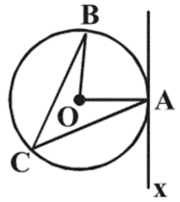
هندسه 2 ، دایره - 10 سوال -

۱۳۱- در شکل مقابل، $\widehat{CA}=\widehat{CB}$ و $\widehat{AOB}=۸۰^\circ$ است. زاویهٔ $\widehat{CAx}$ چند درجه است؟ (O مرکز دایره و Ax در نقطهٔ A بر دایره مماس است.)



۱) ۷۵　　۲) ۸۰
۳) ۶۵　　۴) ۷۰

۱۳۲- اگر طول مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۱، برابر $۴\sqrt{۳}$ باشد، بیش‌ترین فاصلهٔ بین نقاط این دو دایره کدام است؟

۱) ۶　　۲) $۸\sqrt{۲}$　　۳) $۱۲\sqrt{۳}$　　۴) ۱۲

۱۳۳- دو دایره به شعاع‌های $R=۱$ و $R'=۳$، مماس خارج هستند. زاویهٔ بین مماس مشترک خارجی این دو دایره با امتداد خط‌المرکزین، چند درجه است؟

۱) ۱۵　　۲) ۳۰　　۳) ۴۵　　۴) ۶۰

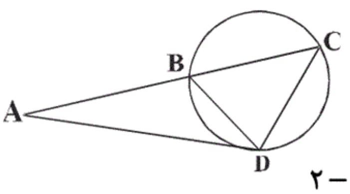
۱۳۴- در مثلث ABC، اگر $BC=۶$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$ باشد، آنگاه طول ضلع AC حداکثر چقدر است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$　　۲) $۴\sqrt{۲}$　　۳) $۳\sqrt{۳}$　　۴) $۶\sqrt{۲}$

۱۳۵- در یک دایره، اندازهٔ زاویهٔ حاده بین دو وتر متقاطع AB و CD، ۶۰° و اندازهٔ دو کمان از چهار کمان حاصل، ۸۰° و ۱۱۰° است. قدرمطلق تفاضل دو کمان دیگر چند درجه می‌تواند باشد؟

۱) ۱۲۰　　۲) ۶۰　　۳) ۹۰　　۴) ۳۰

۱۳۶- در شکل مقابل، AD در نقطهٔ D بر دایره مماس است. اگر B وسط پاره‌خط AC و $DC=\sqrt{۲}$ باشد آنگاه طول پاره‌خط BD کدام است؟

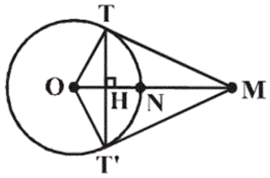


۱) $\frac{۶}{۵}$　　۲) ۱　　۳) $\frac{۳}{۴}$　　۴) $۲-\sqrt{۲}$

۱۳۷- یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع R محیط شده است. اگر محیط ذوزنقه ۴۰ و طول قاعدهٔ کوچک آن ۴ باشد، مساحت ذوزنقه کدام است؟

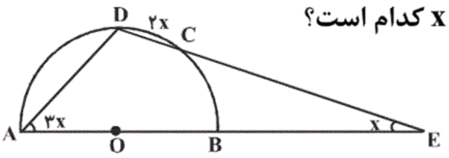
۱) ۶۰　　۲) ۸۰　　۳) ۴۰　　۴) ۹۰

۱۳۸- از نقطهٔ M دو مماس MT و MT' بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم شده‌اند. نقاط N و H به ترتیب نقاط برخورد OM با دایره و وتر TT' است. اگر H وسط پاره‌خط ON و $TH=\sqrt{6}$ باشد، آنگاه شعاع دایره چقدر است؟



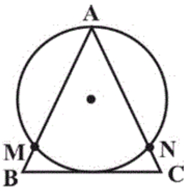
۱) ۳
۲) $2\sqrt{2}$
۳) $3\sqrt{2}$
۴) $2\sqrt{3}$

۱۳۹- در شکل زیر، AB قطر نیم‌دایره است. اگر $\widehat{DC}=2x$ ، $\hat{E}=x$ و $\hat{A}=3x$ باشد، اندازهٔ x کدام است؟



۱) 30°
۲) 20°
۳) 15°
۴) 10°

۱۴۰- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الساقین $(AB=AC)$ و ضلع BC به طول ۱۰ بر دایره مماس است. اگر طول ارتفاع وارد بر قاعدهٔ BC برابر ۱۰ و شعاع دایره برابر ۵ باشد، طول پاره‌خط MN کدام است؟



۱) ۸
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۱۰

دیفرانسیل و انتگرال ، مشتق تابع - 20 سوال

۸۱- اختلاف مشتق چپ و راست تابع $f(x)=x^2[x^2]|x-2|$ در نقطهٔ $x_0=2$ کدام است؟ ([ ] ، علامت جزء صحیح است.)

۱) ۳۲
۲) ۲۸
۳) ۴
۴) ۱۲

۸۲- اگر $f(x)=\log(2\sin x-\sqrt{4\sin^2 x-2})$ و $g(x)=\log(2\sin x+\sqrt{4\sin^2 x-2})$ باشد، حاصل $\dfrac{f'(\frac{\pi}{3})}{g'(\frac{\pi}{3})}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱-
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۲-

۸۳- اگر $f(x)=1-|x|$ باشد، تعداد نقاط <u>مشتق‌ناپذیر</u> تابع $y=f(f(x))$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۸۴- کدام خط بر منحنی تابع $y=\sin 2x$ مماس است؟

۱) $y-2x=\frac{\pi}{4}$
۲) $y-2x=\frac{\pi}{2}$
۳) $y+2x=\pi$
۴) $y+2x=\frac{3\pi}{4}$

۸۵- اگر $f(x)=[\cos ۲x]$ باشد، دامنهٔ $f'(x)$ کدام است؟([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) $\mathbb{R}-\{\frac{k\pi}{۲}\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۲k\pi, \frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{k\pi, k\pi\pm\frac{\pi}{۴}\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}\}$

۸۶- در نقطه‌ای با کدام طول روی نمودار $y=\frac{\cos x}{۲+\sin x}$، خط مماس بر منحنی تابع، موازی خطی است که دو نقطه از نمودار به طول‌های $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=-\frac{\pi}{۲}$ را به هم وصل می‌کند؟

۱) $-\frac{\pi}{۶}$ ۲) صفر ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}$

۸۷- اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x & ; \ x\geq ۰ \\ -۳x+[x] & ; \ x<۰ \end{cases}$ باشد، حاصل $A=\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۳+۲h)-f^۳(۳-h)}{h^۲-h}$ کدام است؟ ([]، علامت جزء صحیح است.)

