



www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir)

ریاضی سرا در اینستاگرام:

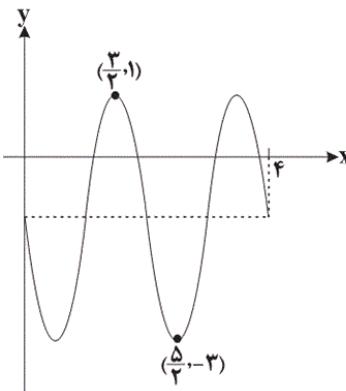


<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضی ۳ - دوازدهم، مثلثات - ۵ سوال

۹۰- اگر تابع $f(x) = 5 \sin 3\left(\frac{\pi}{2}x - c\right)$ به ازای $x = \frac{1}{2}$ ماقزیم شود، طول نقطه مینیمم آن، کدام می‌تواند باشد؟ (۱، عدد ثابت است).

- $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{11}{6}$ (۳) $\frac{7}{6}$ (۲) $-\frac{5}{6}$ (۱)



۹۱- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos \pi\left(\frac{3}{2}x + bx\right) + c$ کدام است؟ حاصل abc

- ۱ (۱)
۲ (۲)
-۱ (۳)
-۲ (۴)

۹۲- از معادله $\cos^3 x (\cos 2x) (\cos \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \cos^2 x$ در فاصله $(0, 2\pi)$ بدست می‌آید؟

- ۳ (۴) ۴ (۳) ۵ (۲) ۶ (۱)

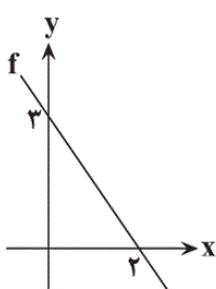
۹۳- مجموع جواب‌های متمایز معادله $\cos 2x + \cos^3 x + 4 \sin x = 3$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- π (۴) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) 2π (۲) $\frac{3\pi}{2}$ (۱)

۸۱- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ، آنگاه مقدار $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$ کدام است؟

- $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{3}{8}$ (۳) $-\frac{3}{8}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۱)

-۸۲- با توجه به نمودار تابع خطی f در شکل زیر، حاصل کدام است؟



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + |x|}{f^{-1}(x)}$$

- | | |
|--------------------|---------------------|
| $-\frac{3}{4}$ (۲) | $\frac{3}{4}$ (۱) |
| $\frac{15}{4}$ (۴) | $-\frac{15}{4}$ (۳) |

-۸۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x}$ کدام است؟

- | | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| $\frac{5}{4}$ (۴) | $\frac{3}{4}$ (۳) | $-\frac{1}{4}$ (۲) | $-\frac{7}{4}$ (۱) |
|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|

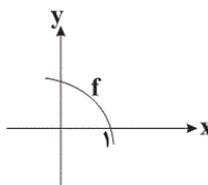
-۹۴- اگر چندجمله‌ای $f(x) = x^3 - x^2 + 2 - 2a$ بر $(x+2)$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-a)$ کدام است؟

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۸ (۴) | ۶ (۳) | ۴ (۲) | ۳ (۱) |
|-------|-------|-------|-------|

-۹۵- اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + 2x^2 + x + k}{1-x^2} = L$ عددی حقیقی مشخص و مخالف صفر است.

- | | | | |
|--------|-------|--------|-------|
| -۵ (۴) | ۵ (۳) | -۱ (۲) | ۱ (۱) |
|--------|-------|--------|-------|

-۹۶- شکل روبرو نمودار تابع f را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x-1)}{f(x)}$ کدام است؟

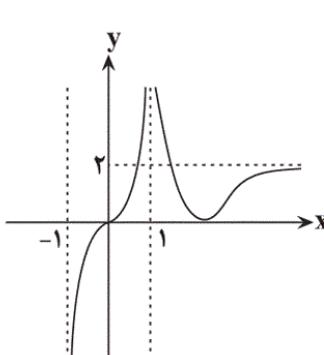


- ۱) صفر
- ۲) $-\infty$
- ۳) $+\infty$
- ۴) -1

-۹۷- تابع $f(x) = \frac{(a+1)x^3 + bx^2 - 2}{ax^2 + 3x - 2}$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$ آن‌گاه $(x-1)$ کدام است؟

- | | | | |
|--------|--------|-------|-------|
| -۴ (۴) | -۳ (۳) | ۴ (۲) | ۳ (۱) |
|--------|--------|-------|-------|

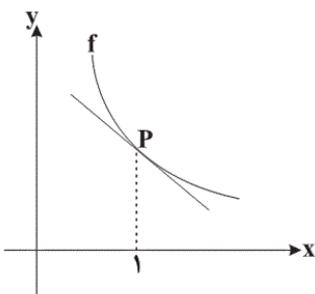
-۹۸- تابع $f(x) = \frac{(2+a)x^3 + 5x - 7}{2x^3 - x^2 + 4}$ مفروض است. اگر نمودار تابع (x) $g(x)$ مطابق شکل مقابل باشد و داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 1$ در این صورت مقدار a کدام است؟



- ۱) ۲
- ۲) -۲
- ۳) ۴
- ۴) -۴

ریاضی ۳ - دوازدهم، مشتق - ۱۲ سوال

۹۹- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع f است. اگر داشته باشیم: $f(1) = 2$ و $f'(1) = -\frac{3}{2}$ آنگاه خط مماس بر تابع f در نقطه P محور x را با چه طولی قطع می کند؟



- $\frac{7}{2}$ (۱)
- $\frac{5}{3}$ (۲)
- $\frac{7}{3}$ (۳)
- $\frac{5}{2}$ (۴)

۱۰۰- اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{-h} = 2$ مقدار مشتق تابع $f(x^2 + x)$ در $x = 1$ کدام است؟

- $\frac{1}{3}$ (۴)
- ۲ (۳)
- $\frac{1}{2}$ (۲)
- ۲ (۱)

۱۰۱- در تابع $|6x - x^3|$, حاصل $f'_+(6) - f'(-4)$ کدام است؟

- ۸ (۴)
- ۸ (۳)
- ۴ (۲)
- ۴ (۱)

۱۰۲- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} + 2, & x \geq 1 \\ x^3 - bx, & x < 1 \end{cases}$ مشتق پذیر باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

- ۱ (۴)
- ۱۵ (۳)
- ۱ (۲)
- ۱۵ (۱)

۱۰۳- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4|, & x > 1 \\ \sqrt[3]{x}, & x \leq 1 \end{cases}$ در نقطه مشتق و در نقطه خط مماس ندارد.

- ۲، ۳ (۴)
- ۳، ۴ (۳)
- ۳، ۴ (۲)
- ۴، ۴ (۱)

۱۰۴- مشتق تابع $f(x) = (\sqrt{5x+1})(3x-2)$ در نقطه‌ای به طول صفر کدام است؟

- ۴ صفر (۴)
- ۸ (۳)
- ۱۶ (۲)
- ۲۰ (۱)

۱۰۵- اگر $f(x) = x\sqrt[3]{x}$ باشد، آنگاه مشتق تابع $y = f' \circ f(x)$ در $x = 1$ کدام است؟

- $\frac{16}{9}$ (۴)
- $\frac{16}{27}$ (۳)
- $\frac{4}{9}$ (۲)
- $\frac{4}{3}$ (۱)

$$x^2 + 2x + 1, -2 \leq x < 0$$

۱۰۶-تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1}, 0 \leq x < 2 \\ [x]-1, 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$ در دامنه خود در کدام نقاط مشتق ناپذیر است؟

$$\{0, \frac{1}{2}, 2, 3, 4\} \quad (2)$$

$$\{-1, 0, 1, 2\} \quad (1)$$

$$\{1, \frac{1}{2}, 2, 3\} \quad (4)$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4\} \quad (3)$$

$$107-اگر f(x) = \frac{x^3 + x}{x + 1} \text{ کدام است؟}$$

$$1 \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$108-اگر g(x) = 4x + |x| \text{ و } f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x| \text{ باشند، مشتق تابع fog، کدام است؟}$$

۴) مشتق ندارد.

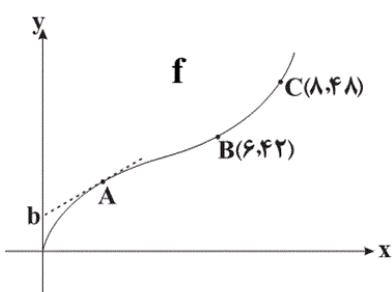
$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۱۰۹-در شکل زیر قسمتی از نمودار تابع f رسم شده است. اگر آهنگ متوسط تغییر تابع بین نقاط B تا C ، ۶ برابر آهنگ لحظه‌ای

تغییر تابع در نقطه $A(a, 2a)$ باشد، حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟



$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{5}{2} \quad (2)$$

$$\frac{2}{5} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

۱۱۰-معادله حرکت اتومبیلی در بازه زمانی $[2, 10]$ به صورت $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 10$ است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در این بازه برابر است؟

$$8 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

ریاضی ۳ - دوازدهم، تابع - ۶ سوال

$$108-اگر f(x) = -\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} \text{ و } g(x) = \sqrt{-x^2 - x} \text{ باشند، آنگاه دامنه تابع } (gof)(x) \text{ کدام است؟}$$

$$(-1, 1) - \{0\} \quad (4)$$

$$\emptyset \quad (3)$$

$$(0, -1) \cup (-2, 0) \quad (2)$$

-۸۵ تابع $f(x) = \begin{cases} a - \frac{\log x}{3}, & x \geq 3 \\ 2x + 1, & x < 3 \end{cases}$ به ازای چه حدودی از a ، همواره در شرط $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ صدق می‌کند؟

$a = 6$ (۴) فقط

هیچ مقدار a (۳)

$a \geq 6$ (۲)

$a \leq 6$ (۱)

-۸۶ تابع $|f(x)| = |x(x^3 + 3x + 2)|$ در بازه $[a, +\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

$-1 - \sqrt[3]{2}$ (۴)

$-\sqrt[3]{2}$ (۳)

-2 (۲)

-1 (۱)

-۸۷ اگر تابع اکیداً صعودی $f(x) = \frac{mx - 2}{3}$ در نقطه‌ای به طول $1 = x$ ، نمودار تابع وارون خود را قطع کند، ضابطه تابع وارون کدام است؟

$y = \frac{5x + 2}{3}$ (۴)

$y = \frac{5x - 2}{3}$ (۳)

$y = \frac{3x - 2}{5}$ (۲)

$y = \frac{3x + 2}{5}$ (۱)

-۸۸ اگر $f(x) = \sqrt{2+x}$ و $g(x) = x^2$ باشد، آنگاه معادله $g(f(x)) = 5$ چند ریشه حقیقی دارد؟

(۱) فقط یک ریشه مثبت

(۲) ریشه حقیقی ندارد.

(۳) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی

-۸۹ اگر $\{(a, 1), (0, 2), (-1, 3), (2, 1), (4, 0)\} = f$ و $\{(1, -2), (-2, 0), (3, -1), (0, 1)\} = g$ باشند و داشته باشیم: آنگاه مقدار

$(fog)(-a)$ کدام است؟

۴ صفر

۳ (۳)

۲ (۲)

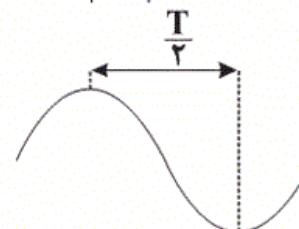
۱ (۱)

(محمد مصطفی ابراهیمی)

-۹۰

دوره تناوب $f(x) = 5 \sin(\frac{\pi}{2}x - c) = 5 \sin(\frac{3\pi}{2}x - 3c)$ برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{|\frac{3\pi}{2}|} = \frac{4}{3}$$



مطابق شکل فاصله طول نقاط ماقزیم و مینیم نمودار تابع مثلثاتی سینوس برابر $\frac{T}{2}$ است. در $x = \frac{1}{2}$ ماقزیم داریم. پس اگر از این نقطه به

اندازه $\frac{T}{2}$ سمت راست یا چپ برویم به نقطه مینیم می‌رسیم:

$$x_{\min} = x_{\max} + \frac{T}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۷ تا ۴۶)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷، ۴۰ و ۴۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\left. \begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow a \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + c = 1 \Rightarrow -a + c = 1 \\ f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -3 \Rightarrow a \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + c = -3 \Rightarrow a + c = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -2 \\ c = -1 \end{array} \right.$$

حالت دوم: $b = -1$

$$\left. \begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow a + c = 1 \\ f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -3 \Rightarrow -a + c = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ c = -1 \end{array} \right.$$

پس در هر دو حالت $abc = 2$ است.

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۶ تا ۹۴)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷، ۴۰ و ۴۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سروش موئینی)

-۹۲

می‌دانیم $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ ، پس داریم:

$$(cos 3x)(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - cos^2 x \xrightarrow{x=(-2)} cos 3x = \frac{2 cos^2 x - 1}{cos 2x}$$

پس معادله به صورت $cos 3x = cos 2x$ در می‌آید. حال داریم:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \xrightarrow{x \in (0, 2\pi)} k = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right.$$

پس ۴ جواب داریم که عبارتند از $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۱ تا ۴۲)

 ۴ ۳ ۲ ۱

با جایگذاری‌های $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ و $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ داریم:

$$(1 - 2\sin^2 x) + (1 - \sin^2 x) + 4\sin x = 3 \Rightarrow 3\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$$

معادله بالا یک معادله درجه دوم بر حسب $\sin x$ است. با حل این معادله

$$\text{درجه دوم ۲ جواب } 1 \text{ و } \sin x = \frac{1}{3} \text{ به دست می‌آید:}$$

* معادله $\sin x = 1$ در بازه $[0, \pi]$ تنها یک جواب $x = \frac{\pi}{2}$ را دارد.

* معادله $\sin x = \frac{1}{3}$ در بازه $[0, \pi]$ دو جواب مکمل هم دارد. پس مجموع

این دو جواب در بازه داده شده برابر با π است.

در نتیجه مجموع کل جواب‌های معادله برابر است با:

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۴۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سراسری تهریبی - ۹۵)

توجه کنید که:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha$$

برای محاسبه $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ، طرفین تساوی $\sin \alpha - \cos \alpha = -\sin 2\alpha$ را به

توان دو می‌رسانیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow -\sin 2\alpha = \frac{-3}{4}$$

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴۲ و ۱۴۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

شیب خط $\frac{-3}{2}$ و عرض از مبدأ آن ۳ است، پس معادله خط به صورت

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

خواهد بود، بنابراین ضابطه f^{-1} برابر است با:

$$x = -\frac{3}{2}y + 3 \Rightarrow y = \frac{-2}{3}x + 2$$

در نتیجه حاصل حد برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{3}{2}x + 3 + |x|}{-\frac{3}{2}x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{3}{2}x + x}{-\frac{3}{2}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{2}x}{-\frac{3}{2}x} = \frac{3}{4}$$

(حد بین نهایت و حد در بین نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۶۴)

۴

۳

۲

۱✓

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x} \quad (\text{حد ابهام دارد})$$

صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - (3-x)}{x(x+1)(2x - \sqrt{3-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + x - 3}{x(x+1)(2x - \sqrt{3-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(4x-3)}{x(x+1)(2x - \sqrt{3-x})} = \frac{-7}{-1(-4)} = \frac{-7}{4} \end{aligned}$$

(حد بین نهایت و حد در بین نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۳)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۴)

۴

۳

۲

۱✓

$f(x) = x^2 - x - 6$ می‌باشد. برای محاسبه باقی‌مانده تقسیم $f(x)$

بر $(x-4)$ کافی است $(4)f$ را محاسبه کنیم:

$$f(4) = 4^2 - 4 - 6 = 6$$

(حد بین نهایت و حد در بین نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

۴

۳✓

۲

۱

(علی شهرابی)

$$\lim_{x \rightarrow -1} (1-x^3) = 0$$

چون حاصل حد برابر با یک عدد حقیقی شده است، پس حد صورت هم باید صفر باشد، چون در غیر این صورت حاصل حد، نامتناهی می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 + 2x^2 + x + k) = 0 \Rightarrow \text{حد صورت}$$

$$\Rightarrow -3 + 2 - 1 + k = 0 \Rightarrow k = 2$$

با جایگذاری $k = 2$ ، صورت را بر $x+1$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 + x + 2 \\ \hline x+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3x^3 - 3x^2 \\ \hline -x^3 - x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x \\ \hline 2x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x - 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\dots$$

$$\Rightarrow 3x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+1)(3x^2 - x + 2)$$

حالا با ساده کردن عامل صفرکننده از صورت و مخرج، حاصل حد را

$$L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x^2 - x + 2)}{(1-x)(1+x)} = \frac{6}{2} = 3$$

محاسبه می‌کنیم:

$$L - k = 3 - 2 = 1$$

پس:

(هدیه نوایت و هدیه دریه نوایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۳)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۵۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

با توجه به نمودار تابع f ، وقتی با مقادیر کمتر از یک به عدد یک نزدیک می‌شویم، $f(x)$ با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود. همچنین

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x-1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \text{عددی مثبت}$$

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x-1)}{f(x)} = \frac{\text{عددی مثبت}}{+} = +\infty$$

درنتیجه:

(هدیه نهایت و هدیه دریه نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۷ تا ۵۴)

۴

۳✓

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx^2 - 2}{-x^2 + 3x - 2} = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx^2}{-x^2} = -2 \Rightarrow -b = -2 \Rightarrow b = 2$$

حال حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{-x^2 + 3x - 2} : \frac{0}{0} = \frac{2(2)}{-(-1)} = 4$$

(هدیه نهایت و هدیه دریه نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۰ تا ۴۹)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳ و ۵۷ تا ۶۱)

۴

۳

۲✓

۱

می‌دانیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

با توجه به نمودار می‌توان نتیجه گرفت ۲ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

حال با توجه به ضابطه تابع $f(x)$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2+a)x^3 + 5x - 7}{2x^3 - x^2 + 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2+a)x^3}{2x^3} = \frac{2+a}{2} \Rightarrow \frac{2+a}{2} = 3 \Rightarrow 2+a = 6 \Rightarrow a = 4$$

(هدیه بی‌نهایت و هدیه در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۶۴)

۴

۳✓

۲

۱

(علی مرشد)

خط مماس بر تابع f را در نقطه $P(1, 2)$ بدست می‌آوریم. می‌دانیم که شیب خط مماس برابر $f'(1)$ می‌باشد:

$$y - y_p = m(x - x_p) \Rightarrow y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3x}{2} + \frac{7}{2} \xrightarrow{\substack{\text{تقاطع با محورها} \\ \text{یعنی } y = 0}} x = \frac{7}{3}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۶)

۴

۳✓

۲

۱

(مهندی ملارمکانی)

با ساده‌سازی حد داده شده داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{-h} = -3 \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{3h}$$

$$= -3f'(2) = 2 \rightarrow f'(2) = -\frac{2}{3}$$

حال مقدار مشتق تابع $f(x^3 + x)$ را در $x = 1$ بدست می‌آوریم:

$$(f(x^3 + x))' = (2x + 1)f'(x^3 + x) \xrightarrow{x=1} 3f'(2) = 3\left(-\frac{2}{3}\right) = -2$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳ و ۷۷ تا ۷۹)

۴

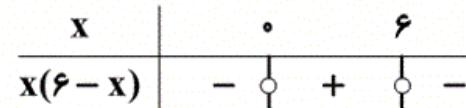
۳✓

۲

۱

(ایمان پیشی فروشان)

$$f(x) = |x(6-x)| \Rightarrow$$

در نتیجه ضابطه تابع در نقطه $x = 6$ برابر است با:

$$f(x) = |6x - x^2| = 6x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 6 - 2x$$

$$\Rightarrow f'(6) = 6 - 8 = -2$$

همچنین زمانی که در همسایگی راست نقطه $x = 6$ قرار داریم، ضابطه تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = |6x - x^2| = x^2 - 6x \Rightarrow f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow f'_+(6) = 12 - 6 = 6$$

$$f'_+(6) - f'(6) = 6 - (-2) = 8$$

بنابراین:

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰ و ۸۵)

۴

۳✓

۲

۱

(سینا محمدپور)

می‌دانیم شرط لازم برای مشتق‌پذیر بودن در یک نقطه، پیوستگی تابع در آن نقطه است. پس:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a + 2 = 1 - b \Rightarrow a + b = -1 \quad (*)$$

حال تابع مشتق f را می‌یابیم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{2\sqrt{x}}, & x > 1 \\ 3x^2 - b, & x < 1 \end{cases}$$

در نهایت بنابر مشتق‌پذیر بودن تابع در $x = 1$ ، خواهیم داشت:

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow \frac{a}{2} = 3 - b \Rightarrow a = 6 - 2b \Rightarrow a + 2b = 6 \quad (**)$$

با توجه به روابط (*) و (**) می‌توان نتیجه گرفت:

$$a = -1, b = 7 \Rightarrow a - b = -15$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰ و ۸۵)

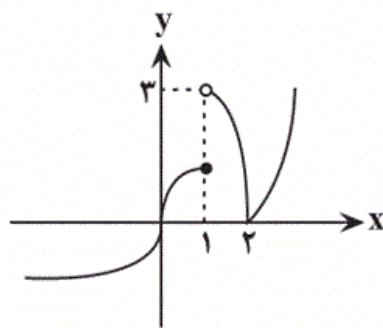
۴

۳

۲

۱✓

با توجه به نمودار:



در $x = 2$ تابع دارای مشتق چپ و راست برابر نیست، بنابراین در $x = 2$ ، مشتق و خط مماس وجود ندارد.

در $x = 1$ پیوسته نیست، پس مشتق و خط مماس ندارد.

در $x = 0$ مماس عمودی دارد (به خاطر $\sqrt[3]{x}$) و مشتق تابع برابر بی‌نهایت است، پس مشتق ندارد، اما مماس دارد.

پس تابع f در ۳ نقطه مشتق ندارد و در دو نقطه خط مماس ندارد.

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۱، ۶۷ و ۷۷ تا ۸۷)

۴✓

۳

۲

۱

$$f(x) = (\sqrt{5x+1})(3x-2)^3$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}(3x-2)^3 + 9(3x-2)^2(\sqrt{5x+1})$$

$$f'(0) = \frac{5}{2} \times (-8) + 9(-2)^2(1) = -20 + 36 = 16$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۸۷)

۴

۳

۲✓

۱

می‌دانیم $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ است در نتیجه $f(x) = x\sqrt[3]{x} = x^{\frac{4}{3}}$ می‌باشد.

حالا $f'of(x)$ را حساب می‌کنیم.

$$f'(f(x)) = f'(x^{\frac{4}{3}}) = \frac{4}{3}(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{9}}$$

مشتق $f'of$ برابر است با:

$$\left(\frac{4}{3}x^{\frac{4}{9}}\right)' = \frac{16}{27}x^{\frac{4}{9}-1} = \frac{16}{27}x^{-\frac{5}{9}} \xrightarrow{x=1} (f'of)'(1) = \frac{16}{27}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۴

۳✓

۲

۱

(بایک سادات)

۱- بررسی ضابطه‌ها:

ضابطه اول که $x+1$ بوده و در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و ضابطه دوم $\sqrt[3]{x-1}$ است که در نقطه $x=1$ دارای مماس قائم بوده و مشتق برابر بی‌نهایت است و در $x=1$ مشتق‌ناپذیر است. ضابطه سوم $x-1$ است که در نقاط ۳ و ۴ ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است.

۲- بررسی نقاط مرزی:

در $x=0$ حد ضابطه بالا برابر یک و حد ضابطه پایین ۱- است. پس در $x=0$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. در $x=2$ ضابطه دوم و سوم دارای عرض ۱ هستند ولی مشتق ضابطه بالا مخالف صفر و مشتق ضابطه پایین صفر است. پس $x=2$ یک نقطه گوش (دارای مشتق چپ و راست متفاوت) و مشتق‌ناپذیر است.

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۲ و ۹۱ تا ۹۶)

۴

۳✓

۲

۱

مشتق دوم تابع، با مشتق‌گیری از f' به دست می‌آید.

$$\Rightarrow f''(x) = 2 + 2(-2)(x+1)^{-3} = 2 - 4(x+1)^{-3} = 2 - \frac{4}{(x+1)^3}$$

با جایگذاری $x=1$ در عبارت بالا، داریم:

$$f''(1) = 2 - \frac{4}{8} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سراسری تبدیلی - ۹۴)

-۱۰۸

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x) = \frac{4}{5}(4x + |x|) - \frac{1}{5}|4x + |x||$$

$$\text{اگر } x \geq 0 \Rightarrow (fog)(x) = \frac{4}{5}(5x) - \frac{1}{5}(5x) = 4x - x = 3x$$

$$\text{اگر } x < 0 \Rightarrow fog(x) = \frac{4}{5}(4x - x) - \frac{1}{5}|\underbrace{4x - x}_{3x}|$$

$$= \frac{12}{5}x - \frac{1}{5}(-3x) = \frac{15}{5}x = 3x$$

بنابراین $(fog)(x) = 3x$ ، پس:

$$(fog)'(x) = 3$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(حسین هاپیلو)

آهنگ متوسط تغییر تابع بین نقاط **B** تا **C** برابر است با:

$$\frac{f(8) - f(6)}{8 - 6} = \frac{48 - 42}{8 - 6} = \frac{6}{2} = 3$$

در نتیجه طبق فرض، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه **A** برابر با

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
 است. از طرفی می‌دانیم آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع، همان مشتق

تابع بوده که برابر با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه است.

$$f'(a) = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{2a - b}{a - 0} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4a - 2b = a \Rightarrow 3a = 2b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۱۳ تا ۱۰۰)

 ۴✓ ۳ ۲ ۱

(محمد بهیرایی)

سرعت متوسط در بازه زمانی [۲, ۱۰] :

$$\begin{aligned} \frac{f(10) - f(2)}{10 - 2} &= \frac{(2 \times 100 - 3 \times 10 + 10) - (2 \times 4 - 3 \times 2 + 10)}{8} \\ &= \frac{180 - 12}{8} = 21 \end{aligned}$$

سرعت لحظه‌ای:

$$f'(t) = 4t - 3$$

$$4t - 3 = 21 \Rightarrow 4t = 24 \Rightarrow t = 6$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۱۳ تا ۱۰۰)

 ۴ ۳ ۲✓ ۱

(معنی کدمنی)

$$g(x) = \sqrt{-x^2 - x} \quad D_g : -x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x+1) \leq 0$$

$$\Rightarrow D_g = [-1, 0]$$

$$f(x) = -\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x}$$

$$D_f : x^2 + 2x \neq 0 \Rightarrow x(x+2) \neq 0$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, -2\}$$

$$D_{gof} : \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \neq 0, -2 \mid f(x) \in [-1, 0]\}$$

$$-1 \leq -\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x > 0 \\ \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2 + 2x} \leq 0 \Rightarrow x^2 + 2x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset$$

توجه: صورت کسر $(x^2 + 2x + 2)$ همواره مثبت است، پس باید مخرج

کسر $(x^2 + 2x)$ نیز مثبت باشد تا حاصل کسر عددی مثبت شود.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۲، ۲۴ و ۲۶)

۴

۳ ✓

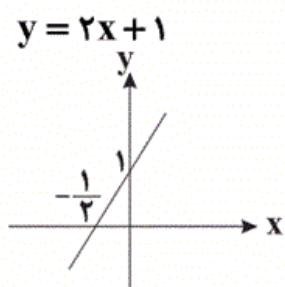
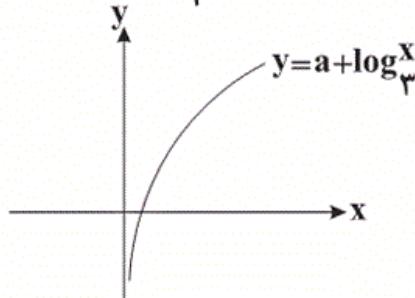
۲

۱

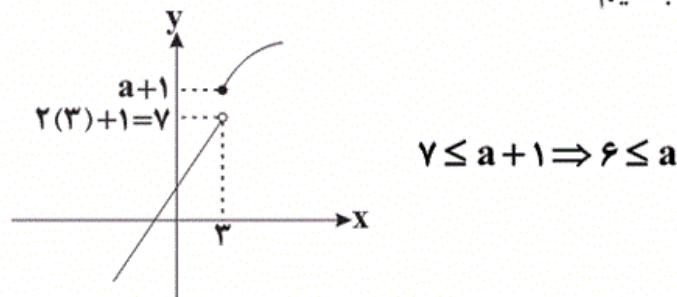
ابتدا شکل کلی از نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} a - \log_{\frac{1}{3}}^x, & x \geq 3 \\ 2x + 1, & x < 3 \end{cases}$$

$$y = a - \log_{\frac{1}{3}}^x = a - \log_{3^{-1}}^x = a + \log_3^x$$



حال هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:
شرط $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \geq f(x_0)$ به معنی صعودی بودن $f(x)$ است، برای صعودی بودن باید داشته باشیم:



(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

۴

۳

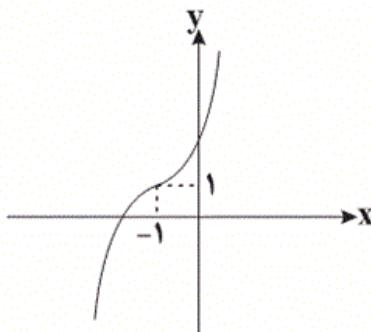
۲ ✓

۱

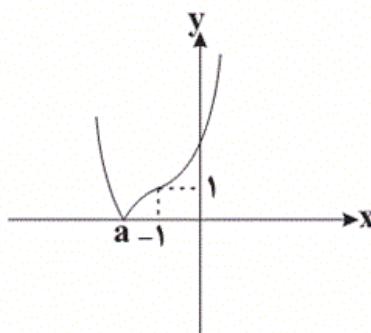
ابتدا ضابطه f را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = |x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1| = |(x+1)^3 + 1|$$

نمودار تابع $y = (x+1)^3 + 1$ را به کمک انتقال تابع $y = x^3$ رسم می‌کنیم:



برای رسم نمودار f ، کافیست قسمتی از نمودار را که زیر محور x هاست، نسبت به محور x ها قرینه کنیم و آن قسمت از نمودار را که بالای محور x هاست حفظ کنیم:



برای بدست آوردن a باید معادله $f(x) = 0$ حل کنیم:

$$(x+1)^3 + 1 = 0 \rightarrow (x+1)^3 = -1 \rightarrow x+1 = -1 \rightarrow x = -2$$

پس تابع f در بازه $(-2, +\infty]$ صعودی اکید است و حداقل مقدار a برابر با -2 است.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۰)

۴

۳

۲✓

۱

(ایمان نفستین)

اگر نمودار یک تابع اکیداً صعودی و وارونش، نقطه تلاقی داشته باشند، این نقطه روی نیمساز ناحیه اول و سوم ($y = x$) خواهد بود، زیرا تابع اکیداً صعودی و وارونش همواره نقطه تلاقی ندارند. پس در این نقطه خواهیم

$$f(x) = x \Rightarrow \frac{mx - 2}{3} = x \xrightarrow{x=1} \frac{m - 2}{3} = 1 \Rightarrow m = 5 \quad \text{داشت:}$$

در نتیجه برای محاسبه ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{5x - 2}{3}$ داریم:

$$y = \frac{5x - 2}{3} \rightarrow 3y + 2 = 5x \rightarrow x = \frac{3y + 2}{5} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x + 2}{5}$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۷ تا ۶۱)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۴ تا ۳۰ و ۳۶ تا ۴۰)

 ✓تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = g(\sqrt{2+x}) = (\sqrt{2+x})^2 = 2+x$$

$$g(f(x)) = 5 \Rightarrow 2+x = 5 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین:

پس معادله فقط یک ریشه مثبت دارد.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ و ۲۲ تا ۲۶)

 ✓

(علی شهرابی)

-۸۹-

$$(gof^{-1})(a) = 1 \rightarrow g(f^{-1}(a)) = 1$$

می‌دانیم اگر $n = m$, $g^{-1}(n) = m$, $g(m) = n$, آن گاه $g(f^{-1}(a)) = 1$, پس:

$$g(f^{-1}(a)) = 1 \rightarrow g^{-1}(1) = f^{-1}(a) \Rightarrow 0 = f^{-1}(a) \Rightarrow 2 = a$$

حالا مقدار $(fog)(-2)$ را با جایگذاری $a = -2$ حساب می‌کنیم:

$$(fog)(-2) = f(g(-2)) = f(0) = 2$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ و ۲۲ تا ۲۶ و ۳۹ تا ۴۰)

 ✓ ۱