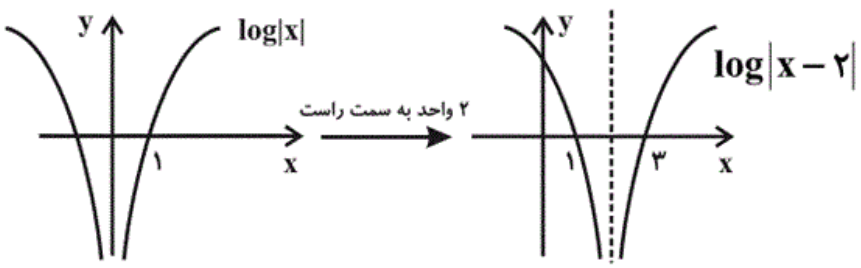
(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۶- (فریدون ساعتی)

$$f(x) = \frac{1}{2}\log(x^2 - 4x + 4) = \frac{1}{2}\log(x-2)^2 = \frac{1}{2}(2)\log|x-2|$$

$$= \log|x-2|$$



(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۷- (فرهاد وفایی)

$$\log_{۸}^{۱۰۰} = \frac{\log_{۱۰}^{۱۰۰}}{\log_{۱۰}^{۸}} = \frac{\log_{۱۰}^{۱۰^۲}}{\log_{۱۰}^{۲^۳}} = \frac{۲\log_{۱۰}^{۱۰}}{۳\log_{۱۰}^{۲}}$$

$$= \frac{۲}{۳(\log_{۱۰}^{۱۰} - \log_{۱۰}^{۵})} = \frac{۲}{۳(۱-a)}$$

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۹۸- (فریدون ساعتی)

$$\begin{cases} x_۱ = \log a \\ x_۲ = \log b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ + x_۲ = \log a + \log b = \log ab = \sqrt{۷} \\ x_۱ x_۲ = \log a \log b = \sqrt{۲} \end{cases}$$

$$A = (\log a)^۶ (\log b)^۶ (\log ab)^۴ = (\log a \log b)^۶ (\log a + \log b)^۴$$

$$= (\sqrt{۲})^۶ (\sqrt{۷})^۴ = ۸(۴۹) = ۳۹۲$$

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۹)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\log^{۴}_{[۳x+۲]} + \log_{۳} \frac{۱}{۹} = ۰ \Rightarrow \log^{۴}_{[۳x+۲]} + \log_{۳} ۳^{-۲} = ۰$$

$$\Rightarrow \log^{۴}_{[۳x+۲]} - ۲\log^{۳}_{۳} = ۰ \Rightarrow \log^{۴}_{[۳x+۲]} = ۲$$

$$\Rightarrow ۴ = [۳x+۲]^{۲} \Rightarrow ۲^{۲} = [۳x+۲]^{۲}$$

$$\xrightarrow{[۳x+۲]>۰} [۳x+۲] = ۲ \Rightarrow ۲ \leq ۳x+۲ < ۳$$

$$\Rightarrow ۰ \leq ۳x < ۱ \Rightarrow ۰ \leq x < \frac{۱}{۳}$$

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۰۰

$$۱۰۰x = x^{\log x} \xrightarrow{\log} \log(۱۰۰x) = \log(x^{\log x})$$

$$\Rightarrow \log ۱۰۰ + \log x = (\log x)(\log x) \Rightarrow ۲ + \log x = (\log x)^۲$$

$$\Rightarrow (\log x)^۲ - (\log x) - ۲ = ۰$$

با فرض $t = \log x$، خواهیم داشت:

$$t^۲ - t - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۱ \\ t = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = -۱ \\ \log x = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱}{۱۰} \\ \text{یا} \\ x = ۱۰۰ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ حاصل‌ضرب جواب‌ها $= ۱۰$

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا