



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



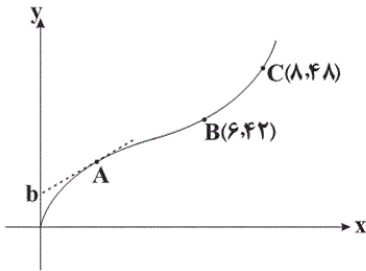
<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضی عمومی ، مشتق - ۳ سوال

۱۰۰- اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{-h} = 2$  ، مقدار مشتق تابع  $f(x^2 + x)$  در  $x = 1$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) -۲ (۴)  $\frac{1}{3}$

۱۰۸- در شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $f$  رسم شده است. اگر آهنگ متوسط تغییر تابع بین نقاط  $B$  تا  $C$ ، ۶ برابر آهنگ لحظه‌ای



تغییر تابع در نقطه  $A(a, 2a)$  باشد، حاصل  $\frac{b}{a}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

۱۰۹- معادله حرکت اتومبیلی در بازه زمانی  $[2, 10]$  به صورت  $f(t) = 2t^2 - 3t + 10$  است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در این بازه برابر است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

ریاضی عمومی ، توابع و معادلات - ۴ سوال

۸۴- اگر  $[-2x + \frac{1}{3}] = -1$  باشد، حاصل  $[3x]$  کدام گزینه می‌تواند باشد؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴) -۵

۸۵- تابع  $f(x) = \begin{cases} a - \log_{\frac{1}{3}} x, & x \geq 3 \\ 2x + 1, & x < 3 \end{cases}$  به ازای چه مقادیری از  $a$  در شرط  $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$  صدق می‌کند؟

- (۱)  $a \leq 6$  (۲)  $a \geq 6$  (۳) هیچ مقدار  $a$  (۴) فقط  $a = 6$

۸۶- تابع  $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$  در بازه  $[a, +\infty)$  صعودی اکید است. حداقل مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $1 + \sqrt{2}$  (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴)  $1 - \sqrt{2}$

۸۷- اگر تابع اکیداً صعودی  $f(x) = \frac{mx-2}{3}$ ، در نقطه‌ای به طول  $x=1$ ، نمودار تابع وارون خود را قطع کند، ضابطه تابع وارون کدام است؟

$y = \frac{3x+2}{5}$  (۱)      $y = \frac{3x-2}{5}$  (۲)      $y = \frac{5x-2}{3}$  (۳)      $y = \frac{5x+2}{3}$  (۴)

### ریاضی عمومی، مشتق توابع - ۲ سوال -

۱۰۶- تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & -2 \leq x < 0 \\ \sqrt[3]{x-1}, & 0 \leq x < 2 \\ [x]-1, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$  در دامنه خود در کدام نقاط مشتق ناپذیر است؟

$\{-1, 0, 1, 2\}$  (۱)      $\{0, \frac{1}{2}, 2, 3, 4\}$  (۲)      $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  (۳)      $\{1, \frac{1}{2}, 2, 3\}$  (۴)

۱۰۲- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} + 2, & x \geq 1 \\ x^3 - bx, & x < 1 \end{cases}$  در نقطه  $x=1$  مشتق پذیر باشد، حاصل  $a-b$  کدام است؟

$-15$  (۱)      $-1$  (۲)      $15$  (۳)      $1$  (۴)

### ریاضی عمومی، حد و پیوستگی -

۱۱۰- مشتق تابع  $y = \ln \sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}$  در نقطه  $x=2$  کدام است؟

$\frac{1}{3}$  (۱)      $\frac{1}{10}$  (۲)      $-\frac{1}{3}$  (۳)      $-\frac{1}{10}$  (۴)

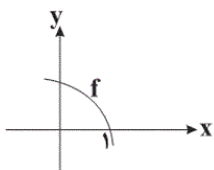
۹۴- اگر چند جمله‌ای  $f(x) = x^2 - x + 2 - 2a$  بر  $(x+2)$  بخش پذیر باشد، آن گاه باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $(x-a)$  کدام است؟

$3$  (۱)      $4$  (۲)      $6$  (۳)      $8$  (۴)

۹۵- اگر  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + 2x^2 + x + k}{1-x^2} = L$  باشد، مقدار  $L-k$  کدام است؟ ( $L$  عددی حقیقی مشخص و مخالف صفر است.)

$1$  (۱)      $-1$  (۲)      $5$  (۳)      $-5$  (۴)

۹۶- شکل روبرو نمودار تابع  $f$  را نشان می‌دهد. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x-1)}{f(x)}$  کدام است؟

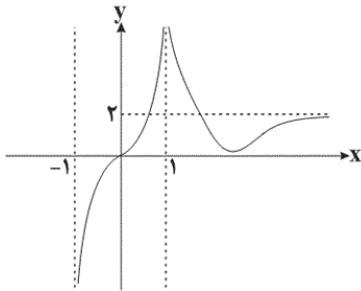


$+\infty$  (۳)      $-\infty$  (۲)      $-1$  (۴)

۹۷- تابع  $f(x) = \frac{(a+1)x^3 + bx^2 - 2}{ax^2 + 3x - 2}$  مفروض است. اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ ، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) -۳ (۴) -۴

۹۸- تابع  $f(x) = \frac{(2+a)x^3 + 5x - 7}{2x^3 - x^2 + 4}$  مفروض است. اگر نمودار تابع  $g(x)$  مطابق شکل زیر باشد و داشته باشیم:



در این صورت مقدار  $a$  کدام است؟  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 1$

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

### ریاضی عمومی ، احتمال - ۳ سوال

۸۱- در پرتاب دو تاس سالم، می‌دانیم تفاضل دو عدد رو شده، عددی اول نیست. با چه احتمالی دو عدد رو شده متوالی هستند؟

- (۱)  $\frac{5}{8}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{5}{11}$

۸۲- برای دو پیشامد مستقل  $A$  و  $B$ ، اگر  $P(A|B) = 0/1$  و  $P(A \cup B) = 0/73$  باشد،  $P(B)$  کدام است؟

- (۱)  $0/4$  (۲)  $0/5$  (۳)  $0/6$  (۴)  $0/7$

۸۳- می‌دانیم که از هر ۵ سرویس یک والیبالیست، ۲ ضربه او مستقیماً منجر به امتیاز می‌شود. در صورتی که او در یک مسابقه ۴ سرویس به سمت زمین حریف بزند، احتمال آن که حداکثر یک ضربه او مستقیماً منجر به امتیاز بشود، کدام است؟

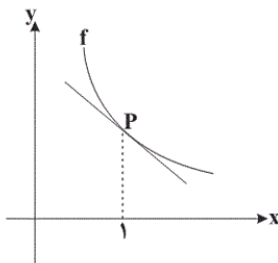
- (۱)  $(0/6)^4$  (۲)  $1/2 \times (0/6)^3$  (۳)  $4/4 \times (0/6)^3$  (۴)  $2/2 \times (0/6)^3$

### ریاضی عمومی ، ترکیبی - ۱۲ سوال -

۱۰۱- در تابع  $f(x) = |6x - x^2|$ ، حاصل  $f'_+(6) - f'_-(4)$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۸ (۴) -۸

۹۹- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $f$  است. اگر داشته باشیم:  $f(1) = 2$  و  $f'(1) = -\frac{3}{2}$ ، آنگاه خط مماس بر تابع  $f$  در نقطه  $P$ ، محور  $x$  ها را با چه طولی قطع می‌کند؟



- (۱)  $\frac{7}{2}$  (۲)  $\frac{5}{3}$  (۳)  $\frac{7}{3}$  (۴)  $\frac{5}{2}$

۸۸- اگر  $f(x) = \sqrt{x+2}$  و  $g(x) = x^2$ ، معادله  $g(f(x)) = 5$  چند ریشه حقیقی دارد؟

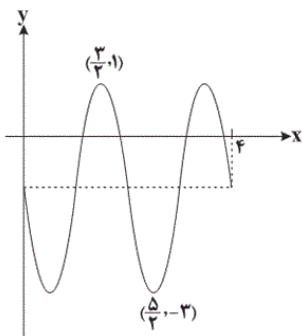
- (۱) فقط یک ریشه مثبت  
 (۲) فقط یک ریشه منفی  
 (۳) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی  
 (۴) ریشه حقیقی ندارد.

