



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

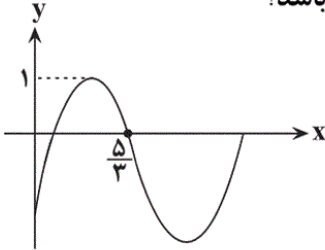
(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضی عمومی ، مثلثات - ۲ سوال -

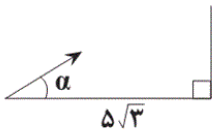
۱۱۴- اگر قسمتی از نمودار $f(x) = a \sin(b\pi x) - 1$ به شکل زیر باشد، مقدار b کدام گزینه می‌تواند باشد؟



- (۱) ۲
(۲) -۲
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) $-\frac{1}{2}$

۱۱۸- گلوله‌ای در فاصله $5\sqrt{3}$ متری از یک دیوار با سرعت $10 \frac{m}{s}$ و با زاویه حاده α نسبت به سطح افقی پرتاب می‌شود (مطابق شکل).

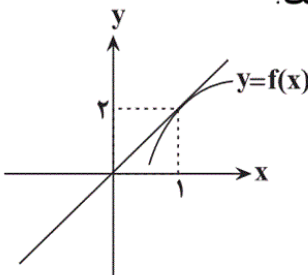
می‌دانیم مسافت افقی طی شده (d) بر حسب سرعت پرتاب گلوله (v) و زاویه پرتاب (α) از رابطه $d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$ به دست می‌آید. به‌ازای کدام مقادیر α ، گلوله قبل از رسیدن به زمین به دیوار برخورد می‌کند؟



- (۱) $\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{6}$
(۲) $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$
(۳) $\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{4}$
(۴) $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ریاضی عمومی ، مشتق - ۴ سوال -

۱۲۶- اگر خط مماس بر نمودار تابع f در $x=1$ به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h}$ کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۲
(۴) -۲

۱۲۷- اگر $f(x) = (x-1)\sqrt{2x^3 + 6x^2}$ باشد، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۲

۱۲۸- اگر مقدار مشتق و مقدار تابع $f(x)$ در نقطه $x=1$ ، به ترتیب برابر ۳ و (-2) باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{x-1}$ کدام است؟

۱۲ (۴)

-۱۲ (۳)

۶ (۲)

-۶ (۱)

۱۲۹- کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ صحیح نیست؟

$f'(-1) = -f'(1)$ (۲)

$f'(-1) < 0$ (۱)

$f'(-1) + f'(2) < 0$ (۴)

$f'(-1) > f'(-2)$ (۳)

ریاضی عمومی، توابع و معادلات - ۱۴ سوال

۱۲۰- اگر مجموعه جواب نامعادله $-x - |x+1| > 2$ به صورت (a, b) باشد، $a+b$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

۱۲۱- مجموع جواب‌های معادله $\frac{3x^2+1}{|x^3+1|} = \frac{2}{|x+1|} + \frac{1}{x^2-x+1}$ کدام است؟

-۴ (۴)

۳ (۳)

-۲ (۲)

۱ (۱)

۱۲۲- اگر مساحت مثلث حاصل از برخورد نمودارهای دو تابع $f(x) = \begin{cases} [x+b] + [-x] & , x \notin \mathbb{Z} \\ b-1 & , x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ و $g(x) = |x+a| - 2$ برابر ۶۴

باشد، مقدار b کدام است؟ ($b \in \mathbb{Z}$)

۶ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)

۱۱۶- جواب کلی معادله $2 \sin^2 x = 1 - \cos(2x + \frac{\pi}{4})$ ($k \in \mathbb{Z}$) کدام است؟

$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۴)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$ (۲)

$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{16}$ (۱)

۱۱۷- معادله $\sin x (\tan x + \cot x) = 1$ چند جواب حقیقی در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۰۴- توابع $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + ax + b$ مفروضند. اگر برد تابع $g \circ f$ برابر $\{2\}$ باشد، a کدام است؟

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۰۵- اگر $f(x) = 3x + 4$ و $f(g(x)) = 3x^2 - 6x - 5$ باشد، $g(2)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۵ (۴) -۳

۱۰۶- ضابطه وارون تابع $y = 2x - 3|x - 1|$ در بازه‌ای که صعودی است، کدام است؟

(۱) $y = \frac{x+3}{5}; x \leq 2$

(۲) $y = \frac{x+3}{5}; x \leq 3$

(۳) $y = x - 3; x \geq 2$

(۴) $y = x - 3; x \geq 3$

۱۰۷- اگر $f(x) = x^2 - \sqrt{3x}$ و $g = \{(-2, 0), (0, 3), (1, -1), (3, -2)\}$ باشند، آنگاه حاصل $(f \circ g^{-1})(-2)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) تعریف نشده

۱۰۸- مجموع جواب‌های معادله $11e^x - 2e^{2x} - 12 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\ln 3$ (۲) $\ln 6$ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۰۹- اگر جمله اول و قدرنسبت یک دنباله هندسی، هر دو برابر با $\log 5$ باشند، حد مجموع جملات آن کدام است؟

- (۱) $\log \frac{5}{2}$ (۲) $\log \frac{5}{3}$ (۳) $\log 20$ (۴) $\log 5$

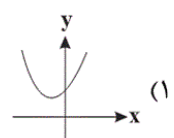
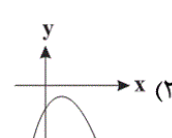
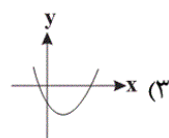
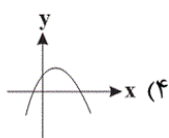
۱۱۰- بزرگ‌ترین کران پایین دنباله $a_n = \frac{2n+1}{5n+4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) صفر

۱۱۱- اگر $f(x) = x + x|x|$ با دامنه $[-1, 2]$ در نظر گرفته شود، تعداد اعداد صحیح در دامنه تابع f^{-1} of کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۸ (۳) ۲ (۴) ۶

۱۱۲- برای سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ نامساوی $\frac{ac}{b} < 0$ برقرار است. کدام گزینه نمی‌تواند نمودار تابع $f(-x)$ باشد؟



ریاضی عمومی ، مشتق توابع - ۱ سوال

۱۳۰- اگر نمودار تابع $y = a \sin 2x$ ، محور x ها را با زاویه 135° قطع کند، در این صورت قدرمطلق تفاضل حداقل و حداکثر مقدار ممکن برای a کدام است؟

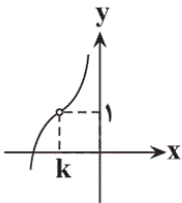
- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

ریاضی عمومی ، حد و پیوستگی - ۵ سوال

۱۲۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\tan^2 x}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۱۲۴- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{x}{1 - f(x)}$ کدام است؟



- ۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) صفر ۴) $-k$

۱۲۵- اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a+2)x^3 + bx^2 - 1}{ax^2 + 1} = 2$ باشد، $a - b$ کدام است؟

- ۱) -2 ۲) ۲ ۳) -4 ۴) ۴

۱۱۳- اگر باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x - 5$ و $x - 4$ به ترتیب برابر ۳ و ۵ باشد، نمودار تابع $y = f(f(x)) + 2x$ ، خط $x = 4$ را با چه عرضی قطع می‌کند؟

- ۱) ۸ ۲) ۱۵ ۳) ۱۱ ۴) ۵

۱۱۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - [x+1]}{2x - \sqrt{x-1}}$ برابر کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۴

ریاضی عمومی ، تابع - ۱ سوال

۱۱۵- اگر $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 2$ باشد، آن گاه مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

۰/۳ (۴)

۰/۴ (۳)

۰/۸ (۲)

۰/۶ (۱)

ریاضی عمومی، احتمال - ۳ سوال

۱۰۱- دو تاس سالم با هم پرتاب شده‌اند. اگر مجموع اعداد روشده برابر ۶ باشد، احتمال آن که هر دو عدد فرد باشند، کدام است؟

۰/۲ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۴ (۱)

۱۰۲- در دو شهر A و B، ۳۰ درصد جمعیت شهر A و ۴۰ درصد جمعیت شهر B کمتر از ۱۵ سال سن دارند. اگر جمعیت شهر A نصف جمعیت شهر B باشد و به تصادف یکی از افراد کمتر از ۱۵ سال از این دو شهر انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد از شهر B خواهد بود؟

$\frac{6}{11}$ (۴)

$\frac{7}{11}$ (۳)

$\frac{8}{11}$ (۲)

$\frac{5}{11}$ (۱)

۱۰۳- جعبه A شامل ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و جعبه B شامل ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه می‌باشد. از جعبه A به طور تصادفی ۲ مهره برداشته و وارد جعبه B می‌کنیم، سپس از جعبه B مهره‌ای خارج می‌کنیم؛ با چه احتمالی مهره خارج شده سفید است؟

$\frac{67}{168}$ (۴)

$\frac{65}{168}$ (۳)

$\frac{131}{336}$ (۲)

$\frac{19}{48}$ (۱)

۱۱۴- گزینه «۴»

(مهمربوار مسنی)

مقدار ماکسیمم تابع برابر ۱ است. بنابراین:

$$|a| - 1 = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

از آن جایی که تابع مذکور در اطراف $x = 0$ ، حالت صعودی دارد، پس a و b هم‌علامت هستند. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که a و b هر دو مثبت هستند:

$$f(x) = 2 \sin(b\pi x) - 1$$

با توجه به ضابطه تابع، نمودار تابع در نقاطی محور x ها را قطع می‌کند (صفر

می‌شود) که مقدار سینوس برابر با $\frac{1}{2}$ باشد. برای x های مثبت، این اتفاق اولین بار

در $\frac{\pi}{6}$ و بار دوم در $\frac{5\pi}{6}$ می‌افتد. با توجه به شکل تابع، نمودار برای بار دوم در

$x = \frac{5}{3}$ محور x را قطع می‌کند، پس:

$$\pi b \times \frac{5}{3} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

به طریق مشابه، برای حالتی که a و b هر دو منفی هستند $a = -2$ و

$b = -\frac{1}{2}$ به دست می‌آید.

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۲)

۴

۳

۲

۱

برای آنکه گلوله قبل از برخورد به زمین به دیوار برخورد کند، باید فاصله افقی طی شده آن بزرگتر از $5\sqrt{3}$ باشد. پس داریم:

$$d > 5\sqrt{3} \Rightarrow \frac{v^2 \sin 2\alpha}{10} > 5\sqrt{3} \xrightarrow{v=10} \sin 2\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

چون α زاویه حاده است، پس 2α از 0 تا π می‌تواند باشد. سینوس زاویه‌های

$\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ در این بازه برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. با توجه به دایره مثلثاتی:

$$\frac{\pi}{3} < 2\alpha < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$$

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = -f'(1)$$

باتوجه به تعریف مشتق:

$f'(1)$ برابر شیب خط مماس بر منحنی f در $x=1$ است. باتوجه به شکل از

آنجا که خط مماس از دو نقطه $(0,0)$ و $(1,2)$ می‌گذرد، بنابراین شیب خط

مماس برابر $\frac{2-0}{1-0} = 2$ است.

$$f'(1) = 2 \Rightarrow -f'(1) = -2$$

پس:

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

چون مقدار تابع $f(x)$ به ازای $x=1$ برابر صفر است، برای به دست آوردن مقدار

مشتق تابع $f(x)$ در $x=1$ بهتر است از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2x^3 + 6x^2} - 0}{(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x^3 + 6x^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + f(1)) \\ &= (f'(1))(2f(1)) = (3)(2(-2)) = -12 \end{aligned}$$

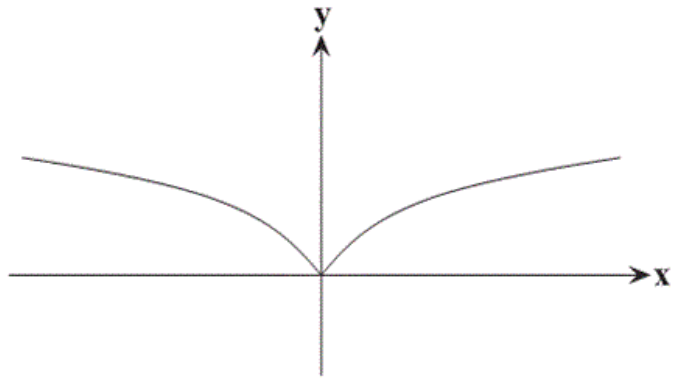
(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



از نمودار مشخص است که شیب مماس‌ها در سمت راست محور y مثبت و در سمت چپ محور y منفی است. (صحیح بودن گزینه «۱»)

هم‌چنین این نمودار نسبت به محور y متقارن است، پس $f'(-a) = -f'(a)$ (صحیح بودن گزینه «۲»)

از شکل نمودار مشخص است که برای x های مثبت، با افزایش x شیب مماس و در نتیجه مشتق کاهش می‌یابد. هم‌چنین برای x های منفی، با افزایش x شیب مماس و در نتیجه مشتق منفی‌تر می‌شود (ناصحیح بودن گزینه «۳»).

برای بررسی صحیح بودن گزینه «۴» داریم:

$$f'(2) < f'(1) \Rightarrow -f'(1) + f'(2) < 0 \Rightarrow f'(-1) + f'(2) < 0$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

الف) برای $x \geq -1$ ، عبارت داخل قدرمطلق نامنفی است و داریم:

$$6 > 2(x+1) - x \Rightarrow 6 > x+2 \Rightarrow x < 4$$

$$\frac{\text{اشتراک با شرط}}{x \geq -1} \rightarrow -1 \leq x < 4 \quad (1)$$

ب) برای $x < -1$ ، عبارت داخل قدر مطلق منفی است و حاصل قدرمطلق، قرینه آن است:

$$6 > -2(x+1) - x \Rightarrow 6 > -3x - 2 \Rightarrow 3x > -8$$

$$x > -\frac{8}{3} \quad (2) \xrightarrow[\text{اشتراک با شرط}]{x < -1} -\frac{8}{3} < x < -1$$

$$\xrightarrow{(1) \cup (2)} = \left(-\frac{8}{3}, 4\right) \text{ مجموعه جواب نامعادله}$$

پس:

$$a + b = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

$$\frac{3x^2 + 1}{|x^3 + 1|} = \frac{2(x^2 - x + 1) + |x + 1|}{|x + 1| \times (x^2 - x + 1)}$$

توجه کنید که در عبارت $x^2 - x + 1$ چون $\Delta < 0$ است، پس این عبارت همواره مثبت است.

$$|x + 1| \times (x^2 - x + 1) = |x + 1| \times |x^2 - x + 1| = |x^3 + 1|$$

مخرج عبارت‌های طرفین تساوی برابر است، پس صورت‌ها هم باید برابر باشند:

$$3x^2 + 1 = 2x^2 - 2x + 2 + |x + 1| \Rightarrow x^2 + 2x - 1 - |x + 1| = 0$$

$$\text{حالت اول: } x \geq -1 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غ ق} \\ x = 1 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\text{حالت دوم: } x < -1 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق} \\ x = -3 & \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $-2 = (-3) + 1$ است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۵ تا ۲۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

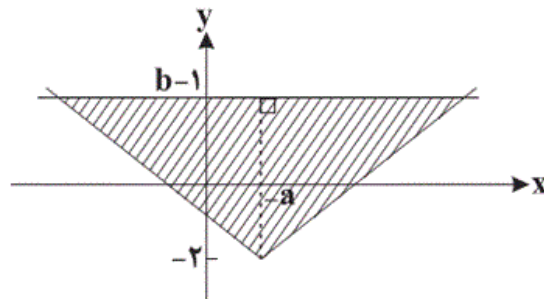
۱۲۲ - گزینه «۳»

(سینا ممبرپور)

می‌دانیم اگر $b \in \mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه: $(x \notin \mathbb{Z})$

$$[x + b] + [-x] = [x] + [-x] + b = b - 1$$

لذا ضابطه تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = b - 1$ می‌باشد.



حال بدون لطمه به کلیت مسأله و با فرض $a < 0$ ، با توجه به نمودار رسم شده داریم:

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}(b+1)(2b+2) = 64 \Rightarrow (b+1)^2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} b = 7 \\ b = -9 & \text{غ ق} \end{cases}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۱۶- گزینه «۱»

(فرشاد فرامرزی)

معادله را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2 \sin^2 x$$

می‌دانیم $1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x$ ، بنابراین:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm 2x$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - 2x \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{16} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۱۷- گزینه «۱»

(میثم عمزهلویی)

با استفاده از رابطه $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$ داریم:

$$\sin x \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right) = 1 \xrightarrow{\sin x \neq 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \xrightarrow{\cos x \neq 0} \cos x = 1$$

اما در نقاطی که $\cos x = 1$ است، $\sin x = 0$ است. پس معادله جواب حقیقی ندارد.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۰۴- گزینه «۱»

(میثم همزه لویی)

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{می دانیم:}$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} g(0) = b & x \in \mathbb{Z} \\ g(-1) = 1 - a + b & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ 1 - a + b = 2 \xrightarrow{b=2} a = 1 \end{cases} \quad \text{چون برد تابع برابر } \{2\} \text{ است، بنابراین:}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲، ۳۴ و ۳۵) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱

۱۰۵- گزینه «۴»

(لیلا مرادی)

با توجه به فرمول ترکیب توابع $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، یعنی در تابع f به جای متغیر x ، ضابطه $g(x)$ را قرار می‌دهیم. بنابراین:

$$3g(x) + 4 = 3x^2 - 6x - 5$$

$$\Rightarrow 3g(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$\Rightarrow g(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow g(2) = 4 - 4 - 3 = -3$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۳۴ و ۳۵) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

۴

۳

۲

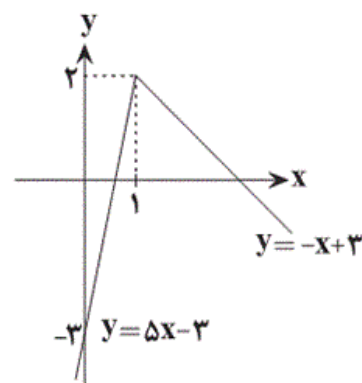
۱

۱۰۶- گزینه «۱»

(رسول مفسنی‌منش)

با تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق، نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} 2x - 3x + 3 = -x + 3 & x \geq 1 \\ 2x + 3x - 3 = 5x - 3 & x < 1 \end{cases}$$



۴

۳

۲

۱

۱۰۷- گزینه «۳»

(معمد زریون)

ابتدا تابع g^{-1} را می‌یابیم:

$$g^{-1} = \{(0, -2), (3, 0), (-1, 1), (-2, 3)\}$$

بنابراین:

$$f(g^{-1}(-2)) = f(3) = 3^2 - \sqrt{9} = 6$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۹) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱

۱۰۸- گزینه «۲»

(ایمان پینی فروشان)

با تغییر متغیر $e^x = t$ ، داریم:

$$11t - 2t^2 - 12 = 0 \Rightarrow 2t^2 - 11t + 12 = 0 \Rightarrow (t-4)(2t-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=4 \Rightarrow e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4 \\ t = \frac{3}{2} \Rightarrow e^x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \ln \frac{3}{2} \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$\ln 4 + \ln \frac{3}{2} = \ln(4 \times \frac{3}{2}) = \ln 6$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۸)

۴

۳

۲

۱

۱۰۹- گزینه «۴»

(سروش موئینی)

می‌دانیم حد مجموع جملات یک دنباله هندسی با جمله اول a و قدرنسبت q برابر است با:

$$S = \frac{a}{1-q} \Rightarrow S = \frac{\log 5}{1-\log 5} = \frac{\log 5}{\log 10 - \log 5} = \frac{\log 5}{\log 2} = \log_2 5$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۴

۳

۲

۱

۱۱۰- گزینه «۲»

(سروش مؤیننی)

این دنباله صعودی است. چون تابع $y = \frac{2x+1}{5x+4}$ برای اعداد طبیعی صعودی

است، پس جملات این دنباله از $a_1 = \frac{1}{3}$ تا حد آن در بی نهایت یعنی $\frac{2}{5}$ افزایش

می یابد و بزرگترین کران پایین آن $\frac{1}{3}$ است.

(ریاضی عمومی، صفحه های ۴۵ تا ۴۷)

۴

۳

۲

۱

۱۱۱- گزینه «۱»

(سروش مؤیننی)

دامنه تابع f^{-1} of همان D_f است. پس تعداد اعداد صحیح در این بازه برابر با ۳ است.

(ریاضی عمومی، صفحه های ۳۴ تا ۳۹) (ریاضی ۳، صفحه های ۵۹ تا ۶۶)

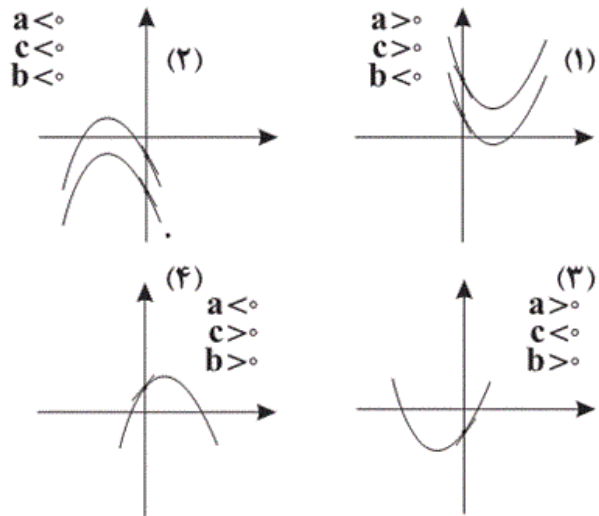
۴

۳

۲

۱

$$\frac{ac}{b} < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} ac > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a > 0, c > 0 \quad (1) \\ یا \\ a < 0, c < 0 \quad (2) \end{array} \right. \\ \\ b < 0 \\ \\ ac < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a > 0, c < 0 \quad (3) \\ یا \\ a < 0, c > 0 \quad (4) \end{array} \right. \\ \\ b > 0 \end{array} \right.$$



نمودار تابع $f(-x)$ قرینه تابع $f(x)$ نسبت به محور y ها است، پس طبق نمودارها، گزینه «۴» نمی تواند باشد.

$$\left. \begin{array}{l} \leftarrow b > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{خط مماس بر نمودار در نقطه } x = 0 \text{ صعودی} \\ \\ \text{خط مماس بر نمودار در نقطه } x = 0 \text{ نزولی} \end{array} \right. \\ \leftarrow b < 0 \end{array} \right\}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۰ تا ۲۷)

۴

۳

۲

۱

با توجه به فرض سؤال می‌توان نتیجه گرفت که زاویه خط مماس بر نمودار در محل تقاطع آن با محور x ها برابر ۱۳۵° است. لذا شیب خط مماس برابر است با:

$$\tan 135^\circ = -1$$

از طرفی طبق تعریف مشتق، می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار در یک نقطه، برابر

$$y = a \sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{است با مشتق تابع در همان نقطه. پس:}$$

$$y' = 2a \cos 2x \Rightarrow 2a \cos 2x = -1 \xrightarrow{x = \frac{k\pi}{2}} \begin{cases} \cos 2x = 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{2} \\ \cos 2x = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left| \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = 1$$

در نتیجه جواب مسأله برابر است با:

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵ تا ۷۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\tan^2 x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} \times \cos^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos^2 x} \times \cos^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \times \cos^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} \times \cos^2 x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} = \frac{\cos^2(0)}{(1 + \sqrt{\cos 0})(1 + \cos 0)} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۰، ۸۱، ۸۶ و ۹۲ تا ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

۱۲۴- گزینه «۱»

(میثم همزه لویی)

با توجه به نمودار، $k < 0$ است، از طرفی وقتی $x \rightarrow k^+$ ، آن گاه $f(x) \rightarrow 1^+$ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{x}{1-f(x)} = \frac{k}{0^-} = \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۳)

۴

۳

۲

۱

۱۲۵- گزینه «۲»

(میثم فلاح)

چون حاصل حد عددی حقیقی و غیرصفر است، بنابراین باید درجه صورت و مخرج یکسان باشد. در نتیجه صورت نیز باید از درجه دوم باشد. پس ضریب x^3 باید صفر باشد:

$$a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

حال حد را بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{bx^2 - 1}{-2x^2 + 1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{bx^2}{-2x^2} = 2 \Rightarrow \frac{b}{-2} = 2 \Rightarrow b = -4$$

$$a - b = -2 - (-4) = 2$$

در نتیجه:

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۵)

۴

۳

۲

۱

۱۱۳- گزینه «۳»

(سین اسفینی)

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-5$ و $x-4$ به ترتیب ۳ و ۵ است.

$$\left. \begin{aligned} x-4=0 &\Rightarrow x=4 \Rightarrow f(4)=5 \\ x-5=0 &\Rightarrow x=5 \Rightarrow f(5)=3 \end{aligned} \right\} (*)$$

بنابراین:

برای محاسبه محل برخورد نمودار تابع $y = f(f(x)) + 2x$ و خط $x=4$ باید

در ضابطه تابع داده شده، x را برابر ۴ قرار دهیم:

$$y = f(f(x)) + 2x \xrightarrow{x=4} y = f(f(4)) + 2(4)$$

۴

۳

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - [x+1]}{2x - \sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - [2^-]}{2x - \sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{2x - \sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{(2\sqrt{x}+1)} = \frac{2 \times 2}{3} = \frac{4}{3}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۰، ۸۱، ۸۶ و ۹۲ تا ۹۴)

۴

۳

۲

۱

با استفاده از روابط $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ داریم:

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \tan x = 2$$

می‌دانیم که $1 + \cos 2x \geq 0$ است. بنابراین صورت کسر سؤال نیز باید مثبت باشد

تا حاصل کسر عددی مثبت شود یعنی $\sin 2x > 0$ ، حال داریم:

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + 2^2} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{5}\right) - 1 = -\frac{3}{5}$$

۴

۳

۲

۱

اگر فرد بودن دو عدد را پیشامد **A** و ۶ شدن مجموع دو عدد را پیشامد **B** در نظر بگیریم، خواسته مسأله $P(A|B)$ می‌باشد.
فضای نمونه‌ای جدید (مجموع ۶ شدن) عبارت است از:

$$B = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\}$$

در این فضای نمونه‌ای، پیشامد فرد بودن دو تاس رو شده به صورت زیر است:

$$A \cap B = \{(1,5), (5,1), (3,3)\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{3}{5} = 0/6$$

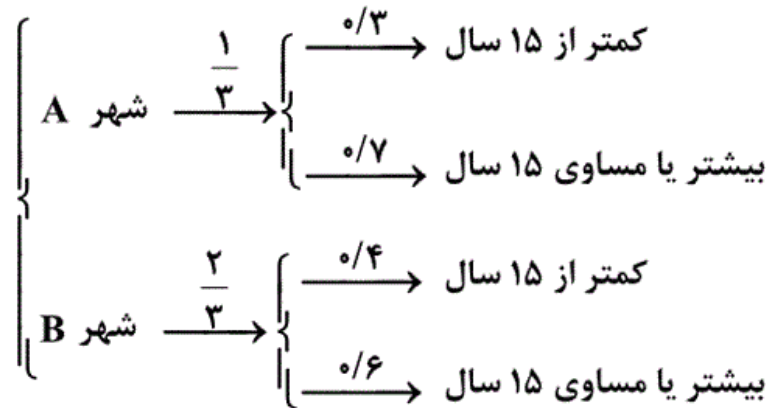
(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸ تا ۱۱)

۴

۳ ✓

۲

۱



$$P(B | \text{کمتر از ۱۵ سال}) = \frac{\frac{0}{4} \times \frac{2}{3}}{\frac{0}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{0}{3} \times \frac{1}{3}} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0}$$

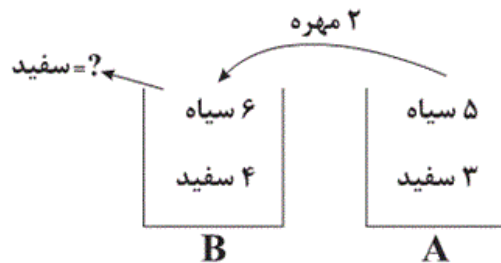
(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶ تا ۱۳)

۴

۳

۲ ✓

۱



۴

۳

۲

۱ ✓