۱) ۳۲۴ ۲) ۳۲۴− ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۰۸−

۸۸- مشتق ششم تابع $f(x)=\frac{۱}{۱۶}x^۴(۴x^۲+۴x+۱)(۲x-۱)^۲$ در $x=۰$ کدام است؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۳۶۰- ۴) ۷۲۰-

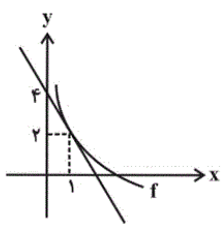
۸۹- اگر $f(x)=x\mathrm{Ln}x$ باشد، مشتق دهم f در نقطهٔ $x=۲$ کدام است؟

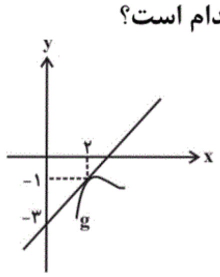
۱) $\frac{۱۰!}{۲^{۱۰}}$ ۲) $-\frac{۹!}{۲^۸}$ ۳) $-\frac{۸!}{۲^۹}$ ۴) $\frac{۸!}{۲^۹}$

۹۰- اگر f و g توابع مشتق‌پذیر، $f(\sqrt{x})=\sqrt{g(x)}$ و $f'(۱)=۲g'(۱)=۱$ باشند، $f(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۹۱- در شکل‌های مقابل، خط‌ها بر منحنی‌های دو تابع f و g مماس‌اند. حاصل $(gof)'(۱)$ کدام است؟





۱) ۴- ۲) ۲- ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۴

۹۲- اگر $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = -\frac{۱}{۳}$ باشد، مشتق $f(\sqrt{|x|+۳})$ در نقطهٔ $x=-۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۲}$

۹۳- مشتق دوم y نسبت به x در تساوی $۲x^۲ + ۳y^۲ = ۱$، چند برابر $\frac{۱}{y^۳}$ است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $-\frac{۲}{۹}$ ۳) ۶ ۴) ۶-

۹۴- در چه نقطه‌ای از منحنی $x+\sqrt{xy}+y-۱=۰$، خط مماس بر منحنی، بر خط $y=x-۳$ عمود است؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۱,۰)$ ۳) $(\frac{-۱}{۳},\frac{-۱}{۳})$ ۴) $(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$

۹۵- f تابعی معکوس‌پذیر، پیوسته و مشتق‌پذیر است و از نقطهٔ $A(۰,-۱)$ می‌گذرد. با فرض برقراری رابطهٔ زیر، $f'(۰)$ کدام است؟

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^{-۱}(h-۱)-f^{-۱}(-۱)}{۳h}=۱$$

۱) ۶ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) ۳

۹۶- زاویهٔ حادهٔ بین خطوط مماس بر توابع $f(x)=x^۳+x^۲+۳x+۲$ و $f^{-۱}(x)$ در نقطهٔ برخورد آن‌ها با یکدیگر، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\tan^{-۱}(\frac{۱۵}{۸})$ ۳) $\tan^{-۱}(\frac{۱۷}{۸})$ ۴) $\tan^{-۱}(\frac{۱۳}{۸})$

۹۷- شیب خط قائم بر وارون تابع $f(x)=\frac{Lnx}{x}$ در نقطه‌ای به طول e-واقع بر تابع وارون، کدام است؟ $(۰<x<e)$

۱) $۲e^۲$ ۲) $-۲e^۲$ ۳) $\frac{۱}{۲e^۲}$ ۴) $\frac{-۱}{۲e^۲}$

۹۸- اگر $f(x)=a.\cos(\sin^{-۱}(\frac{۱}{x}))$ و $f'(۲)=۱$ باشد، حاصل $f'(-۲)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

۹۹- مشتق تابع $f(x)=(e^x-۱)(e^{۲x}-۲)(e^{۳x}-۳)$ در نقطهٔ $x=۰$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۶- ۴) ۱۲

۱۰۰- معادلهٔ خط قائم بر منحنی $Ln(x-y)=xy+y^3$ در نقطهٔ $(1,0)$ کدام است؟

۱) $y=-2x+2$ ۲) $y=-2x$ ۳) $y=-\frac{1}{2}x+1$ ۴) $y=\frac{1}{2}x-1$

هندسه‌ي تحليلي ، ماتریس، دترمینان و دستگاه - 10 سوال -

۱۱۱- اگر $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ و $a_{ij}=\begin{cases}2 & : i=j\\ 1 & : i\neq j\end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های A^2-3A کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۶ ۴) ۱۸

۱۱۲- اگر $A=\begin{bmatrix}x & 1\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه معادلهٔ $A\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}A^t=0$ چند ریشهٔ متمایز دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۳- اگر ماتریس A متقارن و ماتریس B پادمتقارن باشد، در مورد ماتریس‌های $AB+BA$ و $AB-BA$ به‌ترتیب کدام گزینه صحیح است؟

۱) پادمتقارن - متقارن ۲) متقارن - پادمتقارن ۳) پادمتقارن - پادمتقارن ۴) متقارن - متقارن

۱۱۴- کدام مورد لزوماً برقرار نیست؟

۱) تفاضل دو ماتریس پادمتقارن، ماتریسی پادمتقارن است.
۲) حاصل‌ضرب دو ماتریس پادمتقارن، ماتریسی متقارن است.
۳) قرینهٔ یک ماتریس پادمتقارن، ماتریسی پادمتقارن است.
۴) مجموع یک ماتریس مربعی با ترانهادهٔ آن، ماتریسی متقارن است.

۱۱۵- اگر $A\times\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ و $A\times\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$، آنگاه تصویر نقطهٔ $(1,-1)$ تحت ماتریس A، در کدام ناحیهٔ دستگاه محورهای مختصات قرار می‌گیرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۱۶- مجموع درایه‌های هر سطر از ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times2}$ برابر ۵ است. مجموع تمام درایه‌های ماتریس A^2 کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۱۱۷- اگر F محیط و درون دایرهٔ $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ باشد، آنگاه ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ در اثر روی F، F را به کدام شکل تبدیل می‌کند؟

۱) بیضی افقی
۲) بیضی قائم
۳) هذلولی افقی
۴) هذلولی قائم

۱۱۸- اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های $A^{10}-A^{9}$ کدام است؟

۱) 3^{10}
۲) $3^{10}-3^{9}$
۳) $3^{11}-3^{10}$
۴) 3^{11}

۱۱۹- اگر ماتریس مربعی A در رابطهٔ $A-A^2-I=O$ صدق کند، حاصل $A^{16}+A^{15}$ کدام است؟

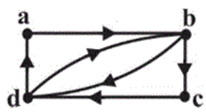
۱) $-I+A$
۲) $-I-A$
۳) $I-A$
۴) $I+A$

۱۲۰- فرض کنید $n\in\mathbb{N}$ و $A=\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & -\sin\frac{\pi}{n} \\ \sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n} \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{2n} همواره کدام است؟

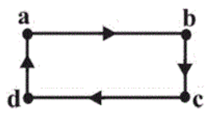
۱) A
۲) A^t
۳) $-A$
۴) I_2

ریاضیات گسسته ، ترکیبات - 10 سوال

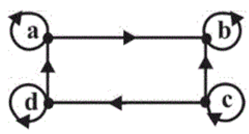
۱۲۱- کدام گراف مربوط به یک رابطهٔ پادمتقارن و ترایایی است؟



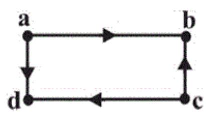
۱)



۲)



۳)



۴)

۱۲۲- روی مجموعهٔ $\{w,x,y,z\}$، چند رابطهٔ تقارنی و پادتقارنی می‌توان نوشت که بازتابی نباشد؟

۱) ۳۲
۲) ۱۶
۳) ۱۵
۴) ۳۱

۱۲۳- رابطهٔ R روی مجموعهٔ ۹ عضوی A، هم بازتابی و هم تقارنی است. کدام گزینه می‌تواند تعداد اعضای R باشد؟

۱) ۳۶
۲) ۷۵
۳) ۶۴
۴) ۹۹

۱۲۴- اگر $M(R)=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، R با حذف حداقل چند عضو، خاصیت ترایایی خواهد داشت؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۲۵- اگر ماتریس $M=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ b & a & ۰ \\ c & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، ماتریس متناظر با یک رابطهٔ پادتقارنی باشد، چه تعداد از متغیرهای a، b و c حتماً برابر ۱ هستند؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۱۲۶- اگر $M=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ماتریس متناظر با رابطهٔ R روی مجموعهٔ A باشد، چه تعداد از رابطه‌های تقارنی تعریف شده روی A، زیرمجموعهٔ R می‌باشند؟

۱) ۴
۲) ۸
۳) ۱۶
۴) ۳۲

۱۲۷- رابطهٔ R روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$، حداقل دارای چند عضو باشد تا بازتابی بوده ولی تقارنی، پادتقارنی و ترایایی نباشد؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

۱۲۸- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و B یک ماتریس صفر و یک هم مرتبه با A باشد به‌طوری که $A^{(۲)} \ll B \ll A \wedge A^T$، آنگاه چند ماتریس متفاوت برای B وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۴
۳) ۸
۴) هیچ

۱۲۹- روی مجموعهٔ $V=\{a,b,c,d\}$، چند رابطهٔ پادتقارنی می‌توان تعریف کرد که دارای ۱۰ عضو باشد؟

۱) $۲^۶$
۲) $۲^{۱۰}$
۳) $۲^۶ \times ۳^۴$
۴) $۲^۴ \times ۳^۶$

۱۳۰- اگر $M=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & b & ۱ \end{bmatrix}$ ماتریس متناظر با رابطهٔ R باشد، آنگاه حداکثر مقدار $a+b$ برای آن که $RoR \subseteq R$ باشد، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) به ازای هیچ مقدار a و b امکان‌پذیر نیست.

رياضي پايه ، تابع - 8 سوال

۱۰۱- اگر $g=\{(۱,۲),(۳,۱),(۵,۲)\}$، $f(x)=x^۲+۱$ و $f+g=\{(۱,a),(b,۱۱),(۵,۴c)\}$ باشد، مقدار $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۰۲- اگر $f=\{(۰,-۱),(۱,-۲),(a,-۱),(۴,۰)\}$، $g=\{(-۲,۴),(-۱,۱),(b,۱),(۷,-۳)\}$ و $D_{gof}=\{۰,۵,۱,۴\}$ باشد، حاصل $b-۲a$ کدام است؟

۱) ۱۰
۲) -۱۰
۳) ۸
۴) -۸

۱۰۳- اگر f تابعی خطی و $(fof)(x)=۱۶x+۵$ باشد، $f(۱)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{۵}{۳}$
۲) -۳
۳) ۴
۴) $-\frac{۱۷}{۳}$

۱۰۴- اگر $f(x)=\sqrt{x-3}$ و $g(x)=x^2+1$ باشد، برد تابع $y=(gof)(x)$ کدام است؟

۱) $[3,+\infty)$ ۲) $[2,+\infty)$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۰۵- اگر $f=\{(-1,4),(2,3),(-1,4m),(m+1,n-1),(5,6),(p,n+2)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، حاصل $m+n+p$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۰۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2} & ;x\geq 7\\ \frac{x}{3}+a & ;x<6\end{cases}$ یک‌به‌یک است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۷- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{ax^3+b}$، نمودار وارون خود را در نقطهٔ $(0,2)$ قطع می‌کند. مقدار ab کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -4 ۴) -8

۱۰۸- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}2x & ;x\geq 1\\ x+1 & ;x<1\end{cases}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & ;x\geq 2\\ x-1 & ;x<2\end{cases}$

۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & ;x\geq 1\\ x-1 & ;x<1\end{cases}$

۳) $f^{-1}(x)=\begin{cases}x+1 & ;x\geq 1\\ 2x & ;x<1\end{cases}$

۴) $f^{-1}(x)=\begin{cases}x-1 & ;x\geq 1\\ \frac{x}{2} & ;x<1\end{cases}$

رياضي پايه ، مثلثات - 2 سوال

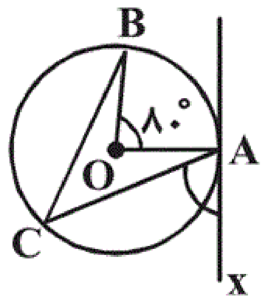
۱۰۹- حاصل $\sin^2(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{5})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{1}{10}$

۱۱۰- برد تابع $y=\cos^{-1}(-\sqrt{x})$ کدام است؟

۱) $[0,\pi)$ ۲) $[0,\frac{\pi}{2}]$ ۳) $[-\frac{\pi}{2},0]$ ۴) $[\frac{\pi}{2},\pi]$

۱۳۱- (مهرداد ملوندی)



با توجه به مفروضات سؤال داریم:

$$\widehat{AOB} = ۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = ۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = ۳۶۰^\circ - \widehat{AB} = ۲۸۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\widehat{BC}=\widehat{AC}} \widehat{AC} = \frac{\widehat{ACB}}{۲} = ۱۴۰^\circ$$

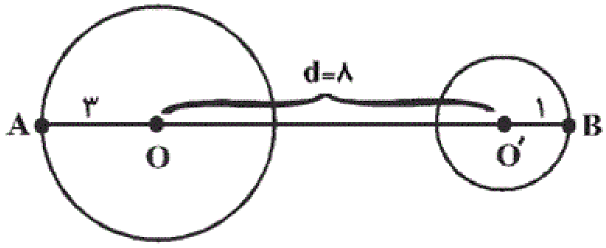
زاویهٔ ظلی $\widehat{CAx}$ برابر است با: $\widehat{CAx} = \frac{\widehat{AC}}{۲} = \frac{۱۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۴۷، ۶۰ و ۶۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

طول مماس مشترک داخلی: $L=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲}$

$\Rightarrow ۴\sqrt{۳}=\sqrt{d^۲-(۳+۱)^۲}\Rightarrow d=۸$

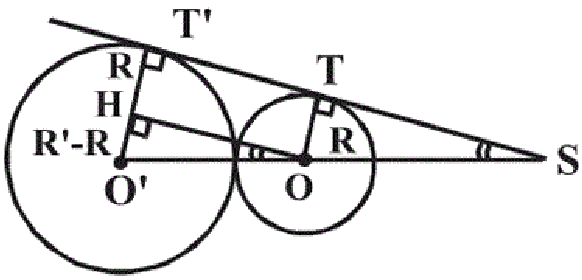


اگر مطابق شکل، نقاط تقاطع امتداد خط‌المرکزین با دایره‌های مذکور را A و B بنامیم، آنگاه بیش‌ترین فاصلهٔ بین نقاط این دو دایره برابر است با:

$AB=AO+OO'+O'B=۳+۸+۱=۱۲$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓



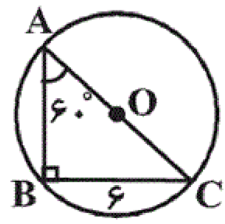
TT' (مماس مشترک خارجی این دو دایره) را رسم می‌کنیم، اگر از نقطهٔ O، عمودی بر پاره‌خط $O'T'$ رسم کنیم، داریم:

$$\begin{cases} ST' \parallel OH \\ O'S \text{ مورب} \end{cases} \Rightarrow H\hat{O}O' = T\hat{S}O$$

۱ ۲✓ ۳ ۴

(مهرداد ملوندی)

مکـــان هندســـی رأس A ، کمـــان درخـــور زاویـــهٔ 60° روبـــه‌رو بـــه پاره‌خط $BC = 6$ است.



