سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ریاضیات گسسته دوازدهم ، آشنایی با نظریه‌ی اعداد - ۷ سوال

۱۲۱- برای ..... درستی گزارهٔ «$n^۲ + ۳n + ۱۳$ به ازای هر عدد طبیعی n، عددی اول است.»، می‌توان از روش ..... استفاده کرد.

۱) اثبات – در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها
۲) اثبات – برهان خلف
۳) رد – مثال نقض
۴) رد – برهان خلف

۱۲۲- در یک تقسیم، مقسوم‌علیه ۲۳ و باقی‌مانده ۱۷ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم (بدون تغییر مقسوم‌علیه) اضافه کرد، به‌طوری که خارج قسمت تغییر نکند؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۱۲۳- به‌ازای چند عدد طبیعی n، هر دو عدد $\frac{n+۳}{۵}$ و $\frac{n^۳+۲n}{۱۰}$ اعدادی صحیح هستند؟

۱) هیچ
۲) ۲
۳) ۱
۴) ۳

۱۲۴- به ازای چند عدد طبیعی سه رقمی n، اعداد $۱۱n+۹$ و $۵n+۴$ نسبت به هم اول هستند؟

۱) ۹۰
۲) ۱۸۰
۳) ۴۵۰
۴) ۹۰۰

۱۲۵- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = ۲^{۵۱} \times ۳^{۱۰۱}$ بر عدد ۱۷ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۷

۱۲۶- اگر $\overline{۷a۱۲۵} \overset{۱۱}{\equiv} \overline{a۱۲۵۰}$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $\overline{a۹۲۳a}$ بر ۹ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۷

۱۲۷- کوچک‌ترین عدد سه رقمی که در معادلهٔ $۷۳x \overset{۲۳}{\equiv} ۲۱$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۱۰۳
۲) ۱۰۸
۳) ۱۰۷
۴) ۱۰۹

ریاضیات گسسته دوازدهم ، گراف و مدل سازی - ۳ سوال -

۱۲۸- در گرافی با اندازهٔ ۲۴، مجموع درجات رئوس زوج برابر ۳۲ است. اگر رئوس فرد همگی هم‌درجه باشند، آنگاه تعداد آنها کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۲۹- در یک گراف ساده از مرتبهٔ ۱۸، $\delta = ۲$ و $\Delta = ۵$ است. اندازهٔ این گراف چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

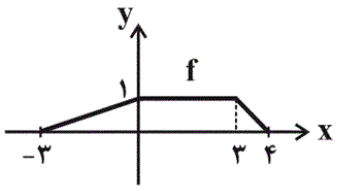
۱) ۲۳ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶

۱۳۰- تعداد کل مسیرها در یک گراف ۲-منتظم همبند از مرتبهٔ n کدام است؟

۱) $\binom{n}{۲}$ ۲) $n^۲$ ۳) $۲n$ ۴) $\binom{n+۱}{۲}$

حسابان ۲ - دوازدهم ، تابع - ۵ سوال

۸۱- اگر نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر و $g(x)=\begin{cases} f(x+۱) & ;x\geq ۰ \\ f(۲x) & ;x<۰ \end{cases}$ باشد، مساحت سطح محدود بین نمودار تابع g و محور xها کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱۵}{۴}$

۸۲- دامنهٔ تابع $g(x)=f(۲x-۱)$، بازهٔ $[-۱,۳[$ است. دامنهٔ تابع $h(x)=f(۳x+۲)$ کدام است؟

۱) $[۰,۲[$ ۲) $[۰,۸[$ ۳) $[-\frac{۵}{۳},۲[$ ۴) $[-\frac{۵}{۳},۱[$

۸۳- اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(۱)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{x-۴}{f(۳-x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۴- اگر $f(x)=\sqrt{x-3}$ و $g(x)=2^{-x}$ باشد، کدام‌یک از توابع زیر نزولی است؟

۱) $f+g$ ۲) fg ۳) $g-f$ ۴) $\frac{f}{g}$

۸۵- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $x^{10}+kx^8+2x^3-5x+2$ بر $x-1$ برابر با -4 است. باقی‌ماندهٔ تقسیم این چند جمله‌ای بر x^2-x-2 کدام است؟

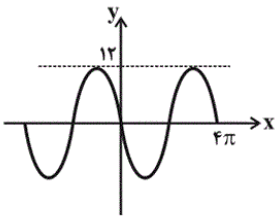
۱) $2x-4$ ۲) $-2x+4$ ۳) $2x+4$ ۴) $-2x-4$

حسابان ۲ - دوازدهم ، مثلثات - ۸ سوال

۸۶- اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=2-3a\cos\left(\frac{\pi}{a}x+1\right)$ برابر ۴ باشد، مقدار ماکزیمم آن کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۸۷- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=b\cos\left(\frac{\pi}{2}-ax\right)$ به‌صورت شکل زیر است. کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) $-\frac{۲۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲۵}{۲}$ ۳) $\frac{۲۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۲۵}{۲}$

۸۸- تابع $f(x)=\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ با دامنهٔ $(2,a)$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

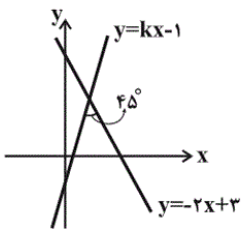
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۸۹- ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{1+\tan 210^\circ \tan 15^\circ}{\tan 210^\circ - \tan 15^\circ}$ کدام است؟

۱) $\tan 75^\circ$ ۲) $\cot 75^\circ$ ۳) $\tan 10^\circ$ ۴) $\cot 10^\circ$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۰- در شکل مقابل، مقدار k کدام است؟



۱) ۲
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) $\frac{۷}{۲}$

۹۱- معادلهٔ $\sin^۲ x + \cos^۲ ۳x = ۱$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۳

۹۲- جواب کلی معادلهٔ $\sin x \cos x - \frac{۱}{۱+\tan^۲ x} = \cos\frac{۴\pi}{۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$
۲) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$
۳) $k\pi + \frac{\pi}{۸}$
۴) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$

۹۳- معادلهٔ $\sin ۲x = \cos ۳x$ در بازهٔ $(۰,a]$، ۵ جواب دارد. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱۷\pi}{۱۰}$
۲) $\frac{۲۱\pi}{۱۰}$
۳) $\frac{۳\pi}{۲}$
۴) $\frac{۵\pi}{۲}$

حسابان ۲ - دوازدهم ، حد های نامتناهي - حد در بي نهايت - ۷ سوال -

۹۴- حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^-} \frac{[x^۲]-۹}{x^۲-۹}$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

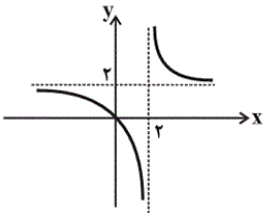
۱) صفر
۲) $+\infty$
۳) ۱
۴) $-\infty$

۹۵- حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{۲}x\right)}{۱+\sin\left(\frac{\pi}{۲}x\right)}$ کدام است؟

۱) $-\infty$
۲) صفر
۳) ۱
۴) $+\infty$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده‌است. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} fof(x)$ کدام است؟



۱) ۲ ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) صفر

۹۷- حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۳x(x-۱)+x^۲\left[\frac{۱}{x}\right]}{x^۲\left(۲+\left[-\frac{۱}{x}\right]\right)+۱}$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۹۸- اگر نمودار تابع $y=\frac{a+۱}{x^۲+۲ax-۴a}$، در اطراف مجانب قائمش به‌صورت مقابل باشد، a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته‌باشد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۹۹- مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع‌اند و O مبدأ مختصات است. مساحت مثلث OAB کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۰۰- اگر فاصلهٔ خطوط مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x^۲+۳}{ax^۲-x+۱-a}$ از یکدیگر برابر ۳ باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن کدام می‌تواند باشد؟