۸۹- اگر  $f = \{(-1, 3), (0, 2), (2, 1), (4, 0)\}$ ،  $g = \{(1, -2), (-2, 0), (3, -1), (0, 1)\}$  و  $(g \circ f^{-1})(a) = 1$  باشد، مقدار  $(f \circ g)(-a)$  کدام است؟

- (۱) ۱  
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴) ۴  
 صفر

۹۰- اگر تابع  $f(x) = 5 \sin^2(\frac{\pi}{3}x - c)$  در  $x = \frac{1}{3}$  ماکزیمم شود، طول نقطه مینیمم آن کدام می تواند باشد؟

- (۱)  $\frac{-5}{6}$   
 (۲)  $\frac{7}{6}$   
 (۳)  $\frac{11}{6}$   
 (۴)  $\frac{4}{3}$



۹۱- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a \cos(\frac{\pi}{3} + bx) + c$  است. حاصل  $abc$  کدام است؟

- (۱) ۱  
 (۲) ۲  
 (۳) -۱  
 (۴) -۲

۹۲- از معادله  $\cos^2 x \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} - \cos^2 x$  چند جواب برای  $x$  در فاصله  $(0, 2\pi)$  بدست می آید؟

- (۱) ۶  
 (۲) ۵  
 (۳) ۴  
 (۴) ۳

۹۳- مجموع جوابهای متمایز معادله  $\cos^2 x + \cos^2 x + 4 \sin x = 3$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{2}$   
 (۲)  $2\pi$   
 (۳)  $\frac{5\pi}{4}$   
 (۴)  $\pi$

۱۰۷- اگر  $f(x) = \frac{x^3 + x}{x+1}$ ، حاصل  $f''(1)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
 (۲)  $\frac{3}{2}$   
 (۳)  $-\frac{1}{2}$   
 (۴) ۱

۱۰۳- تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4|, & x > 1 \\ \sqrt[3]{x}, & x \leq 1 \end{cases}$  در ..... نقطه مشتق و در ..... نقطه خط مماس ندارد.

- (۱) ۴، ۴  
 (۲) ۳، ۴  
 (۳) ۳، ۳  
 (۴) ۲، ۳

۱۰۴- مشتق تابع  $f(x) = (\sqrt{5x+1})(3x-2)^3$  در نقطه‌ای به طول صفر کدام است؟  
۲۰ (۱)      ۱۶ (۲)      ۸ (۳)      ۴ (۴) صفر

۱۰۵- اگر  $f(x) = x\sqrt{x}$  باشد، آنگاه مشتق تابع  $y = f'(x)$  در  $x=1$  کدام است؟  
۴ (۱)       $\frac{4}{9}$  (۲)       $\frac{16}{27}$  (۳)       $\frac{16}{9}$  (۴)

۱۰۰- گزینه «۳»

(موردی ملارمضانی)

با ساده‌سازی حد داده شده داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{-h} = -3 \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{3h}$$
$$= -3f'(2) = 2 \rightarrow f'(2) = -\frac{2}{3}$$

حال مقدار مشتق تابع  $f(x^2 + x)$  را در  $x = 1$  بدست می‌آوریم:

$$(f(x^2 + x))' = (2x + 1)f'(x^2 + x) \xrightarrow{x=1} 3f'(2) = 3\left(-\frac{2}{3}\right) = -2$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۴۰)

۴

۳

۲

۱

آهنگ متوسط تغییر تابع بین نقاط B تا C برابر است با:

$$\frac{f(8) - f(6)}{8 - 6} = \frac{48 - 42}{8 - 6} = \frac{6}{2} = 3$$

در نتیجه طبق فرض، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه A برابر با  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  است.

از طرفی می‌دانیم آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع، همان مشتق تابع بوده که برابر با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه است.

$$f'(a) = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{2a - b}{a - 0} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4a - 2b = a \Rightarrow 3a = 2b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۴۰)

سرعت متوسط در بازه زمانی  $[2, 10]$ :

$$\begin{aligned} \frac{f(10) - f(2)}{10 - 2} &= \frac{(2 \times 100 - 3 \times 10 + 10) - (2 \times 4 - 3 \times 2 + 10)}{8} \\ &= \frac{180 - 12}{8} = 21 \end{aligned}$$

سرعت لحظه‌ای:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4t - 3 \\ \Rightarrow 4t - 3 &= 21 \Rightarrow 4t = 24 \Rightarrow t = 6 \end{aligned}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۴۰)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱



با استفاده از قوانین توان و لگاریتم، تابع داده شده را ساده می‌کنیم:

$$y = \ln \sqrt[3]{\frac{2x}{1+x^2}} = \ln \left( \frac{2x}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \ln \frac{2x}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{3} (\ln(2x) - \ln(1+x^2))$$

در نتیجه:

$$y' = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{2x} - \frac{2x}{1+x^2} \right) \Rightarrow y'(2) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \right) = -\frac{1}{10}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۷۵ تا ۷۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

بنابر تعریف جزء صحیح داریم:

$$\left[ 2x + \frac{1}{3} \right] = -1 \Rightarrow -1 \leq 2x + \frac{1}{3} < 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq 2x < -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \leq 3x < -\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \Rightarrow -2 \leq 3x < -\frac{1}{2}$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow [3x] = (-1) \text{ یا } (-2)$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

 ۴

 ۳

 ۲

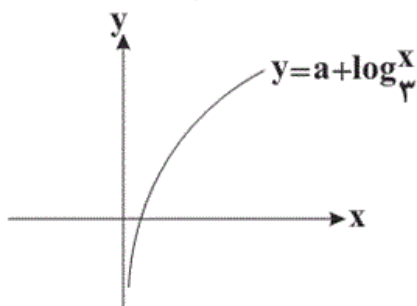
 ۱

ابتدا شکل کلی از نمودار تابع

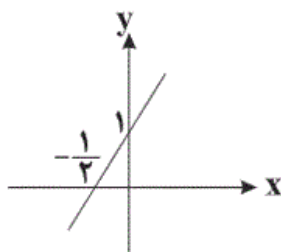
$$f(x) = \begin{cases} a - \log_{\frac{1}{3}} x, & x \geq 3 \\ 2x + 1, & x < 3 \end{cases}$$

رسم می‌کنیم:

$$y = a - \log_{\frac{1}{3}} x = a - \log_{3^{-1}} x = a + \log_3 x$$

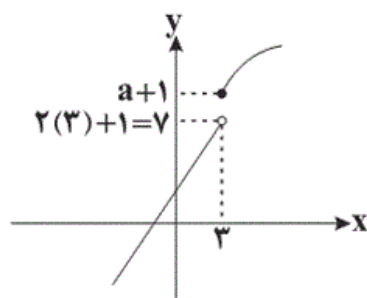


$$y = 2x + 1$$



حال هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

شرط  $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$  به معنی صعودی بودن  $f(x)$  است، برای صعودی بودن باید داشته باشیم:



$$7 \leq a + 1 \Rightarrow 6 \leq a$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۳۲ و ۳۳)

۴

۳

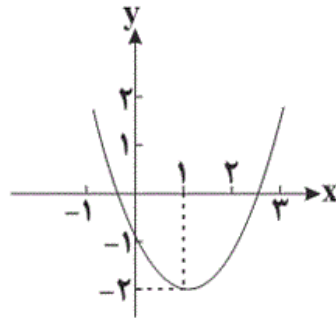
۲ ✓

۱

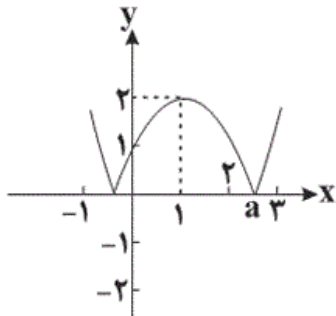
ابتدا ضابطه  $f$  را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = |x^2 - 2x - 1| = |(x-1)^2 - 2|$$

حال نمودار تابع  $y = (x-1)^2 - 2$  را به کمک انتقال نمودار تابع  $y = x^2$  رسم می‌کنیم:



برای رسم نمودار  $f$ ، کافیست در نمودار فوق، قسمتی که زیر محور  $x$  ها قرار دارد را نسبت به این محور قرینه کنیم:



در نهایت برای به دست آوردن  $a$  باید معادله  $|f(x)| = 0$  را حل کنیم:

$$|f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 2 \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

با توجه به نمودار تابع و فرض سؤال مبنی بر اکیداً صعودی بودن، می‌توان نتیجه

$$a = 1 + \sqrt{2}$$

گرفت:

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹، ۳۲ و ۳۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

## ۸۷- گزینه «۱»

(ایمان نfstین)

اگر نمودار تابع اکیداً صعودی و وارونش نقطه تلاقی داشته باشند، این نقطه تلاقی روی نیمساز ناحیه اول و سوم  $(y = x)$  خواهد بود. پس در این نقطه خواهیم داشت:

$$f(x) = x \rightarrow \frac{mx-2}{3} = x \xrightarrow{x=1} \frac{m-2}{3} = 1 \rightarrow m = 5$$

در نتیجه برای محاسبه ضابطه وارون تابع  $f(x) = \frac{5x-2}{3}$  داریم:

$$y = \frac{5x-2}{3} \rightarrow 3y+2 = 5x \rightarrow x = \frac{3y+2}{5} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{5}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

## ۱۰۶- گزینه «۳»

(بابک سادات)

۱- بررسی ضابطه‌ها:

ضابطه اول که  $(x+1)^2$  بوده و در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و ضابطه دوم  $\sqrt[3]{x-1}$  است که در نقطه  $x=1$  مشتق برابر بی‌نهایت است و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است. ضابطه سوم  $[x]-1$  است. که در نقاط ۳ و ۴ ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است.

۲- بررسی نقاط مرزی:

در  $x=0$  حد ضابطه بالا برابر یک و حد ضابطه پایین  $-1$  است. پس در  $x=0$  ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. در  $x=2$  ضابطه دوم و سوم دارای عرض ۱ هستند ولی مشتق ضابطه بالا مخالف صفر و مشتق ضابطه پایین صفر است. پس  $x=2$  یک نقطه گوشه (دارای مشتق چپ و راست متفاوت) و مشتق‌ناپذیر است.

نقاط مشتق‌ناپذیر  $= \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵ تا ۷۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{2\sqrt{x}} & , x > 1 \\ 3x^2 - b & , x < 1 \end{cases}$$

در نهایت بنابر مشتق‌پذیر بودن تابع در  $x=1$ ، خواهیم داشت:

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow \frac{a}{2} = 3 - b \Rightarrow a = 6 - 2b \Rightarrow a + 2b = 6 \quad (**)$$

با توجه به روابط (\*) و (\*\*) می‌توان نتیجه گرفت:

$$a = -8, b = 7 \Rightarrow a - b = -15$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۹ تا ۷۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

### ۱۱۱- گزینه «۳»

(علیرضا آروین)

بررسی موارد:

گزینه ۱) در صورتی که جهش باعث تغییر رمز یک آمینواسید به رمز دیگری از همان آمینواسید در ژن پروتئین مهارکننده شود، هیچ تغییری در عملکرد آن ایجاد نمی‌شود. (نادرست)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

### ۹۴- گزینه «۳»

(فسین اسفینی)

از آنجایی که چندجمله‌ای  $f(x)$  بر  $x+2$  بخش‌پذیر است، لذا  $f(-2) = 0$  خواهد بود.

$$f(-2) = 0 \Rightarrow 4 + 2 + 2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 4$$

در نتیجه  $f(x) = x^2 - x - 6$  می‌باشد. برای محاسبه باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $(x-4)$  کافی است  $f(4)$  را محاسبه کنیم:

$$f(4) = 4^2 - 4 - 6 = 6$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۰ و ۹۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

حد مخرج کسر داده شده برابر با صفر است:  $\lim_{x \rightarrow -1} (1 - x^2) = 0$

چون حاصل حد برابر با یک عدد حقیقی شده است، پس حد صورت هم باید صفر باشد. چون در غیر این صورت حاصل حد، نامتناهی می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 + 2x^2 + x + k) = 0 \Rightarrow \text{حد صورت} = 0$$

$$\Rightarrow -3 + 2 - 1 + k = 0 \Rightarrow k = 2$$

با جایگذاری  $k = 2$ ، صورت را بر  $x + 1$  تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 + x + 2 \quad | \quad x+1 \\ \underline{-3x^3 - 3x^2} \quad 3x^2 - x + 2 \\ -x^2 + x + 2 \\ \underline{\quad x^2 + x} \\ \quad 2x + 2 \\ \underline{\quad -2x - 2} \\ \quad 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 3x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+1)(3x^2 - x + 2)$$

حالا با ساده کردن عامل صفرکننده از صورت و مخرج، حاصل حد را حساب می‌کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x^2 - x + 2)}{(1-x)(1+x)} = \frac{6}{2} = 3$$

پس:

$$L - k = 3 - 2 = 1$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

۹۶- گزینه «۳»

(سروش موثینی)

با توجه به نمودار تابع  $f$ ، هر چه با مقادیر کمتر از یک به عدد یک نزدیک شویم، تابع  $f$  با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود. همچنین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x-1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \text{عدد مثبت}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x-1)}{f(x)} = \frac{\text{عدد مثبت}}{\text{صفر مثبت}} = +\infty$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

۹۷- گزینه «۲»

(میثم ممزه‌لویی)

چون حاصل حد تابع  $f$  وقتی  $x \rightarrow +\infty$  عددی حقیقی شده، بنابراین باید درجه صورت و مخرج کسر یکسان باشد، پس باید ضریب  $x^3$  در صورت صفر باشد:

$$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx^2 - 2}{-x^2 + 3x - 2} = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx^2}{-x^2} = -2 \Rightarrow -b = -2 \Rightarrow b = 2$$

حال حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{-x^2 + 3x - 2} : \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{-(x-1)(x-2)} = \frac{2(2)}{-(-1)} = 4$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۰ تا ۱۱۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

می دانیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

با توجه به نمودار می توان نتیجه گرفت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$  ، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2 = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

حال با توجه به ضابطه تابع  $f(x)$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2+a)x^3 + 5x - 7}{2x^3 - x^2 + 4} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2+a)x^3}{2x^3} = \frac{2+a}{2} \Rightarrow \frac{2+a}{2} = 3 \Rightarrow 2+a = 6 \Rightarrow a = 4 \end{aligned}$$

(ریاضی ۳، صفحه های ۱۰۴ تا ۱۱۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

(امین نصرالله)

چون تفاضل دو عدد رو شده، عددی اول نیست، بنابراین تفاضل دو عدد رو شده یکی از اعداد صفر، ۱ و ۴ است. در نتیجه:

تفاضل صفر:

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

تفاضل ۱:

$$B = \{(6,5), (5,6), (5,4), (4,5), (4,3), (3,4), (3,2), (2,3), (2,1), (1,2)\}$$

تفاضل ۴:

$$C = \{(6,2), (2,6), (5,1), (1,5)\}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(B) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

(ریاضی عمومی، صفحه های ۱ تا ۱۱)

۴

۳ ✓

۲

۱



۸۲- گزینه «۴»

(میثم همزه لویی)

از آنجایی که دو پیشامد مستقل اند، بنابراین  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ، پس:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(A) = 0/1$$

در نتیجه:

از طرفی با توجه به این که  $P(A \cup B) = 0/73$ ، پس:

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/73$$

$$\Rightarrow 0/1 + P(B) - P(A)P(B) = 0/73$$

$$\Rightarrow 0/1 + P(B) - 0/1P(B) = 0/73$$

$$\Rightarrow 0/9P(B) = 0/63 \Rightarrow P(B) = 0/7$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱ تا ۱۱)

۴

۳

۲

۱

۸۳- گزینه «۴»

(آرش رحیمی)

احتمال آنکه در هر سرویس، توپ این والیبال‌بست مستقیماً منجر به امتیاز شود، برابر

است با  $P = \frac{2}{5} = 0/4$ . پس اگر  $X$  تعداد سرویس‌های مستقیماً منجر به امتیاز

در ۴ پرتاب باشد، آنگاه  $X$  دارای توزیع دوجمله‌ای  $P(X \leq 1)$  مدنظر سؤال است.

در نتیجه داریم:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= \binom{4}{0} (0/4)^0 (1 - 0/4)^4 + \binom{4}{1} (0/4)^1 (1 - 0/4)^3$$

۴

۳

۲

۱

$$f(x) = |x(6-x)| \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & & 0 & 6 \\ \hline x(6-x) & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

در نتیجه ضابطه تابع در نقطه  $x = 4$  برابر است با:

$$f(x) = 6x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 6 - 2x \\ \Rightarrow f'(4) = 6 - 8 = -2$$

همچنین زمانی که در سمت راست نقطه  $x = 6$  قرار داریم، ضابطه تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = |6x - x^2| = x^2 - 6x \Rightarrow f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow f'_+(6) = 12 - 6 = 6$$

بنابراین:

$$f'_+(6) - f'(4) = 6 - (-2) = 8$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۹ تا ۷۴) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۴۰)

۴

۳

۲

۱

خط مماس بر تابع  $f$  را در نقطه  $P(1,2)$  بدست می‌آوریم. می‌دانیم که شیب خط مماس برابر  $f'(1)$  می‌باشد:

$$y - y_p = m(x - x_p) \Rightarrow y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1) \\ \Rightarrow y = -\frac{3x}{2} + \frac{7}{2} \xrightarrow[\text{یعنی } y=0]{\text{تقاطع با محور } x \text{ ها}} x = \frac{7}{3}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵ و ۶۶) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۳)

۴

۳

۲

۱

$$g(f(x)) = g(\sqrt{2+x}) = (\sqrt{2+x})^2 = 2+x$$

بنابراین:

$$g(f(x)) = 5 \Rightarrow 2+x = 5 \Rightarrow x = 3$$

پس معادله فقط یک ریشه مثبت دارد.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۹)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱

۸۹- گزینه «۲»

(علی شهبازی)

$$(g \circ f^{-1})(a) = 1 \rightarrow g(f^{-1}(a)) = 1$$

می‌دانیم اگر  $f(a) = b$ ، آن‌گاه  $f^{-1}(b) = a$ ، پس:

$$g(f^{-1}(a)) = 1 \rightarrow g^{-1}(1) = f^{-1}(a) \Rightarrow 0 = f^{-1}(a) \Rightarrow 2 = a$$

حالا مقدار  $(f \circ g)(-2)$  را با جای‌گذاری  $a = 2$  حساب می‌کنیم:

$$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(0) = 2$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۹)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

۴

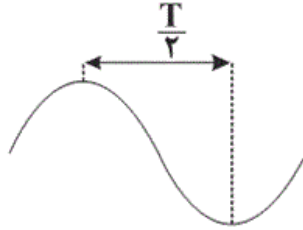
۳

۲

۱

دوره تناوب  $f(x) = \Delta \sin 3\left(\frac{\pi}{2}x - c\right) = \Delta \sin\left(\frac{3\pi}{2}x - 3c\right)$  برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{3\pi}{2}\right|} = \frac{4}{3}$$



مطابق شکل فاصله طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نمودار توابع مثلثاتی برابر  $\frac{T}{2}$  است.

در  $x = \frac{1}{2}$  ماکزیمم داریم. پس اگر از این نقطه به اندازه  $\frac{T}{2}$  سمت راست یا چپ

برویم به نقطه مینیمم می‌رسیم:

$$x_{\min} = x_{\max} + \frac{T}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۲)

۴

۳

۲

۱

با توجه به این که فاصله طولی نقطه ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دوره تناوب است، پس:

$$T = 2 \times \left( \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \right) = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1$$

و همچنین از نقاط  $(\frac{3}{2}, 1)$  و  $(\frac{5}{2}, -3)$  می‌توانیم برای پیدا کردن  $a$  و  $c$  استفاده کنیم.

حالت اول)  $b = 1$

$$\left. \begin{array}{l} f(\frac{3}{2}) = 1 \Rightarrow a \sin(\frac{3\pi}{2}) + c = 1 \Rightarrow -a + c = 1 \\ f(\frac{5}{2}) = -3 \Rightarrow a \sin(\frac{5\pi}{2}) + c = -3 \Rightarrow a + c = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

حالت دوم)  $b = -1$

$$\left. \begin{array}{l} f(\frac{3}{2}) = 1 \Rightarrow a + c = 1 \\ f(\frac{5}{2}) = -3 \Rightarrow -a + c = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

پس در هر دو حالت  $abc = 2$  است.

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۲)

۴

۳

۲

۱

می‌دانیم  $\cos \frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2}$  پس داریم:

$$\cos 3x \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \cos^2 x \xrightarrow{\times(-2)} \cos 3x = \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos 2x}$$

پس معادله به صورت  $\cos 3x = \cos 2x$  درمی‌آید.

و از جواب کلی معادله کسینوسی داریم:

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \end{cases} \xrightarrow{x \in (0, 2\pi)} k = 1, 2, 3, 4$$

پس ۴ جواب داریم که عبارتند از  $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۴)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۱ تا ۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با جایگذاری‌های  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  و  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$  داریم:

$$(1 - 2\sin^2 x) + (1 - \sin^2 x) + 4\sin x = 3 \Rightarrow 3\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$$

معادله بالا یک معادله درجه دوم بر حسب  $\sin x$  است. با حل این معادله درجه دوم

۲ جواب  $\sin x = 1$  و  $\sin x = \frac{1}{3}$  به دست می‌آید:

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا ضابطه  $f(x)$  را ساده می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2 - 2}{x+1} = \frac{x^2 + x + 2}{x+1} - \frac{2}{x+1}$$

$$= x^2 - x + 2 - 2(x+1)^{-1}$$

مشتق اول تابع به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Rightarrow f'(x) = 2x - 1 - 2(-1)(x+1)^{-2}$$

$$= 2x - 1 + 2(x+1)^{-2}$$

مشتق دوم تابع، با مشتق‌گیری از عبارت بالا به دست می‌آید.

$$\Rightarrow f''(x) = 2 + 2(-2)(x+1)^{-3} = 2 - 4(x+1)^{-3} = 2 - \frac{4}{(x+1)^3}$$

با جایگذاری  $x = 1$  در عبارت بالا، داریم:

$$f''(1) = 2 - \frac{4}{8} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(ریاضی عمومی، صفحه ۱۹)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۴۰)

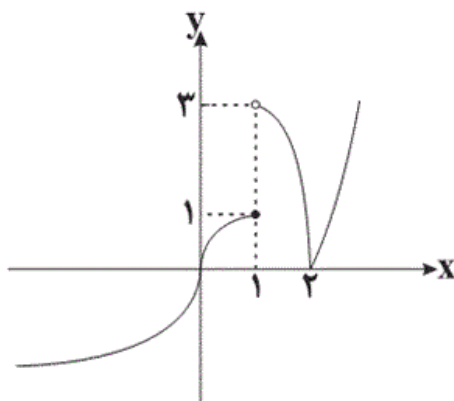
 ۴

 ۳

 ۲ ✓

 ۱

با توجه به نمودار:



در  $x=2$  تابع دارای مشتق چپ و راست برابر نیست، بنابراین در  $x=2$ ، مشتق و خط مماس وجود ندارد.

در  $x=1$  پیوسته نیست، پس مشتق و مماس ندارد.

در  $x=0$  مشتق تابع برابر بی‌نهایت است، پس مشتق ندارد، اما مماس دارد.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵ تا ۷۴)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهرداد ملوندی)

$$f(x) = (\sqrt{5x+1})(3x-2)^3$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}(3x-2)^3 + 9(3x-2)^2(\sqrt{5x+1})$$

$$f'(0) = \frac{5}{2} \times (-8) + 9(-2)^2(1) = -20 + 36 = 16$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۷۱ تا ۷۴) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۴۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



$$f'(f(x)) = f'(x^{\frac{4}{3}}) = \frac{4}{3}(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{9}}$$

مشتق  $f' \circ f$  برابر است با:

$$\left(\frac{4}{3}x^{\frac{4}{9}}\right)' = \frac{16}{27}x^{\frac{4}{9}-1} = \frac{16}{27}x^{-\frac{5}{9}} \xrightarrow{x=1} (f' \circ f)'(x) = \frac{16}{27}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۷۱ تا ۷۴)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۴۰)

۴

۳

۲

۱