با توجه به شکل، حداکثر طول ضلع AC زمانی به دست می‌آید که AC قطر دایره باشد که در آن صورت $\hat{B} = 90^\circ$ و داریم:

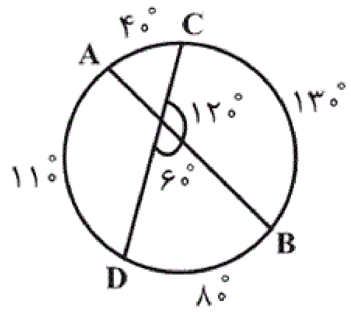
$$\sin 60^\circ = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{AC} \Rightarrow AC = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶)

✓ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐

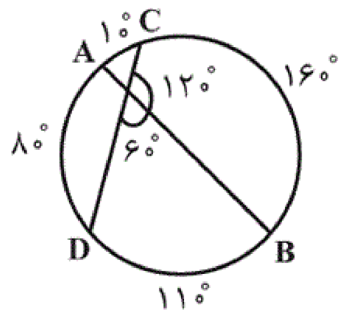
کمان‌های °۸۰ و °۱۱۰ حتماً مجاور هستند، چون در غیر این صورت زاویهٔ حادهٔ بین دو وتر °۶۰ نخواهد شد (چرا؟). در نتیجه یکی از دو حالت زیر پدید می‌آید:

الف)



$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۸۰^\circ + \widehat{AC}}{۲} = ۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = ۴۰^\circ \\ \dfrac{۱۱۰^\circ + \widehat{BC}}{۲} = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = ۱۳۰^\circ \end{cases} \Rightarrow |۱۳۰^\circ - ۴۰^\circ| = ۹۰^\circ$$

ب)



۱ ۲ ۳✓ ۴

دو مثلث ABD و ADC به حالت تساوی زاویه‌ها ($\hat{A}$ مشترک

و $\hat{C} = \hat{ADB} = \frac{\widehat{BD}}{۲}$) با هم متشابه‌اند. اگر $AB = BC = x$ و $AD = y$

فرض شود، داریم:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{y}{۲x} = \frac{x}{y} = \frac{BD}{\sqrt{۲}} \Rightarrow y^۲ = ۲x^۲$$

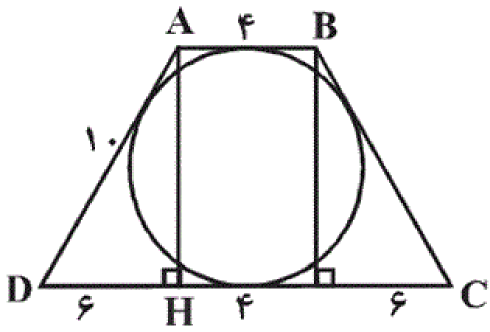
$$\Rightarrow \frac{x^۲}{y^۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{BD}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{BD}{\sqrt{۲}} \Rightarrow BD = ۱$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۵۶ تا ۶۱)

۱   ۲✓   ۳   ۴

(محسن رجبی)



در ذوزنقهٔ محیطی ABCD داریم: $AD + BC = AB + CD$

محیط ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD ، برابر ۴۰ واحد است، پس:

$$AD + BC = ۲۰ \Rightarrow AD = BC = ۱۰$$

$$\underbrace{AB}_{۴} + CD = ۲۰ \Rightarrow CD = ۱۶$$

$$AH = \sqrt{AD^۲ - DH^۲} = \sqrt{۱۰۰ - ۳۶} = ۸$$

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \times AH}{۲} = ۸۰$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۵۲، ۵۳ و ۵۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(مهرداد ملوندی)

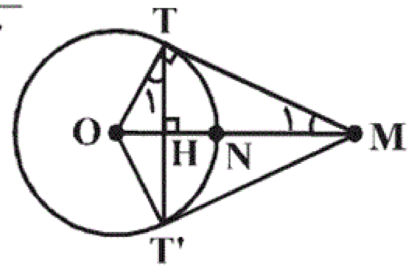
در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTM داریم:

$$OT^2 = OH.OM \xrightarrow[OT=R]{OH=\frac{R}{2}} R^2 = \frac{R}{2}.OM \Rightarrow OM = 2R$$

$$\Rightarrow HM = OM - OH = 2R - \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

$$TH^2 = OH.HM \Rightarrow (\sqrt{6})^2 = \frac{R}{2} \times \frac{3R}{2}$$

$$\Rightarrow R^2 = 8 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$



(هندسه ۲- دایره: مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۵۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(داریوش ناظمی)

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E} = \dfrac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC} = 2x \\ \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{BC} = 6x \xrightarrow{\overset{\frown}{DC}=2x} \overset{\frown}{BC} = 4x\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AD} = 6x$$

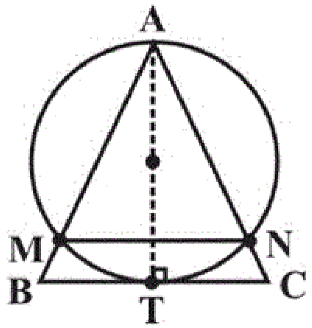
از طرفی: $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{BC} = 180^\circ \Rightarrow 12x = 180^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۶۸ تا ۷۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

طول ارتفاع وارد بر ضلع BC برابر قطر دایره است. بنابراین از مرکز دایره عبور می‌کند. ارتفاع نظیر قاعدهٔ BC، بر ضلع BC عمود است، پس لزوماً از نقطهٔ تماس BC و دایره عبور می‌کند.

از طرفی ارتفاع نظیر قاعده در هر مثلث متساوی‌الساقین، میانهٔ نظیر آن قاعده است، پس داریم:



$$BT = \frac{BC}{۲} = ۵$$

$$AB^۲ = AT^۲ + BT^۲ = ۱۰۰ + ۲۵ = ۱۲۵ \Rightarrow AB = ۵\sqrt{۵}$$

طبق روابط طولی در دایره داریم: $BT^۲ = BM.BA \Rightarrow ۲۵ = BM \times ۵\sqrt{۵}$

$$\Rightarrow BM = \sqrt{۵} \Rightarrow AM = ۴\sqrt{۵}$$

$$\Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{MN}{۱۰} = \frac{۴\sqrt{۵}}{۵\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow MN = ۸$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۷۴ تا ۷۸)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

-۸۱ (امیرهوشنگ خمسه)

تابع در $x = ۲$ پیوسته است.

$$f(۲) = ۰ \quad , \quad \lim_{x \to ۲} f(x) = ۰$$

$$x \to ۲^+ : f(x) = x^۲[۴^+](x-۲) = ۴x^۲(x-۲)$$

$$\Rightarrow f'_+(۲) = (x-۲)' \times ۴x^۲ = ۴x^۲ \underline{\underline{x=۲}}\, ۴(۲)^۲ = ۱۶$$

$$x \to ۲^- : f(x) = x^۲[۴^-](-(x-۲)) = -۳x^۲(x-۲)$$

$$\Rightarrow f'_-(۲) = (x-۲)' \times (-۳x^۲) = -۳x^۲ \underline{\underline{x=۲}} -۳(۲)^۲ = -۱۲$$

$$\Rightarrow |f'_+(۲) - f'_-(۲)| = |۱۶ - (-۱۲)| = ۲۸$$

تذکر: در مشتق‌گیری، فقط از عامل صفرشونده مشتق گرفته‌ایم.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحهٔ ۱۴۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۸۲ (حبیب شفیعی)

مجموع دو تابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) + g(x)$$
$$= \log(۲\sin x - \sqrt{۴\sin^۲ x - ۲}) + \log(۲\sin x + \sqrt{۴\sin^۲ x - ۲})$$

$$= \log(۴\sin^۲ x - ۴\sin^۲ x + ۲) = \log ۲$$
$$\Rightarrow f'(x) + g'(x) = ۰$$

یعنی به ازای هر x عضو مجموعهٔ اشتراک دامنه‌های f و g، $f'(x) = -g'(x)$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = -۱ \Rightarrow \frac{f'(\frac{\pi}{۳})}{g'(\frac{\pi}{۳})} = -۱$$

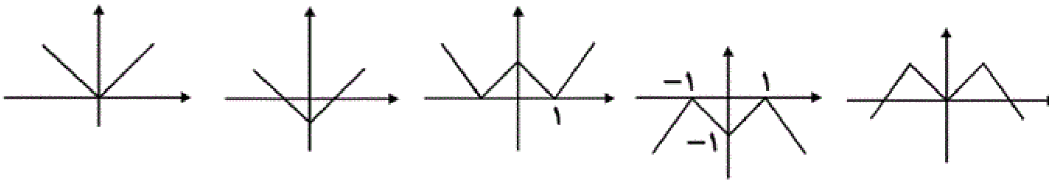
(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۸ و ۱۳۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۸۳ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۸)

$$f(f(x)) = 1 - |1 - |x|| = 1 - ||x| - 1|$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم. داریم:



$y = |x|$ $\quad$ $y = |x| - 1$ $\quad$ $y = ||x| - 1|$ $\quad$ $y = -||x| - 1|$ $\quad$ $y = 1 - ||x| - 1|$

بنابراین تابع در سه نقطه مشتق‌ناپذیر است.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۴)

۱ $\quad$ ۲ $\quad$ ۳✓ $\quad$ ۴

-۸۴ (عنایت‌اله کشاورزی)

همهٔ گزینه‌ها به صورت $y = m \pm 2x$ است. در نقطهٔ تماس، مشتق خط و منحنی باید برابر باشند.

$$\begin{cases} y = m \pm 2x \Rightarrow y' = \pm 2 \\ y = \sin 2x \Rightarrow y' = 2\cos 2x \end{cases} \Rightarrow 2\cos 2x = \pm 2$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \pm 1 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

در این نقاط باید مقدار دو تابع نیز برابر باشد.

$$\begin{cases} y = m \pm 2(\frac{k\pi}{2}) \\ y = \sin 2(\frac{k\pi}{2}) \end{cases} \Rightarrow m \pm k\pi = 0$$

$$\Rightarrow m = \mp k\pi \Rightarrow m \in \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots\}$$

با توجه به گزینه‌ها، خط مماس مورد نظر $y + 2x = \pi$ است.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۴۰ و ۱۴۱)

۱ $\quad$ ۲ $\quad$ ۳✓ $\quad$ ۴

-۸۵ (حمید علیزاده)

اگر g پیوسته باشد، تابع $y=[g(x)]$ در نقاطی که g صحیح شود و مینیمم نسبی نداشته باشد، ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

$$\cos ۲x = ۱ \Rightarrow x = k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} = k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow D_{f'} = \mathbb{R} - \{k\pi, k\pi \pm \frac{\pi}{۴})$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۴۰، ۱۴۱ و ۱۴۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۸۶ (امیرهوشنگ خمسه)

$$x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow y(\frac{\pi}{۲}) = ۰ \Rightarrow A(\frac{\pi}{۲}, ۰)$$

$$x = -\frac{\pi}{۲} \Rightarrow y(-\frac{\pi}{۲}) = ۰ \Rightarrow B(-\frac{\pi}{۲}, ۰)$$

$$\Rightarrow m_{AB} = \frac{۰-۰}{-\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲}} = ۰$$

چون مماس و خط قاطع موازی‌اند، پس شیب آن‌ها برابر است. لذا مشتق در نقطهٔ مورد نظر باید صفر باشد.

$$f'(x) = \frac{-\sin x(۲+\sin x) - \cos x(\cos x)}{(۲+\sin x)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow -۲\sin x - \sin^۲ x - \cos^۲ x = ۰$$

$$\Rightarrow -۲\sin x - (\sin^۲ x + \cos^۲ x) = ۰$$

$$\Rightarrow -۲\sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow \sin x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{۶}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۴۰ و ۱۴۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

-۸۷ (کیا مقدس‌نیاک)

$$A=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(3+2h)-f(3-h)}{h}\right.$$

$$\left.\times\frac{f^2(3+2h)+f(3+2h)f(3-h)+f^2(3-h)}{h-1}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(3+2h)-f(3-h)}{h}\right)\times\left(\frac{f^2(3)+f^2(3)+f^2(3)}{-1}\right)$$

$$=\left[2\lim_{h\to 0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\right]\times(-3f^2(3))$$

$$=3f'(3)(-3f^2(3))$$

$$;f(3)=(3)^2-2(3)=3$$

$$x>0: f'(x)=2x-2\Rightarrow f'(3)=2(3)-2=4$$

$$3f'(3)(-3f^2(3))=3(4)(-3(3)^2)=-324$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: مشابه تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۴۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۸۸ (محمدطاهر شعاعی)

$$f(x)=\frac{1}{16}x^4(4x^2+4x+1)(2x-1)^2=\frac{1}{16}x^4(2x+1)^2(2x-1)^2$$

$$=\frac{1}{16}x^4(4x^2-1)^2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{16}(4x^4-x^2)^2=x^8-\frac{x^6}{2}+\frac{x^4}{16}$$

$$\Rightarrow f^{(6)}(0)=0-\frac{6!}{2}+0\Rightarrow f^{(6)}(0)=-6\times5\times4\times3=-360$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۴۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۸۹ (کاظم اجلالی)

ابتدا چند بار از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = xLnx$$

$$f'(x) = Lnx + 1 \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f^{(4)} = \frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow f^{(5)}(x) = \frac{-6}{x^4}$$

به همین ترتیب می‌توان گفت:

$$f^{(10)}(x) = \frac{(10-2)!}{x^{(10-1)}} \Rightarrow f^{(10)}(x) = \frac{8!}{x^9}$$

در $x = 2$ داریم:

$$f^{(10)}(2) = \frac{8!}{2^9}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۴۵ و ۱۴۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۹۰ (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

با مشتق‌گیری از طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$f(\sqrt{x}) = \sqrt{g(x)} \xrightarrow{\text{توان } 2} (f(\sqrt{x}))^2 = g(x)$$

$$\Rightarrow 2f(\sqrt{x})f'(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = g'(x)$$

اما تساوی فوق به ازای $x = 1$ به‌صورت زیر است:

$$2f(1)f'(1) \times \frac{1}{2} = g'(1) \Rightarrow f(1)f'(1) = g'(1) \Rightarrow f(1) = \frac{g'(1)}{f'(1)}$$

طبق معلومات مساله، داریم: $g'(1) = \frac{1}{2}$ و $f'(1) = 1$، پس $f(1) = \frac{1}{2}$.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۹۱ (محمدطاهر شعاعی)

با توجه به نمودارهای داده‌شده در صورت سؤال داریم:

$$f(۱)=۲, f'(۱)=\frac{۴-۲}{۰-۱}=-۲, g'(۲)=\frac{-۳+۱}{۰-۲}=۱$$

$$\Rightarrow (gof)'(۱)=f'(۱)g'(f(۱))=-۲\times g'(۲)=-۲\times ۱=-۲$$

(حسابان - مشتق توابع: صفحهٔ ۱۸۸)

۱ | ۲ ✓ | ۳ | ۴

-۹۲ (سراسری ریاضی - ۸۷)

با توجه به فرض، $f'(۲)=-\frac{۱}{۳}$ است و در نظر می‌گیریم:

$.g(x)=f(\sqrt{|x|+۳})$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{\frac{x}{|x|}}{۲\sqrt{|x|+۳}}.f'(\sqrt{|x|+۳}), (x\neq ۰)$$

$$\Rightarrow g'(-۱)=\frac{\frac{-۱}{|-۱|}}{۲\sqrt{|-۱|+۳}}f'(\sqrt{|-۱|+۳})=\frac{-۱}{۴}f'(۲)$$

$$=\frac{-۱}{۴}\times\frac{-۱}{۳}=\frac{۱}{۱۲}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۴)

۱ | ۲ ✓ | ۳ | ۴

-۹۳ (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

$$۲x^۲+۳y^۲=۱ \Rightarrow ۴x+۶yy'_x=۰ \Rightarrow y'_x=-\frac{۲x}{۳y}$$

$$\Rightarrow y''=-\frac{۶y-۶xy'}{۹y^۲}=-\frac{۶(y-xy')}{۹y^۲}=-\frac{۲(y-x(-\frac{۲x}{۳y}))}{۳y^۲}$$

$$=-\frac{۲(۳y^۲+۲x^۲)}{۹y^۳}=-\frac{۲(۱)}{۹y^۳}=-\frac{۲}{۹}\times\frac{۱}{y^۳}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۹۴ (حمید علیزاده)

چون خط مماس بر منحنی بر خط $y=x-۳$ عمود است پس شیب آن عکس و قرینهٔ شیب خط $y=x-۳$ است، یعنی ۱- است.

$$f(x,y)=x+\sqrt{xy}+y-۱$$

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۱+\frac{y}{۲\sqrt{xy}}}{\frac{x}{۲\sqrt{xy}}+۱}=-۱$$

$$\Rightarrow ۱+\frac{y}{۲\sqrt{xy}}=\frac{x}{۲\sqrt{xy}}+۱ \xrightarrow{\text{باید } x \text{ و } y \text{ هم علامت باشند}} y=x$$

چون نقطه واقع بر منحنی است، پس رابطهٔ به دست آمده از مشتق باید در معادلهٔ اصلی صدق کند. پس:

$$x+\sqrt{xy}+y-۱=۰ \xrightarrow{y=x} x+|x|+x-۱=۰$$

$$\begin{cases} x\geq ۰ \Rightarrow ۳x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳} \Rightarrow y=\frac{۱}{۳} \\ x<۰ \Rightarrow x-x+x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۹۵ (علیرضا یگانه)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(h-1)-f^{-1}(-1)}{3h}=1\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(h-1)-f^{-1}(-1)}{h}=3$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(-1)=3\xrightarrow{(0,-1)\in f}\frac{1}{f'(0)}=(f^{-1})'(-1)\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{3}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۷ و ۱۵۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۹۶ (محمدمصطفی ابراهیمی)

می‌دانیم هر تابع صعودی اکید، تابع معکوس خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند، چون f صعودی اکید است، بنابراین برای یافتن نقطهٔ تقاطع $f(x)$ و $f^{-1}(x)$، کافیست معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم. داریم:

$$x^3+x^2+3x+2=x\Rightarrow x^3+x^2+2x+2=0$$

$$\Rightarrow x^2(x+1)+2(x+1)=0\Rightarrow (x+1)(x^2+2)=0$$

$$\Rightarrow x=-1\Rightarrow y=-1$$

برای یافتن شیب خطوط مماس کافیست $f'(-1)$ و $(f^{-1})'(-1)$ را حساب کنیم، داریم:

$$f'(x)=3x^2+2x+3\Rightarrow f'(-1)=4$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(-1)=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{4}$$

$$\text{زاویهٔ بین خطوط مماس}=\tan^{-1}\left(\left|\frac{4-\frac{1}{4}}{1+4\times\frac{1}{4}}\right|\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{15}{4}}{2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{15}{8}\right)$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۷ و ۱۵۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۹۷ (حمید علیزاده)

نقطه‌ای به طول $e-$ واقع بر نمودار f^{-1} برابر است با نقطه‌ای به عرض $e-$ واقع بر f. پس داریم:

$$-e=\frac{Lnx}{x}\Rightarrow Lnx=-ex\Rightarrow x=\frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow(\frac{1}{e},-e)\in f\Rightarrow(-e,\frac{1}{e})\in f^{-1}$$

$$m_{\text{قائم}}=\frac{-1}{m_{\text{مماس}}}=\frac{-1}{(f^{-1})'(-e)}=\frac{-1}{\frac{1}{f'(\frac{1}{e})}}=-f'(\frac{1}{e})=-2e^2$$

توجه:

$$f(x)=\frac{Lnx}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1-Lnx}{x^2}\Rightarrow f'(\frac{1}{e})=2e^2$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۷ تا ۱۶۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۹۸ (حمیدرضا کلاته‌جاری)

تابع $f(x)$ تابعی زوج است و از آنجایی که مشتق تابع زوج، تابعی فرد است و بالعکس، داریم:

$$f'(-x)=-f'(x)\Rightarrow f'(-2)=-1$$

(حسابان- مشتق توابع: صفحه‌های ۱۷۰ تا ۱۷۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۹- (کیا مقدسی نیاک)

عامل صفرشونده در تابع f به ازای $x=0$، $(e^{x}-1)$ است، پس کافی است برای تعیین $f'(0)$ فقط از این عامل مشتق بگیریم و در بقیهٔ عامل‌ها ضرب کنیم.

$$x=0: f'(x)=e^{x}(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)$$

$$\Rightarrow f'(0)=e^{0}(e^{0}-2)(e^{0}-3)=1\times(-1)\times(-2)=2$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۰- (جمال‌الدین حسینی)

$$f(x,y)=\operatorname{Ln}(x-y)-xy-y^{3}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\frac{1}{x-y}-y}{\frac{-1}{x-y}-x-3y^{2}}$$

شیب خط مماس: $m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)}=-\frac{1}{-1-1}=\frac{1}{2}$

شیب خط قائم: $m'=\frac{-1}{m}=-2$

معادلهٔ خط قائم: $y-0=-2(x-1)\Rightarrow y=-2x+2$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

-۱۱۱ (اسحاق اسفندیار)

$$A^{۲}-۳A=A(A-۳I)=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & -۱\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۰ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۰ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۰\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۲}-۳A$ برابر ۱۲ است.

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۵)

۱ ✓   ۲   ۳   ۴

-۱۱۲ (محمدجواد نوری)

$$\begin{bmatrix}x & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x-۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow x(x-۲)+۱=۰\Rightarrow x^{۲}-۲x+۱=۰$$

$$\Rightarrow(x-۱)^{۲}=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین معادله تنها یک ریشه دارد.

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۶)

۱   ۲ ✓   ۳   ۴

$$(AB+BA)^t=(AB)^t+(BA)^t=B^tA^t+A^tB^t$$

$$(-B)A+A(-B)=-(AB+BA)$$

$$(AB-BA)^t=(AB)^t-(BA)^t=B^tA^t-A^tB^t$$

$$(-B)A-(A)(-B)=-BA+AB=AB-BA$$

پس ماتریس $AB+BA$ ، پادمتقارن و ماتریس $AB-BA$ ، متقارن است.

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

✓۱ ۲ ۳ ۴

فرض کنیم A و B دو ماتریس پادمتقارن باشند، یعنی:

$$A^t = -A\ ,\ B^t = -B$$

در این‌صورت داریم:

$$(AB)^t = B^t A^t = (-B)(-A) = BA \neq AB$$

همان‌طور که می‌دانیم برای دو ماتریس مربعی A و B، $AB = BA$ لزوماً برقرار نمی‌باشد.

سایر گزینه‌ها با توجه به تعریف ماتریس‌های متقارن و پادمتقارن صحیح هستند.

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

۱   ✓۲   ۳   ۴

ماتریس A ، ماتریس مربعی از مرتبه ۲ است. با فرض $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳a+۲c \\ ۳b+۲d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۳a+۲c=۰ \\ ۳b+۲d=۱ \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ b=-۱ \end{cases}$$

با جای‌گذاری در (*)، $c=۳$ ، $d=۲$ و $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ به‌دست می‌آیند

و داریم:

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۵ \\ -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow$$ نقطه در ناحیهٔ سوم قرار دارد.

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲، ۱۰۷ و ۱۰۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد. بنا به فرض مسئله، $a+b=5$ و

$c+d=5$ است. داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

A^2 مجموع درایه‌های سطر اول $= a^2+bc+ab+bd$

$$=\left(a^2+ab\right)+\left(bc+bd\right)=a\underbrace{\left(a+b\right)}_{5}+b\underbrace{\left(c+d\right)}_{5}$$

$$=5\underbrace{\left(a+b\right)}_{5}=25$$

A^2 مجموع درایه‌های سطر دوم $=\left(ac+bc\right)+\left(dc+d^2\right)$

$$=c\underbrace{\left(a+b\right)}_{5}+d\underbrace{\left(c+d\right)}_{5}=5\underbrace{\left(c+d\right)}_{5}=25$$

A^2 مجموع تمام درایه‌های $= 25+25=50$

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} ۳x=x'\Rightarrow x=\dfrac{x'}{۳} \\ ۲y=y'\Rightarrow y=\dfrac{y'}{۲} \end{cases}$$

$$\left(\frac{۱}{۳}x'-۲\right)^۲+\left(\frac{۱}{۲}y'+۱\right)^۲=۹$$

$$\frac{۱}{۹}(x'-۶)^۲+\frac{۱}{۴}(y'+۲)^۲=۹$$

$$\frac{(x'-۶)^۲}{۸۱}+\frac{(y'+۲)^۲}{۳۶}=۱$$

بنابراین شکل حاصل یک بیضی افقی است.

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۷ و ۱۰۸)

✓[۱] [۲] [۳] [۴]

(رضا عباسی اصل)

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۲&۲&۲\\۱&۱&۱\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۲&۲\\۱&۱&۱\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶&۶&۶\\۳&۳&۳\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=۳^{۱}A$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=(۳A)(A)=۳A^{۲}=۳(۳A)=۳^{۲}A$$

و بـــه‌همـــین ترتیـــب $A^{۴}=۳^{۳}A$ ، $A^{۵}=۳^{۴}A$ و ... $A^{۹}=۳^{۸}A$ و $A^{۱۰}=۳^{۹}A$ است.

حال با توجه به اینکه مجموع درایه‌های A برابر ۹ است، داریم:

$A^{۱۰}$ مجموع درایه‌های $=۳^{۹}\times ۹=۳^{۱۱}$

$A^{۹}$ مجموع درایه‌های $=۳^{۸}\times ۹=۳^{۱۰}$

$\Rightarrow A^{۱۰}-A^{۹}$ مجموع درایه‌های $=۳^{۱۱}-۳^{۱۰}$

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۱۹ (حامد یحیی‌اوغلی)

$$A - A^{۲} - I = O \Rightarrow A^{۲} - A + I = O$$

$$\Rightarrow (A+I)\left(A^{۲} - A + I\right) = (A+I) \times O$$

$$\Rightarrow A^{۳} + I^{۳} = O \Rightarrow A^{۳} = -I \xrightarrow{\text{به توان ۵}} A^{۱۵} = -I$$

$$\xrightarrow{\times A} A^{۱۶} = -A$$

بنابراین داریم:

$$A^{۱۶} + A^{۱۵} = -A - I$$

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۵)

۱	۲ ✓	۳	۴

-۱۲۰ (حامد یحیی‌اوغلی)

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۲n} = \begin{bmatrix} \cos(۲n\alpha) & -\sin(۲n\alpha) \\ \sin(۲n\alpha) & \cos(۲n\alpha) \end{bmatrix}$$

حال اگر در رابطهٔ اخیر $\alpha = \frac{\pi}{n}$ قرار داده شود، داریم:

$$A^{۲n} = \begin{bmatrix} \cos(۲\pi) & -\sin(۲\pi) \\ \sin(۲\pi) & \cos(۲\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I_{۲}$$

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲)

۱	۲	۳	۴ ✓

-۱۲۱ (هنریک سرکیسیان)

گراف متناظر با یک رابطهٔ پادمتقارن نباید دارای یال دو طرفه باشد، پس

رابطهٔ گزینهٔ «۱» پادمتقارن نیست.

رابطهٔ گزینهٔ «۲» ترایایی نیست، زیرا: bRc و aRb ولی $a \not{R} c$

رابطهٔ گزینهٔ «۳» ترایایی نیست، زیرا: aRb و dRa ولی $d \not{R} b$

(ریاضیات گسسته- مباحثی دیگر از ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۲۲ (علیرضا شریف‌خطیبی)

A : مجموعهٔ روابط تقارنی و پادتقارنی روی مجموعهٔ $\{w,x,y,z\}$

B : مجموعهٔ روابط بازتابی روی مجموعهٔ $\{w,x,y,z\}$

تنها یک رابطهٔ بازتابی، تقارنی و پادتقارنی روی مجموعهٔ $\{w,x,y,z\}$

می‌توان تعریف کرد. پس داریم:

$$|A-B| = |A| - |A \cap B| = ۲^n - ۱ = ۲^۴ - ۱ = ۱۵$$

(ریاضیات گسسته- مباحثی دیگر از ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

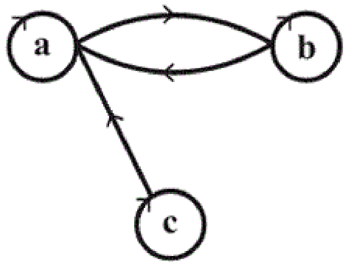
(فرهاد وفایی)

در ماتریس نظیر رابطه، ۹ درایهٔ روی قطر اصلی برابر یک است و چون رابطه تقارنی است، تعداد درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی که یک هستند، عددی زوج است. پس تعداد کل درایه‌های یک در ماتریس نظیر رابطه به صورت $2k + 9$ است و درضمن کوچک‌تر یا مساوی تعداد کل درایه‌های ماتریس یعنی ۸۱ است. بنابراین تعداد اعضای R عددی فرد و کوچک‌تر یا مساوی ۸۱ و بزرگ‌تر یا مساوی ۹ است که در بین گزینه‌ها، فقط ۷۵ دارای این شرایط است.

(ریاضیات گسسته- مباحثی دیگر از ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

گراف جهت‌دار متناظر با این رابطه به‌صورت زیر است:



رابطهٔ R ترایایی نیست، چون یالی از c به b در گراف وجود ندارد (از c به a و از a به b یال وجود دارد)، ولی با حذف یال ca، رابطهٔ R ترایایی می‌شود. بنابراین کافی است تنها زوج مرتب (c,a) از رابطه حذف گردد.

(ریاضیات گسسته- مباحثی دیگر از ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

۱۲۵- (رضا پورحسینی)

۱- متغیر a ربطی با پادمتقارن بودن رابطه ندارد و می‌تواند صفر یا یک باشد.

۲- b لزوماً باید صفر باشد چون درایهٔ نظیر آن در سطر اول و ستون دوم برابر یک است.

۳- متغیر c می‌تواند صفر یا یک باشد زیرا درایهٔ نظیر آن در سطر اول و ستون سوم برابر صفر است. پس هیچ‌کدام از متغیرهای a، b و c، لزوماً برابر یک نیستند.

(ریاضیات گسسته- مباحثی دیگر از ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۲۶- (کاظم باقرزاده‌چهره)

زیرمجموعهٔ مورد نظر، ماتریسی به‌صورت $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ می‌باشد که در آن x، y و z، صفر یا ۱ هستند. بنابراین تعداد این رابطه‌ها برابر $2 \times 2 \times 2 = 8$ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- مباحثی دیگر از ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

فرض کنید رابطهٔ R به‌صورت زیر باشد:

$$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,a),(a,c)\}$$

به دلیل وجود زوج مرتب (a,c) و عدم وجود زوج مرتب (c,a)، رابطهٔ R تقارنی نیست. همچنین به‌دلیل وجود هر دو زوج مرتب (a,b) و (b,a)، رابطهٔ R پادتقارنی نیست. در ضمن چون زوج مرتب‌های (a,c) و (b,a) به R تعلق دارند ولی (b,c) متعلق به R نیست، این رابطه خاصیت ترایایی ندارد. با حذف هر کدام از اعضای رابطهٔ R، حداقل یکی از خاصیت‌های مورد اشاره برقرار می‌شود یا بازتابی بودن R امکان‌پذیر نخواهد بود.

(ریاضیات گسسته- مباحثی دیگر از ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$✓ $\boxed{۴}$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

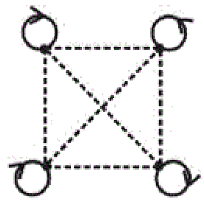
$$A \wedge A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین باید رابطهٔ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ll B \ll \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ برقرار باشد، ولی این رابطه امکان‌پذیر نیست چون درایهٔ سطر دوم و ستون سوم در ماتریس $A^{(2)}$ برابر صفر و در ماتریس $A \wedge A^T$ برابر یک است.

(ریاضیات گسسته- مباحثی دیگر از ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

در گراف مربوط به این رابطه، تمام طوقه‌ها وجود دارند و بین هر دو رأس متمایز نیز دقیقاً یک یال موجود است یا در جهت رفت و یا در جهت برگشت.



بنابراین بین هر دو رأس، از دو یال ممکن یکی را باید انتخاب نمود که در نتیجه تعداد رابطه‌ها برابر $۲^۶ = ۶۴$ می‌شود.

(ریاضیات گسسته- مباحثی دیگر از ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

✓ $\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

اگر از بین a و b، یکی برابر ۱ و دیگری صفر باشد، رابطه برقرار است. مثلاً

به ازای $a=۱$ و $b=۰$، داریم:

$$M(RoR)=(M(R))^{(۲)}=\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}<<M\Rightarrow RoR\subseteq R$$

ولی اگر $a=b=۱$ باشد، آنگاه:

$$M^{(۲)}=\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&۰\\۰&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&۰\\۰&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۰&۱&۰\\۰&۱&۱\end{bmatrix}\not<<M$$

پس حداکثر مقدار $a+b$، برابر یک است.

(ریاضیات گسسته- مباحثی دیگر از ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۱ | ۲ ✓ | ۳ | ۴

-۱۰۱ (سیروس نصیری)

$$\left.\begin{array}{l}D_g=\{۱,۳,۵\}\\D_f=\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow D_{f+g}=\{۱,۳,۵\}$$

$$f+g=\{(۱,۴),(۳,۱۱),(۵,۲۸)\}=\{(۱,a),(b,۱۱),(۵,۴c)\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\b=۳\\c=۷\end{cases}\Rightarrow\frac{a+b}{c}=۱$$

(حسابان- تابع: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۹)

۱ ✓ | ۲ | ۳ | ۴

-۱۰۲ (سعید مدیرخراسانی)

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

با توجه به اینکه $۵\in D_{gof}$ است، ۵ باید عضو D_f باشد، در نتیجه a باید برابر ۵ باشد و با توجه به اینکه $۴\in D_f$ و $۴\in D_{gof}$ است، باید $f(۴)=۰$ متعلق به D_g باشد و این امکان فقط هنگامی وجود دارد که $b=۰$ باشد.

$$\Rightarrow b-۲a=۰-۲(۵)=-۱۰$$

(حسابان- تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۰۳ (داوود بوالحسنی)

فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$، پس

$$(fof)(x)=f(ax+b)=۱۶x+۵$$

$$\Rightarrow f(ax+b)=a(ax+b)+b$$

$$\Rightarrow ۱۶x+۵=a^۲x+ab+b$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^۲=۱۶\\ ab+b=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۴\Rightarrow b=۱\\ a=-۴\Rightarrow b=-\frac{۵}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(x)=۴x+۱\Rightarrow f(۱)=۵\\ f(x)=-۴x-\frac{۵}{۳}\Rightarrow f(۱)=-\frac{۱۷}{۳}\end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ «۴» صحیح است.

(حسابان- تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۰۴ (میرهادی سرکارفرشی)

$$(gof)(x)=g(\sqrt{x-۳})=(\sqrt{x-۳})^۲+۱=x-۳+۱=x-۲$$

$$D_{gof}: x\geq ۳$$

$$y=(gof)(x)=x-۲\Rightarrow y\geq ۱$$

(حسابان- تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۰۵ (عنایت‌اله کشاورزی)

$\text{تابع است. } f \Rightarrow ۴m = ۴ \Rightarrow m = ۱$

$\Rightarrow f = \{(-۱,۴),(۲,۳),(۲,n-۱),(۵,۶),(p,n+۲)\}$

$\text{تابع است. } f \Rightarrow n-۱ = ۳ \Rightarrow n = ۴$

$\Rightarrow f = \{(-۱,۴),(۲,۳),(۵,۶),(p,۶)\}$

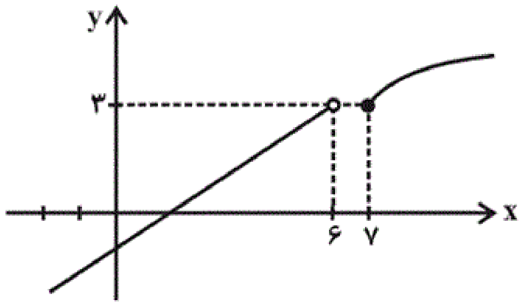
$\text{یک‌به‌یک } f \Rightarrow p = ۵ \Rightarrow m+n+p = ۱۰$

(حسابان- تابع: صفحه‌های ۸۶ تا ۸۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۰۶ (نگین یغمایی)

نمودار تابع $y=\sqrt{x+۲}$ به‌ازای $x \ge ۷$ به‌صورت زیر است.



حال باید مقدار ضابطهٔ پایینی تابع حداکثر ۳ شود که این مقدار حداکثر باید به ازای $x=۶$ به‌دست آید. بنابراین: $۲+a \le ۳ \Rightarrow a \le ۱ \Rightarrow \max(a) = ۱$

(حسابان- تابع: صفحه‌های ۸۶ تا ۸۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۰۷ (کاظم اجلالی)

می‌دانیم $(۰,۲) \in f$، پس داریم: $f(۰) = \sqrt{b} = ۲ \Rightarrow b = ۴$

چون $(۰,۲) \in f^{-۱}$، در نتیجه $(۲,۰) \in f$ پس $f(۲) = ۰$ است و داریم:

$$\sqrt{۸a+b} = ۰ \Rightarrow ۸a+b = ۰ \Rightarrow a = -\frac{b}{۸} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $ab = -۲$ است.

(حسابان- تابع: صفحه‌های ۸۹ تا ۹۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۰۸ (امیرحسین افشار)

$$y = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}y \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x \qquad ; x \geq 2$$

چون $D_{f^{-1}}$ برابر است با R_f بنابراین برای یافتن دامنهٔ f^{-1} باید بُـرد f را بیابیم.

$$y = f(x) = 2x \xrightarrow{x \geq 1} R_f = [2, +\infty)$$

به طریق مشابه برای ضابطهٔ پایینی داریم:

$$y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1 \ ; x < 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & ; x \geq 2 \\ x - 1 & ; x < 2 \end{cases}$$

(حسابان- تابع: صفحه‌های ۸۹ تا ۹۵)

۱✓ ۲ ۳ ۴

-۱۰۹ (حمید ستاری)

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{1 - \cos a}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{5}\right) = \frac{1 - \cos(\cos^{-1}\frac{1}{5})}{2} = \frac{1 - \frac{1}{5}}{2} = \frac{2}{5}$$

(حسابان- مثلثات: صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۱۰ (قاسم کتابچی)

$$y = \cos^{-1}(-\sqrt{x}) \xrightarrow{-\sqrt{x} \leq 0} R_y = [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

$$\begin{cases} y = \cos^{-1} x \\ D_y = [-1, 1] \\ R_y = [0, \pi] \end{cases}$$

(حسابان- مثلثات: صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