



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضیات گسسته دوازدهم، آشنایی با نظریه‌ی اعداد - ۵ سوال

۱۵۱- چند زوج مرتب (a, b) از اعداد صحیح و ناصفر وجود دارد به گونه‌ای که رابطه $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار باشد؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۱۵۲- چند عدد طبیعی وجود دارد که باقی‌مانده تقسیم ۹۶ بر هر یک از آنها، برابر ۶ باشد؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۱۵۳- باقی‌مانده تقسیم $12^{100} - 7^{100} + 5^{100}$ بر عدد ۳۵ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۱۵۴- به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n ، دو عدد $11n + 7$ و $9n + 2$ نسبت به هم اول‌اند؟

- (۱) ۸۷ (۲) ۸۸ (۳) ۸۹ (۴) ۹۰

۱۵۵- اگر a و b اعدادی صحیح باشند و معادله $ax + by = 5$ در مجموعه اعداد صحیح جواب داشته باشد، آنگاه کدام یک از

معادلات سیاله زیر ممکن است در $\mathbb{Z}$ جواب نداشته باشد؟

- (۱) $ax + by = 10$ (۲) $ax + by = a$ (۳) $ax + by = 7$ (۴) $ax + by = 3ab$

ریاضیات گسسته دوازدهم، گراف و مدل سازی - ۵ سوال

۱۵۶- در یک گراف ساده، $q = 32$ و $\Delta = 4$ است. اگر مجموع درجات رئوس زوج این گراف برابر ۵۴ باشد، آنگاه تعداد رئوس درجه

فرد این گراف کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۵۷- اگر درجه رأس a در گراف‌های G و $\bar{G}$ ، به ترتیب برابر ۲ و ۵ باشد، آنگاه حداکثر اندازه گراف G کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۲۵ (۳) ۲۳ (۴) ۲۲

۱۵۸- اگر مرتبهٔ گراف G برابر ۸ و $|N_G[v]| = 4$ و $\forall v \in V(G)$ باشد، اندازهٔ این گراف کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) چنین گرافی وجود ندارد.

۱۵۹- در گراف K_6 که در آن $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ است، چند مسیر از رأس a به رأس b وجود دارد که رأس e عضوی از آن مسیر نباشد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۱۶۰- گراف G از مرتبهٔ ۱۰ مفروض است. اگر a و b دو رأس از این گراف باشند به گونه‌ای که با حذف یال ab ، گراف ناهمبند شود، آنگاه حداکثر اندازهٔ گراف G کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۱ (۳) ۳۶ (۴) ۳۷

حسابان دوازدهم، مثلثات - ۱۰ سوال

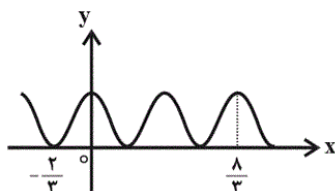
۱۰۹- تابع $y = a \cos(bx) + c$ در سه نقطه از بازهٔ $(0, 2\pi)$ بر محور x ها مماس است. حداکثر مقدار b کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{4}{5}$

۱۱۰- دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\sin x} + \frac{\cos^3 x}{\cos x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) 2π

۱۱۱- قسمتی از نمودار تابع $y = 2 + a \cos(b\pi x)$ به صورت زیر است. حاصل $|ab|$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

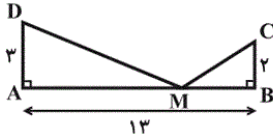
۱۱۲- اگر $\frac{3\pi}{8} < \alpha \leq \frac{5\pi}{8}$ و $\tan 2\alpha = \frac{-m+1}{2}$ باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $[-3, 1]$ (۲) $[-3, 1)$ (۳) $(-1, 3]$ (۴) $[-1, 3)$

۱۱۳- اگر $\tan(\alpha + 80^\circ) = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan(55^\circ - \alpha)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۳ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) -۳

۱۱۴- در شکل مقابل، فاصله نقطه M از نقطه A کدام می‌تواند باشد تا زاویه $\widehat{CMD}$ برابر 135° باشد؟ (اندازه پاره‌ها در شکل



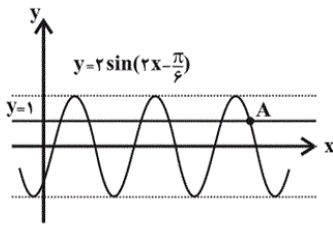
فرضی است)

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۵

۱۱۵- معادله $\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{5}{8} - \cos^2 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۸

۱۱۶- با توجه به نمودار مقابل، طول نقطه A کدام است؟



- (۱) $\frac{13\pi}{6}$ (۲) $\frac{7\pi}{3}$ (۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۴) $\frac{19\pi}{6}$

۱۱۷- معادله $\frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x} = \tan \frac{\pi}{8}$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۱۸- مجموع جواب‌های معادله $\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{5}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

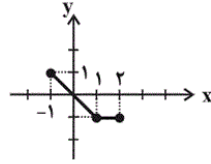
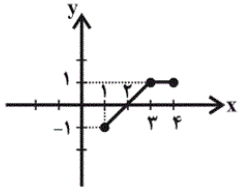
- (۱) 2π (۲) $\frac{5\pi}{2}$ (۳) 3π (۴) $\frac{7\pi}{2}$

۱۰۱- نقطه $A(4, 5)$ روی نمودار $y = f(1-x) + a$ و نقطه $A'(b, 4)$ ، متناظر با آن روی نمودار $y = f(2x-1)$ قرار دارد. $a+b$

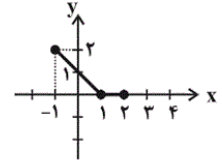
کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) صفر

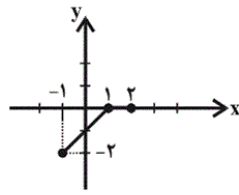
۱۰۲- شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x-2) + 1$ را نشان می‌دهد. نمودار تابع $y = -f(x)$ کدام است؟



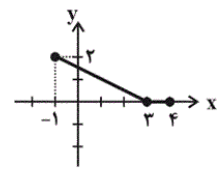
(۲)



(۱)



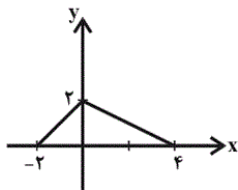
(۴)



(۳)

۱۰۳- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $y = f(x - |x|)$ ، محور x ها و خط

$x = 5$ کدام است؟



(۲) ۹

(۱) ۸

(۴) ۱۱

(۳) ۱۰

۱۰۴- چند عدد صحیح می‌توان به جای a قرار داد، به طوری که تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} + 1 & ; x < 0 \\ a & ; x = 0 \\ ax - 1 & ; x > 0 \end{cases}$ اکیداً یکنوا شود؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) ۳

(۳) ۲

۱۰۵- اگر f تابعی نزولی غیر ثابت باشد که نمودار آن بالای محور x ها قرار دارد، توابع $g(x) = x - f(x)$ و $h(x) = \frac{1}{f(-x)}$

به ترتیب چگونه‌اند؟

(۲) صعودی - صعودی

(۱) صعودی - نزولی

(۴) نزولی - صعودی

(۳) نزولی - نزولی

۱۰۶- تابع چندجمله‌ای $y = f(x)$ اکیداً صعودی است و نمودار آن از نقاط $A(-4, -2)$ و $B(3, 2)$ می‌گذرد. دامنه تابع

$$y = \sqrt{4 - (f(x))^2}$$
 شامل چند عدد صحیح است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۱۱ (۱)

۱۰۷- چندجمله‌ای $f(2x-1)$ بر $x-2$ بخش پذیر است. چند جمله‌ای $f(x)$ لزوماً بر کدام یک از عوامل زیر بخش پذیر است؟

$x-1$ (۲)

x (۱)

$x-3$ (۴)

$x-2$ (۳)

۱۰۸- اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^2 - ax^2 + bx + 1$ بر چندجمله‌ای‌های $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم $p(x)$

بر چندجمله‌ای $2x-1$ کدام است؟

صفر (۴)

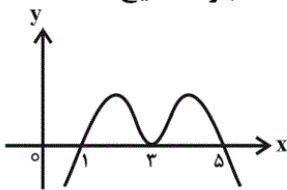
۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

حسابان دوازدهم، حد های نامتناهی - حد در بی نهایت - ۱۲ سوال

۱۱۹- نمودار تابع f به صورت شکل روبه‌رو است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x) - f(x-4)}$ کدام است؟ ($[]$ ، علامت جزء صحیح است).



$-\infty$ (۲)

$+\infty$ (۱)

-۱ (۴)

۱ (۳)

۱۲۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x] + [-x]}{|x-3|}$ کدام است؟ ($[]$ ، علامت جزء صحیح است)

$-\infty$ (۲)

-۱ (۱)

صفر (۴)

$+\infty$ (۳)

۱۲۱- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2 + ax + b + 1} = +\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۲ (۴)

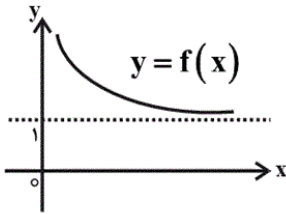
-۲ (۳)

۸ (۲)

-۶ (۱)

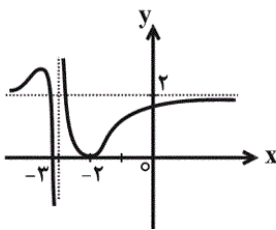
۱۲۲- مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[\frac{2}{1-x} \right]$ کدام است؟ ([]، علامت جزء صحیح است.)

- (۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) صفر (۴) -2



۱۲۳- با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \sqrt{f(x)}}{1 - f(x)}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -1 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$



۱۲۴- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{-x+1}{(f \circ f)(x) - 2}$ کدام است؟

- (۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۲۵- اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ و $f(x) = \frac{(m^2 - 1)x^4 + (2m + 3)x^2 + 2x^2 - 1}{mx + 5}$ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ± 1 (۲) ۱ (۳) -1 (۴) هیچ مقداری برای m وجود ندارد.

۱۲۶- تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{[x] + [-x]}$ دارای چند مجانب قائم است؟ ([]، علامت جزء صحیح است.)

- (۱) بی شمار (۲) ۷ (۳) ۵ (۴) مجانب قائم ندارد.

۱۲۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$ ، چند خط مجانب دارد؟

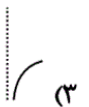
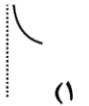
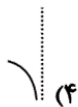
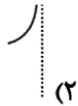
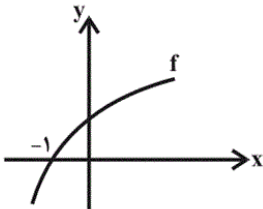
۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۱۲۸- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{f(x)}}$ در اطراف $x = -1$ به کدام صورت است؟



۱۲۹- خط $y = \frac{2}{3}$ ، معادله مجانب افقی تابع $y = \frac{ax^4 + 2x - 1}{(2a-1)x^4 + 3}$ است. مقدار a کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۱۳۰- اگر $x = -1$ تنها مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x^2 + ax + 1}$ باشد، محل برخورد مجانب های نمودار این تابع از مبدأ مختصات

چقدر فاصله دارد؟

$3\sqrt{2}$ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

$\sqrt{5}$ (۴)

$\sqrt{10}$ (۳)

هندسه ۳- دوازدهم، آشنایی با مقاطع مخروطی - ۷ سوال -

۱۳۴- دترمینان کدام یک از ماتریس‌های زیر برابر با صفر نیست؟ $(a, b, x, y, z \in \mathbb{R})$

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} a & a & a \\ x & y & z \\ b & b & b \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

۱۳۵- نقطه A و مربعی به ضلع ۲ واحد داخل صفحه مفروض‌اند. چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۱ واحد قرار داشته باشند؟

(۱) دقیقاً ۴ نقطه (۲) حداکثر ۴ نقطه (۳) دقیقاً ۲ نقطه (۴) حداکثر ۲ نقطه

۱۳۶- کدام یک از روابط زیر، معادله یک دایره است؟

$$(1) x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}x + 4y + 12 = 0 \quad (2) x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$$
$$(3) 2x^2 + 2y^2 - 4y + 2 = 0 \quad (4) 3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y + 3 = 0$$

۱۳۷- مرکز دایره‌گذرنده از نقطه $A(1, 2)$ روی خط $x + 2y = 3$ قرار دارد و خط $2x - y = 1$ بر دایره عمود است. شعاع این دایره کدام است؟

$$(1) 2 \quad (2) \sqrt{2} \quad (3) 1 \quad (4) \frac{\sqrt{5}}{2}$$

۱۳۸- دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 28 = 0$ مفروض است. معادله خط شامل کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطه $A(1, 3)$ در این دایره کدام است؟

$$(1) x - 5y + 14 = 0 \quad (2) x - 5y - 12 = 0 \quad (3) 5x + y - 8 = 0 \quad (4) 5x + y + 6 = 0$$

۱۳۹- دایره C به مرکز $O(1, -1)$ بر خط به معادله $3x - 4y + 3 = 0$ مماس است. معادله ضمنی این دایره کدام است؟

$$(1) x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \quad (2) x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$
$$(3) x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \quad (4) x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$$

۱۴۰- نقاط $(۳,۰)$ و $(-۳,۰)$ کانون‌های یک بیضی هستند. اگر نقطه $(۳,۲)$ روی این بیضی واقع باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{۱۰}-۲}{۳}$

(۳) $\frac{\sqrt{۱۰}-\sqrt{۳}}{۳}$

(۲) $\frac{\sqrt{۱۰}-۱}{۳}$

(۱) $\frac{\sqrt{۱۰}-۳}{۳}$

هندسه ۳- دوازدهم ، ماتریس، و کاربردها - ۳ سوال

۱۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $A^{۱۳۹۷}$ کدام است؟

(۴) $۱۳۹۷A$

(۳) $۳^{۱۳۹۷}I$

(۲) $۳^{۱۳۹۶}A$

(۱) $۳^{۱۳۹۷}A$

۱۳۲- اگر A و B دو ماتریس مربعی از مرتبه ۲ باشند به طوری که $A^{-۱} + ۲B^{-۱} = I$ ، آنگاه کدام رابطه همواره صحیح است؟

(۲) $A + ۲B = AB$

(۱) $A + ۲B = I$

(۴) $۲A + B = AB$

(۳) $۲A + B = I$

۱۳۳- در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = ۱ \\ cx + dy = -۱ \end{cases}$ ، رابطه $ad - bc = ۱$ برقرار است. مقدار x کدام است؟

(۴) $b - d$

(۳) $b + d$

(۲) $a + c$

(۱) $-c - a$

هندسه ۳ - دوازدهم - گواه ، آشنایی با مقاطع مخروطی - ۶ سوال -

۱۴۵- در صفحه مثلث ABC ، چند خط وجود دارد که هر سه نقطه A ، B و C از آن به یک فاصله باشند؟

(۲) ۱

(۱) هیچ

(۴) بی شمار

(۳) ۳

۱۴۶- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، منحنی به معادله $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ ، یک دایره است؟

(۱) $\{-3\}$

(۲) $\{3\}$

(۴) $\emptyset$

(۳) $\{-3, 3\}$

۱۴۷- دسته خطوط به معادلات $(m+2)y + (m+1)x + 1 = 0$ ، قطرهای یک دایره‌اند. اگر این دایره از نقطه $(5, 2)$ بگذرد، شعاع آن

کدام است؟

(۴) $3\sqrt{2}$

(۳) $2\sqrt{3}$

(۲) ۵

(۱) ۴

۱۴۸- طول قطعه مماسی که از نقطه $A(4, 1)$ بر دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ رسم می‌شود، کدام است؟

(۴) $2\sqrt{3}$

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

۱۴۹- به ازای کدام مقدار a ، دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 4x = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0$ مماس برون‌اند؟

(۴) ۸

(۳) ۷

(۲) ۶

(۱) ۵

۱۵۰- اگر $A(3, -1)$ و $A'(-7, -1)$ دو سر قطر بزرگ یک بیضی و $F(2, -1)$ یکی از کانون‌های آن باشد، مساحت چهارضلعی

$BFB'F'$ کدام است؟ (B و B' دو سر قطر کوچک بیضی و F' کانون دیگر آن است).

(۴) ۴۸

(۳) ۳۶

(۲) ۲۴

(۱) ۱۲

هندسه ۳ - دوازدهم - گواه ، ماتریس، و کاربردها - ۴ سوال

۱۴۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، درایه سطر اول و ستون سوم ماتریس ABC

کدام است؟

(۴) ۱۲۰

(۳) ۸۰

(۲) ۷۵

(۱) ۲۱

۱۴۲- از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، سطر اول ماتریس A کدام است؟

(۴) $\begin{bmatrix} 31 & 19 \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} 31 & 17 \end{bmatrix}$

(۲) $\begin{bmatrix} 21 & 19 \end{bmatrix}$

(۱) $\begin{bmatrix} 21 & 17 \end{bmatrix}$

۱۴۳- به ازای کدام رابطه بین a، b و c، دستگاه $\begin{cases} ax + by = 0 \\ (a + b)x + cy = 0 \end{cases}$ جواب‌های غیرصفر نیز دارد؟

(۲) $ac = b^2 - c^2$

(۱) $b^2 = ab + ac$

(۴) $ac = b^2 + c^2$

(۳) $b^2 = ac - ab$

۱۴۴- اگر $|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 1 & b & -1 \\ 3 & 4 & c \end{vmatrix} = 3$ باشد، آنگاه حاصل $\begin{vmatrix} -3a & 12 & -9 \\ 1 & -2b & -1 \\ 3 & -8 & c \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۲) ۱۸

(۱) -۱۸

(۴) -۶

(۳) -۹

(علیرضا شریف فطیپی)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2 = ab \quad (*)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = ab \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 0$$

$$\xrightarrow{(*)} a^2 + b^2 + (a+b)^2 = 0$$

رابطهٔ اخیر به ازای هیچ زوج مرتبی مانند (a, b) که در آن a و b اعداد

صحیح و غیرصفر باشند، برقرار نیست.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

طبق قضیه تقسیم، $a = bq + r$ است که $0 \leq r < b$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$96 = bq + 6 \Rightarrow 90 = bq \Rightarrow q = \frac{90}{b} \quad (b > 6)$$

یعنی b یکی از مقسوم‌علیه‌های 90 می‌باشد که از 6 بزرگ‌تر است.

$$b = 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90$$

پس برای b ، 7 عدد طبیعی وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

اگر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ باشند، آنگاه رابطه $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$ برقرار است.