۱) $y=-\frac{۲}{۵}$ ۲) $y=-۱$ ۳) $y=۵$ ۴) $y=-۲$

هندسه ۳- دوازدهم ، آشنایي با مقاطع مخروطي - ۶ سوال

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۵- به ازای چند مقدار طبیعی k، رابطهٔ $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۳y + k = ۰$ معادلهٔ یک دایره است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

۱۰۶- دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + (a+۱)x - (b-۱)y + ۱۶ = ۰$ در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است. $a - b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) -۱ ۴) -۲

۱۰۷- بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴y$ از خط $۳x + ۴y = ۱$ کدام است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۱/۴

۳) ۲/۲ ۴) ۳/۴

۱۰۸- اگر خط $x + y = m$ بر دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = m$ مماس باشد، وضعیت نسبی این دایره و دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۰$ کدام است؟

۱) متداخل ۲) متخارج ۳) متقاطع ۴) مماس خارج

۱۰۹- F و F' کانون‌های یک بیضی به طول قطر کوچک ۶ هستند. دایره‌ای به قطر FF'، بیضی را در چهار نقطه قطع کرده است. اگر M یکی از این چهار نقطه باشد، حاصل $MF \times MF'$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۱۱۰- مساحت چهارضلعی حاصل از وصل کردن دو سر قطر بزرگ به دو سر قطر کوچک یک بیضی برابر ۱۲۰ و خروج از مرکز این بیضی $\frac{۴}{۵}$ است. فاصلهٔ کانونی بیضی کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

هندسه ۳- دوازدهم ، ماتریس،و کاربردها - ۴ سوا

۱۰۱- اگر A و B دو ماتریس مربعی و $AB=A$ و $BA=B$ باشد، حاصل $A+A^{۲}+...+A^{۱۳۹۷}$ کدام است؟

۱) $۱۳۹۶A$ ۲) $۱۳۹۷A$

۳) $۱۳۹۹A$ ۴) $۱۳۹۸A$

۱۰۲- اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$، آنگاه مجموع مجهولات دستگاه $AX=\begin{bmatrix}۲\\ ۳\end{bmatrix}$ چند برابر مجموع مجهولات دستگاه $AX'=\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}$ است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵

۳) ۴ ۴) ۴/۵

۱۰۳- اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ و $|A+B|=۵$ و $|B|=۲$ باشد، دترمینان ماتریس $AB^{-۱}+I$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۵

۱۰۴- اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & b\end{bmatrix}$ و ماتریس $B\times A$ ماتریسی قطری باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $B\times A$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) صفر ۳) -۶ ۴) -۱۲

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۵- مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی که نقطهٔ مفروض P را به نقاط مختلف یک دایره وصل می‌کنند، کدام است؟ (نقطهٔ P خارج دایره است.)

۱) دو خط
۲) یک نیم دایره
۳) یک بیضی
۴) یک دایره

۱۱۶- دایره‌ای از دو نقطهٔ $(۰,۱)$ و $(۳,۰)$ گذشته و معادلهٔ یک قطر آن به صورت $x-y=۲$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{۵}$
۴) ۳

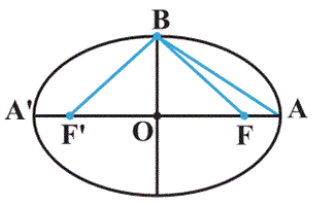
۱۱۷- به ازای کدام مقدار a، زاویهٔ بین خط مماس بر دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+y=۱$ و خط به معادلهٔ $۳x+۲y=a$ در نقطهٔ تلاقی آن‌ها بر روی دایره، ۹۰ درجه است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۱۸- مماس مشترک‌های داخلی دو دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y+۲-a^۲=۰$ و $(x-۶)^۲+(y-۶)^۲=۹$ بر هم عمود هستند. مقدار مثبت a کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

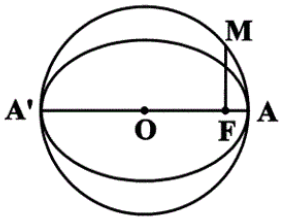
۱۱۹- در شکل زیر، مساحت مثلث OAB سه برابر مساحت مثلث FBF' است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۲۰- مطابق شکل، قطر بزرگ یک بیضی منطبق بر یکی از قطرهای دایرهٔ C است. از کانون F، عمودی بر قطر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطهٔ M قطع کند. اگر طول قطرهای کوچک و بزرگ بیضی به ترتیب برابر ۴ و ۶ باشد، طول پاره‌خط MF کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

هندسه ۳ - دوازدهم - گواه ، ماتریس،و کاربردها - ۴ سوال

۱۱۱- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}$ و $A^۲=\alpha A+\beta I$ باشد، دوتایی مرتب $(\alpha\ ,\beta)$ کدام است؟

۱) $(۲\ ,۱۱)$
۲) $(۲\ ,۱۳)$
۳) $(۴\ ,۱۱)$
۴) $(۴\ ,۱۳)$

۱۱۲- اگر $A^۲=۴A-۳I$ و $A^{-۱}=mA+nI$ باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۱۱۳- معادلهٔ $\begin{vmatrix}۱ & x & x^۳\\ ۱ & x^۲ & x^۲\\ ۱ & x^۳ & x\end{vmatrix}=۰$ چند ریشهٔ متمایز دارد؟

۱) ۳
۲) صفر
۳) ۱
۴) بی‌شمار

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۴- اگر $A^{۳}=\begin{bmatrix} ۸ & ۰ \\ a & ۱ \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس $|A|A^{۲}$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۲

۳) ۱۶ ۴) ۸

ریاضی گسسته دوازدهم - گواه ، آشنایی با نظریه‌ی اعداد - ۶ سوال

۱۳۱- در اثبات نامساوی $(a^{۲}+b^{۲})(c^{۲}+d^{۲})\geq(ac+bd)^{۲}$ به روش اثبات بازگشتی، به کدام رابطهٔ بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(ad+bc)^{۲}\geq ۰$ ۲) $(ad-bc)^{۲}\geq ۰$ ۳) $(ab+cd)^{۲}\geq ۰$ ۴) $(ab-cd)^{۲}\geq ۰$

۱۳۲- عدد $۳۰!+۱۸$ بر چند عدد طبیعی یک رقمی بخش‌پذیر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۳۳- دو عدد $a^{۲}+a+۳$ و $a-۱$ نسبت به هم اول‌اند. کدام گزاره همواره درست است؟

۱) $a=۵k+۱$ ۲) $a=۵k$ ۳) $a\neq ۵k$ ۴) $a\neq ۵k+۱$

۱۳۴- در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت ۲۱ و باقی‌مانده ۳۷ است. چند عضو از مجموعهٔ جواب‌های a مضرب ۵ می‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۵- از رابطهٔ هم‌نهشتی (پیمانه ۱۸) $۶b\equiv ۹a$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) (پیمانه ۲) $a\equiv ۰$ ۲) (پیمانه ۳) $b\equiv ۰$ ۳) (پیمانه ۶) $a\equiv ۲$ ۴) (پیمانه ۶) $۳a\equiv ۲b$

