



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



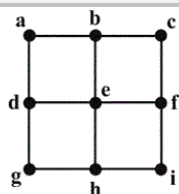
<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضیات گسسته دوازدهم، گراف و مدل سازی - 10 سوال -



$$D = \{b, d, i\} \quad (۴)$$

$$C = \{b, d, f, h\} \quad (۳)$$

$$B = \{d, e, f\} \quad (۲)$$

$$A = \{a, c, g, i\} \quad (۱)$$

۱۱۱- کدام یک از مجموعه‌های زیر، مجموعهٔ احاطه‌گر گراف G در شکل مقابل نیست؟

۱۱۲- کدام یک از گراف‌های زیر، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یکتا دارد؟

$$P_1 \quad (۴)$$

$$P_8 \quad (۳)$$

$$P_6 \quad (۲)$$

$$P_4 \quad (۱)$$

۱۱۳- حداکثر عدد احاطه‌گری یک گراف ۲-منتظم از مرتبهٔ ۱۶ کدام است؟

$$۸ \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۳)$$

$$۵ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

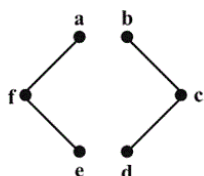
۱۱۴- در گراف سادهٔ G ، اگر $p = ۸$ و $\Delta = ۳$ باشد، آنگاه حداقل مقدار ممکن برای $\gamma(G)$ کدام است؟

$$۴ \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$



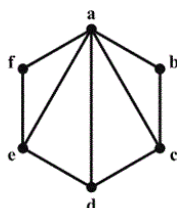
۱۱۵- گراف G مطابق شکل مقابل مفروض است. در صورت افزودن کدام یال به این گراف، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم آن یکتا نخواهد بود؟

$$be \quad (۴)$$

$$ae \quad (۳)$$

$$ab \quad (۲)$$

$$cf \quad (۱)$$



۱۱۶- گراف شکل زیر، چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد؟

$$۳ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

$$۵ \quad (۴)$$

$$۴ \quad (۳)$$

۱۱۷- گراف G در شکل مقابل، چند γ -مجموعه دارد؟



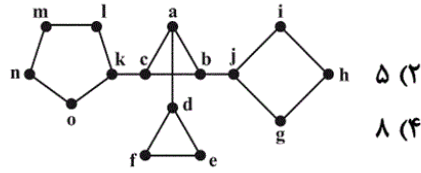
$$۸ \quad (۴)$$

$$۴ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

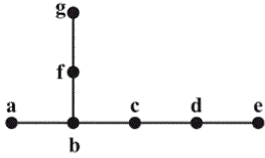
۱۱۸- عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



(۲) ۵
(۴) ۸

(۱) ۴
(۳) ۶

۱۱۹- کدام یک از رأس‌های گراف شکل مقابل در هیچ‌کدام از مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم آن وجود ندارد؟



(۴) d

(۳) c

(۲) f

(۱) a

۱۲۰- عدد احاطه‌گری گراف $\bar{C}_n$ همواره برابر کدام است؟ ($n \geq 4$)

(۴) $n-2$

(۳) $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$

(۲) ۳

(۱) ۲

آمار و احتمال، آمار توصیفی - 10 سوال -

۱۳۱- ۵۰ داده آماری در ۵ دسته طبقه‌بندی شده‌اند. فراوانی نسبی دسته آخر برابر ۰/۱ است. اگر ۳۰ داده کوچک‌تر از میانه به آن‌ها

افزوده شود، فراوانی و فراوانی نسبی دسته آخر کدام‌یک از مقادیر زیر خواهد بود؟

(۴) ۸ و ۰/۰۶۲۵

(۳) ۸ و ۰/۱

(۲) ۵ و ۰/۰۶۲۵

(۱) ۵ و ۰/۱

۱۳۲- اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر ۲۰ و میانگین داده‌های $x_1 + 1, x_2 + 2, x_3 + 3, \dots, x_n + n$ برابر ۳۰ باشد، n کدام است؟

(۴) ۱۰

(۳) ۱۵

(۲) ۱۹

(۱) ۲۰

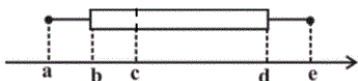
۱۳۳- کدام‌یک از گزاره‌های زیر درباره نمودار جعبه‌ای، همواره صحیح است؟

(۱) هر قدر دامنه تغییرات، عدد بزرگ‌تری باشد، طول جعبه عدد بزرگ‌تری است.

(۲) داده‌های اصلی در نمودار جعبه‌ای قابل بازیابی هستند.

(۳) پراکندگی داده‌ها را در هر چهار قسمت نمودار می‌توان با هم مقایسه کرد.

(۴) چارک‌های اول، دوم، سوم و بزرگ‌ترین داده از یک سری داده‌های آماری برای رسم نمودار جعبه‌ای کفایت می‌کنند.



۱۳۴- نمودار جعبه‌ای داده‌های ۱۶، ۲۷، ۱۴، ۲۳، ۱۵، ۱۰، ۱۲ به صورت مقابل است. حاصل $\frac{a+c}{b+d}$ کدام است؟

(۴) $\frac{27}{35}$

(۳) $\frac{27}{37}$

(۲) $\frac{25}{37}$

(۱) $\frac{25}{35}$

۱۳۵- اگر واریانس داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر $1/44$ باشد، انحراف معیار داده‌های زیر کدام است؟

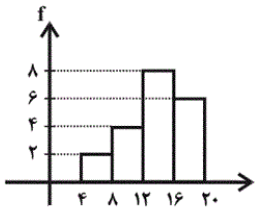
$$\frac{-1}{3}x_1 + \frac{4}{3}, \frac{-1}{3}x_2 + \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-1}{3}x_3 + \frac{4}{3}, \dots, \frac{-1}{3}x_n + \frac{4}{3}$$

(۴) $0/48$

(۳) $0/4$

(۲) $\sqrt{0/48}$

(۱) $1/2$



(۴) $0/48$

(۳) $0/4$

(۲) $\sqrt{0/48}$

(۱) $1/2$

۱۳۶- نمرات درس آمار و احتمال کلاس یازدهم دبیرستانی در نمودار بافت نگاشت مقابل نمایش داده شده است. اگر ۴ نمره ۱۱، ۱۳، ۱۴/۵ و ۱۷/۵ به داده‌های این نمودار اضافه شود، در نمودار دایره‌ای جدید، بزرگ‌ترین زاویه مرکزی نظیر دسته‌ها، چند درجه است؟

(۴) ۱۶۵

(۳) ۱۶۰

(۲) ۱۵۰

(۱) ۱۴۴

۱۳۷- به ازای کدام مقدار x ، مجموع مد و میانه داده‌های $x, 4, 6, 1, 5, 2, 3$ برابر ۷ است؟

(۴) هیچ مقداری برای x وجود ندارد.

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

۱۳۸- در یک جدول فراوانی با پنج دسته، مجموع فراوانی‌های نسبی دسته‌های اول تا سوم برابر $\frac{19}{30}$ و مجموع فراوانی‌های نسبی

دسته‌های سوم تا پنجم برابر $\frac{8}{15}$ است. زاویه مرکزی متناظر با دسته سوم در نمودار دایره‌ای چند درجه است؟

(۴) ۹۰

(۳) ۶۰

(۲) ۴۵

(۱) ۳۰

۱۳۹- ۲۰ داده آماری با واریانس ۶ داریم. چند داده مساوی با میانگین باید به آنها اضافه کنیم تا واریانس کل داده‌ها برابر ۴ شود؟

(۴) ۱۰

(۳) ۸

(۲) ۶

(۱) ۵

۱۴۰- تفاضل میانگین از داده‌ها برای ۶ داده آماری مرتب شده با دامنه تغییرات ۱۲ و میانگین $\sqrt{33}$ ، به صورت $a, 3, 1, 0, -2, b$ است. ضریب تغییرات این داده‌ها تقریباً چقدر است؟

(۴) $0/75$

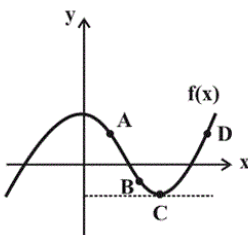
(۳) $0/6$

(۲) $0/4$

(۱) $0/67$

حسابان دوازدهم، مشتق - 10 سوال -

۸۱- در کدام یک از نقاط مشخص شده روی نمودار تابع f ، مقدار $f'(x)f(x)$ عددی منفی است؟



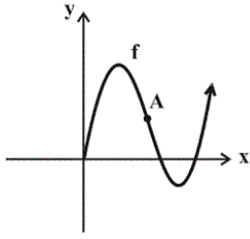
(۲) B

(۱) A

(۴) D

(۳) C

۸۲- نمودار تابع f به شکل زیر مفروض است. کدام یک از خطوط داده شده می تواند معادله خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه A باشد؟



(۲) $-3x + 4y + 2 = 0$

(۱) $2x + 3y + 1 = 0$

(۴) $x - 2y - 3 = 0$

(۳) $x + y - 5 = 0$

۸۳- اگر $g(x) = |x^2 - 1|$ و $g'(a) = 0$ باشد، مقدار a کدام است؟

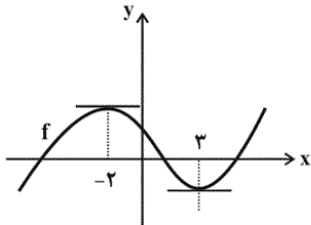
(۴) ۲

(۳) -۱

(۲) ۱

(۱) صفر

۸۴- نمودار تابع f به شکل زیر داده شده است. کدام یک از گزینه های زیر می تواند ضابطه تابع f' باشد؟



(۲) $f'(x) = x^2 + 2x - 6$

(۱) $f'(x) = x^2 - x + 4$

(۴) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

(۳) $f'(x) = 2x^2 - 2x - 12$

۸۵- اگر نیمساز ناحیه اول مختصات بر نمودار تابع f در نقطه $x = 1$ مماس باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{x}{2}\right) - 1}{x}$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) $\frac{3}{4}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{4}{3}$

۸۶- خط d در $x = 1$ بر نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ مماس است. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

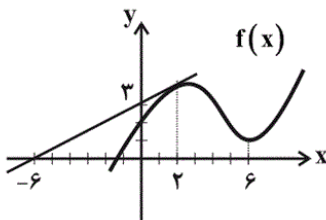
(۲) -۱

(۱) ۱

(۴) -۲

(۳) ۲

۸۷- با توجه به نمودار تابع f ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h}$ کدام است؟



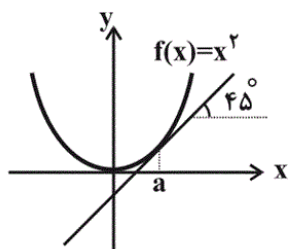
(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) ۱

(۴) ۲

(۳) صفر

۸۸- با توجه به نمودار تابع f ، حاصل $f(a) + f'(a)$ کدام است؟



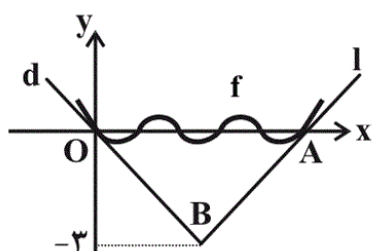
(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) ۱

(۴) $\frac{5}{4}$

(۳) $\frac{1}{4}$

۸۹- خط d و l بر نمودار تابع f به ترتیب در مبدأ مختصات و نقطه A مماس هستند. اگر $x_A = k$ و $-\frac{1}{4}f'(k) = f'(0) = -\frac{1}{2}$ باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟



(۲) $\frac{15}{4}$

(۱) $\frac{15}{2}$

(۴) $\frac{45}{4}$

(۳) $\frac{45}{2}$

۹۰- خط $y - 4x - 3 = 0$ بر نمودار تابع مشتق‌پذیر f در نقطه‌ای به طول $x = 1$ مماس است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) - 11f(x) - 21}{2(x-1)}$ کدام است؟

(۲) ۳۴

(۱) ۱۷

(۴) ۶۸

(۳) ۵۱

هندسه 3- دوازدهم، آشنایی با مقاطع مخروطی - 10 سوال -

۱۰۱- با معلوم بودن و سهمی، سهمی همواره به‌طور منحصر به فرد قابل رسم است.
(۱) محور تقارن و خط هادی (۲) محور تقارن و یک نقطه رأس و کانون (۳) خط هادی و یک نقطه

۱۰۲- معادله خط هادی سهمی $y = x^2$ کدام است؟

(۴) $y = -1$

(۳) $y = -\frac{1}{4}$

(۲) $y = -\frac{1}{2}$

(۱) $y = -\frac{1}{8}$

۱۰۳- فاصله کانون سهمی $y^2 - 6x = 0$ از خط هادی آن کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۰۴- یک سهمی با کانون $F(1, 2)$ از نقطه $A(4, -2)$ می‌گذرد. کدام خط نمی‌تواند خط هادی این سهمی باشد؟

- (۱) $y = -7$ (۲) $x = -1$ (۳) $y = 3$ (۴) $x = 7$

۱۰۵- اگر $M(x, y)$ نمایانگر نقاطی از صفحه باشد که فاصله هر یک از آنها از نقطه $(2, 5)$ با فاصله آنها از خط $y = -3$ برابر باشد،

آنگاه کم‌ترین مقدار y کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

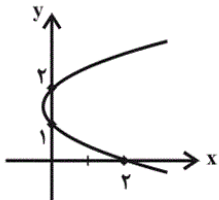
۱۰۶- اگر کانون سهمی $y^2 - my + x = 0$ روی نیمساز ناحیه‌های اول و سوم قرار داشته باشد، آنگاه مجموع مقادیر m کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۰۷- سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا سهمی را در دو نقطه

قطع کند. طول این نقاط کدام است؟

- (۱) فقط -۳ (۲) فقط ۳ (۳) ۳ و -۳ (۴) فقط ۲



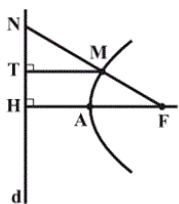
۱۰۸- در سهمی شکل مقابل، فاصله رأس از کانون کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۱۰۹- مبدأ مختصات کانون یک سهمی است که خط $x = -3$ خط هادی آن است. اگر این سهمی محور y ها را در نقاط A و B قطع

نماید، طول پاره خط AB کدام است؟

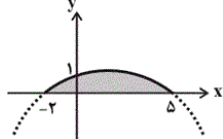
- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱۲



۱۱۰- در شکل مقابل سهمی با رأس A ، کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M (غیر از نقطه A) روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه M ، MT را بر d عمود کرده‌ایم. حاصل $\frac{FN}{FA}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{2NT}{TH}$ (۲) $\frac{2MT}{AH}$ (۳) $\frac{FM}{AH}$ (۴) $\frac{2NM}{NT}$

۹۱- نمای جانبی یک عدسی به کمک سهمی مقابل، مدلسازی شده است. بیشترین ضخامت عدسی کدام است؟



۱/۲۲۵ (۲)

۱/۲۵ (۱)

۱/۵۵ (۴)

۱/۵ (۳)

۹۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر b ، رأس سهمی به معادله $y = \frac{3}{4}x^2 + bx + 1$ در ناحیه اول و بالای نیمساز این ناحیه قرار می گیرد؟

$(-1, 0)$ (۴)

$(-1, 1)$ (۳)

$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ (۲)

$(0, 1)$ (۱)

۹۳- اگر جدول تعیین علامت عبارت $P = (2x-1)(ax^2+3x+b)$ به صورت زیر باشد، abc کدام است؟

x	-2	c
P	$-$	$+$

۲ (۲)

-2 (۱)

-8 (۴)

8 (۳)

۹۴- به ازای کدام مقادیر m ، مجموعه جواب نامعادله $\frac{-x-2m}{x^2+1} < 1-m$ برابر $\mathbb{R}$ است؟

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$-\frac{\sqrt{3}}{2} < m < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$-1 \leq m < 1$ (۲)

$-1 < m < 1$ (۱)

۹۵- مجموعه جواب های نامعادله $|2x+3| > m$ ، چهار عدد صحیح را شامل نمی شود. حداقل مقدار m کدام است؟

۵ (۴)

$\frac{9}{2}$ (۳)

۳ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

ریاضی پایه - دوازدهم، جبر و معادله - 5 سوال -

۹۶- اگر اعداد غیر صفر a و b ریشه های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ باشند؛ حاصل ضرب آنها کدام است؟

$\frac{11}{25}$ (۴)

$-\frac{4}{27}$ (۳)

$\frac{9}{34}$ (۲)

$-\frac{7}{31}$ (۱)

۹۷- معادله $\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{x+\sqrt{x}} = \frac{2}{3}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۹۸- معادله $x + \frac{4}{x} - 1 = 3\sqrt{x + \frac{4}{x} - 3}$ چند جواب حقیقی متمایز دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۹۹- به ازای کدام مقدار a ، معادله $ax = ||x-4|-2||$ دقیقاً سه جواب دارد؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

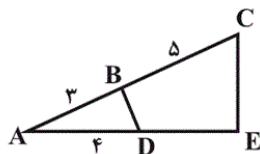
- ۱۰۰- مساحت مربع ABCD که دو ضلع AB و CD روی خطوط $y = ax + 3a$ و $y = (2a - 2)x + 1$ قرار دارند، کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴) ۴۰

هندسه 2 یازدهم، دایره - 10 سوال -

- ۱۲۱- دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۱۴ مفروض‌اند. اگر طول خط‌المرکزین آنها برابر ۲۰ باشد، آنگاه نسبت طول مماس مشترک داخلی به طول مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{3}{4}$
 (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{5}{6}$

- ۱۲۲- در شکل مقابل، عمودمنصف‌های اضلاع چهارضلعی BCED در یک نقطه هم‌رس‌اند. اندازه پاره خط DE کدام است؟

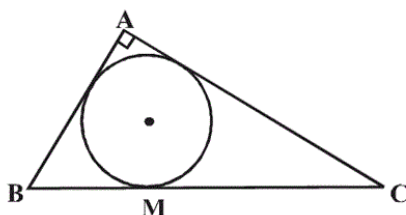


- (۱) ۲ (۲) ۴
 (۳) ۶ (۴) ۸

- ۱۲۳- از نقطه M خارج از دایره C، دو مماس MT و MT' را بر این دایره رسم می‌کنیم. سپس از نقاط تماس T و T' به ترتیب خطوطی به موازات MT و MT' رسم کرده تا همدیگر را در نقطه S و دایره را در نقاط A و B قطع کنند. اگر $\widehat{AB} = 30^\circ$ باشد، اندازه زاویه $\widehat{TMT'}$ کدام است؟ (S درون دایره است).

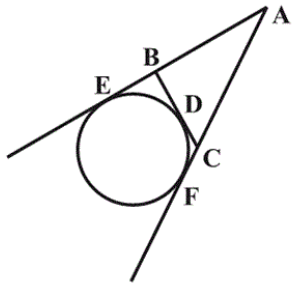
- (۱) 55° (۲) 60°
 (۳) 65° (۴) 70°

- ۱۲۴- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، $BC = 10$ است. اگر دایره محاطی داخلی این مثلث در نقطه M به فاصله ۴ واحد از رأس B بر ضلع BC مماس باشد، طول ضلع قائمه AC کدام است؟



- (۱) ۴ (۲) ۶
 (۳) ۸ (۴) ۹

۱۲۵- در شکل مقابل، شعاع دایره کدام است؟ ($AB = ۱۲, AC = ۱۳, BD = ۳$)



(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۱۲۶- دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ در نقطه M مماس خارج‌اند. اگر TT' مماس مشترک خارجی دو دایره باشد، حاصل

$MT^2 + MT'^2$ کدام است؟

(۱) ۶

(۲) ۱۳

(۳) ۱۸

(۴) ۲۴

۱۲۷- یک دوزنقه هم محاطی و هم محیطی است. اگر اندازه واسطه هندسی بین طول دو قاعده برابر ۳ باشد، آنگاه شعاع دایره محاطی

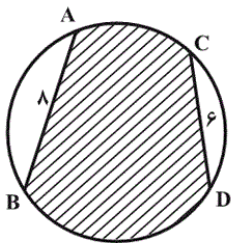
این دوزنقه کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $1/5$

(۳) ۲

(۴) ۳



۱۲۸- در شکل مقابل $\widehat{AB} + \widehat{CD} = 180^\circ$ ، مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

(۱) $25\pi + 24$

(۲) $25\pi + 12$

(۳) $\frac{25\pi}{2} + 24$

(۴) $\frac{25\pi}{2} + 12$

۱۲۹- دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۴ مماس درون هستند. طول بزرگ‌ترین وتر از دایره بزرگ‌تر که بر دایره کوچک‌تر مماس باشد، کدام

است؟

(۱) $2\sqrt{5}$

(۲) $2\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{7}$

(۴) $4\sqrt{3}$

۱۳۰- مرکز دایره محیطی مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$)، درون مثلث بوده و به فاصله ۳ از قاعده $BC = ۸$ قرار دارد.

فاصله این مرکز از هر یک از ساق‌ها چقدر است؟

$$۲/۵ \quad (۲)$$

$$\sqrt{۵} \quad (۱)$$

$$۲ \quad (۴)$$

$$\sqrt{۶} \quad (۳)$$

(هومن نورائی)

۱۱۱- ریاضیات گسسته

مجموعه $A = \{a, c, g, i\}$ ، یک مجموعه احاطه گر گراف G نیست، زیرا هیچ یک از رأس‌های مجموعه A قادر به احاطه رأس e نیستند.
(ریاضیات گسسته- گراف و مدل سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

(هومن نورائی)

۱۱۲- ریاضیات گسسته

در گراف P_n مطابق شکل، عدد احاطه‌گری گراف برابر ۲ و تنها مجموعه احاطه گر مینیمم، مجموعه $\{b, e\}$ است.



نکته: عدد احاطه‌گری گراف P_n به صورت $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ است که تنها در صورتی

که n عددی مضرب ۳ باشد، مجموعه احاطه گر مینیمم آن یکتا خواهد بود.
(ریاضیات گسسته- گراف و مدل سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۴)

☐ ۴

☐ ۳

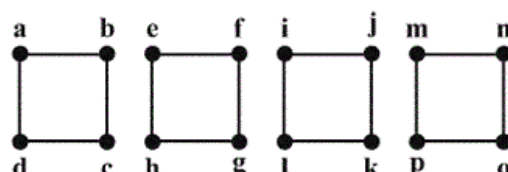
☒ ۲

☐ ۱

(علیرضا شریف‌فطیپی)

۱۱۳- ریاضیات گسسته

فرض کنید گراف ۲-منتظم G از a, b, e, f, i, j, m, n مرتبه ۱۶ به صورت شکل مقابل رسم شده باشد.



بدیهی است که برای احاطه تمامی رئوس در هر یک از بخش‌های گراف به حداقل دو رأس نیاز داریم. با توجه به این که $A = \{a, b, e, f, i, j, m, n\}$ یک مجموعه احاطه گر برای گراف G است، پس $\gamma(G) = 8$ می‌باشد. در صورت رسم گراف ۲-منتظم مرتبه ۱۶ در حالت‌های دیگر، عدد احاطه‌گری کم‌تر از ۸ خواهد بود.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۴)

☒ ۴

☐ ۳

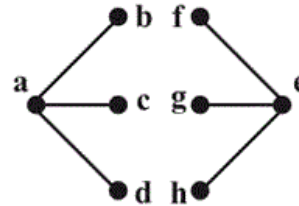
☐ ۲

☐ ۱

در یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجه Δ داریم:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$$

اگر گراف G را به صورت شکل زیر رسم کنیم، آنگاه مجموعه $\{a, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای این گراف است، پس $\gamma(G) = 2$ خواهد بود.



(ریاضیات گسسته-گراف و مدل سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۴)

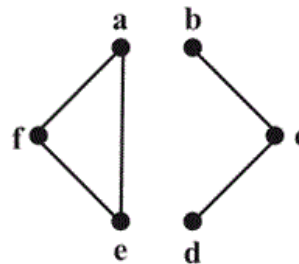
۴

۳

۲ ✓

۱

با افزودن یال ae به گراف G ، گراف شکل زیر حاصل می‌شود:



در این صورت مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم گراف حاصل عبارت‌اند از:

$$\{a, c\}, \{f, c\}, \{e, c\}$$

ولی با افزودن هر یک از یال‌های cf ، ab و be به گراف G ، گرافی حاصل می‌شود که تنها مجموعه احاطه‌گر مینیمم آن، مجموعه $\{c, f\}$ است.

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

تمام مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال این گراف عبارت‌اند از:

$$\{a\}, \{b, e\}, \{c, f\}, \{c, e\}, \{b, f, d\}$$

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

سه رأس a ، e و f از درجهٔ یک هستند و هیچ رأسی در گراف وجود ندارد که با حداقل دو رأس از این سه رأس مجاور باشد، بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف، حداقل برابر ۳ است.

در هر یک از مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم گراف G ، از هر یک از مجموعه‌های $\{a, b\}$ ، $\{c, f\}$ و $\{d, e\}$ ، دقیقاً یک رأس باید وجود داشته باشد، بنابراین تعداد γ -مجموعه‌های گراف G برابر است با:

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۴)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

از هر یک از مجموعه‌های $\{b, g, h, i, j\}$ و $\{k, l, m, n, o\}$ ، حداقل دو رأس و از مجموعهٔ $\{d, e, f\}$ حداقل یک رأس باید انتخاب نمود تا تمام رئوس مجموعه احاطه شوند. اگر رأس j از مجموعهٔ اول و رأس k از مجموعه دوم به عنوان یکی از دو رأس لازم انتخاب شوند، در این صورت با انتخاب رأس d از مجموعهٔ سوم، سایر رئوس گراف نیز احاطه می‌گردند. مجموعهٔ $\{d, j, h, k, m\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای این گراف است و در نتیجه $\gamma(G) = 5$ است.

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۴)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

عدد احاطه‌گری این گراف برابر ۳ است، زیرا از هر یک از مجموعه‌های $\{a, b\}$ ، $\{d, e\}$ و $\{f, g\}$ ، یک رأس لزوماً در مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف باید وجود داشته باشد و مجموعهٔ $\{b, d, f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر گراف است. واضح است که در صورت انتخاب هر یک از دو رأس b یا d ، رأس c توسط یکی از این دو رأس احاطه می‌شود. اما در حالتی که دو رأس a و e انتخاب شوند، لزوماً رأس c نیز باید در مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال گراف وجود داشته باشد. در این صورت تعداد اعضای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برابر ۴ می‌شود که مجموعهٔ مورد نظر نمی‌تواند احاطه‌گر مینیمم باشد.

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

درجه هر رأس گراف C_n برابر ۲ است، پس درجه هر رأس گراف $\bar{C}_n$ ، برابر $n-3$ است (اگر گراف G از مرتبه n باشد، آنگاه مجموع درجات هر رأس در گراف G و $\bar{G}$ ، برابر $n-1$ است). بنابراین هر رأس گراف $\bar{C}_n$ با $(n-3)$ رأس دیگر مجاور است و با در نظر گرفتن خود آن رأس، قادر به احاطه $(n-2)$ رأس گراف است. مثلاً فرض کنید رأس a ، تمامی رؤوس گراف $\bar{C}_n$ به جز رؤوس b و c را احاطه کند. در این صورت رأس a با این دو رأس در گراف C_n مجاور بوده است. حال دو رأس b و c قطعاً در گراف $\bar{C}_n$ مجاور یکدیگرند، چون در غیر این صورت این دو رأس در گراف C_n مجاور می‌گردند که این به منزله وجود یک دور به طول ۳ در گراف C_n است (دور $abca$) که با مفهوم گراف C_n ($n \geq 4$) در تضاد است. پس با انتخاب مجموعه $\{a, b\}$ ، تمام رؤوس گراف $\bar{C}_n$ احاطه می‌گردند، یعنی $\{a, b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف $\bar{C}_n$ است و در نتیجه $\gamma(\bar{C}_n) = 2$ ($n \geq 4$) خواهد بود.

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۵۴)

۴

۳

۲

۱✓

(علی ایمانی)

چون داده‌های جدید به دسته آخر ربطی ندارند (دسته آخر بعد از میانه است)، پس فراوانی دسته آخر تغییر نمی‌کند.

$$\text{فراوانی نسبی دسته پنجم} = \frac{f_5}{n_1} = 0/1 \Rightarrow \frac{f_5}{50} = 0/1 \Rightarrow f_5 = 5$$

حال فراوانی نسبی دسته آخر در داده‌های جدید برابر است با:

$$\frac{f_5}{n_1 + 30} = \frac{5}{50 + 30} = \frac{5}{80} = 0/0625$$

(آمار و احتمال-آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲، ۸۶ و ۸۷)

۴

۳

۲✓

۱

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = 2 \cdot n$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x'_i}{n} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (1 + 2 + \dots + n)}{n}$$

$$= \frac{2 \cdot n + \frac{n(n+1)}{2}}{n} \Rightarrow 20 + \frac{n+1}{2} = 30 \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 10 \Rightarrow n = 19$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

گزینه «۱» نادرست است، زیرا چارک‌های اول و سوم، طول جعبه را مشخص می‌کنند و نه کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده.

گزینه «۲» نادرست است. از روی نمودار جعبه‌ای نمی‌توان داده‌های اصلی را به دست آورد.

گزینه «۳» درست است، زیرا طول بیشتر هر بخش از نمودار جعبه‌ای، پراکندگی بیشتر (تراکم کمتر) داده‌ها در آن قسمت را تعیین می‌کند.

گزینه «۴» نادرست است. زیرا علاوه بر چارک‌های اول، دوم (میانه)، سوم و بزرگ‌ترین داده، کوچک‌ترین داده نیز برای رسم نمودار جعبه‌ای ضروری است.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۲۳, ۲۷

$a =$ کوچک‌ترین داده $= ۱۰$ و $e =$ بزرگ‌ترین داده $= ۲۷$

چون تعداد داده‌ها فرد است، میانه برابر داده‌ای است که در وسط قرار دارد،

پس $c = ۱۵$ است و در نتیجه داریم:

میانه نیمه اول داده‌ها برابر ۱۲ و میانه نیمه دوم داده‌ها برابر ۲۳ است

پس $b = ۱۲$ و $d = ۲۳$.

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{۱۰+۱۵}{۱۲+۲۳} = \frac{۲۵}{۳۵}$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

انحراف معیار داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر است با $\sqrt{1/44} = 1/2$. اگر

داده‌ها در عددی ثابت ضرب شوند، انحراف معیار آنها در قدرمطلق آن عدد

ثابت ضرب می‌شود و اگر مقداری ثابت به همه داده‌ها اضافه شود، انحراف

معیار تغییری نمی‌کند.

$$\sigma' = \left| -\frac{1}{3} \right| \times 1/2 = \frac{1}{3} \times 1/2 = 0/4$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۹۳ تا ۹۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

جدول فراوانی داده‌های اولیه مطابق با نمودار بافت نگاشت داده شده به صورت زیر است:

حدود دسته‌ها	$[4, 8)$	$[8, 12)$	$[12, 16)$	$[16, 20]$
فراوانی دسته	۲	۴	۸	۶

با افزودن نمره‌های ۱۱، ۱۳، ۱۴/۵ و ۱۷/۵ به داده‌های اولیه، تعداد کل داده‌ها برابر ۲۴ و تعداد داده‌های دسته سوم (دسته‌ای که قبل و بعد از افزودن داده‌های جدید دارای بیش‌ترین تعداد داده است) برابر ۱۰ خواهد بود. در این صورت داریم:

$$\text{زاویه مرکزی دسته سوم در نمودار دایره‌ای} = \frac{10}{24} \times 360^\circ = 150^\circ$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

داده‌های مرتب شده به جز X به صورت ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ هستند. با افزودن داده X ، تعداد داده‌ها فرد خواهد شد و در نتیجه داده وسط، میانه داده‌ها است. اگر X برابر ۳ یا ۴ باشد، آنگاه هم مد و هم میانه داده‌ها همان ۳ یا ۴ خواهد بود که در این صورت مجموع مد و میانه ۶ یا ۸ است. اگر X یکی از اعداد ۱ یا ۲ باشد، میانه داده‌ها قطعاً برابر ۳ است و مد داده‌ها، همان مقدار X یعنی ۱ یا ۲ است و در نتیجه مجموع مد و میانه کم‌تر از ۷ می‌شود. اگر X یکی از اعداد ۵ یا ۶ باشد، میانه داده‌ها قطعاً برابر ۴ است و مد داده‌ها نیز همان مقدار X ، یعنی ۵ یا ۶ است و در نتیجه مجموع مد و میانه بزرگ‌تر از ۷ می‌شود. اگر X عددی غیر از مقادیر مشخص شده باشد، داده‌ها فاقد مد هستند، پس به ازای هیچ مقدار X ، مجموع مد و میانه این داده‌ها برابر ۷ نخواهد بود.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

اگر f_i فراوانی مطلق دسته i ام و n تعداد کل داده‌ها باشد، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{f_1 + f_2 + f_3}{n} = \frac{19}{30} \\ \frac{f_3 + f_4 + f_5}{n} = \frac{8}{15} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}}$$

$$\frac{\overbrace{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5}^n + f_3}{n} = \frac{35}{30} \Rightarrow \frac{n + f_3}{n} = \frac{35}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n} + \frac{f_3}{n} = \frac{35}{30} \Rightarrow 1 + \frac{f_3}{n} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{f_3}{n} = \frac{1}{6}$$

$$\text{زاویه مرکزی متناظر با دسته سوم} = \frac{f_3}{n} \times 360^\circ = \frac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$\sigma^2 = 6 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2}{20} \Rightarrow \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 120$$

اولیه: $\sigma^2 = 6$

$$\sigma^2 = 4 = \frac{\sum_{i=1}^{20+n} (x_i - \bar{x})^2}{20+n} \Rightarrow \frac{120}{20+n} = 4 \Rightarrow n = 10$$

ثانویه: $\sigma^2 = 4$

دقت کنید که برای داده‌های مساوی با میانگین، $x_i - \bar{x} = 0$ است و حاصل

$\sum (x_i - \bar{x})^2$ تغییری نمی‌کند.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۹۳ تا ۹۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

مجموع تفاضل‌های میانگین از داده‌ها برابر صفر است، پس داریم:

$$a + 3 + 1 + 0 + (-2) + b = 0 \Rightarrow a + b = -2$$

دامنه تغییرات برابر با ۱۲ است. پس:

$$a - b = 12$$

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ a - b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{5^2 + 3^2 + 1^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-7)^2}{6}$$

$$= \frac{88}{6} = \frac{44}{3}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{44}{3}} = 2\sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2\sqrt{\frac{11}{3}}}{\sqrt{33}} = \frac{2}{3} \approx 0.67$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۹۳ تا ۹۷)

۴

۳

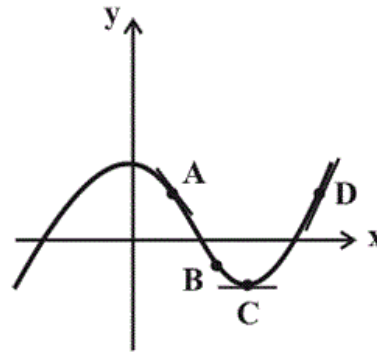
۲

۱ ✓

اگر نقطه‌ای بالای محور x ها باشد، مقدار تابع در آن نقطه مثبت و اگر

نقطه‌ای پایین محور x ها باشد، مقدار تابع در آن نقطه منفی است. پس:

$$f(x_A) > 0, f(x_B) < 0, f(x_C) < 0, f(x_D) > 0$$



مقدار f' در هر نقطه، برابر با شیب خط مماس بر تابع f در آن نقطه است.

با توجه به نمودار داریم:

$$f'(x_A) < 0, f'(x_B) < 0, f'(x_C) = 0, f'(x_D) > 0$$

پس:

$$f(x_A)f'(x_A) < 0, f(x_B)f'(x_B) > 0$$

$$f(x_C)f'(x_C) = 0, f(x_D)f'(x_D) > 0$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۷۲ تا ۷۸)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱ ✓

با توجه به شکل رسم‌شده، شیب خط مماس در نقطه A منفی است. هم‌چنین این خط، محورهای مختصات را در نقاط با مؤلفه‌های مثبت قطع می‌کند؛ یعنی عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط مماس مثبت است. از بین معادلات داده شده فقط معادله $x + y - 5 = 0$ دارای ویژگی‌های مورد نظر است.

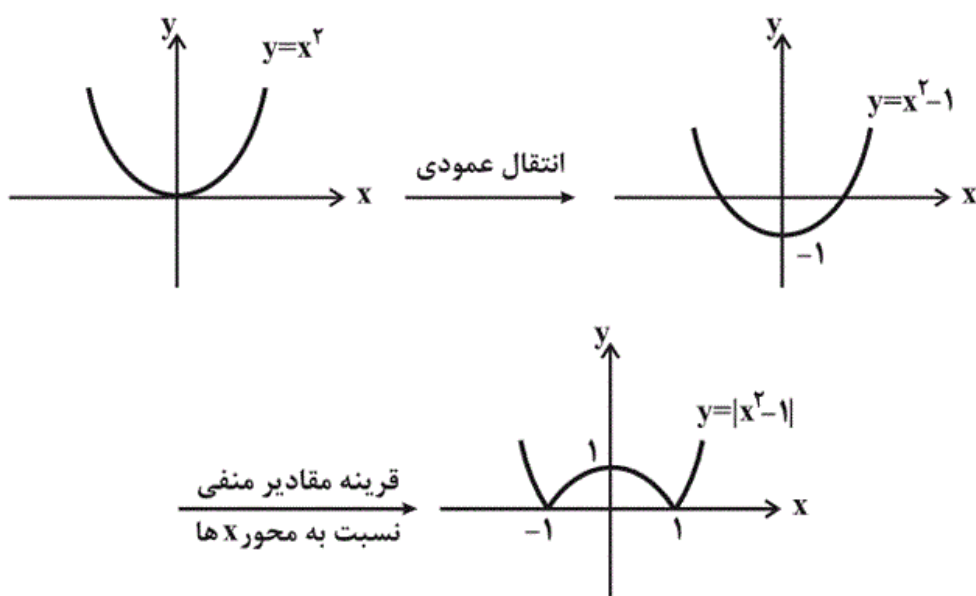
(مسئله ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۸)

۱

۲

۳ ✓

۴



با توجه به نمودار $g(x) = |x^2 - 1|$ ، شیب خط مماس فقط در $x = 0$ ، برابر صفر است.

(مسئله ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۸)

۱ ✓

۲

۳

۴

با توجه به گزینه‌های داده شده ضابطه f' یک تابع درجه دوم به صورت

$$f'(x) = ax^2 + bx + c \text{ می‌باشد. از طرفی با توجه به نمودار } f, \text{ خطوط}$$

مماس بر نمودار تابع f در نقاط -2 و 3 افقی است، بنابراین

$$f'(-2) = f'(3) = 0 \text{ می‌باشد. بنابراین داریم:}$$

$$f'(x) = a(x+2)(x-3) = a(x^2 - x - 6)$$

با قرار دادن $a = 2$ ، ضابطه تابع گزینه «۳» به دست می‌آید.

(مسئله ۲- مشتق: صفحه‌های ۷۲ تا ۷۸)

۴

۳✓

۲

۱

(میلاد سجادی لاریجانی)

خط $y = x$ در نقطه $x = 1$ بر نمودار تابع f مماس می‌باشد، بنابراین

داریم:

$$(1, 1) \in f(x), f'(1) = 1$$

با فرض $\frac{x}{2} = t$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{x}{2}\right) - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{2t} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} \\ &= \frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(مسئله ۲- مشتق: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۳)

۴

۳

۲✓

۱

$$m_{\text{مماس}} = f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4$$

$$x=1 \text{ در } y - f(1) = m_{\text{مماس}}(x-1) \text{ معادله خط مماس}$$

$$\Rightarrow y - 3 = 4(x-1) \Rightarrow y = 4x - 1$$

$$\Rightarrow -1 = \text{عرض از مبدأ}$$

(مسابان ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x = 2$ برابر $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ است، پس

$$f'(2) = \frac{1}{2} \text{ می‌باشد. حال داریم:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2) - (f(2-h) - f(2))}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h}$$

$$= 2f'(2) = 1$$

نکته:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{h} = (m-n)f'(a)$$

(مسابقه ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۸۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

چون خط موردنظر، در نقطه $x=1$ بر نمودار تابع f مماس است، پس

داریم:

$$f(1) = 4(1) + 3 = 7, f'(1) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) - 11f(x) - 21}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - 7)(2f(x) + 3)}{2(x-1)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) + 3) = \frac{1}{2} f'(1) (2f(1) + 3)$$

$$= \frac{1}{2} \times 4(2 \times 7 + 3) = 34$$

(مسئله ۲- مشتق: صفحه‌های ۷۱ تا ۸۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

(معمدهری مسن زاده طبری)

۱۰۱- حسابان

با معلوم بودن مختصات رأس و کانون سهمی، سهمی به شکل یکتا مشخص می‌شود، یعنی می‌توان فاصله کانونی، خط هادی، محور تقارن و جهت باز شدن دهانه سهمی را تعیین کرد.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

(معمدهری صحت کار)

۱۰۲- حسابان

سهمی قائم و دهانه آن رو به بالا است. با توجه به این که $S(0,0)$ و $a = \frac{1}{4}$

است، در نتیجه معادله خط هادی سهمی به صورت $y = -\frac{1}{4}$ می‌باشد.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$y^2 = 6x \Rightarrow 4a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{فاصله کانون از خط هادی} = 2a = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

می‌دانیم فاصله هر نقطه واقع بر سهمی، از کانون و خط هادی سهمی یکسان

$$|AF| = \sqrt{(1-4)^2 + (2+2)^2} = 5 \quad \text{است. داریم:}$$

بنابراین خطی می‌تواند خط هادی این سهمی باشد که فاصله A از آن برابر ۵ باشد که در بین گزینه‌ها تنها فاصله نقطه A از خط $x = 7$ ، مخالف ۵ است، پس خط $x = 7$ نمی‌تواند خط هادی این سهمی باشد.

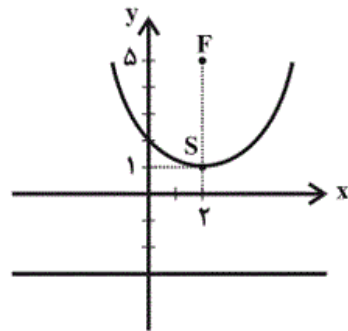
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱



با توجه به تعریف سهمی، نقطه $F(2,5)$ کانون و خط $y = -3$ ، خط هادی سهمی است. مطابق شکل رأس سهمی، نقطه $S(2,1)$ است و سهمی قائم بوده و دهانه آن رو به بالا باز می‌شود. کم‌ترین مقدار y متعلق به رأس سهمی است، پس $y_{\min} = 1$ می‌باشد.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

$$y^2 - my + x = 0 \Rightarrow y^2 - my = -x$$

$$\Rightarrow y^2 - my + \frac{m^2}{4} = -x + \frac{m^2}{4} \Rightarrow (y - \frac{m}{2})^2 = -(x - \frac{m^2}{4})$$

بنابراین سهمی افقی و دهانه آن رو به چپ است و $S(\frac{m^2}{4}, \frac{m}{2})$ رأس سهمی

و $a = \frac{1}{4}$ فاصله کانونی سهمی است. پس کانون سهمی، نقطه

$F(-\frac{1}{4} + \frac{m^2}{4}, \frac{m}{2})$ است. کانون سهمی روی نیمساز ناحیه‌های اول و سوم

قرار دارد، در نتیجه داریم:

$$y_F = x_F \Rightarrow \frac{m}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{m^2}{4} \xrightarrow{\times 4} 2m = -1 + m^2$$

۴ ✓

۳

۲

۱

$$y^2 = 4x - 4 \Rightarrow y^2 = 4(x - 1)$$

رأس سهمی، نقطه $S(1, 0)$ و فاصله کانونی سهمی $a = 1$ است. سهمی افقی و دهانه آن رو به راست است. بنابراین داریم:

$$F(a + h, k) = (1 + 1, 0) = (2, 0) \text{ : کانون سهمی}$$

$$\text{معادله دایره: } (x - 2)^2 + y^2 = 9 \xrightarrow{y^2 = 4x - 4} (x - 2)^2 + 4x - 4 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x - 4 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

چون سهمی رو به راست باز می‌شود و کم‌ترین مقدار x آن (طول رأس سهمی) برابر ۱ است، پس نقطه‌ای به طول (-3) روی سهمی وجود ندارد. در نتیجه طول هر دو نقطه تلاقی سهمی و دایره برابر ۳ است.

(هنر سه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

با توجه به این که نقاط $A(0, 2)$ و $B(0, 1)$ به سهمی تعلق دارند، پس خط $y = \frac{3}{2}$ محور تقارن سهمی است و در نتیجه عرض رأس سهمی برابر $\frac{3}{2}$ می باشد. با توجه به این که دهانه سهمی رو به راست است، داریم:

$$(y - \frac{3}{2})^2 = 4a(x - h) \quad \text{معادله سهمی}$$

$$A(0, 2) \Rightarrow (2 - \frac{3}{2})^2 = 4a(0 - h) \Rightarrow \frac{1}{4} = -4ah \quad (*)$$

$$C(2, 0) \Rightarrow (0 - \frac{3}{2})^2 = 4a(2 - h) \Rightarrow \frac{9}{4} = 8a - 4ah$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{9}{4} = 8a + \frac{1}{4} \Rightarrow 8a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه های ۵۰ تا ۵۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امیرمسین ابومصوب)

با توجه به مختصات کانون و خط هادی سهمی، $S(-\frac{3}{2}, 0)$ و $a = \frac{3}{2}$ است و دهانه سهمی رو به راست باز می شود، بنابراین داریم:

$$(y - 0)^2 = 4(\frac{3}{2})(x + \frac{3}{2}) \Rightarrow y^2 = 6(x + \frac{3}{2})$$

$$\xrightarrow{x=0} y^2 = 6 \times \frac{3}{2} = 9 \Rightarrow y = \pm 3$$

بنابراین اگر نقاط تلاقی سهمی با محور y ها را A و B بنامیم، آنگاه $A(0, 3)$ و $B(0, -3)$ بوده و در نتیجه فاصله این دو نقطه از یکدیگر (طول پاره خط AB) برابر است با:

$$|y_A - y_B| = |3 - (-3)| = 6$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه های ۵۰ تا ۵۵)

۴

۳ ✓

۲

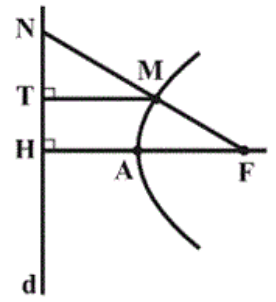
۱

(کیوان دارابی)

 $M \Rightarrow MT = MF$ روی سهمی است $A \Rightarrow FA = AH$ روی سهمی است

$$MT \parallel FH \Rightarrow \frac{MT}{FH} = \frac{NM}{FN} \Rightarrow \frac{FN}{FH} = \frac{NM}{MT}$$

$$\Rightarrow \frac{FN}{FA} = \frac{NM}{MT} = \frac{NM}{MF} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{FN}{FA} = \frac{NT}{TH}$$



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۴

۳

۲

۱✓

(سیرمحمودرضا اسلامی)

ابتدا با توجه به ریشه‌های تابع درجه دوم، ضابطه تابع را می‌نویسیم:

$$y = a(x+2)(x-5) \xrightarrow[y=1]{x=0} 1 = a \times (-10) \Rightarrow a = -\frac{1}{10}$$

پس ضابطه تابع به صورت $y = -\frac{(x+2)(x-5)}{10}$ است. بیش‌ترین

ضخامت عدسی، عرض مربوط به رأس سهمی است؛ بنابراین داریم:

$$x_S = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y_{\max} = \frac{\frac{3}{2} \times -\frac{3}{2}}{-10} = \frac{49}{40} = 1/225$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۴

۳

۲✓

۱

(میلاد سجادی لاریجانی)

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right) = \left(-\frac{2b}{3}, -\frac{b^2-3}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{2b}{3} > 0 \Rightarrow b < 0 \\ -\frac{b^2-3}{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{3} < b < 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{رأس بالای نیمساز ناحیه اول باشد} \Rightarrow -\frac{b^2-3}{3} > -\frac{2b}{3}$$

$$\Rightarrow b^2 - 2b - 3 < 0 \Rightarrow -1 < b < 3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} -1 < b < 0$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۹۳)

۴✓

۳

۲

۱

عبارت P ، در اطراف $x = -2$ تغییر علامت می‌دهد، بنابراین $x = -2$ ریشه معادله $P = 0$ است. همچنین عبارت P ، در اطراف $x = c$ ، تغییر علامت نمی‌دهد. این یعنی $x = c$ ریشه مضاعف معادله $P = 0$ است. با توجه به حضور عبارت $(2x - 1)$ ، نتیجه می‌شود که $c = \frac{1}{2}$ ریشه مضاعف $P = 0$ است؛ بنابراین داریم:

$$P = (2x - 1)(ax^2 + 3x + b) = A(2x - 1)(2x - 1)(x + 2)$$

$$= A(2x - 1)(2x^2 + 3x - 2) \Rightarrow A = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow abc = -2$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

۴

۳

۲

۱✓

$$\frac{-x - 2m}{x^2 + 1} < 1 - m \xrightarrow{x^2 + 1 > 0} -x - 2m < (x^2 + 1)(1 - m)$$

$$\Rightarrow -x - 2m < x^2 - mx^2 + 1 - m \Rightarrow (m - 1)x^2 - x - m - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a < 0 \Rightarrow m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1 \\ \Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (-1)^2 - 4(m - 1)(-m - 1) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 + 4m^2 - 4 < 0 \Rightarrow 4m^2 < 3 \Rightarrow m^2 < \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < m < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

۴

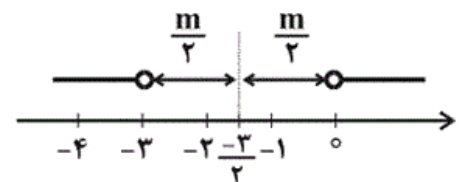
۳✓

۲

۱

$$x < \frac{-3}{2} - \frac{m}{2} \text{ یا } x > -\frac{3}{2} + \frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq -\frac{3}{2} + \frac{m}{2} < 1 \Rightarrow 3 \leq m < 5$$



(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

۴

۳

۲✓

۱

$$\left. \begin{aligned} P = ab = \frac{b}{3} \xrightarrow{b \neq 0} a = \frac{1}{3} \\ S = a + b = -\frac{a}{3} \xrightarrow{a = \frac{1}{3}} \frac{1}{3} + b = -\frac{1}{9} \Rightarrow b = -\frac{4}{9} \end{aligned} \right\} \Rightarrow ab = -\frac{4}{27}$$

(مسئله ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴

۳✓

۲

۱

(کیان کریمی فراسانی)

-۹۷

$$\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{x + \sqrt{x}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{x^2 - x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2x^2 - 2x = 6x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق. غ.} \\ x = 4 \end{cases}$$

(مسئله ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۲)

۴

۳

۲

۱✓

(کیان کریمی فراسانی)

-۹۸

$$x + \frac{4}{x} - 1 = 3\sqrt{x + \frac{4}{x} - 3} \xrightarrow{x + \frac{4}{x} = t} t - 1 = 3\sqrt{t - 3}$$

$$\Rightarrow (t - 1)^2 = 9(t - 3) \Rightarrow t^2 - 11t + 28 = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ یا } 7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 4 \Rightarrow x + \frac{4}{x} = 4 \Rightarrow x^2 + 4 = 4x \\ t = 7 \Rightarrow x + \frac{4}{x} = 7 \Rightarrow x^2 + 4 = 7x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x^2 - 7x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

بنابراین معادله، ۳ جواب حقیقی متمایز دارد.

(مسئله ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۲)

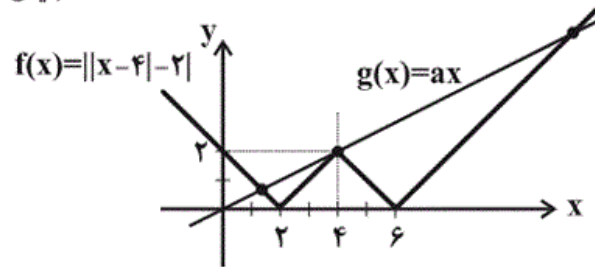
۴

۳✓

۲

۱

(کیان کریمی فراسانی)



پس، تنها در حالتی که نمودار g از نقطه $(4, 2)$ بگذرد، نمودارها در ۳ نقطه

یکدیگر را قطع می کنند: $\Rightarrow g(4) = 2 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

(مسابان ۱- چبر و معادله: صفحه های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کیان کریمی فراسانی)

$$m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow a = 2a - 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \begin{cases} AB: -y + 2x + 6 = 0 \\ CD: -y + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$CD \text{ و } AB \text{ فاصله} = \text{طول ضلع مربع} = \frac{|6-1|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مربع} = (\sqrt{5})^2 = 5$$

(مسابان ۱- چبر و معادله: صفحه های ۲۹ تا ۳۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

طبق رابطه‌های مربوط به طول مماس مشترک‌های داخلی و خارجی داریم:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} : \text{طول مماس مشترک داخلی}$$

$$= \sqrt{20^2 - (14 + 2)^2} = 12$$

$$MM' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} : \text{طول مماس مشترک خارجی}$$

$$= \sqrt{20^2 - (14 - 2)^2} = 16$$

$$\frac{TT'}{MM'} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳

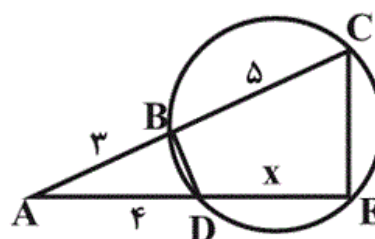
۲✓

۱

یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف‌های تمامی اضلاع

آن در یک نقطه هم‌رس باشند، بنابراین یک دایره از رئوس چهارضلعی

BCED می‌گذرد.



طبق روابط طولی در دایره، اگر $DE = x$ فرض شود، داریم:

$$AB \times AC = AD \times AE \Rightarrow 3 \times 8 = 4(4 + x)$$

$$\Rightarrow 4 + x = 6 \Rightarrow x = 2$$

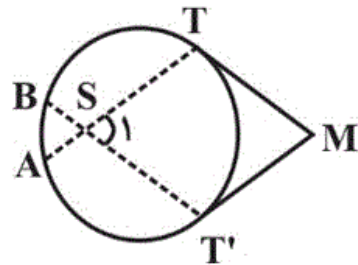
(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۸، ۱۹ و ۲۴)

۴

۳

۲

۱✓



چهارضلعی $MTST'$ متوازی الاضلاع است. $\left. \begin{array}{l} TS \parallel MT' \\ T'S \parallel MT \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{S}_1 = \hat{M}$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{TT'} + 36^\circ}{2} = \frac{(36^\circ - \widehat{TT'}) - \widehat{TT'}}{2} \Rightarrow 3\widehat{TT'} = 33^\circ$$

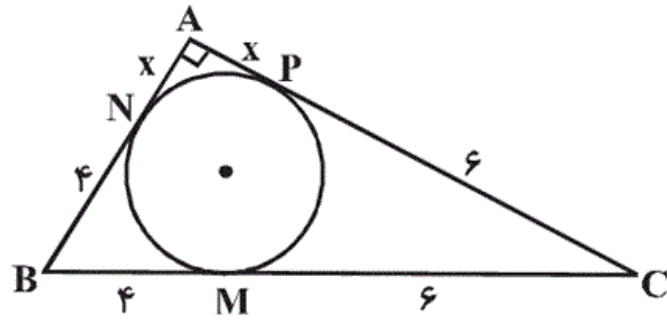
$$\Rightarrow \widehat{TT'} = 11^\circ$$

۴ ✓

۳

۲

۱



طول مماس‌های رسم شده بر یک دایره از هر نقطهٔ خارج آن با هم برابر است، لذا داریم:

$$BM = BN = 4, CM = CP = 6, AN = AP = x$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow (x+4)^2 + (x+6)^2 = 100$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 20x + 52 = 100 \Rightarrow x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x+12)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -12 & \text{غ.ق.ق} \\ x = 2 & \text{ق.ق} \end{cases}$$

$$AC = AP + CP = 2 + 6 = 8$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۹، ۲۰، ۲۵ و ۲۶)

۴

۳✓

۲

۱

طول مماس‌های رسم شده بر یک دایره از هر نقطهٔ خارج آن با هم برابرند، بنابراین داریم:

$$BE = BD = 3 \Rightarrow AE = 12 + 3 = 15$$

$$AF = AE = 15 \Rightarrow CF = 15 - 13 = 2 \Rightarrow CD = 2$$

در نتیجه مثلث ABC قائم‌الزاویه است، زیرا داریم:

$$13^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$$

در صورتی که S و P به ترتیب مساحت و نصف محیط مثلث ABC باشند، شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P = \frac{13 + 12 + 5}{2} = 15$$

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$$

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{30}{15 - 5} = \frac{30}{10} = 3$$

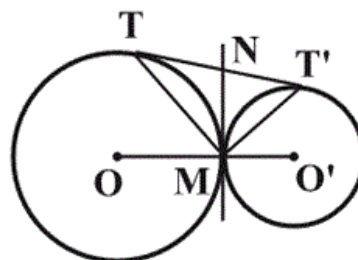
(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۹، ۲۰، ۲۵ و ۲۶)

۴

۳

۲

۱ ✓



می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده بر یک دایره از هر نقطهٔ خارج آن برابر یکدیگرند. مطابق شکل، اگر مماس مشترک داخلی دو دایره، مماس مشترک خارجی آنها را در نقطهٔ N قطع نماید، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{NT} = \mathbf{NM} \\ \mathbf{NT}' = \mathbf{NM} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{NT} = \mathbf{NT}' \\ \mathbf{MN} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{TT}' \end{array} \right.$$

بنابراین در مثلث MTT' ، میانه نظیر ضلع TT' و طول آن نصف طول ضلع TT' است، پس این مثلث قائم‌الزاویه است $(\widehat{TMT'} = 90^\circ)$. از طرفی در دو دایره مماس خارج به شعاع R و R' ، طول مماس مشترک خارجی برابر $2\sqrt{RR'}$ است، بنابراین داریم:

$$\mathbf{MT}^{\mathsf{T}} + \mathbf{MT}^{\mathsf{T}\mathsf{T}} = \mathbf{TT}^{\mathsf{T}} = \left(\mathbf{r} \sqrt{\mathbf{RR}'} \right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{r} \mathbf{RR}' = \mathbf{r} \times \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{r} \mathbf{r}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

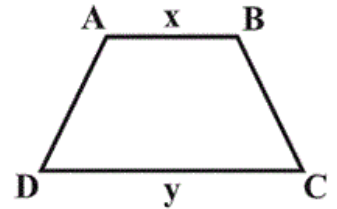
1

طبق تمرین کتاب درسی، اندازه مساحت دوزنقه‌ای که هم محاطی و هم محیطی است، برابر حاصل ضرب میانگین حسابی و میانگین هندسی دو قاعده دوزنقه است. اگر S مساحت و P نصف محیط دوزنقه باشد، آنگاه داریم:

$AD + BC = AB + CD = x + y$: چهارضلعی $ABCD$ محیطی است.

$$\Rightarrow P = \frac{2(x+y)}{2} = x+y$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{x+y}{2} \times \sqrt{xy}}{x+y} = \frac{\sqrt{xy}}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$



(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۴

۳

۲✓

۱

AE قطر دایره و مثلث ABE قائم‌الزاویه است و داریم:

$$\Delta ABE : AE^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow AE = 10 \Rightarrow r = 5$$

Δ مساحت نیم‌دایره + مساحت ABE = مساحت ناحیه رنگی

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 + \frac{1}{2} \pi \times 5^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 + \frac{1}{2} \pi \times 5^2 = 24 + \frac{25\pi}{2}$$

(هندسه ۲- دایره: مشابه تمرین ۶ صفحه ۲۳)

۴

۳✓

۲

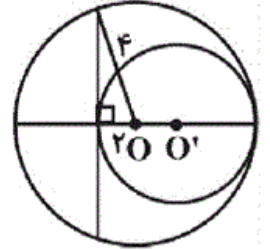
۱

طول هر وتر در دایره به فاصله مرکز دایره از آن وتر، بستگی دارد. بدین صورت که هر چه قدر وتر به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد، طولش بیش‌تر است. پس وتر مذکور باید از مرکز دایره بزرگ‌تر، کم‌ترین فاصله را داشته باشد، یعنی بر خط واصل دو مرکز، عمود باشد. داریم:

$۲ =$ فاصله وتر موردنظر از مرکز دایره بزرگ‌تر

$۴ =$ شعاع دایره بزرگ‌تر

$$\Rightarrow \text{طول وتر} = ۲\sqrt{۴^۲ - ۲^۲} = ۴\sqrt{۳}$$



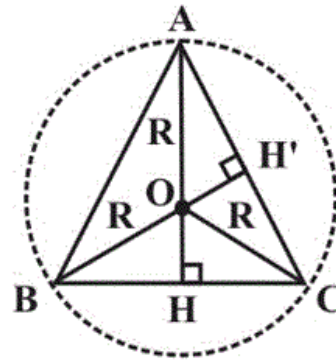
(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۷ و ۲۰)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱



مطابق شکل، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس مرکز دایرهٔ محیطی آن (نقطهٔ O) روی این ارتفاع (و یا امتداد آن) قرار دارد. با توجه به فرض داریم:

$$\Delta_{OHC} : CH = \frac{BC}{2} = 4, OH = 3$$

$$\Rightarrow R = OC = \sqrt{OH^2 + CH^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\Delta_{AHC} : AH = R + OH = 5 + 3 = 8$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}$$

$$\Delta_{OAH'} : AH' = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow OH' = \sqrt{R^2 - AH'^2} = \sqrt{25 - 20} = \sqrt{5}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

۳

۲

۱ ✓