اگر به جای a و b ، اعداد 5 و 7 و به جای n ، عدد 100 را قرار دهیم، داریم:

$$(5+7)^{100} \equiv 5^{100} + 7^{100} \pmod{35}$$

$$12^{100} \equiv 5^{100} + 7^{100} \Rightarrow 5^{100} + 7^{100} - 12^{100} \equiv 0 \pmod{35}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ مشابه تمرین ۷ صفحه ۲۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

فرض کنید ب.م.م این دو عدد برابر d باشد. در این صورت داریم:

$$(11n + 7, 9n + 2) = d$$

$$\left. \begin{array}{l} d \mid 11n + 7 \xrightarrow{\times 9} d \mid 99n + 63 \\ d \mid 9n + 2 \xrightarrow{\times 11} d \mid 99n + 22 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 41$$

بنابراین $d = 1$ یا $d = 41$ است. حال مقادیری از n را پیدا می‌کنیم که

$d = 41$ باشد.

$$41 \mid 9n + 2 \Rightarrow 9n + 2 \equiv 0 \pmod{41} \Rightarrow 9n \equiv -2 \equiv 39 \pmod{41} \xrightarrow[\substack{\div 3 \\ (41, 3)=1}]{\div 3} 3n \equiv 13 \pmod{41}$$

$$\Rightarrow 3n \equiv 54 \pmod{41} \xrightarrow[\substack{\div 3 \\ (41, 3)=1}]{\div 3} n \equiv 18 \pmod{41} \Rightarrow n = 41k + 18$$

بنابراین به ازای $n = 18$ و $n = 59$ ، دو عدد نسبت به هم اول نیستند و به

ازای $90 - 2 = 88$ عدد طبیعی دو رقمی، نسبت به هم اول می‌باشند.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳، ۲۴ و ۲۵)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

اگر $(a, b) = d$ باشد، آنگاه با توجه به این که معادله $ax + by = 5$ در

$\mathbb{Z}$ دارای جواب است، پس $d \mid 5$. در نتیجه داریم:

گزینه «۱»: $d \mid 5$ و $5 \mid 10$ ، پس $d \mid 10$ و در نتیجه معادله $ax + by = 10$

قطعاً در $\mathbb{Z}$ دارای جواب است.

گزینه «۲»: $d = (a, b)$ است، پس $d \mid a$ و در نتیجه معادله $ax + by = a$

قطعاً در $\mathbb{Z}$ دارای جواب است.

گزینه «۴»: $d \mid a$ ، پس $d \mid 3ab$ و در نتیجه معادله $ax + by = 3ab$

قطعاً در $\mathbb{Z}$ دارای جواب است.

اما وجود جواب برای معادله $ax + by = 7$ قطعی نیست.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریۀ اعداد؛ صفحه‌های ۱۳ و ۲۶ تا ۳۰)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

می‌دانیم مجموع درجات رئوس گراف، دو برابر تعداد یال‌های آن است. اگر مجموع درجات رئوس زوج را با A و مجموع درجات رئوس فرد گراف را با B نمایش دهیم، داریم:

$$2q = A + B \Rightarrow 64 = 54 + B \Rightarrow B = 10$$

با توجه به این که $\Delta = 4$ است، پس این گراف نمی‌تواند رأسی با درجه بزرگ‌تر از ۴ داشته باشد، بنابراین رئوس فرد گراف فقط می‌توانند از درجه ۱ یا ۳ باشند. اعداد گزینه‌های دیگر بر اساس حالت‌های زیر امکان‌پذیر هستند:

گزینه «۲»: گراف سه رأس درجه ۳ و یک رأس درجه ۱ داشته باشد.

گزینه «۳»: گراف دو رأس درجه ۳ و چهار رأس درجه ۱ داشته باشد.

گزینه «۴»: گراف یک رأس درجه ۳ و هفت رأس درجه ۱ داشته باشد.

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل‌سازی: مشابه فعالیت صفحه ۳۹ و ۴۰)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

می‌دانیم مجموع درجات هر رأس در یک گراف و مکمل آن برابر با $p-1$

است، یعنی داریم: $p-1=2+5 \Rightarrow p=8$

گراف کامل مرتبه ۸، دارای $\frac{8 \times 7}{2} = 28$ یال است. با توجه به درجه رأس

a در گراف $\bar{G}$ ، این گراف حداقل ۵ یال دارد و در نتیجه حداکثر اندازه

گراف مکمل آن یعنی گراف G برابر است با: $28-5=23$

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳✓

۲

۱

داریم: $2q = pr = 8 \times 3 = 24 \Rightarrow q = 12$

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۵ و ۳۶)

۴

۳

۲✓

۱

تعداد مسیرهای از رأس a به رأس b در گراف K_6 با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ که از رأس e عبور نکنند، معادل تعداد مسیرهای از رأس a به رأس b در گراف K_5 با مجموعه رئوس $V_1 = \{a, b, c, d, f\}$ است. داریم:

یک مسیر $a \rightarrow b$: مسیر به طول ۱

۳ مسیر $a \rightarrow \underset{3}{\bigcirc} \rightarrow b$: مسیر به طول ۲

۶ مسیر $a \rightarrow \underset{3 \times 2}{\bigcirc \rightarrow \bigcirc} \rightarrow b$: مسیر به طول ۳

۶ مسیر $a \rightarrow \underset{3 \times 2 \times 1}{\bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc} \rightarrow b$: مسیر به طول ۴

بنابراین تعداد کل مسیرها برابر است با:

$$1 + 3 + 6 + 6 = 16$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل سازی: صفحه ۳۸)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

حداکثر اندازهٔ یک گراف ناهمبند از مرتبهٔ p مربوط به حالتی است که گراف از یک رأس تنها و یک گراف کامل مرتبهٔ $p-1$ تشکیل شده باشد. حال اگر گراف با حذف یک یال، ناهمبند شود، یعنی رأس تنها را با یک یال به یکی از رئوس گراف K_{p-1} وصل کرده‌ایم. در این صورت، اندازهٔ گراف

مفروض برابر است با $1 + \frac{(p-1)(p-2)}{2}$. با فرض $p=10$ داریم:

$$q_{\max} = \frac{9 \times 8}{2} + 1 = 37$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل سازی: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

با توجه به نمودار مشخص است که $4T = 2\pi$ ، پس $T = \frac{2\pi}{4}$. از طرفی

می‌دانیم $T = \frac{2\pi}{|b|}$ ، پس نتیجه می‌شود حداکثر b برابر ۴ است.

(مسایان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

دامنه تابع، برابر است با $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. اکنون ضابطه تابع را

ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} \Rightarrow f(x) = \frac{\sin 3x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 3x}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin(3x + x)}{\frac{1}{2} \sin 2x} \Rightarrow f(x) = \frac{2 \sin 4x}{\sin 2x}$$

$$\Rightarrow f(x) = 4 \cos 2x; x \neq \frac{k\pi}{2}$$

دوره تناوب این تابع برابر است با $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

(مسایان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$y_{\min} = -|a| + 2 = 0 \Rightarrow |a| = 2$$

با توجه به نمودار، $\frac{5}{2}$ دوره تناوب این تابع برابر $\frac{10}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3}$ است؛

در نتیجه داریم:

$$\frac{5}{2}T = \frac{10}{3} \Rightarrow T = \frac{2 \times 10}{5 \times 3} = \frac{4}{3}$$

از طرفی دوره تناوب این تابع برابر است با $\frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|}$

$$\Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow |ab| = |a||b| = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