۱۳۶- اگر چهارم فروردین، اولین جمعهٔ یک سال باشد، سومین یک‌شنبه در ماه خرداد آن سال، چه روزی از این ماه است؟

۱) ۲۱ ام ۲) ۱۵ ام ۳) ۱۸ ام ۴) ۱۹ ام

ریاضی گسسته دوازدهم - گواه ، گراف و مدل سازی - ۴ سوال -

۱۳۷- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادلهٔ $۵۷x-۸۷y=۳۴۲$ صدق کند، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

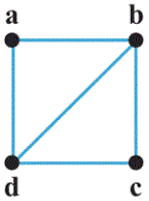
۱۳۸- در گراف G، $V=\{a,b,c,d,e,f\}$، $N_G(a)=\{b,c,d,e\}$ و $N_G(b)=\{a,c,d,f\}$ است. حداقل و حداکثر تعداد یال‌های این گراف به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) ۷ – ۱۲ ۲) ۷ – ۱۳ ۳) ۸ – ۱۲ ۴) ۸ – ۱۳

۱۳۹- مرتبه و اندازهٔ گراف G به‌ترتیب برابر ۸ و ۲۴ است. حداقل و حداکثر مقدار Δ در گراف $\overline{G}$ کدام است؟

۱) ۱ و ۳ ۲) ۲ و ۳ ۳) ۲ و ۴ ۴) ۱ و ۴

۱۴۰- گراف شکل مقابل، دارای چند زیرگراف است به گونه‌ای که هر کدام از این زیرگراف‌ها شامل همهٔ رئوس گراف و حداقل یک دور باشند؟



۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۲۱- (علیرضا شریف‌خطیبی)

کافی است به جای n، عدد ۱۳ را قرار دهیم. در این‌صورت داریم:

$$n^۲ + ۳n + ۱۳ = ۱۳^۲ + ۳\times ۱۳ + ۱۳ = ۱۳(۱۳ + ۳ + ۱) = ۱۳\times ۱۷$$

یعنی عدد موردنظر، عددی مرکب است و درستی حکم رد می‌شود.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲ تا ۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۲- (علی ایمانی)

اگر a مقسوم و q خارج قسمت این تقسیم باشند، آنگاه داریم:

$$a = ۲۳q + ۱۷$$

اگر x واحد به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم‌علیه ثابت باشد، آنگاه برای آن‌که خارج قسمت تغییر نکند، لزوماً x واحد نیز به باقی‌مانده اضافه می‌شود. داریم:

$$a + x = ۲۳q + (۱۷ + x)$$

اگر b مقسوم‌علیه و r باقی‌ماندهٔ این تقسیم باشند، داریم:

$$r < b \Rightarrow ۱۷ + x < ۲۳ \Rightarrow x < ۶ \Rightarrow \max(x) = ۵$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l}5\mid n+3 \xrightarrow{\times n^2} 5\mid n^3+3n^2\\ 5\mid n^3+2n\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 5\mid 3n^2-2n$$

$$\left.\begin{array}{l}5\mid n+3 \xrightarrow{\times 3n} 5\mid 3n^2+9n\\ 5\mid 3n^2-2n\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 5\mid 11n$$

$$\left.\begin{array}{l}5\mid n+3 \xrightarrow{\times 11} 5\mid 11n+33\\ 5\mid 11n\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 5\mid 33$$

رابطهٔ اخیر امکان‌پذیر نیست، بنابراین چنین مقداری برای n وجود ندارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l}d\mid 11n+9 \xrightarrow{\times 5} d\mid 55n+45\\ d\mid 5n+4 \xrightarrow{\times 11} d\mid 55n+44\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d\mid 1 \Rightarrow d=1$$

بنابراین به ازای هر مقدار طبیعی n، دو عدد $11n+9$ و $5n+4$ نسبت به هم اول هستند، یعنی به ازای تمامی ۹۰۰ عدد طبیعی سه‌رقمی، این دو عدد نسبت به‌هم اول‌اند.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۵- (سروش موئینی)

عدد A را به‌صورت $۲^{۵۰} \times ۳^{۱۰۰} \times ۲^{۱} \times ۳^{۱}$ می‌نویسیم. داریم:

$$A = ۲^{۵۰} \times ۳^{۱۰۰} \times ۶ = \left(۲ \times ۳^{۲}\right)^{۵۰} \times ۶ = ۱۸^{۵۰} \times ۶$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A بر عدد ۱۷ برابر است با:

$$A \overset{۱۷}{\equiv} ۱^{۵۰} \times ۶ \overset{۱۷}{\equiv} ۶$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۶- (مرتضی فهیم‌علوی)

$$a۱۲۵۰ \overset{۱۱}{\equiv} ۷a۱۲۵ \Rightarrow ۰ - ۵ + ۲ - ۱ + a \overset{۱۱}{\equiv} ۵ - ۲ + ۱ - a + ۷$$

$$\Rightarrow ۲a \overset{۱۱}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۴ \xrightarrow[(۲,۱۱)=۱]{\div ۲} a \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \Rightarrow a = ۲$$

با جای‌گذاری $a = ۲$ در عدد $\overline{a۹۲۳a}$ داریم:

$$۲۹۲۳۲ \overset{۹}{\equiv} ۲ + ۹ + ۲ + ۳ + ۲ \overset{۹}{\equiv} ۱۸ \overset{۹}{\equiv} ۰$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۷- (جواد حاتمی)

$$۷۳x \overset{۲۳}{\equiv} ۲۱ \Rightarrow ۴x \overset{۲۳}{\equiv} ۴۴ \xrightarrow[(۴,۲۳)=۱]{\div ۴} x \overset{۲۳}{\equiv} ۱۱$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم x بر ۲۳، برابر ۱۱ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$x = ۲۳k + ۱۱ \xrightarrow[k=۴]{\text{کوچک‌ترین عدد سه رقمی}} x = ۱۰۳$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۸- (سیدوحید ذوالفقاری)

مجموع درجات رئوس یک گراف، دو برابر اندازهٔ آن گراف است. اگر مجموع درجات رئوس گراف را به‌صورت مجموع درجات رئوس زوج و مجموع درجات رئوس فرد بنویسیم، آنگاه داریم:

$$۴۸ = ۳۲ + x \Rightarrow x = ۱۶$$

در نتیجه تنها حالت ممکن آن است که گراف ۱۶ رأس درجه یک داشته باشد. (عدد ۱۶ به هیچ عدد فرد دیگری بخش‌پذیر نیست.)

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۰)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

کم‌ترین اندازهٔ گراف مربوط به حالتی است که گراف فقط یک رأس از درجهٔ $\Delta = ۵$ داشته و سایر رأس‌ها از درجهٔ $\delta = ۲$ باشند، اما چون تعداد رئوس فرد گراف، باید عددی زوج باشد، چنین گرافی لزوماً یک رأس از درجهٔ ۵، یک رأس از درجه ۳ و ۱۶ رأس از درجهٔ ۲ دارد. داریم:

$$۲q_{min} = ۵ + ۳ + ۱۶ \times ۲ = ۴۰ \Rightarrow q_{min} = ۲۰$$

بیش‌ترین اندازهٔ گراف مربوط به حالتی است که گراف فقط یک رأس از درجهٔ $\delta = ۲$ داشته و سایر رأس‌ها از درجهٔ $\Delta = ۵$ باشند که مانند حالت قبل چون تعداد رئوس فرد گراف باید عددی زوج باشد، چنین گرافی لزوماً یک رأس از درجهٔ ۲، یک رأس از درجه ۴ و ۱۶ رأس از درجهٔ ۵ دارد. داریم:

$$۲q_{max} = ۱۶ \times ۵ + ۴ + ۲ = ۸۶ \Rightarrow q_{max} = ۴۳$$

یعنی $۲۰ \le q \le ۴۳$ است، پس اندازهٔ گراف، ۲۴ مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۰- (کیوان دارابی)

بین هر دو رأس متمایز یک گراف ۲-منتظم همبند از مرتبهٔ n (گراف C_n) دقیقاً دو مسیر وجود دارد.

$$۲\binom{n}{۲} = ۲\frac{n(n-۱)}{۲} = n^۲ - n$$

از طرفی گراف C_n دارای n مسیر به‌طول صفر است (از هر رأس به خودش، مسیری به طول صفر وجود دارد)، بنابراین داریم:

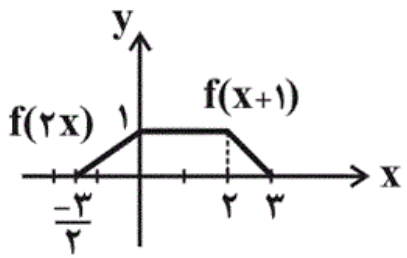
$$\text{تعداد کل مسیرها} = \left(n^۲ - n\right) + n = n^۲$$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحهٔ ۳۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۱- (جهانبخش نیکنام)

نمودار تابع $g(x)$ به‌صورت شکل زیر است:



مساحت سطح مورد نظر برابر است با:

$$S = \frac{(۴/۵ + ۲)\times ۱}{۲} = \frac{۶/۵}{۲} = \frac{۱۳}{۴}$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۲ (فرنود فارسیجانی)

در تابع g داریم:

$$-۱ \le x \le ۳ \Rightarrow -۲ \le ۲x \le ۶ \Rightarrow -۳ \le ۲x-۱ \le ۵$$

یعنی عبارت ورودی تابع f، $(۲x-۱)$ باید در بازهٔ $[-۳,۵]$ قرار داشته‌باشد، پس در تابع h هم این شرایط باید برقرار باشد.

$$\Rightarrow -۳ \le ۳x+۲ \le ۵ \Rightarrow -۵ \le ۳x \le ۳ \xrightarrow{\div ۳} -\frac{۵}{۳} \le x \le ۱$$

پس دامنهٔ تابع h، بازهٔ $\left]-\frac{۵}{۳},۱\right]$ است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

x		۲		۴	
$x-۴$	$-$		$-$	۰	$+$
$f(۳-x)$	$+$	۰	$-$		$-$
$\frac{x-۴}{f(۳-x)}$	$-$	تن	$+$	۰	$-$

$$\Rightarrow D_g = (۲,۴]$$

این بازه شامل اعداد صحیح ۳ و ۴ است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۴- (علی شهرابی)

اگر f تابعی صعودی باشد، تابع $-f$ نزولی خواهد بود. هم‌چنین مجموع دو تابع صعودی، تابعی صعودی و مجموع دو تابع نزولی، تابعی نزولی خواهد بود. در این سؤال، تابع f صعودی و تابع g نزولی است. پس تابع $g-f$ قطعاً نزولی است.

تابع گزینهٔ «۴» صعودی است. تابع گزینهٔ «۱» صعودی و تابع گزینهٔ «۲» ابتدا صعودی و سپس نزولی است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۵ (علی شهرابی)

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^{۱۰}+kx^{۸}+۲x^{۳}-۵x+۲$ بر $x-۱$ برابر ۴- است. پس:

$$f(۱)=-۴\Rightarrow ۱+k+۲-۵+۲=-۴\Rightarrow k=-۴$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم f بر $x^{۲}-x-۲$، عبارتی حداکثر از درجهٔ یک است:

$$f(x)=(x^{۲}-x-۲)g(x)+\underbrace{ax+b}_{\text{باقی‌مانده}}$$

با جای‌گذاری ریشه‌های مقسوم‌علیه یعنی $x=-۱$ و $x=۲$، داریم:

$$x=-۱: f(-۱)=۰-a+b\Rightarrow +۱-۴-۲+۵+۲=-a+b$$

$$\Rightarrow -a+b=۲ \qquad (۱)$$

$$x=۲: f(۲)=۰+۲a+b\Rightarrow ۲^{۱۰}-۲^{۱۰}+۱۶-۱۰+۲=۲a+b$$

$$\Rightarrow ۲a+b=۸ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} a=۲\ ,\ b=۴$$

$$\Rightarrow r(x)=ax+b=۲x+۴$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۶

دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{a}\right|} = ۲|a|$ است. پس:

$$۲|a| = ۴ \Rightarrow |a| = ۲$$

از طرفی مقدار ماکزیمم تابع f برابر $۳|a| + ۲$ است؛ بنابراین داریم:

$$f_{max} = ۲ + ۳(۲) = ۸$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$f(x)=b\cos\left(\frac{\pi}{۲}-ax\right)=b\sin ax$$

$$T=\frac{۲\pi}{|a|}=۴\pi\Rightarrow|a|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲}$$

تابع دارای ماکزیمم مقدار ۱۲ می‌باشد.

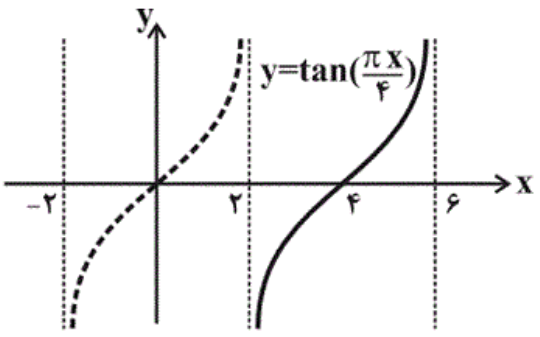
$$f_{max}=|b|=۱۲\Rightarrow b=\pm۱۲$$

با توجه به نمودار چون در سمت راست $x=۰$، نمودار کاهشی است، پس a و b هم‌علامت نیستند.

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۱}{۲}\\ b=-۱۲\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{-۲۳}{۲}\ \text{یا}\ \begin{cases}a=-\frac{۱}{۲}\\ b=۱۲\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{۲۳}{۲}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴



پس حداکثر مقدار a برای این که تابع f روی دامنه‌اش یعنی بازهٔ $(۲,a)$ اکیداً صعودی باشد، برابر ۶ است.

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۹- (علی شهرابی)

با توجه به اتحاد $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$، عبارت داده‌شده برابر است با:

$$A=\frac{1+\tan210^\circ\tan15^\circ}{\tan210^\circ-\tan15^\circ}=\frac{1}{\tan(210^\circ-15^\circ)}=\frac{1}{\tan195^\circ}$$

$$=\frac{1}{\tan(180^\circ+15^\circ)}=\frac{1}{\tan15^\circ}$$

از آن‌جایی که $\tan\alpha=\cot(90^\circ-\alpha)$ است، پس

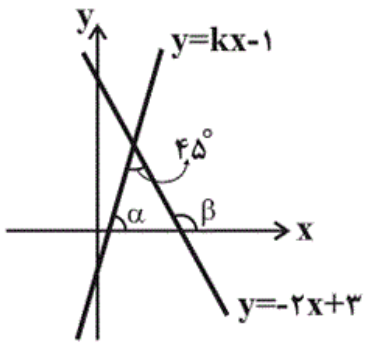
$$A=\frac{1}{\tan15^\circ}=\frac{1}{\cot75^\circ}=\tan75^\circ$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۰ (کاظم اجلالی)



$$\beta = \alpha + ۴۵^\circ \Rightarrow \beta - \alpha = ۴۵^\circ$$

از طرف دیگر $\tan\alpha = k$ و $\tan\beta = -۲$ است، بنابراین:

$$\tan ۴۵^\circ = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{۱ + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\Rightarrow ۱ = \frac{-۲ - k}{۱ - ۲k} \Rightarrow ۱ - ۲k = -۲ - k \Rightarrow k = ۳$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۹۱ (طاهر دادستانی)

$$\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ ۳x \Rightarrow \sin^۲ x = \sin^۲ ۳x$$

$$\Rightarrow \sin ۳x = \pm\sin x = \sin(\pm x) \Rightarrow ۳x = k\pi \pm x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{۴} \\ \text{یا} \\ x = \frac{k\pi}{۲} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۴}$$

$$\xrightarrow{x\in[۰,\pi]} x = ۰, \frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۴}, \pi$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۲ (علی شهرابی)

$$\sin x\cos x-\frac{۱}{۱+\tan^{۲}x}=\cos\frac{۴\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin ۲x-\cos^{۲}x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin ۲x-۲\cos^{۲}x=-۱$$

$$\Rightarrow \sin ۲x=۲\cos^{۲}x-۱\Rightarrow \sin ۲x=\cos ۲x$$

$$\Rightarrow \tan ۲x=۱\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۳- (سیدمحمودرضا اسلامی)

$$\sin 2x = \cos 3x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = -2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ 2x + 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \end{cases}$$

اگر جواب‌ها را به‌ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم، داریم:

$$x = \frac{\pi}{10}, \frac{5\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{10}, \dots$$

برای اینکه معادله در بازهٔ $(0, a]$، ۵ جواب داشته‌باشد، a باید ششمین جواب معادله یعنی $\frac{17\pi}{10}$ باشد.

نکته: اگر رابطهٔ $\sin\alpha = \cos\beta$ برقرار باشد، داریم:

$$\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۹۴- (یاسین سپهر)

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{[x^2] - 9}{x^2 - 9} = \frac{8 - 9}{9^- - 9} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۰)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\times\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$=\frac{2^-}{0^-}=-\infty$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

توجه کنید که:

$$\lim_{x\to+\infty} fof(x) = \lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$$

بنابراین در ابتدا $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ۲$$

هم‌چنین وقتی $x \to +\infty$، مقادیر $f(x)$ بیشتر از ۲ هستند. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to۲^+} f(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} fof(x) = \lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{t\to۲^+} f(t) = +\infty$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۰ و ۵۹ تا ۶۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۷

ابتـــدا توجـــه کنیـــد کـــه اگـــر $x \to -\infty$، $\frac{1}{x} < 0$، $-\frac{1}{x} > 0$ و

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ اســـت؛ بنـــابراین در بـــازهٔ $(-\infty, -1)$،

تساوی‌های $\left[\frac{1}{x}\right] = -1$ و $\left[-\frac{1}{x}\right] = 0$ برقرارند.

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{3x(x-1) + x^2\left[\frac{1}{x}\right]}{x^2\left(2 + \left[-\frac{1}{x}\right]\right) + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x(x-1) - x^2}{x^2(2+0) + 1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 3x}{2x^2 + 1} = 1$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

باید مخرج کسر تابع ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Rightarrow \Delta = (۲a)^۲ - ۴(-۴a) = ۰$$

$$\Rightarrow ۴a^۲ + ۱۶a = ۴a(a+۴) = ۰ \Rightarrow a = ۰ \text{ یا } a = -۴$$

هم‌چنین باید $a + ۱ < ۰$ باشد، بنابراین فقط به ازای $a = -۴$ نمودار در اطراف مجانب قائم خود مانند شکل داده‌شده می‌شود.

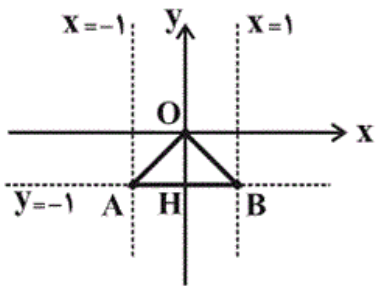
(حسابان ۲- حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{-x^2}=-1\Rightarrow \text{مجانب افقی}: y=-1$$

حال خطوط مجانب را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|AB\times OH|=\frac{1}{2}|2\times 1|=1$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸ و ۶۷ تا ۶۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

صورت ریشه ندارد، بنابراین ریشه‌های مخرج قطعاً مجانب‌های قائم نمودار تابع هستند. از طرفی مجموع ضرایب عبارت مخرج برابر صفر است، یعنی $x=۱$ و $x=\frac{۱-a}{a}$ ریشه‌های آن و در نتیجه مجانب‌های قائم نمودار تابع هستند.

$$\left|\frac{۱-a}{a}-۱\right|=۳\Rightarrow\frac{۱-۲a}{a}=\pm۳\Rightarrow a=\frac{۱}{۵}\text{ یا }-۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۱}{۵}: \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲+۳}{\frac{۱}{۵}x^۲-x+\frac{۴}{۵}}=۱۰\Rightarrow\text{مجانب‌افقی}: y=۱۰\\ a=-۱: \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲+۳}{-x^۲-x+۲}=-۲\Rightarrow\text{مجانب‌افقی}: y=-۲\end{cases}$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸ و ۶۷ تا ۶۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۵- (یاسین سپهر)

رابطهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ در صورتی معادلهٔ یک دایره است که $a^۲ + b^۲ > ۴c$ باشد. داریم:

$$x^۲ + y^۲ + ۲x + ۳y + k = ۰ \Rightarrow ۲^۲ + ۳^۲ > ۴k$$

$$\Rightarrow ۴k < ۱۳ \Rightarrow k < \frac{۱۳}{۴}$$

پس k می‌تواند یکی از اعداد طبیعی ۱، ۲ و ۳ باشد.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۶- (رضا عباسی‌اصل)

با توجه به معادلهٔ دایره، مختصات مرکز دایره عبارت است از:

$$O\left(-\frac{a+۱}{۲}, \frac{b-۱}{۲}\right)$$

چون دایره در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز دایره روی خط $y = -x$ واقع است. در این‌صورت داریم:

$$\frac{b-۱}{۲} = -\left(-\frac{a+۱}{۲}\right) \Rightarrow b - ۱ = a + ۱ \Rightarrow a - b = -۲$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

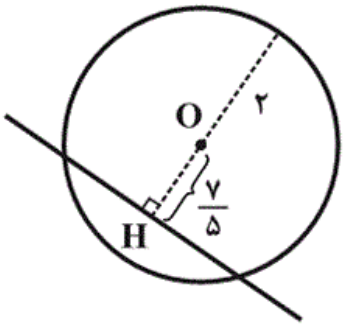
-۱۰۷

$$x^۲ + y^۲ = ۴y \Rightarrow (x-۰)^۲ + (y-۲)^۲ = ۴$$

$$\Rightarrow O(۰,۲)\ ,\ R = ۲$$

فاصلهٔ مرکز دایره از خط برابر است با:

$$\xrightarrow[O(۰,۲)]{۳x+۴y=۱} OH = \frac{|۳\times ۰ + ۴\times ۲ - ۱|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۷}{۵} = ۱/۴$$



پس خط، دایره را قطع می‌کند و در نتیجه بیش‌ترین فاصله برابر است با:

$$OH + R = ۱/۴ + ۲ = ۳/۴$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۰۸

خط بر دایره مماس است، پس فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، برابر شعاع دایره است. شعاع دایره برابر با $\sqrt{m}$ و مرکز آن نقطهٔ $(۰,۰)$ است. اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر d باشد، آنگاه:

$$d = R \Rightarrow \frac{|m|}{\sqrt{۲}} = \sqrt{m} \Rightarrow \frac{m^۲}{۲} = m \Rightarrow m^۲ - ۲m = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۰ & \text{غ.ق.ق} \\ m = ۲ \end{cases}$$

مرکز دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲$، نقطهٔ $O(۰,۰)$ و شعاع آن $R = \sqrt{۲}$ است و مرکز دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۰$، نقطهٔ $O'(۱,۰)$ و شعاع آن $R' = ۱$ است.

$$d = OO' = ۱ , R + R' = \sqrt{۲} + ۱ , |R - R'| = \sqrt{۲} - ۱$$

$$|R - R'| < d < R + R'$$

بنابراین دو دایره متقاطع‌اند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$

چون M نقطه‌ای روی بیضی است، پس $MF + MF' = ۲a$ و چون M روی دایره‌ای به قطر FF' قرار دارد، پس MF و MF' بر هم عمودند.

بنابراین:

$$MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ = ۴c^۲$$

حال داریم:

$$(MF + MF')^۲ = MF^۲ + MF'^۲ + ۲MF \times MF'$$

$$\Rightarrow MF \times MF' = \frac{۱}{۲}\left[\underbrace{(MF + MF')^۲}_{۴a^۲} - \underbrace{\left(MF^۲ + MF'^۲\right)}_{۴c^۲}\right]$$

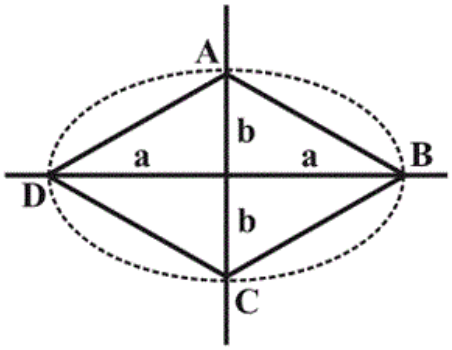
$$= ۲\left(a^۲ - c^۲\right) = ۲b^۲ = ۲ \times ۹ = ۱۸$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$e=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{c}{a}\Rightarrow\begin{cases}c=۴k\\a=۵k\end{cases}$$



قطرهای چهارضلعی $ABCD$ برهم عمودند، پس داریم:

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AC.BD\Rightarrow ۱۲۰=\frac{۱}{۲}(۲b)(۲a)\Rightarrow ab=۶۰$$

$$\xrightarrow{a=۵k}(۵k)b=۶۰\Rightarrow b=\frac{۱۲}{k}$$

$$c^۲=a^۲-b^۲\Rightarrow(۴k)^۲=(۵k)^۲-\left(\frac{۱۲}{k}\right)^۲\Rightarrow\left(\frac{۱۲}{k}\right)^۲=(۳k)^۲$$

$$k>۰\Rightarrow\frac{۱۲}{k}=۳k\Rightarrow ۳k^۲=۱۲$$

$$\Rightarrow k^۲=۴\xrightarrow{k>۰}k=۲\Rightarrow c=۴k=۸$$

$$FF'=۲c=۲(۸)=۱۶$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۰۱ (اسحاق اسفندیار)

$$AB = A \xrightarrow{\times A} (AB)A = A^2 \Rightarrow A\underbrace{(BA)}_{B} = A^2$$

$$\Rightarrow AB = A^2 \Rightarrow A = A^2$$

اگر $A^2 = A$ باشد، آنگاه $A^n = A$ $(n \geq 2)$ است و در نتیجه داریم:

$$A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{1397} = A + A + A + \ldots + A = 1397A$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۰ تا ۲۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۲- (میلاد منصوری)

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۲-۳=-۱$$

$$\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$AX=\begin{bmatrix}۲\\ ۳\end{bmatrix}\Rightarrow X=A^{-۱}\begin{bmatrix}۲\\ ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷\\ -۴\end{bmatrix}$$

$$AX'=\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}\Rightarrow X'=A^{-۱}\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ -۱\end{bmatrix}$$

مجموع مجهولات دستگاه اول برابر $۷+(-۴)=۳$ و مجموع مجهولات دستگاه دوم برابر $۲+(-۱)=۱$ است، پس مجموع مجهولات دستگاه اول، ۳ برابر مجموع مجهولات دستگاه دوم است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ تا ۲۶)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۳- (شهریار رحمانی)

$$AB^{-۱}+I=AB^{-۱}+BB^{-۱}=(A+B)B^{-۱}$$

$$\Rightarrow \left|AB^{-۱}+I\right|=|A+B|\left|B^{-۱}\right|=۵\times\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲، ۲۳ و ۲۷ تا ۳۱)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۴- (امیرحسین ابومحبوب)

ماتریس قطری ماتریسی است که درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن همگی برابر صفر هستند.

$$B\times A=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & b\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۴ & a\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & a+۲\\ ۱۲+۲b & ۳a-b\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱۲+۲b=۰\Rightarrow b=-۶\\ a+۲=۰\Rightarrow a=-۲\end{cases}\Rightarrow ۳a-b=۰$$

بنابراین تمامی درایه‌ها ماتریس $B\times A$ برابر صفر است و در نتیجه مجموع درایه‌های این ماتریس نیز برابر صفر خواهد بود.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۲۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

$$\frac{PM}{MA}=\frac{PI}{IO}=۱\Rightarrow MI\parallel AO$$

در این‌صورت طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{MI}{AO}=\frac{PM}{PA}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow MI=\frac{OA}{۲}=\frac{R}{۲}$$

از طرفی چون پاره‌خط PO ثابت است، پس وسط آن یعنی نقطهٔ I نیز نقطه‌ای ثابت است و در نتیجه مکان هندسی مورد نظر، دایره‌ای به مرکز I و به شعاع $\frac{R}{۲}$ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۶- (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)

با توجه به این‌که معادلهٔ یک قطر دایره به صورت $y = x - ۲$ است، پس مختصات مرکز دایره را می‌توان $O(x, x-۲)$ در نظر گرفت. با فرض $A(۰,۱)$ و $B(۳,۰)$، داریم:

$$OA = OB$$

$$\Rightarrow \sqrt{(۰-x)^۲ + (۱-x+۲)^۲} = \sqrt{(۳-x)^۲ + (۰-x+۲)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (-x)^۲ + (۳-x)^۲ = (۳-x)^۲ + (۲-x)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = (۲-x)^۲ \Rightarrow x^۲ = ۴ - ۴x + x^۲ \Rightarrow ۴x = ۴ \Rightarrow x = ۱$$

$$R = |OA| = \sqrt{(-۱)^۲ + (۳-۱)^۲} = \sqrt{۵}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۷- (سراسری ریاضی - ۹۶)

خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس، بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است. بنابراین خط $۳x + ۲y = a$، در راستای یکی از شعاع‌های دایره (خط قائم بر دایره) است و در نتیجه از مرکز دایره عبور می‌کند. داریم:

$$\text{مرکز دایره}: O(۱, -\frac{۱}{۲}) \Rightarrow ۳(۱) + ۲(-\frac{۱}{۲}) = a \Rightarrow a = ۲$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

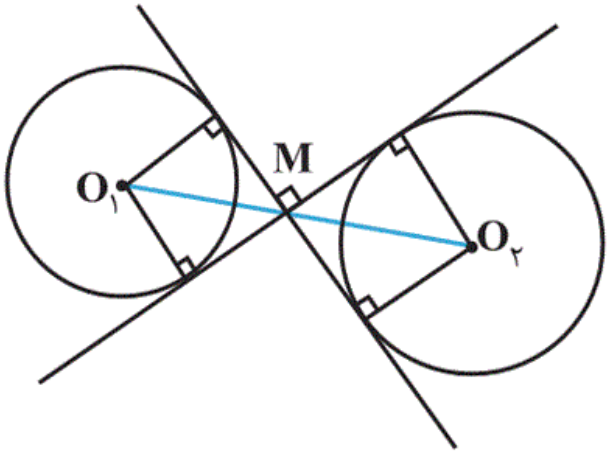
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$O_1(1,1), R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 - 4(2 - a^2)} = |a|$$

$$C_2 : (x-6)^2 + (y-6)^2 = 9$$

$$O_2(6,6), R_2 = 3$$

$$O_1O_2 = \sqrt{(6-1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$



مطابق شکل هر کدام از دو چهار ضلعی ایجاد شده، یک مربع است و در نتیجه طول قطر آن، $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} O_1M = \sqrt{2}R_1 \\ O_2M = \sqrt{2}R_2 \end{array}\right\} \Rightarrow O_1M + O_2M = \sqrt{2}(R_1 + R_2)$$

$$\Rightarrow |O_1O_2| = \sqrt{2}(R_1 + R_2) \Rightarrow 5\sqrt{2} = \sqrt{2}(|a| + 3)$$

$$\Rightarrow |a| + 3 = 5 \Rightarrow |a| = 2 \xrightarrow{a>0} a = 2$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۹- (کتاب آبی هندسه ۳- سؤال ۳۰۵)

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta FBF'}} = ۳ \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}OA \times OB}{\frac{۱}{۲}FF' \times OB} = ۳ \Rightarrow \frac{OA}{FF'} = ۳ \Rightarrow \frac{a}{۲c} = ۳$$

$$\Rightarrow \frac{a}{c} = ۶ \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۶}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۰- (کتاب آبی هندسه ۳- سؤال ۳۱۴)

با توجه به این که قطر دایره، قطر بزرگ بیضی است، می‌توان نوشت:

$$OM = R = \frac{AA'}{۲} = a$$

$$\overset{\Delta}{OFM} : OM^۲ = MF^۲ + OF^۲ \Rightarrow a^۲ = MF^۲ + c^۲$$

$$\Rightarrow MF^۲ = a^۲ - c^۲ = b^۲ \Rightarrow MF = b$$

طول پاره‌خط MF برابر نصف قطر کوچک بیضی، یعنی برابر ۲ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۱۱

روش اول:

$$A=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹ & ۲\\ ۱۰ & ۲۱\end{bmatrix}$$

$$A^۲=\alpha A+\beta I\Rightarrow\begin{bmatrix}۹ & ۲\\ ۱۰ & ۲۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\alpha & \alpha\\ ۵\alpha & ۴\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta & ۰\\ ۰ & \beta\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۹ & ۲\\ ۱۰ & ۲۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\alpha+\beta & \alpha\\ ۵\alpha & ۴\alpha+\beta\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۲\\ -۲\alpha+\beta=۹\Rightarrow -۴+\beta=۹\Rightarrow\beta=۱۳\end{cases}$$

روش دوم:

در هر ماتریس ۲×۲ مانند $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، همواره داریم:

$$A^۲-(a+d)A+(ad-bc)I=\overline{O}$$

با توجه به رابطهٔ $A^۲-\alpha A-\beta I=\overline{O}$ داریم:

$$\begin{cases}a+d=\alpha\Rightarrow\alpha=-۲+۴=۲\\ ad-bc=-\beta\Rightarrow\beta=bc-ad=۱\times۵-(-۲)\times۴=۱۳\end{cases}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۰ تا ۲۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۲- (کتاب آبی هندسه ۳- سؤال ۶۴)

راه حل اول:

$$A^۲ = ۴A - ۳I \Rightarrow A^۲ - ۴A = -۳I \Rightarrow A(A - ۴I) = -۳I$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}A(A - ۴I) = I \Rightarrow A^{-۱} = -\frac{۱}{۳}(A - ۴I)$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}A + \frac{۴}{۳}I = mA + nI \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{۱}{۳} \\ n = \frac{۴}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m + n = -\frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۳} = ۱$$

راه حل دوم:

$$A^{-۱} = mA + nI \xrightarrow{\times A} A^{-۱}A = mA^۲ + nIA$$

$$\Rightarrow I = mA^۲ + nA \qquad (۱)$$

$$A^۲ = ۴A - ۳I \Rightarrow ۳I = ۴A - A^۲ \Rightarrow I = -\frac{۱}{۳}A^۲ + \frac{۴}{۳}A \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow m = -\frac{۱}{۳} \text{ و } n = \frac{۴}{۳} \Rightarrow m + n = -\frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۳} = ۱$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۰ تا ۲۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۳- (کتاب آبی هندسه ۳- سؤال ۱۰۸)

$$\begin{vmatrix} ۱ & x & x^۳ \\ ۱ & x^۲ & x^۲ \\ ۱ & x^۳ & x \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow \left(x^۳ - x^۵\right) - x\left(x - x^۲\right) + x^۳\left(x^۳ - x^۲\right) = ۰$$

$$\Rightarrow x^۳ - x^۵ - x^۲ + x^۳ + x^۶ - x^۵ = ۰ \Rightarrow x^۶ - ۲x^۵ + ۲x^۳ - x^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۳\left(۱ - x^۲\right) + x^۲\left(x^۴ - ۱\right) = ۰$$

$$\Rightarrow -۲x^۳\left(x^۲ - ۱\right) + x^۲\left(x^۲ - ۱\right)\left(x^۲ + ۱\right) = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲\left(x^۲ - ۱\right)\left(-۲x + x^۲ + ۱\right) = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲\left(x^۲ - ۱\right)(x - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \pm ۱ \end{cases}$$

پس این معادله سه ریشهٔ متمایز دارد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۴- (کتاب آبی هندسه ۳- سؤال ۱۰۶)

با توجه به ماتریس $A^۳$ داریم:

$$\left|A^۳\right| = (۸)(۱) - (۰)a = ۸ \Rightarrow |A|^۳ = ۸ \Rightarrow |A| = ۲$$

$$\Rightarrow \left||A|A^۲\right| = |A|^۲\left|A^۲\right| = |A|^۲|A|^۲ = |A|^۴ = ۱۶$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۱- (کتاب آبی گسسته - سؤال ۷۵۰)

$$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \geq a^2c^2+b^2d^2+2acbd$$

$$\Leftrightarrow a^2d^2-2acbd+b^2c^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ad-bc)^2 \geq 0$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۲- (کتاب آبی گسسته - سؤال ۷۶۵)

می‌دانیم $30!$ بر تمام اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۳۰ بخش‌پذیر است، پس بر تمام اعداد طبیعی یک رقمی نیز بخش‌پذیر است. از طرفی عدد $18=2\times 3^2$ بر اعداد یک رقمی ۹، ۶، ۳، ۲ و ۱ بخش‌پذیر است، پس $30!+18$ بر ۵ عدد طبیعی یک رقمی بخش‌پذیر است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۳- (کتاب آبی گسسته - سؤال ۸۰۱)

فرض کنید $d=(a^2+a+3\ ,\ a-1)$ باشد، در این‌صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d \mid a-1 \xrightarrow{\times a} d \mid a^2-a \\ d \mid a^2+a+3 \rightarrow d \mid a^2+a+3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 2a+3$$

از طرفی $d \mid a-1$، پس $d \mid 2a-2$ و در نتیجه داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} d \mid 2a+3 \\ d \mid 2a-2 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 5 \Rightarrow d=1 \text{ یا } d=5$$

چون در صورت مسئله ذکر شده است که دو عدد نسبت به هم اول‌اند، پس $d \neq 5$، یعنی $5 \nmid a-1$، در نتیجه $a-1 \neq 5k$ و $a \neq 5k+1$.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۴- (سراسری ریاضی - ۹۲)

بر طبق الگوریتم تقسیم (۱) $b > ۳۷$ و $a = ۲۱b + ۳۷$ است.

$$۱۰۰ \le ۲۱b + ۳۷ \le ۹۹۹ \Rightarrow ۳ \le b \le ۴۵ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow ۳۸ \le b \le ۴۵$$

$$۲۱ = ۵k_۱ + ۱ \ , \ ۳۷ = ۵k_۲ + ۲ \Rightarrow a = (۵k_۱ + ۱)b + ۵k_۲ + ۲$$

$$\Rightarrow a = ۵k' + b + ۲$$

در نتیجه برای این‌که a مضرب ۵ باشد، لزوماً $b+۲$ باید مضرب ۵ باشد، یعنی $b = ۵k - ۲$ است و داریم:

$$۳۸ \le ۵k - ۲ \le ۴۵ \Rightarrow ۴۰ \le ۵k \le ۴۷ \Rightarrow ۸ \le k \le ۹$$

بنابراین فقط دو جواب مضرب ۵ برای a، وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۵- (سراسری ریاضی - ۸۷)

گزینهٔ «۴»:

$$۹a \overset{۱۸}{\equiv} ۶b \xrightarrow[(۱۸,۳)=۳]{\div ۳} ۳a \overset{۶}{\equiv} ۲b$$

گزینهٔ «۲»:

$$۳a \overset{۶}{\equiv} ۲b \xrightarrow{۳|۶} ۳a \overset{۳}{\equiv} ۲b \Rightarrow ۰ \overset{۳}{\equiv} ۲b \xrightarrow[(۲,۳)=۱]{\div ۲} b \overset{۳}{\equiv} ۰$$

گزینهٔ «۱»:

$$۳a \overset{۶}{\equiv} ۲b \xrightarrow{۲|۶} ۳a \overset{۲}{\equiv} ۲b \Rightarrow ۳a \overset{۲}{\equiv} ۰ \xrightarrow[(۲,۳)=۱]{\div ۳} a \overset{۲}{\equiv} ۰$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۶- (کتاب آبی گسسته - سؤال ۹۵۰)

ابتدا باید ببینیم اول خرداد چه روزی از هفته است. داریم:

$$d = \underset{\text{فروردین}}{\downarrow ۲۷} + \underset{\text{اردیبهشت}}{\downarrow ۳۱} + \underset{\text{خرداد}}{\downarrow ۱} = ۵۹$$

اگر جمعه را در جدول متناظر با صفر در نظر بگیریم، داریم:

جمعه	شنبه	۱شنبه	۲شنبه	۳شنبه	۴شنبه	۵شنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$۵۹ \overset{۷}{\equiv} ۳$$

متوجه می‌شویم که اول خرداد دوشنبه است، پس اولین یک‌شنبه، هفتم خرداد و در نتیجه سومین یکشنبهٔ خرداد، $۷ + ۷ \times ۲ = ۲۱$ خرداد خواهد بود.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحهٔ ۲۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۷- (سراسری ریاضی - ۸۹)

$$۵۷x - ۸۷y = ۳۴۲ \xrightarrow{\div ۳} ۱۹x - ۲۹y = ۱۱۴$$

$$\Rightarrow ۱۹x = ۲۹y + ۱۱۴ \Rightarrow ۱۹x \overset{۲۹}{\equiv} ۱۱۴ \xrightarrow[(۱۹,۲۹)=۱]{\div ۱۹} x \overset{۲۹}{\equiv} ۶$$

$$x = ۲۹k + ۶ \geq ۱۰۰ \Rightarrow k \geq ۴ \Rightarrow x_{min} = ۱۲۲$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام} = ۱ + ۲ + ۲ = ۵$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۴ تا ۳۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۸- (کتاب آبی گسسته - سؤال ۱۰۵۶)

با توجه به مفهوم مجموعهٔ همسایه‌های یک رأس، این گراف لزوماً دارای یال‌های ab، ac، ad، ae، bc، bd و bf است و قطعاً یال‌های af و be را ندارد. بنابراین حداقل تعداد یال‌های این گراف برابر ۷ است و حداکثر تعداد یال‌های آن، برابر ۱۳ است (در صورتی که تمامی یال‌های cd، ce، cf، de، df و ef در گراف موجود باشند).

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۵ و ۳۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

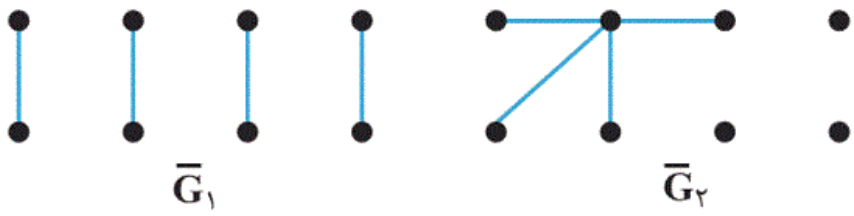
۱۳۹- (کتاب آبی گسسته - سؤال ۱۱۴۱)

ابتدا تعداد یال‌های گراف $\overline{G}$ را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$q(G)+q(\overline{G})=\frac{p(p-1)}{2}\Rightarrow 24+q(\overline{G})=\frac{8\times 7}{2}=28$$

$$\Rightarrow q(\overline{G})=4$$

بنابراین $\overline{G}$ گرافی از مرتبهٔ ۸ و اندازهٔ ۴ است. حداقل و حداکثر مقدار Δ در چنین گرافی به ترتیب برابر ۱ و ۴ است که متناظر با گراف‌های $\overline{G}_1$ و $\overline{G}_2$ در شکل زیر می‌باشد:



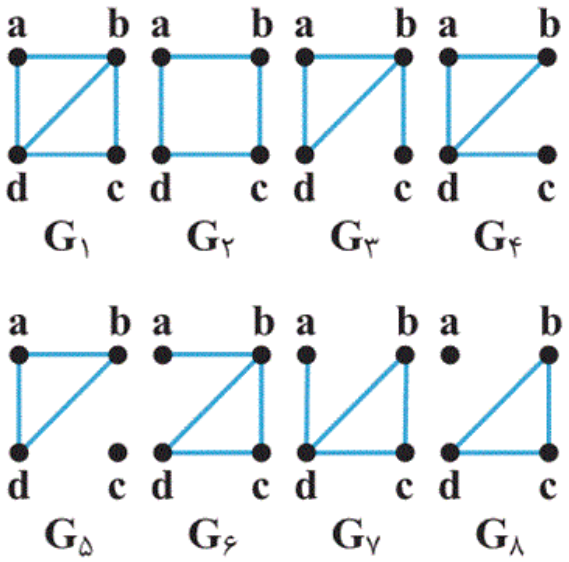
(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۶ تا ۴۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۰- (کتاب آبی گسسته - سؤال ۱۲۰۶)

زیرگراف‌های مورد نظر در شکل زیر رسم شده‌اند:



(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا