سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دیفرانسیل و انتگرال ، حد - 14 سوال

۹۵- اگر $a_n = \cos\left(\frac{n\pi+1}{n+2}\right)$ و $f(x) = \tan\frac{\pi x}{2}$ باشد، دنبالهٔ $f(a_n)$ چگونه است؟

۱) همگرا به صفر ۲) واگرا به $+\infty$ ۳) واگرا به $-\infty$ ۴) همگرا به ۱

۹۶- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x & ; \ x \in \mathbb{Q} \\ x^2+1 & ; \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ باشد، تابع $g(x) = (x^3 - 2x)f(x)$ در چند نقطه دارای حد است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

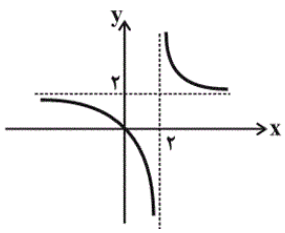
۹۷- حاصل $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{[x^2]-9}{x^2-9}$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) $+\infty$ ۳) ۱ ۴) $-\infty$

۹۸- حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۹۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده‌است. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} fof(x)$ کدام است؟



۱) ۲ ۲) $+\infty$

۳) $-\infty$ ۴) صفر

۱۰۰- حاصل $\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x(x-۱)+x^۲\left[\frac{۱}{x}\right]}{x^۲\left(۲+\left[-\frac{۱}{x}\right]\right)+۱}$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۰۱- حاصل $\lim_{x\to\pi^-}\left([۲\sin x]+[۲\cos x]\right)$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۳- ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) صفر

۱۰۲- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۸+۸\sin x\sin ۳x\sin ۵x}{(۲x-\pi)^۲}$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۳۵ ۴) ۷۰

۱۰۵- به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a ، حداقل یکی از جواب‌های معادلهٔ $ax^۳+۲x^۲-x+۴=۰$ در بازهٔ $(۰,۱)$ قرار می‌گیرد؟

۱) $a<-\frac{۳}{۴}$ ۲) $a<-\frac{۵}{۲}$

۳) $a<-۳$ ۴) $a<-۵$

۱۰۶- اگر $\lim_{x\to۱}(\frac{x-a}{x-۱}-\frac{x+b}{x+۱})=۳$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۵ ۴) ۵-

۱۰۷- اگر نمودار تابع $y=\frac{a+۱}{x^۲+۲ax-۴a}$ در اطراف مجانب قائم‌اش به‌صورت زیر باشد، a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته‌باشد؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) صفر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۸- مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع‌اند و O مبدأ مختصات است. مساحت مثلث OAB کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۰۹- اگر فاصلهٔ خطوط مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{2x^2+3}{ax^2-x+1-a}$ برابر ۳ باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن کدام می‌تواند باشد؟

۱) $y=-\frac{2}{5}$ ۲) $y=-1$ ۳) $y=5$ ۴) $y=-2$

۱۱۰- تابع $y=\frac{x^2-2x+2}{x}$ در اطراف مجانب مایل خود به کدام صورت است؟

۱)
۲)
۳)
۴)

دیفرانسیل و انتگرال ، پیوستگی - 2 سوال -

۱۰۳- توابع $g(x)=\begin{cases}\pi-x^2 & ;x\le 0\\ x+\pi & ;x>0\end{cases}$ و $f(x)=[\sin x]$ مفروض‌اند. تابع $fog(x)$ در $x=0$ چگونه است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) پیوسته ۲) از چپ و راست ناپیوسته

۳) فقط از راست پیوسته ۴) فقط از چپ پیوسته

۱۰۴- تابع $f(x)=\begin{cases}x^3 & ;x^3\ge 3x-1\\ 3x-1 & ;x^3<3x-1\end{cases}$، چند نقطهٔ ناپیوستگی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

دیفرانسیل و انتگرال ، یاد آوری مفاهیم پایه - 14 سوال -

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۸۱- مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{R}: \frac{|x|}{[x]+[-x]}>-1\}$ یک همسایگی متقارن ... . ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) به مرکز صفر و به شعاع ۱ است.
۲) محذوف به مرکز صفر و به شعاع ۱ است.
۳) به مرکز ۱− و به شعاع ۱ است.
۴) محذوف به مرکز ۱− و به شعاع ۱ است.

۸۲- اگر x، y و z اعداد گویای ناصفر باشند و داشته باشیم: $\frac{x}{۷-۴\sqrt{۳}}+\frac{y}{\left(۲+\sqrt{۳}\right)^{۲}}=z$، حاصل $\frac{z}{x}$ کدام است؟

۱) ۱۴
۲) ۷
۳) ۱۵
۴) ۸

۸۳- اگر $\bar{۳a}=\frac{b}{۱۰}$ و $a+b>۳$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۴

۸۴- اگر از $a<b$ بتوان $\frac{۱}{a}<\frac{۱}{b}$ را نتیجه گرفت، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $a^{۲}<b^{۲}$
۲) $a^{۲}>b$
۳) $a^{۵}>b^{۲}$
۴) $a^{۵}+a^{۳}+a<\sqrt[۳]{b}+۲$

۸۵- مساحت سطح محصور بین نمودار $f(x)=\big||x-۲|-۲\big|$ و خط $y=۲$ در فاصلهٔ $[۰,۴]$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸۶- با حذف حداقل چند جمله از جملات ابتدایی دنبالهٔ $a_n=n^{۳}-۲۱n$، یک دنبالهٔ اکیداً صعودی به‌دست می‌آید؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸۷- دنبالهٔ $a_n=\sqrt{\frac{n^{۳}-۲n}{n+۳}}-n+۱$ به کدام عدد همگرا است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) ۱−

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۸- به ازای $n \geq n_0$، فاصلهٔ جملات دنبالهٔ $\left\{\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}}\right\}$ از نقطهٔ همگرایی آن کم‌تر از $\frac{1}{20}$ است. کم‌ترین مقدار n_0 کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۴ ۴) ۷

۸۹- اگر $a_n = \frac{k+\cos(n\pi)}{3}$ باشد، به ازای چند عدد صحیح k دنبالهٔ $\{(a_n)^n\}$ کران‌دار است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۹۰- دنبالهٔ $\left\{\left[\frac{\cos n}{n+\tan^{-1} n}\right]\right\}$ چگونه است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) همگرا و کران‌دار ۲) واگرا و بی‌کران ۳) همگرا و بی‌کران ۴) واگرا و کران‌دار

۹۱- اگر S مجموعهٔ کران‌های بالای مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $[|x-2|] \leq 4$ باشد، بزرگ‌ترین کران پایین مجموعهٔ S کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۳- ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۷

۹۲- اگر دنبالهٔ $\{(\frac{2n+1}{2n-5})^{3n-1}\}$ به e^k همگرا باشد، k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۹۳- دنباله‌های $a_n = \cos n\pi$ و $b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{-b_n}}$ با شرط $b_1 = 1$ مفروضند. چه تعداد از دنباله‌های $a_n + b_n$، $a_n - b_n$ و $\frac{a_n}{b_n}$ واگرا هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۴- اگر $a_n = \begin{cases} \sqrt[n]{n} & ;n \le 10^{10} \\ \frac{4n+\sin n}{2n^2+3} & ;n > 10^{10} \end{cases}$ و $b_n = n\cos\frac{(-1)^n}{n}$ باشد، دنبالهٔ $a_n b_n$ به کدام عدد همگراست؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) واگراست.

هندسه‌ي تحليلي ، مقاطع مخروطي - 6 سوال

۱۱۴- دایره به معادلهٔ $x^2+y^2+(a+1)x-(b-1)y+16=0$ در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است. $a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) -۱ ۴) -۲

۱۱۵- بیشترین فاصلهٔ نقاط دایرهٔ $x^2+y^2=4y$ از خط $3x+4y=1$ کدام است؟

۱) ۳/۴ ۲) ۱/۴

۳) ۲/۲ ۴) ۰/۶

۱۱۶- اگر خط $x+y=m$ بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2=m$ مماس باشد، وضعیت نسبی این دایره و دایرهٔ $x^2+y^2-2x=0$ کدام است؟

۱) متداخل ۲) متخارج

۳) متقاطع ۴) مماس خارج

۱۱۷- F و F' کانون‌های یک بیضی به طول قطر کوچک ۶ هستند. دایره‌ای به قطر FF'، بیضی را در چهار نقطه قطع کرده است. اگر M یکی از این چهار نقطه باشد، حاصل $MF \times MF'$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰

۳) ۲۴ ۴) ۳۶

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۸- مساحت چهارضلعی حاصل از وصل کردن دو سر قطر بزرگ به دو سر قطر کوچک یک بیضی برابر ۱۲۰ و خروج از مرکز این بیضی $\frac{۴}{۵}$ است. فاصلهٔ کانونی بیضی کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۶

۱۱۹- اگر $y = ۱$ خط هادی سهمی $y = mx^۲ + ۲mx + m$ باشد، مختصات کانون آن کدام است؟

۱) $(-۱,۰)$
۲) $(-۱,-۱)$
۳) $(۱,۰)$
۴) $(۱,-۱)$

هندسه‌ي تحليلي ، بردار - 1 سوال -

۱۱۱- بردار غیرصفر v بر هر سه بردار $a = (۱,۱,۱)$، $b = (m,۳,۱)$ و $c = (۱,۴,۲)$ عمود است. مقدار m کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) صفر
۴) ۱

هندسه‌ي تحليلي ، ماتریس، دترمینان و دستگاه - 1 سوال

۱۲۰- اگر $\begin{vmatrix} ۱+x & y & z \\ x & ۱+y & z \\ x & y & ۱+z \end{vmatrix} = ۳$ باشد، آنگاه حاصل $x+y+z$ کدام است؟

۱) -۴
۲) -۲
۳) ۴
۴) ۲

هندسه‌ي تحليلي ، خط و صفحه - 2 سوال -

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۱۱۲- مجموع مؤلفه‌های مختصات تصویر نقطهٔ $A=(۳,۴,۵)$ بر خط $z=۰$ و $d: y=۲x$ کدام است؟

۱) ۶/۳ ۲) ۶/۶

۳) ۶/۵ ۴) ۶/۴

۱۱۳- چند نقطه روی فصل مشترک دو صفحهٔ $\begin{cases} x-y=۳ \\ x+۳z=-۱ \end{cases}$ وجود دارد که دارای فاصلهٔ برابر از صفحات xy و xz باشد؟

۱) هیچ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) بی‌شمار

ریاضیات گسسته ، نظریه ي گراف - 4 سوال -

۱۲۱- در گرافی با اندازهٔ ۲۴، مجموع درجات رئوس زوج برابر ۳۲ است. اگر رئوس فرد همگی هم‌درجه باشند، آنگاه تعداد آنها کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۲۲- در یک گراف ساده از مرتبهٔ ۱۸، $\delta=۲$ و $\Delta=۵$ است. اندازهٔ این گراف چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶

۱۲۳- تعداد کل مسیرها در یک گراف ۲- منتظم همبند از مرتبهٔ n کدام است؟

۱) $\binom{n}{۲}$ ۲) $n^۲$ ۳) $۲n$ ۴) $\binom{n+۱}{۲}$

۱۲۴- حاصل‌ضرب درجات رئوس یک درخت برابر ۴۸ است. حداقل اندازهٔ این درخت کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

ریاضیات گسسته ، نظریه ي اعداد - 5 سوال -

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۱۲۵- به‌ازای چند عدد طبیعی n، هر دو عدد $\frac{n+3}{5}$ و $\frac{n^2+2n}{10}$ اعدادی صحیح هستند؟

۱) هیچ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۱۲۶- در یک تقسیم، مقسوم‌علیه ۲۳ و باقی‌مانده ۱۷ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم (بدون تغییر مقسوم‌علیه) اضافه کرد، به‌طوری که خارج قسمت تغییر نکند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۲۷- به ازای چند عدد سه رقمی n، اعداد $11n+9$ و $5n+4$ نسبت به هم اول هستند؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۴۵۰ ۴) ۹۰۰

۱۲۸- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=2^{51}\times 3^{101}$ بر عدد ۱۷ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۲۹- اگر $\overline{7a125}\overset{11}{\equiv}\overline{a1250}$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $\overline{a923a}$ بر ۹ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۷

ریاضیات گسسته ، ترکیبات - 1 سوال

۱۳۰- با ارقام ۰،۱،۲،۳ چند عدد طبیعی چهار رقمی می‌توان نوشت به طوری‌که حداقل یک رقم تکراری داشته باشد؟

۱) ۱۹۲ ۲) ۲۳۸ ۳) ۱۷۴ ۴) ۱۶۸

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

-۹۵ (فریدون ساعتی)

$$a_n = \cos\left(\pi - \frac{2\pi - 1}{n+2}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi - 1}{n+2}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(-\cos\frac{2\pi-1}{n+2}\right) = \lim_{x\to(-1)^+} f(x)$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+}\left(\tan\frac{\pi x}{2}\right) = -\infty$$

(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۵۳ تا ۵۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۹۶ (حبیب شفیعی)

تابع g در نقاطی حد دارد که در آن نقاط، عبارت $x^3 - 2x$ صفر شود یا دو ضابطهٔ تابع f برابر باشد.

$$1) x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{2}$$

$$2) 2x = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین تابع g در ۴ نقطه حد دارد.

توجه: در نقاطی که عبارت $x^3 - 2x$ صفر می‌شود، حد تابع g به صورت $\frac{0}{0}$ (کران‌دار) می‌شود. بنابراین در این نقاط g حد دارد.

(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: مکمل تمرین ۱۷ صفحهٔ ۸۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۹۷ (یاسین سپهر)

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{[x^2] - 9}{x^2 - 9} = \frac{8 - 9}{9^- - 9} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۸- (سیدعادل حسینی)

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\times\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$=\frac{2^-}{0^-}=-\infty$$

(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۹۹- (عرفان صادقی)

توجه کنید که: $\lim_{x\to+\infty} fof(x)=\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

بنابراین در ابتدا $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

هم‌چنین وقتی $x\to+\infty$، مقادیر $f(x)$ بیشتر از ۲ هستند. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty$$

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۰- (کاظم اجلالی)

ابتدا توجه کنید که اگر $x \to -\infty$، $\frac{۱}{x} < ۰$، $-\frac{۱}{x} > ۰$ و $\lim_{x \to -\infty} \frac{-۱}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{۱}{x} = ۰$ است؛ بنابراین در بازهٔ $(-\infty, -۱)$، تساوی‌های $\left[\frac{۱}{x}\right] = -۱$ و $\left[-\frac{۱}{x}\right] = ۰$ برقرارند.

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{۳x(x-۱) + x^۲\left[\frac{۱}{x}\right]}{x^۲\left(۲ + \left[-\frac{۱}{x}\right]\right) + ۱} = \lim_{x \to -\infty} \frac{۳x(x-۱) - x^۲}{x^۲(۲+۰) + ۱}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{۲x^۲}{۲x^۲} = ۱$$

(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۱- (قاسم کتاب‌چی)

$$\lim_{x \to \pi^-} \left([۲\cos x] + [۲\sin x]\right) = \left[۲(-۱)^+\right] + \left[۲(۰^+)\right]$$

$$= -۲ + ۰ = -۲$$

(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۲- (کاظم اجلالی)

اگر فرض کنیم $t = x - \frac{\pi}{۲}$، خواهیم داشت: $x = t + \frac{\pi}{۲}$, $t \to ۰$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{۸ + ۸\sin x \sin ۳x \sin ۵x}{(۲x - \pi)^۲}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to ۰} \frac{۸ + ۸\sin\left(\frac{\pi}{۲} + t\right)\sin\left(\frac{۳\pi}{۲} + ۳t\right)\sin\left(\frac{۵\pi}{۲} + ۵t\right)}{\left(۲\left(\frac{\pi}{۲} + t\right) - \pi\right)^۲}$$

$$= \lim_{t \to ۰} \frac{۸ - ۸\cos t \cos ۳t \cos ۵t}{۴t^۲} \qquad (*)$$

$$= \lim_{t \to ۰} \frac{۸ - ۸\left(۱ - \frac{۱}{۲}t^۲\right)\left(۱ - \frac{۹}{۲}t^۲\right)\left(۱ - \frac{۲۵}{۲}t^۲\right)}{۴t^۲}$$

$$= \lim_{t \to ۰} \frac{۱۴۰t^۲ - ۵۱۸t^۴ + ۲۲۵t^۶}{۴t^۲} = \lim_{t \to ۰} \frac{۱۴۰t^۲}{۴t^۲} = ۳۵$$

لازم به ذکر است که در ساده‌سازی رابطهٔ (*)، از هم‌ارزی زیر استفاده کرده‌ایم:

$$u \to ۰ \Rightarrow \cos u \sim ۱ - \frac{u^۲}{۲}$$

(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۵- (سراسری ریاضی - ۸۸)

با توجه به قضیهٔ بولزانو، اگر $f(۰)f(۱) < ۰$ باشد، تابع با ضابطهٔ $f(x) = ax^۳ + ۲x^۲ - x + ۴$ در فاصلهٔ $(۰ , ۱)$ حداقل یک ریشه دارد:

$$f(۰) = ۴ \ , \ f(۱) = a + ۵$$

$$f(۰)f(۱) < ۰ \Rightarrow ۴(a + ۵) < ۰ \Rightarrow a < -۵$$

(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۶- (هادی پلاور)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-a}{x-1}-\frac{x+b}{x+1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+(1-a)x-a-x^2+(1-b)x+b}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2-a-b)x+(b-a)}{(x-1)(x+1)}=3$$

چون مخرج به ازای $x=1$ صفر می‌شود، صورت نیز باید به ازای $x=1$ صفر شود:

$$2-a-b+b-a=0\Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(1-b)x+(b-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-b)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1-b}{2}=3$$

$$\Rightarrow b=-5$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۷- (طاهر دادستانی)

باید مخرج کسر تابع ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Rightarrow \Delta=(2a)^2-4(-4a)=0$$

$$\Rightarrow 4a^2+16a=4a(a+4)=0\Rightarrow a=0 \text{ یا } a=-4$$

هم‌چنین باید $a+1>0$ باشد، بنابراین فقط به ازای $a=-4$ نمودار تابع در اطراف مجانب قائم خود مانند شکل داده‌شده می‌شود.

(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

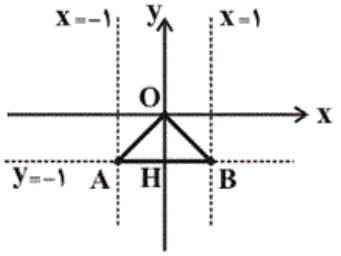
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۸- (کاظم سالار)

$x=-1$ و $x=1$: مجانب‌های قائم $\Leftarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{-x^2}=-1 \Rightarrow y=-1 : \text{مجانب افقی}$$

حال خطوط مجانب را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|AB\times OH|=\frac{1}{2}|2\times 1|=1$$

(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۹- (میلاد سجادی‌لاریجانی)

صورت ریشه ندارد، بنابراین ریشه‌های مخرج قطعاً مجانب‌های قائم نمودار تابع هستند. از طرفی مجموع ضرایب عبارت مخرج برابر صفر است، یعنی $x=1$ و $x=\frac{1-a}{a}$ ریشه‌های آن و در نتیجه مجانب‌های قائم نمودار تابع هستند.

$$\left|\frac{1-a}{a}-1\right|=3 \Rightarrow \frac{1-2a}{a}=\pm 3 \Rightarrow a=\frac{1}{5} \text{ یا } -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{5}: \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+3}{\frac{1}{5}x^2-x+\frac{4}{5}}=10 \Rightarrow y=10 : \text{مجانب افقی} \\ a=-1: \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+3}{-x^2-x+2}=-2 \Rightarrow y=-2 : \text{مجانب افقی} \end{cases}$$

(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۴)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۰- (جواد اسحاقی)

$$y=\frac{x^{۲}-۲x+۲}{x}=x-۲+\frac{۲}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-۲+\frac{۲}{x}\right)=x-۲+۰^{+}=x-۲+\varepsilon$$

یعنی مقدار تابع در $+\infty$ از $x-۲$ بزرگ‌تر است، پس بالای مجانب قرار می‌گیرد.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-۲+\frac{۲}{x}\right)=x-۲+۰^{-}=x-۲-\varepsilon$$

یعنی مقدار تابع در $-\infty$ از $x-۲$ کم‌تر است، یعنی پایین مجانب قرار می‌گیرد. به این‌ترتیب نمودار گزینهٔ «۳» صحیح است.

(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۳- (حمید علیزاده)

$$fog(x)=\begin{cases}\left[\left[\sin x^{۲}\right]\right] & ;x\le ۰\\ \left[\left[-\sin x\right]\right] & ;x>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(g(۰))=۰\\ \lim\limits_{x\to۰^{-}}fog(x)=\lim\limits_{x\to۰^{-}}\left[\left[\sin x^{۲}\right]\right]=\left[\left[۰^{+}\right]\right]=۰\\ \lim\limits_{x\to۰^{+}}fog(x)=\lim\limits_{x\to۰^{+}}\left[\left[-\sin x\right]\right]=\left[\left[۰^{-}\right]\right]=-۱\end{cases}$$

بنابراین $fog(x)$ در $x=۰$، فقط از چپ پیوسته است.

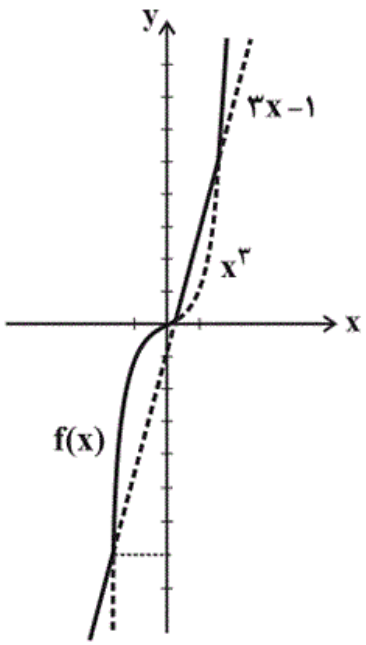
(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۸۷ تا ۹۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۴- (کاظم اجلالی)

به کمک نمودار توابع $y=x^3$ و $y=3x-1$ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، واضح است که تابع در تمام $\mathbb{R}$ پیوسته است و نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.



(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۸۷ تا ۹۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۸۱- (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

می‌دانیم: $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ;x\in\mathbb{Z}\\ -1 & ;x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

$$\xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}}\frac{|x|}{[x]+[-x]}>-1\Rightarrow\frac{|x|}{-1}>-1\Rightarrow|x|<1$$

$$\xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}}0<|x|<1\Rightarrow x\in(-1,1)-\{0\}$$

مجموعهٔ جواب فوق یک همسایگی محذوف متقارن به مرکز صفر و شعاع یک است.

(حسابان - حد و پیوستگی: صفحهٔ ۱۴۰ و دیفرانسیل یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۲- (سیدعادل حسینی)

$$۷-۴\sqrt{۳}=\left(۲-\sqrt{۳}\right)^{۲}\ ,\left(۲+\sqrt{۳}\right)^{۲}=۷+۴\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow z=\frac{x\left(۷+۴\sqrt{۳}\right)+y\left(۷-۴\sqrt{۳}\right)}{\left(\left(۲+\sqrt{۳}\right)\left(۲-\sqrt{۳}\right)\right)^{۲}}=۷\left(x+y\right)+۴\sqrt{۳}\left(x-y\right)$$

برای اینکه z گویا باشد، لازم است $x-y=۰$ باشد:

$$\Rightarrow x=y\Rightarrow z=۱۴x$$

(دیفرانسیل- یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۳ تا ۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۸۳- (کتاب نوروز – سؤال ۵۱۷)

$$۰/۳\overline{a}=\frac{b}{۱۰}\Rightarrow\frac{\overline{۳a}-۳}{۹۰}=\frac{b}{۱۰}\Rightarrow ۳۰+a-۳=۹b$$

$$\Rightarrow ۳۰+a=۹b+۳$$

$$\begin{cases} b=۳\Rightarrow a=۰\Rightarrow a+b=۳ & \text{غ.ق.ق} \\ b=۴\Rightarrow a=۹\Rightarrow a+b>۳ & \text{ق.ق} \end{cases}\Rightarrow a-b=۹-۴=۵$$

(دیفرانسیل- یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۷ و ۸)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۴- (جمال‌الدین حسینی)

همواره داریم:

$$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$$

$$a < b < 0 \Rightarrow 0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

بنابراین با توجه به نتیجه‌گیری صورت سوال، $a < 0$ و $b > 0$ است.