(مسائل ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

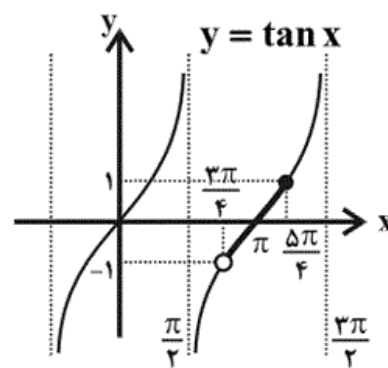
☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$\frac{3\pi}{4} < \alpha \leq \frac{\Delta\pi}{4} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} < 2\alpha \leq \frac{\Delta\pi}{4}$$



با توجه به شکل:

$$-1 < \tan 2\alpha \leq 1 \Rightarrow -1 < \frac{-m+1}{2} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m < 3$$

(مسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(کاظم اجلالی)

-۱۱۳

$$(\angle^\circ + \alpha) + (\angle^\circ - \alpha) = 135^\circ$$

$$\Rightarrow \tan(\angle^\circ - \alpha) = \tan(135^\circ - (\angle^\circ + \alpha))$$

$$= \frac{\tan 135^\circ - \tan(\angle^\circ + \alpha)}{1 + \tan 135^\circ \tan(\angle^\circ + \alpha)} = \frac{-\tan 45^\circ - \tan(\angle^\circ + \alpha)}{1 - \tan 45^\circ \tan(\angle^\circ + \alpha)}$$

$$= \frac{-1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = -3$$

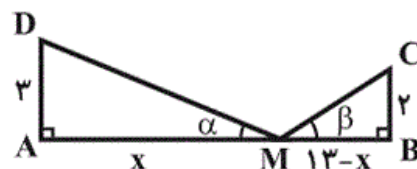
(مسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۴ ✓

۳

۲

۱



در شکل بالا برای اینکه زاویه $\widehat{CMD}$ برابر 135° گردد، $\alpha + \beta$ باید برابر با 45° باشد.

$$\alpha + \beta = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow 1 = \frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{13-x}}{1 - \frac{6}{x(13-x)}}$$

☐ ۴ ✓

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(سعید جعفری کافی آباد)

-۱۱۵

$$\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{5}{8} - \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x + 2 \cos^2 x = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + 2(1 - \sin^2 x) = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازه $[0, 2\pi]$ ، ۴ جواب دارد.

(مسابقان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

☐ ۴

☒ ۳ ✓

☐ ۲

☐ ۱

طول نقاط تلاقی $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ و $y = 1$ ، جواب‌های معادله

$$2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \text{ هستند، پس:}$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب‌های مثبت عبارت‌اند از:

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

ششمین جواب مثبت و طول نقطه A برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

(مسایان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\frac{1 + \tan 2x}{1 - \tan 2x} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan 2x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan 2x} = \tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \tan \frac{\pi}{8}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{8} \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{16}$$

$$0 \leq x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{16} \leq 2\pi \Rightarrow \frac{1}{8} \leq k \leq \frac{33}{8} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 1 \leq k \leq 4$$

بنابراین معادله در این بازه، ۴ جواب دارد.

(مسابقان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی شهرابی)

-۱۱۸

$$\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{(\sin x - \cos x)} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} \frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} \frac{5\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{13\pi}{12} + \frac{17\pi}{12} = \frac{36\pi}{12} = 3\pi$$

(مسابقان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

نقطه $(4, 5)$ روی نمودار $y = f(1-x) + a$ قرار دارد، پس:

$$5 = f(1-4) + a \Rightarrow f(-3) = 5 - a \Rightarrow (-3, 5-a) \in f$$

از طرفی نقطه $(b, 4)$ نیز روی نمودار $y = f(2x-1)$ قرار دارد، پس:

$$4 = f(2b-1) \Rightarrow (2b-1, 4) \in f$$

این دو نقطه متناظر با یک نقطه در تابع f هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} 2b-1 = -3 \\ 4 = 5-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow a+b = 0$$

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

☐ ۴ ✓

☐ ۳

☐ ۲

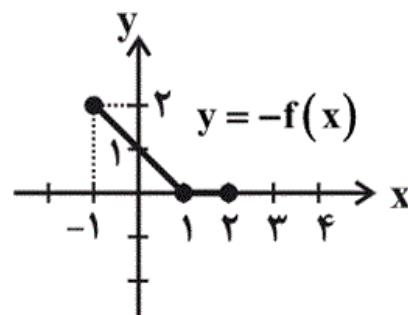
☐ ۱

برای پیدا کردن نمودار $y = f(x)$ از روی نمودار $y = f(x-2) + 1$ ، ابتدا

نمودار را دو واحد به طرف چپ و سپس یک واحد به طرف پایین انتقال

می‌دهیم. در نهایت نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم

تا نمودار $y = -f(x)$ به دست آید.



(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

☐ ۴

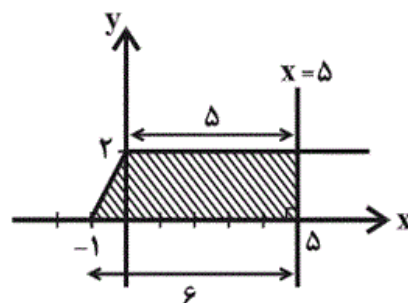
☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱ ✓

$$f(x - |x|) = \begin{cases} f(0) & ; x \geq 0 \\ f(2x) & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 & ; x \geq 0 \\ f(2x) & ; x < 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار $f(x - |x|)$ به صورت زیر است:



حال مساحت قسمت هاشورخورده برابر است با:

$$S = \frac{(5+6) \times 2}{2} = 11$$

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۴ ✓

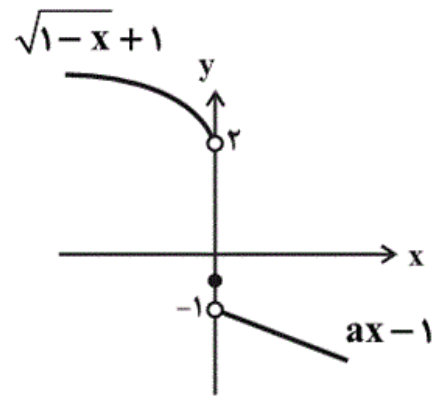
۳

۲

۱

می‌دانیم که تابع $y = \sqrt{1-x} + 1$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است. بنابراین برای اینکه f اکیداً نزولی باشد، لازم است خط $y = ax - 1$ نیز اکیداً نزولی باشد و این یعنی $a < 0$ است. در این صورت نمودار تابع f ، به صورت زیر

خواهد بود:



واضح است که a باید عضو بازه $(-1, 0)$ باشد؛ در نتیجه فقط عدد صحیح

$a = -1$ قابل قبول خواهد بود.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

f تابعی نزولی با مقادیر مثبت است، پس:

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{\text{نزولی}} f(x_1) \geq f(x_2) \xrightarrow{\times(-1)} -f(x_1) \leq -f(x_2)$$

پس اگر f نزولی باشد، تابع $-f$ صعودی است. از طرفی جمع دو تابع

صعودی، تابعی صعودی است، پس:

$$g(x) = x + (-f(x)) \Rightarrow g \text{ صعودی است.}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \xrightarrow{f \text{ نزولی}} f(-x_1) \leq f(-x_2)$$

$$\xrightarrow{\text{مقادیر } f \text{ مثبت اند.}} \frac{1}{f(-x_1)} \geq \frac{1}{f(-x_2)} \Rightarrow h(x_1) \geq h(x_2)$$

h نزولی است.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سید محمود رضا اسلامی)

$$(f(x))^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow f(-4) \leq f(x) \leq f(3)$$

$$\xrightarrow[\text{صعودی است.}]{f \text{ تابعی اکیداً}} -4 \leq x \leq 3$$

پس دامنه تابع، بازه $[-4, 3]$ و شامل ۸ مقدار صحیح است.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$f(2x-1) = (x-2)q(x) \xrightarrow{x=2} f(3) = 0$$

بنابراین $f(x)$ بر عبارت $x-3$ بخش پذیر است.

(مسابقان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱

۲

۳

۴ ✓

(کاظم ابلالی)

توجه کنید که باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x-2$ و $x+1$ به ترتیب برابر

$p(2)$ و $p(-1)$ است. پس:

$$\begin{cases} p(2) = 8 - 4a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 4a - 2b = 9 \\ p(-1) = -1 - a - b + 1 = 0 \Rightarrow a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{3}{2}, a = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow p(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $2x-1$ برابر $p\left(\frac{1}{2}\right)$ است.

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

(مسابقان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱

۲

۳

۴ ✓

ابتدا باید حد چپ و حد راست عبارت مورد نظر را در $x = 5$ به دست آوریم. بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x) - f(x-4)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x) - f(x-4)} = \frac{+1}{0^+} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x) - f(x-4)} = +\infty$$

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

(فرنود فارسی‌بانی)

۱۲۰ - فصل پنجم

توجه کنید که اگر $x \rightarrow 3$ ، $x \notin \mathbb{Z}$ و در نتیجه $[x] + [-x] = -1$ ؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x] + [-x]}{|x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{|x-3|}$$

صورت کسر عددی منفی است و حد مخرج کسر در $x = 3$ صفر می‌شود، اما مخرج، به دلیل حضور قدر مطلق همواره نامنفی است، پس در همسایگی عدد $x = 3$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند. بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{|x-3|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

در همسایگی $x = 3$ ، صورت مقداری مثبت دارد و چون حاصل حد $+\infty$ شده است، باید مخرج نیز در همسایگی $x = 3$ مقداری مثبت داشته باشد و از طرفی $x = 3$ ریشه آن باشد، پس $x = 3$ ریشه مضاعف آن است؛ در نتیجه:

$$(x-3)^2 = x^2 + ax + b + 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 + ax + b + 1$$

$$\Rightarrow a = -6, b + 1 = 9 \Rightarrow b = 8$$

$$\Rightarrow a + b = -6 + 8 = 2$$

(مسابان ۲- مرهای نامتناهی - مر در بی نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

اگر $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر $\frac{2}{1-x}$ منفی هستند و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1-x} = 0$ ، یعنی در

$+\infty$ ، تابع $y = \left[\frac{2}{1-x} \right]$ با تابع $y = -1$ برابر است؛ در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[\frac{2}{1-x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x+1) = -\infty$$

(مسابان ۲- مرهای نامتناهی - مر در بی نهایت: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \sqrt{f(x)}}{1 - f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f(x)}(\sqrt{f(x)} - 1)}{(1 - \sqrt{f(x)})(1 + \sqrt{f(x)})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{f(x)}}{1 + \sqrt{f(x)}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

(مسابقه ۲- هرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۲)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(پویش نیکنام)

با بررسی حد راست تابع $f \circ f(x)$ در $x = -3$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{-x+1}{(f \circ f)(x) - 2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

با توجه به نمودار: واضح است که در بی نهایت، تابع از مقادیر کمتر از ۲ به آن نزدیک می‌شود.

(مسابقه ۲- هرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۵۰ و ۵۹ تا ۶۲)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(m^2 - 1)x^3 + (2m + 3)x^2 + 2x - \frac{1}{x}}{m + \frac{5}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\left(\frac{m^2 - 1}{m} \right) x^3 + \left(\frac{2m + 3}{m} \right) x^2 + \frac{2}{m} x \right) = -\infty$$

چون وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ ، حاصل فقط برابر $-\infty$ است، باید ضریب x^3 صفر

شود؛ یعنی $m = \pm 1$. اما مقداری از m قابل قبول است که ضریب x^2 به

ازای آن منفی شود؛ بنابراین فقط $m = -1$ قابل قبول خواهد بود.

(مسابقه ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی نهایت؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

۴

۳✓

۲

۱

(صابر ترکیبی)

$$\left\{ \begin{array}{l} D_f(x) = (-3, 3) - \{\pm 2, \pm 1, 0\} \\ \lim_{x \rightarrow a \in \mathbb{R}} [x] + [-x] = -1 \end{array} \right.$$

بنابراین این تابع فاقد مجانب قائم است.

(مسابقه ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۴✓

۳

۲

۱

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \frac{x-1}{x+1} & ; x < 0 \\ \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \frac{x+1}{x-1} & ; x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \end{cases}$$

۴

۳ ✓

۲

۱

ابتدا دامنه تابع g را حساب می‌کنیم:

		-۱	$-\frac{1}{2}$	
$\frac{2x+1}{f(x)} \geq 0 \Rightarrow$	$\frac{2x+1}{f(x)}$	-	-	+
	$f(x)$	-	+	+
	$\frac{2x+1}{f(x)}$	+	-	+
	$f(x)$	تن		

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -1) \cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

این یعنی تابع $g(x)$ ، فقط در همسایگی چپ $x = -1$ تعریف شده است. از

طرفی تابع $g(x)$ همواره مثبت است. نمودار گزینه «۲» ویژگی‌های تابع g

را دارا است.

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی‌نهایت: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^4 + 2x - 1}{(2a-1)x^4 + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^4}{(2a-1)x^4} = \frac{a}{2a-1} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3a = 4a - 2 \Rightarrow a = 2$$

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه های ۶۷ تا ۶۹)

۴

۳

۲✓

۱

(ممید علیزاده)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \Rightarrow y = 3: \text{مجانِب افقی}$$

در نتیجه نقطه $A = (-1, 3)$ ، محل برخورد مجانب های نمودار این تابع

است. اگر نقطه O مبدأ مختصات باشد، داریم:

$$|OA| = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$$

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه های ۵۵ تا ۵۸ و ۶۷ تا ۶۹)

۴

۳✓

۲

۱

(کیوان دارابی)

در ماتریس گزینه «۱»، درایه های ستون اول (-3) برابر درایه های ستون

سوم هستند، پس حاصل دترمینان آن صفر است. در ماتریس گزینه «۲»،

درایه های سطر اول $\left(\frac{a}{b}\right)$ برابر درایه های سطر سوم هستند، پس دترمینان

آن صفر است. دترمینان ماتریس گزینه «۴» را اگر از طریق بسط یا دستور

ساروس محاسبه کنیم، حاصل برابر با صفر است.

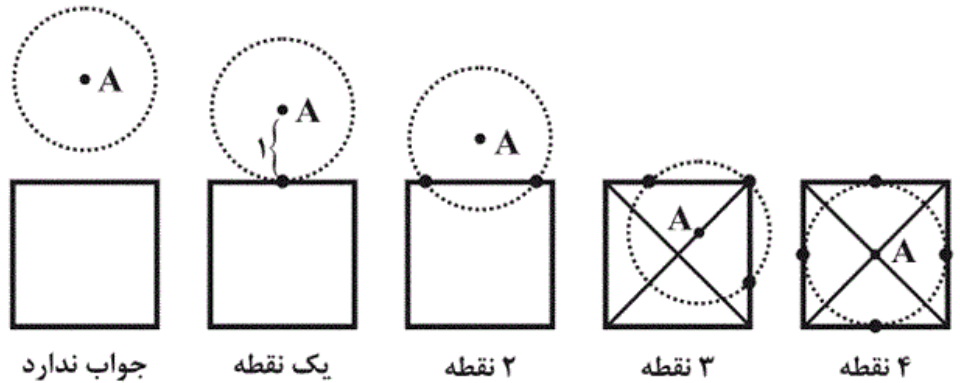
۴

۳✓

۲

۱

نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله واحد باشند، یک دایره به مرکز A و به شعاع ۱ را تشکیل می‌دهند. این دایره را رسم می‌کنیم. تعداد نقاط تلاقی دایره با مربع جواب مسئله است.



مسئله حداکثر ۴ جواب دارد.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

شرط این که رابطه $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، معادلهٔ ضمنی یک دایره باشد، آن است که: $a^2 + b^2 > 4c$.
در گزینهٔ «۴» داریم:

$$3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

$$a = 2, b = -4, c = 1 \Rightarrow 2^2 + (-4)^2 > 4 \times 1$$

در این رابطه $a^2 + b^2 > 4c$ می‌باشد، بنابراین معادلهٔ ضمنی یک دایره است.

برای سایر گزینه‌ها، رابطهٔ $a^2 + b^2 > 4c$ برقرار نیست.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

خطوط داده شده هر کدام شامل قطری از دایره هستند، بنابراین محل تقاطع آنها مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \text{مرکز دایره: } O(1,1)$$

$$\Rightarrow OA = R \Rightarrow \sqrt{(1-1)^2 + (2-1)^2} = 1$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۴

۳✓

۲

۱

کوتاه‌ترین وتر گذرنده از یک نقطه درون دایره، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است. بنابراین اگر نقطه O مرکز دایره باشد، آنگاه وتر مورد نظر بر پاره خط OA عمود می‌باشد. اگر خط d شامل این وتر باشد، داریم:

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 28 = 0 \Rightarrow \text{مرکز دایره: } O(2, -2)$$

$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{3 - (-2)}{1 - 2} = -5 \Rightarrow m_d = \frac{1}{5}$$

$$d \text{ معادله خط: } y - 3 = \frac{1}{5}(x - 1) \xrightarrow{\times 5} 5y - 15 = x - 1$$

$$\Rightarrow x - 5y + 14 = 0$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۴

۳

۲

۱✓

فاصله مرکز دایره از خط مماس بر آن، برابر شعاع دایره است.

$$R = \frac{|3(1) - 4(-1) + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ مشابه فعالیت ۲ صفحه ۴۳)

۴

۳

۲✓

۱

(اسحاق اسفندیار)

مختصات کانون‌های بیضی $F(3,0)$ و $F'(-3,0)$ و نقطه $M(2,2)$ روی

بیضی است. بنا به تعریف بیضی $MF' + MF = 2a$ ، بنابراین داریم:

$$\sqrt{(2+3)^2 + (2-0)^2} + \sqrt{(2-3)^2 + (2+0)^2} = 2a$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{10} + 2 = 2a \Rightarrow a = \sqrt{10} + 1$$

از طرفی:

$$FF' = 2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{10} + 1} = \frac{\sqrt{10} - 1}{3}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۴

۳

۲✓

۱

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{9}{2} \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = 3A \Rightarrow A^3 = 3A^2 = 3^2 A \Rightarrow \dots \Rightarrow A^{1397} = 3^{1396} A$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۴

۳

۲✓

۱

(کیوان دارابی)

عبارت $A^{-1} + 2B^{-1} = I$ را از سمت چپ در ماتریس A و از سمت

راست در ماتریس B ضرب می‌کنیم، داریم:

$$A^{-1} + 2B^{-1} = I \Rightarrow A(A^{-1} + 2B^{-1})B = AIB$$

$$\Rightarrow (AA^{-1} + 2AB^{-1})B = AB \Rightarrow (I + 2AB^{-1})B = AB$$

$$\Rightarrow B + 2A \underbrace{B^{-1}B}_I = AB$$

$$\Rightarrow B + 2A = AB$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴✓

۳

۲

۱



(کیوان دارابی)

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d+b \\ -c-a \end{bmatrix} \Rightarrow x = b + d$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

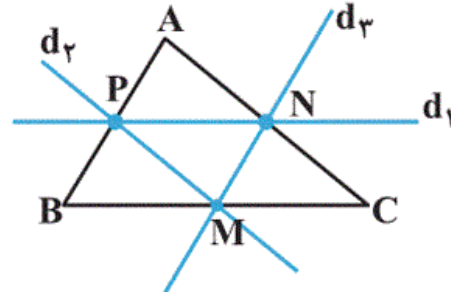
۴

۳ ✓

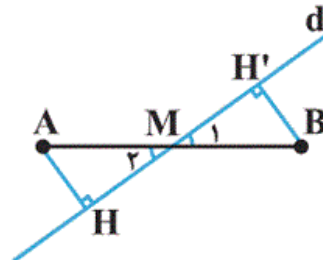
۲

۱

هر خطی که از وسط یک پاره خط بگذرد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است، پس هر خطی که وسط های دو ضلع دلخواه از این مثلث را به هم وصل کند، از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است. بنابراین در صفحه هر مثلث، سه خط وجود دارد که از هر سه رأس مثلث به یک فاصله هستند. (خطوط d_1 و d_2 و d_3 در شکل)



تذکر: فرض کنید خط دلخواه d از نقطه M وسط پاره خط AB عبور کند. داریم:



$$\left. \begin{array}{l} AM = BM \\ \hat{M}_2 = \hat{M}_1 \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(وتر و یک زاویه حاده)} \\ \Rightarrow \Delta AHM \cong \Delta BH'M \Rightarrow AH = BH' \end{array}$$

یعنی هر خطی که از وسط یک پاره خط عبور کند، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه های ۳۶ تا ۳۹)

۴

۳✓

۲

۱

ضرایب x^2 و y^2 را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$a^2 - 7 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$a = 3 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0$$

برقرار نیست $-2 > 0 \Rightarrow 2^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right) > 0$: شرط تشکیل دایره

$$a = -3 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0$$

برقرار است $10 > 0 \Rightarrow 2^2 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) > 0$: شرط تشکیل دایره

بنابراین تنها به ازای $a = -3$ ، معادله داده شده بیانگر یک دایره است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

تمامی قطرهای دایره از مرکز دایره عبور می‌کنند، پس کافی است به ازای دو مقدار مختلف m ، دو قطر دایره را یافته و سپس محل تلاقی آنها (مرکز دایره) را پیدا کنیم.

$$m = -2 \Rightarrow -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$m = -1 \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

با فرض $O(1, -1)$ و نقطه $A(5, 2)$ روی دایره داریم:

$$R = OA = \sqrt{(5-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۴

۳

۲ ✓

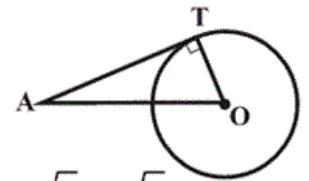
۱

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$$

مرکز دایره: $O(1, -2)$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(3)} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$OA = \sqrt{(4-1)^2 + (1+2)^2} = 3\sqrt{2}$$



مطابق شکل داریم:

$$OA^2 = AT^2 + OT^2 \Rightarrow 18 = AT^2 + 2 \Rightarrow AT^2 = 16 \Rightarrow AT = 4$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$C_1: x^2 + y^2 + 4x = 0$$

$$O_1(-2, 0), R_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4^2} = 2$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0$$

$$O_2(1, -4), R_2 = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 8^2 - 4a} = \sqrt{17 - a}$$

$$O_1O_2 = \sqrt{(1+2)^2 + (-4-0)^2} = 5$$

دو دایره مماس برون‌اند، پس داریم:

$$O_1O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow 5 = 2 + \sqrt{17 - a} \Rightarrow \sqrt{17 - a} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 17 - a = 9 \Rightarrow a = 8$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

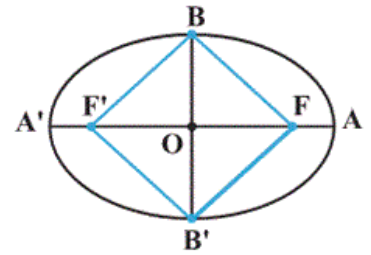
مرکز بیضی، نقطه O وسط پاره خط AA' است. داریم:

$$O = \frac{A + A'}{2} = (-2, -1)$$

$$a = OA = \sqrt{(3+2)^2 + (-1+1)^2} = 5$$

$$c = OF = \sqrt{(2+2)^2 + (-1+1)^2} = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$



چهارضلعی $BFB'F'$ لوزی است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} BB' \times FF' = \frac{1}{2} \times 2b \times 2c = 2bc = 2 \times 3 \times 4 = 24$$

(هندسه ۳ - آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۴

۳

۲✓

۱

(کتاب آبی هندسه ۳ - سؤال ۱۷)

۱۴۱ -

نکته: برای به دست آوردن سطر i ام و ستون j ام ماتریس ABC ، کافی است به صورت زیر عمل کنیم:

$$ABC \text{ سطر } i \text{ ام و ستون } j \text{ ام} = [A \text{ سطر } i \text{ ام}] B \begin{bmatrix} \text{ستون } j \text{ ام} \\ C \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$ABC \text{ سطر اول و ستون سوم} = [A \text{ سطر اول}] B \begin{bmatrix} \text{ستون سوم} \\ C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 10 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 85 - 10 = 75$$

(هندسه ۳ - ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۴

۳

۲✓

۱

با فرض $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، معادله مفروض سؤال به صورت $BAC = D$ خواهد بود. برای یافتن ماتریس A ، طرفین این رابطه را از چپ در B^{-1} و از راست در C^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$B^{-1}BACC^{-1} = B^{-1}DC^{-1} \Rightarrow A = B^{-1}DC^{-1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{4-3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{9-10} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 31 & 19 \\ -49 & -30 \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

با توجه به آنکه دو معادله، نشان‌دهنده معادلات دو خط گذرنده از مبدأ مختصات هستند، پس هر دو خط یک جواب بدیهی $(0,0)$ را دارند. حال برای آنکه دستگاه جواب غیرصفر داشته باشد، باید دو خط بر یکدیگر منطبق باشند یا به عبارت دیگر دترمینان ماتریس ضرایب برابر با صفر باشد، پس داریم:

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a+b & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ac - b(a+b) = 0$$

$$\Rightarrow ac - ab - b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = ac - ab$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

اگر دقت کنیم، سطر اول ماتریس در (-۳) و ستون دوم در (-۲) ضرب شده است، پس حاصل دترمینان جدید ۶ برابر دترمینان اولیه است.

$$\begin{vmatrix} -3a & 12 & -9 \\ 1 & -2b & -1 \\ 3 & -8 & c \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a & -4 & 3 \\ 1 & -2b & -1 \\ 3 & -8 & c \end{vmatrix} = (-3) \times (-2) \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 1 & b & -1 \\ 3 & 4 & c \end{vmatrix}$$

$$= 6|A| = 6 \times 3 = 18$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۴

۳

۲ ✓

۱