گزینهٔ «۱» همواره درست نیست، زیرا به ازای $a = -4$ و $b = 2$ داریم:

$$-4 < 2 \Rightarrow 16 \not< 4$$

گزینهٔ «۲» همواره درست نیست، زیرا به ازای $a = -1$ و $b = 5$ داریم:

$$-1 < 5 \Rightarrow 1 \not> 5$$

گزینهٔ «۳» همواره درست نیست، زیرا به ازای $a = -1$ و $b = 2$ داریم:

$$-1 < 2 \Rightarrow -1 \not> 4$$

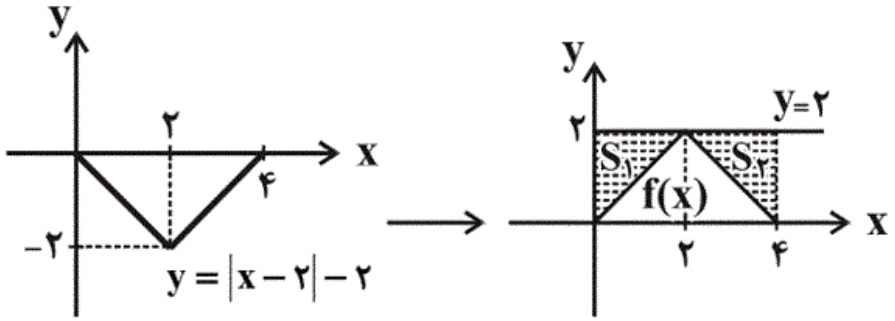
گزینهٔ «۴» همواره درست است. زیرا سمت چپ همواره منفی و سمت راست همواره مثبت است.

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحهٔ ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۸۵- (جمال‌الدین حسینی)

نمودارها به‌صورت زیر هستند:



با توجه به نمودارها داریم:

$$S_1 = S_2 \Rightarrow S_{کل} = 2S_1$$

$$\Rightarrow S_{کل} = 2 \times \frac{2 \times 2}{2} = 4$$

(دیفرانسیل- یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۶- (سیدعادل حسینی)

چند جملهٔ ابتدایی را می‌نویسیم: $a_n : -۲۰, -۳۴, -۳۶, -۲۰, ۲۰, \ldots$

اگر دو جملهٔ اول را حذف کنیم، دنبالهٔ باقی‌مانده اکیداً صعودی خواهد بود.

(دیفرانسیل- دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۷- (حبیب شفیعی)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n^۳ - ۲n}{n+۳}} - n + ۱\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^۲ - ۳n + ۷ + \frac{-۲۱}{n+۳}} - n + ۱\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^۲ - ۳n + ۷} - n + ۱\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left|n - \frac{۳}{۲}\right| - n + ۱\right) = -\frac{۱}{۲}$$

(دیفرانسیل- دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۸ (کتاب نوروز - سؤال ۵۳۶)

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}} = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1)} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

$$|a_n - \frac{1}{2}| < \frac{1}{20} \Rightarrow |\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1} < \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1} > \frac{9}{20} \Rightarrow \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1 < \frac{20}{9} \Rightarrow \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} < \frac{11}{9}$$

$$\Rightarrow (1+\frac{1}{n}) < (\frac{11}{9})^3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < (\frac{11}{9})^3 - 1 \Rightarrow \frac{1}{n} < (\frac{11}{9}-1)(\frac{121}{81}+\frac{11}{9}+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{2\times 301}{9\times 81} \Rightarrow n > 1/21000 \Rightarrow n \geq 2$$

بنابراین از جملهٔ دوم به بعد جملات در این همسایگی‌اند.

(دیفرانسیل- دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۹

اگر n زوج باشد، $a_n = \frac{k+1}{3}$ می‌شود و می‌خواهیم دنبالهٔ $\{(\frac{k+1}{3})^n\}$ کران‌دار باشد. پس باید $-1 \leq \frac{k+1}{3} \leq 1$ و در نتیجه $-4 \leq k \leq 2$.

اگر n فرد باشد، $a_n = \frac{k-1}{3}$ می‌شود و می‌خواهیم دنبالهٔ $\{(\frac{k-1}{3})^n\}$ کران‌دار باشد. پس باید $-1 \leq \frac{k-1}{3} \leq 1$ و در نتیجه $-2 \leq k \leq 4$.

پس به ازای $-2 \leq k \leq 2$ دنبالهٔ $\{(a_n)^n\}$ کران‌دار خواهد بود. یعنی k می‌تواند ۵ مقدار صحیح ± 2، ± 1 و ۰ را داشته باشد.

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۰- (کیا مقدس نیاک)

$\cos n$ و $\tan^{-1} n$، هر دو مقادیری محدود دارند:

$$-1 < \cos n < 1 \,,\ \frac{\pi}{4} \le \tan^{-1} n < \frac{\pi}{2}$$

در نتیجه دنبالهٔ $\dfrac{\cos n}{n+\tan^{-1} n}$ را می‌توان به‌صورت $\dfrac{a}{n+b}$ مدل‌سازی کرد $(b>0)$. می‌دانیم این دنباله همواره کران‌دار است؛ بنابراین $\left[\dfrac{\cos n}{n+\tan^{-1} n}\right]$ نیز کران‌دار است. از طرفی برای همگرایی دنباله داریم:

$$-1 < \cos n < 1$$

$$\Rightarrow -1 < \frac{-1}{n+\tan^{-1} n} < \frac{\cos n}{n+\tan^{-1} n} < \frac{1}{n+\tan^{-1} n} < 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\cos n}{n+\tan^{-1} n}\right] = -1 \text{ یا } 0$$

این نشان می‌دهد که دنبالهٔ موردنظر واگراست.

(دیفرانسیل- دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۱- (فریدون ساعتی)

$$\left[|x-2|\right] \le 4 \Rightarrow |x-2| < 5 \Rightarrow -5 < x-2 < 5$$

$$\Rightarrow -3 < x < 7 \Rightarrow \begin{cases} [7,+\infty) = \text{مجموعهٔ کران‌های بالا} \\ (-\infty,-3] = \text{مجموعهٔ کران‌های پایین} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = [7,+\infty) \Rightarrow \inf(S) = 7$$

(دیفرانسیل- دنباله‌ها: صفحه‌های ۴۱ تا ۴۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۲-

راه حل اول: با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^{bn}=e^{ab}$ داریم:

$$(\frac{2n+1}{2n-5})^{3n-1}=(\frac{(2n-5)+6}{2n-5})^{\frac{3}{2}(2n-5)+\frac{13}{2}}$$

$$=(1+\frac{6}{2n-5})^{\frac{3}{2}(2n-5)}\times(1+\frac{6}{2n-5})^{\frac{13}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\frac{2n+1}{2n-5})^{3n-1}=e^{6\times\frac{3}{2}\times 1^{\frac{13}{2}}}=e^{9}\Rightarrow k=9$$

راه حل دوم:

اگر حاصل حد $\lim_{x\to\infty}(f(x))^{g(x)}$ حالت مبهم 1^{∞} شود، می‌توان برای محاسبهٔ حد، از هم‌ارزی $\lim_{x\to\infty}e^{g(x)(f(x)-1)}$ استفاده نمود.

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2n+1}{2n-5})^{3n-1}=1^{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}e^{(3n-1)(\frac{2n+1}{2n-5}-1)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{6(3n-1)}{2n-5}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{18n}{2n}}=e^{9}\Rightarrow k=9$$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۳- (امیرهوشنگ خمسه)

$$a_n = \cos n\pi = (-1)^n$$

$$b_n = 1,-1,1,-1,\ldots \Rightarrow b_n = -(-1)^n = -a_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n + b_n = 0 & \text{دنباله ثابت و همگراست.} \\ \frac{a_n}{b_n} = -1 & \text{دنباله ثابت و همگراست.} \\ a_n - b_n = 2a_n = 2(-1)^n & \text{دنباله نوسانی و واگراست.} \end{cases}$$

(دیفرانسیل- دنباله‌ها: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۴- (حبیب شفیعی)

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n + \sin n}{2n^2 + 3} \times \left(n\cos\frac{(-1)^n}{n} \right) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{2n^2} \left(n\cos\frac{(-1)^n}{n} \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} 2\cos\frac{(-1)^n}{n} = 2\cos 0 = 2$$

(دیفرانسیل- دنباله‌ها: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۴- (رضا عباسی‌اصل)

با توجه به معادلهٔ دایره، مختصات مرکز دایره عبارت است از:

$$O\left(-\frac{a+1}{2}, \frac{b-1}{2}\right)$$

چون دایره در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز دایـره روی خط $y=-x$ واقع است. در این‌صورت داریم:

$$\frac{b-1}{2}=-\left(-\frac{a+1}{2}\right) \Rightarrow b-1=a+1 \Rightarrow a-b=-2$$

(هندسه تحلیلی- مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

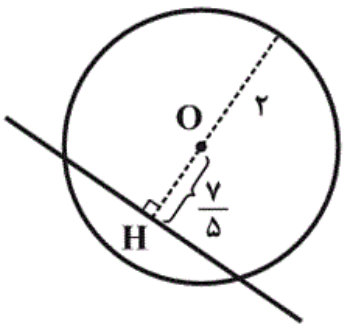
۱۱۵- (سروش موئینی)

$$x^2+y^2=4y \Rightarrow (x-0)^2+(y-2)^2=4$$

$$\Rightarrow O(0,2),\ R=2$$

فاصلهٔ مرکز دایره از خط برابر است با:

$$\xrightarrow[O(0,2)]{3x+4y=1} OH=\frac{|3\times 0+4\times 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{7}{5}=1/4$$



پس خط، دایره را قطع می‌کند و در نتیجه بیش‌ترین فاصله برابر است با:

$$OH+R=2+1/4=3/4$$

(هندسه تحلیلی- مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

خط و دایره مماس‌اند پس فاصله مرکز دایره تا خط، برابر شعاع دایره است.

شعاع دایره برابر با $\sqrt{m}$ و مرکز آن $(۰,۰)$ است. اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر d باشد، آنگاه:

$$d = R \Rightarrow \frac{|m|}{\sqrt{۲}} = \sqrt{m} \Rightarrow \frac{m^۲}{۲} = m \Rightarrow m^۲ - ۲m = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۰ & \text{غ.ق.ق} \\ m = ۲ \end{cases}$$

مرکز دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲$، نقطهٔ $O(۰,۰)$ و شعاع آن $R = \sqrt{۲}$ است و مرکز دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۰$، نقطهٔ $O'(۱,۰)$ و شعاع آن $R' = ۱$ است.

$$d = OO' = ۱ \,,\; R + R' = \sqrt{۲} + ۱ \,,\; |R - R'| = \sqrt{۲} - ۱$$

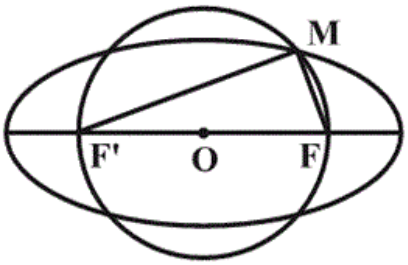
$$|R - R'| < d < R + R'$$

بنابراین دو دایره متقاطع‌اند.

(هندسه تحلیلی- مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



$$۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

چون M نقطه‌ای روی بیضی است پس $|MF| + |MF'| = ۲a$ و چون M روی دایره‌ای به قطر FF' قرار دارد، پس MF و MF' بر هم عمودند.

بنابراین:

$$|MF|^۲ + |MF'|^۲ = |FF'|^۲ = ۴c^۲$$

حال داریم:

$$\left(|MF| + |MF'|\right)^۲ = |MF|^۲ + |MF'|^۲ + ۲|MF||MF'|$$

$$\Rightarrow |MF||MF'| = \frac{۱}{۲}\left[\underbrace{\left(|MF| + |MF'|\right)^۲}_{۴a^۲} - \underbrace{\left(|MF|^۲ + |MF'|^۲\right)}_{۴c^۲}\right]$$

$$= ۲\left(a^۲ - c^۲\right) = ۲b^۲ = ۲ \times ۳^۲ = ۱۸$$

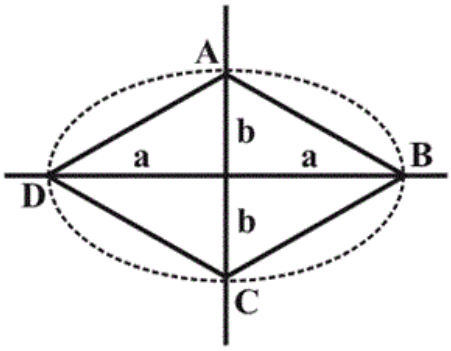
(هندسه تحلیلی- مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۸-

$$e=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{c}{a}\Rightarrow\begin{cases}c=۴k\\a=۵k\end{cases}$$



قطرهای چهارضلعی $ABCD$ برهم عمودند، پس داریم:

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AC.BD\Rightarrow ۱۲۰=\frac{۱}{۲}(۲b)(۲a)\Rightarrow ab=۶۰$$

$$\xrightarrow{a=۵k}(۵k)b=۶۰\Rightarrow b=\frac{۱۲}{k}$$

$$c^۲=a^۲-b^۲\Rightarrow(۴k)^۲=(۵k)^۲-\left(\frac{۱۲}{k}\right)^۲\Rightarrow\left(\frac{۱۲}{k}\right)^۲=(۳k)^۲$$

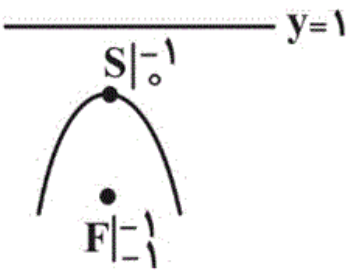
۴ ✓ ۳ ۲ ۱

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$y = mx^2 + 2mx + m \Rightarrow y = m(x+1)^2$$

در این سهمی قائم، مختصات رأس به‌صورت $S(-1,0)$ است؛ فاصلهٔ رأس از خط هادی برابر ۱ است و چون دهانهٔ سهمی رو به پایین باز می‌شود، پس پارامتر سهمی، عددی منفی بوده که برابر $a = -1$ می‌باشد.

کانون سهمی نقطه‌ای است که طول آن همان طول رأس سهمی است و عرض آن برابر عرض رأس سهمی به علاوهٔ a است، یعنی $(-1,-1)$.



(هندسه تحلیلی- مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۱۱

چون $\mathbf{v}$ بر هر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$ عمود است پس هم‌راستا با $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ است. به عبارت دیگر داریم:

$$\mathbf{v}=\mathbf{k}(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=\mathbf{k}(۱,۱,۱)\times(۱,۴,۲)=\mathbf{k}(-۲,-۱,۳),\mathbf{k}\neq ۰$$

چون $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{b}$ نیز عمود است پس حاصل‌ضرب داخلی آن در $\mathbf{b}$ برابر صفر است، یعنی داریم:

$$\mathbf{v}.\mathbf{b}=۰\Rightarrow \mathbf{k}(-۲,-۱,۳).(\mathbf{m},۳,۱)=۰\Rightarrow -۲\mathbf{k}\mathbf{m}=۰$$

$$\xrightarrow{\mathbf{k}\neq ۰}\mathbf{m}=۰$$

نتیجه: هرگاه بردار غیرصفری بر هر سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ عمود باشد، آنگاه $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌صفحه‌اند.

(هندسه تحلیلی- بردارها: صفحه‌های ۱۷ و ۲۵ تا ۳۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ستون‌های دوم و سوم را به ستون اول اضـافه و از $(1+x+y+z)$ در سـتون اول ماتریس حاصل، فاکتور می‌گیریم:

$$\begin{vmatrix} 1+x+y+z & y & z \\ 1+x+y+z & 1+y & z \\ 1+x+y+z & y & 1+z \end{vmatrix} = (1+x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & 1+y & z \\ 1 & y & 1+z \end{vmatrix}$$

حال، قرینهٔ سطر اول را به سطرهای دوم و سوم اضافه می‌کنیم. دترمینان یـک ماتریس بالا مثلثی به دست می‌آید:

$$= (1+x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+x+y+z$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} 1+x+y+z=3 \Rightarrow x+y+z=2$$

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۲- (سیرامیر ستوده)

نقطهٔ $H=(x,2x,0)$ را روی خط $z=0$ و $d: y=2x$ در نظر می‌گیریم.

در این‌صورت بردار $\overrightarrow{AH}$ بر بردار هادی خط d عمود است. داریم:

$$\overrightarrow{AH}=(x-3,2x-4,-5)$$

$$u=(1,2,0)$$

$$\overrightarrow{AH}.u=0 \Rightarrow x-3+4x-8=0 \Rightarrow x=\frac{11}{5}=2/2$$

پس $H=(2/2,4/4,0)$ است و در نتیجه مجموع مؤلفه‌های H برابر $2/2+4/4+0=6/6$ می‌باشد.

(هندسه تحلیلی- خط و صفحه: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۳- (مهدی حاجی‌نژادیان)

$$\begin{cases} x-y=3 \Rightarrow x=y+3 \\ x+3z=-1 \Rightarrow x=-3z-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{فصل‌مشترک}} x=y+3=\frac{3z+1}{-1}$$

اگر نقطهٔ $A=\left(t,t-3,\frac{-t-1}{3}\right)$ دارای فاصلهٔ برابر از صفحات xy و xz باشد، آنگاه داریم:

$$|y|=|z| \Rightarrow |t-3|=\left|\frac{-t-1}{3}\right|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t-3=\frac{-t-1}{3} \Rightarrow 3t-9=-t-1 \Rightarrow t=2 \Rightarrow A=(2,-1,-1) \\ t-3=\frac{-t-1}{-3} \Rightarrow -3t+9=-t-1 \Rightarrow t=5 \Rightarrow B=(5,2,-2) \end{cases}$$

(هندسه تحلیلی- خط و صفحه: صفحه‌های ۴۲ تا ۴۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۱ (سیدوحید ذوالفقاری)

مجموع درجات رئوس یک گراف، دو برابر اندازهٔ آن گراف است. اگر مجموع درجات رئوس گراف را به‌صورت مجموع درجات رئوس زوج و مجموع درجات رئوس فرد بنویسیم، آنگاه داریم:

$$۴۸ = ۳۲ + x \Rightarrow x = ۱۶$$

در نتیجه تنها حالت ممکن آن است که گراف ۱۶ رأس درجه یک داشته باشد. (عدد ۱۶ به هیچ عدد فرد دیگری بخش‌پذیر نیست.)

(ریاضیات گسسته- گراف: صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

کم‌ترین اندازهٔ گراف مربوط به حالتی است که گراف فقط یک رأس از درجهٔ $\Delta = ۵$ داشته و سایر رأس‌ها از درجهٔ $\delta = ۲$ باشند، اما چون تعداد رئوس فرد گراف، باید عددی زوج باشد، چنین گرافی لزوماً یک رأس از درجهٔ ۵، یک رأس از درجه ۳ و ۱۶ رأس از درجهٔ ۲ دارد. داریم:

$$۲q_{min} = ۵ + ۳ + ۱۶ \times ۲ = ۴۰ \Rightarrow q_{min} = ۲۰$$

بیش‌ترین اندازهٔ گراف مربوط به حالتی است که گراف فقط یک رأس از درجهٔ $\delta = ۲$ داشته و سایر رأس‌ها از درجهٔ $\Delta = ۵$ باشند که مانند حالت قبل چون تعداد رئوس فرد گراف باید عددی زوج باشد، چنین گرافی لزوماً یک رأس از درجهٔ ۲، یک رأس از درجه ۴ و ۱۶ رأس از درجهٔ ۵ دارد. داریم:

$$۲q_{max} = ۱۶ \times ۵ + ۴ + ۲ = ۸۶ \Rightarrow q_{max} = ۴۳$$

یعنی $۲۰ \le q \le ۴۳$ است، پس اندازهٔ گراف، ۲۴ مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد.

(ریاضیات گسسته- گراف؛ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

یک گراف از مرتبهٔ n دارای n مسیر به‌طول صفر است (از هر رأس به خودش، مسیری به طول صفر وجود دارد)، بنابراین داریم:

$$\text{تعداد کل مسیرها} = \left(n^۲ - n\right) + n = n^۲$$

(ریاضیات گسسته- گراف؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۴- (امیرحسین ابومحبوب)

عدد ۴۸ را می‌توان به صورت $۲^۴ \times ۳$ تجزیه نمود. با داشتن یک رأس از درجهٔ ۳ و ۴ رأس از درجهٔ ۲، تعداد رئوس درجهٔ یک، عبارت است از: (n تعداد رئوس درجهٔ یک است.)

$$\sum \deg v_i = ۲q = ۲(p-۱) \Rightarrow ۳ + ۴ \times ۲ + n = ۲(۵ + n - ۱)$$

$$\Rightarrow n = ۳$$

بنابراین درخت، دارای ۸ رأس و در نتیجه ۷ یال است.

در سایر حالت‌ها، تعداد یال‌ها، بیش‌تر از ۷ است.

(ریاضیات گسسته- گراف: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۵

$$۵\mid n+۳ \xrightarrow{\times n^۲} \begin{cases} ۵\mid n^۳+۳n^۲ \\ ۵\mid n^۳+۲n \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۵\mid ۳n^۲-۲n$$

$$۵\mid n+۳ \xrightarrow{\times ۳n} \begin{cases} ۵\mid ۳n^۲+۹n \\ ۵\mid ۳n^۲-۲n \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۵\mid ۱۱n$$

$$۵\mid n+۳ \xrightarrow{\times ۱۱} \begin{cases} ۵\mid ۱۱n+۳۳ \\ ۵\mid ۱۱n \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۵\mid ۳۳$$

رابطهٔ اخیر امکان‌پذیر نیست، بنابراین چنین مقداری برای n وجود ندارد.

(ریاضیات گسسته- نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۶

اگر a مقسوم و q خارج قسمت این تقسیم باشند، آنگاه داریم:

$$a = ۲۳q + ۱۷$$

اگر x واحد به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم‌علیه ثابت باشد، آنگاه برای آن‌که خارج قسمت تغییر نکند، لزوماً x واحد نیز به باقی‌مانده اضافه می‌شود. داریم:

$$a + x = ۲۳q + (۱۷ + x)$$

$$r < b \Rightarrow ۱۷ + x < ۲۳ \Rightarrow x < ۶ \Rightarrow \max(x) = ۵$$

(ریاضیات گسسته- نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۷

اگر $d=(۱۱n+۹,۵n+۴)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d\mid ۱۱n+۹ \xrightarrow{\times ۵} d\mid ۵۵n+۴۵ \\ d\mid ۵n+۴ \xrightarrow{\times ۱۱} d\mid ۵۵n+۴۴ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d\mid ۱ \Rightarrow d=۱$$

بنابراین به ازای هر مقدار طبیعی n، دو عدد $۱۱n+۹$ و $۵n+۴$ نسبت به هم اول هستند، یعنی به ازای تمامی ۹۰۰ عدد طبیعی سه‌رقمی، این دو عدد نسبت به‌هم اول‌اند.

(ریاضیات گسسته- نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

$$A=۲^{۵۰}\times ۳^{۱۰۰}\times ۶=\left(۲\times ۳^{۲}\right)^{۵۰}\times ۶=۱۸^{۵۰}\times ۶$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A بر عدد ۱۷ برابر است با:

$$A\overset{۱۷}{\equiv} ۱^{۵۰}\times ۶\overset{۱۷}{\equiv} ۶$$

(ریاضیات گسسته- نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۹

$$\overline{a۱۲۵۰}\overset{۱۱}{\equiv}\overline{۷a۱۲۵} \Rightarrow ۰-۵+۲-۱+a\overset{۱۱}{\equiv}۵-۲+۱-a+۷$$

$$\Rightarrow ۲a\overset{۱۱}{\equiv}۱۵\overset{۱۱}{\equiv}۴ \xrightarrow[(۲,۱۱)=۱]{\div ۲} a\overset{۱۱}{\equiv}۲ \Rightarrow a=۲$$

با جای‌گذاری $a=۲$ در عدد $\overline{a۹۲۳a}$ داریم:

$$۲۹۲۳۲\overset{۹}{\equiv}۲+۹+۲+۳+۲\overset{۹}{\equiv}۱۸\overset{۹}{\equiv}۰$$

(ریاضیات گسسته- نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۳۰ (هومن نورائی)

برای به دست آوردن تعداد اعدادی که حداقل یک رقم تکراری دارند باید تعداد کل اعداد را حساب کرد و سپس تعداد اعداد فاقد رقم تکراری را از آن کم کرد.

$$\left.\begin{array}{l}\text{تعداد کل اعداد} = \underline{۳}\times\underline{۴}\times\underline{۴}\times\underline{۴} = ۳\times ۴^{۳} = ۱۹۲\\ \text{تعداد اعداد فاقد رقم تکراری} = \underline{۳}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱} = ۱۸\end{array}\right\}$$

تعداد اعدادی که حداقل یک رقم تکراری دارند، برابر است با:

$$۱۹۲ - ۱۸ = ۱۷۴$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۱۷۶ تا ۱۸۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا