سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

حسابان ۱ - ۱۰ سوال

۶۱- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x-1=0$ و مجموعهٔ جواب معادلهٔ $8x^2+mx-n=0$ به‌صورت $\{\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\}$ باشند، $m-n$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۶۲- در معادلهٔ درجهٔ دوم $mx^2+(3+m)x+6=m^2$ دو ریشه، معکوس یکدیگرند. مجموع ریشه‌ها کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) صفر

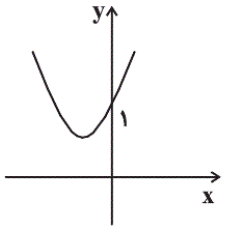
۶۳- در یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳، اختلاف مجموع سی جملهٔ اول از مجموع ده جملهٔ سوم برابر با ۴۵۰ می‌باشد. مجموع ده جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۵ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۵

۶۴- در ۲۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ است. اگر قدر نسبت دنباله $q=\frac{2}{3}$ باشد، مجموع جملات ردیف زوج کدام است؟

۱) ۱۳۵ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۰۲ ۴) ۹۰

۶۵- حدود a کدام باشد تا نمودار تابع $f(x)=ax^2+(3-a)x+b$ به صورت مقابل باشد؟



۱) $a>1$
۲) $a<3$
۳) $0<a<3$
۴) $1<a<3$

۶۶- دو کارگر A و B کاری را با هم در ۶ روز به اتمام می‌رسانند. اگر به‌صورت انفرادی آن کار را انجام دهند، کارگر B از کارگر A، ۵ روز بیش‌تر کار می‌کند. برای انجام کار به تنهایی، کارگر B چند روز باید کار کند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۶۷- ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $\sqrt{4x^2+8x}=(x+1)^2$ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $(-3,-1)$ ۲) $(-2,-0/5)$ ۳) $(0,0/5)$ ۴) $(1,2)$

۶۸- معادلهٔ $\frac{x+t-1}{x}=\frac{tx+2}{-2}$ فقط یک ریشه به ازای x دارد. مجموعهٔ مقادیر t کدام است؟ $(t\neq 0)$

۱) $\{-1\ ,\ 2\}$ ۲) $\{1\ ,\ -2\}$ ۳) $\{1\ ,\ -1\}$ ۴) $\{2\ ,\ 1\ ,\ -1\}$

۶۹- مجموع جواب‌های معادلهٔ $x-2\sqrt{x+1}=-1$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

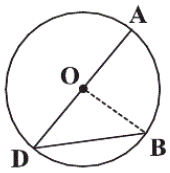
۷۰- مجموع جواب‌های حقیقی معادلهٔ $x^2-2x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-1=0$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) معادله جواب حقیقی ندارد.

هندسه‌ی ۲ - ۱۰ سوال

۱۰۱- مطابق شکل در دایره‌ای به قطر AD برای اثبات رابطهٔ $A\hat{D}B=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$، دانش‌آموزی نوشته است:

$A\hat{O}B=O\hat{D}B+x=2y$. در این صورت x و y کدام‌اند؟ (O مرکز دایره است.)



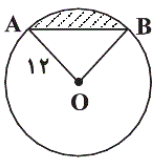
۱) $x=2O\hat{D}B\ ,\ y=O\hat{B}D$

۲) $x=O\hat{B}D\ ,\ y=O\hat{D}B$

۳) $x=y=D\hat{O}B$

۴) $x=y=B\hat{A}O$

۱۰۲- در شکل زیر، طول کمان AB برابر 4π می‌باشد. مساحت ناحیهٔ سایه‌خورده چند برابر $2\pi-3\sqrt{3}$ است؟ (O مرکز دایره است.)



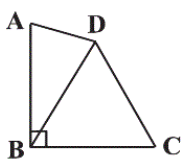
۱) ۶

۲) ۱۲

۳) ۱۸

۴) ۲۴

۱۰۳- در چهارضلعی زیر، طول اضلاع AB و BC و قطر BD برابر ۲ است. اگر $\hat{A}=80^\circ$ و $\hat{B}=90^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ C چند درجه است؟



۱) ۴۵

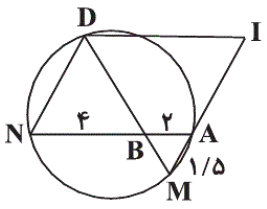
۲) ۵۰

۳) ۵۵

۴) ۶۰

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۴- در شکل زیر، چهارضلعی DIAN یک متوازی‌الاضلاع است و نقطهٔ M تقاطع امتداد پاره‌خط IA با دایره و همچنین نقطهٔ B تقاطع پاره‌خط DM با ضلع AN است. اگر $BA = ۲$، $BN = ۴$ و $AM = ۱/۵$ باشند، محیط مثلث NBD کدام است؟



۱) ۱۵

۲) ۱۳

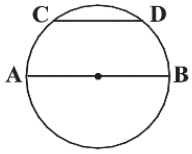
۳) ۱۲

۴) ۱۱

۱۰۵- دو وتر موازی به طول‌های ۴ و ۱۰ در دو طرف مرکز دایره به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که فاصلهٔ مرکز دایره از وتر کوچک‌تر، دو برابر فاصلهٔ آن تا وتر بزرگ‌تر است. طول شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) ۸

۱۰۶- در دایرهٔ مقابل، وتر CD به موازات قطر AB رسم شده است. اندازهٔ $A\hat{C}D - A\hat{D}C$ کدام است؟



۱) ۶۰°

۲) ۹۰°

۳) ۳۰°

۴) ۴۵°

۱۰۷- خط d در نقطهٔ A بر شعاع OA از دایرهٔ $C(O, r)$ عمود است و B نقطهٔ دیگری روی خط d است. کدام گزینه نادرست است؟

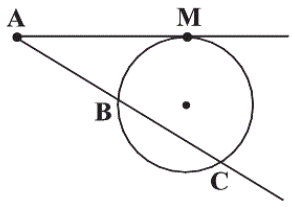
۱) d بر دایرهٔ C مماس است.

۲) $OB < OA$

۳) OB بر d عمود نیست.

۴) d دایرهٔ C را در نقطهٔ دیگری قطع نمی‌کند.

۱۰۸- در شکل زیر، AM مماس بر دایره و $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CM} = \frac{۳}{۲}\overset{\frown}{BM}$ می‌باشد. زاویهٔ A چند درجه است؟ (A ، B و C در یک امتدادند.)



۱) ۲۲/۵

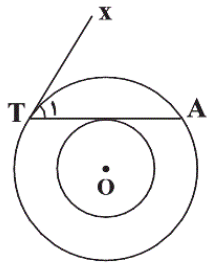
۲) ۳۵

۳) ۲۵

۴) ۳۲/۵

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۹- دو دایرهٔ $C_1(O,3)$ و $C_2(O,6)$ مطابق شکل مفروض‌اند. TA و Tx به‌ترتیب بر دایره‌های C_1 و C_2 مماس‌اند. زاویهٔ T_1 چند درجه است؟



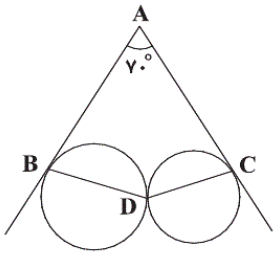
۱) ۳۰

۲) ۴۵

۳) ۵۰

۴) ۶۰

۱۱۰- در شکل زیر، دو دایره در نقطهٔ D مماس بوده و مماس‌های رسم شده در نقاط B و C یکدیگر را در نقطهٔ A قطع کرده‌اند. $B\hat{D}C$ چند درجه است؟



۱) ۱۱۰

۲) ۱۲۰

۳) ۱۳۰

۴) ۱۴۵

حسابان۱ - سوالات موازی - ۱۰ سوال

۸۱- مجموع دوازده جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی ۱۳۲ و مجموع بیست و یک جملهٔ اول آن ۴۲۰ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۶

۸۲- در یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳، اختلاف مجموع سی جملهٔ اول از مجموع ده جملهٔ سوم برابر با ۴۵۰ می‌باشد. مجموع ده جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۵ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۵

۸۳- روی محیط دایره‌ای ۳۰ نقطهٔ متمایز قرار دارد. اگر از هر نقطه به نقاط دیگر وصل کنیم تعداد کل وترهای تشکیل شده کدام است؟

۱) ۴۶۵ ۲) ۴۳۵ ۳) ۴۶۴ ۴) ۴۳۴

۸۴- در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی a_n، اگر $a_1 = ۳$ و $a_{10} = (a_6)^2$، مجموع چهار جملهٔ اول آن کدام است؟

۱) $\frac{۵۰}{۹}$ ۲) $\frac{۴۰}{۹}$ ۳) $\frac{۳۰}{۹}$ ۴) $\frac{۲۰}{۹}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۵- در ۲۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ است. اگر قدر نسبت دنباله $q=\frac{۲}{۳}$ باشد، مجموع جملات ردیف زوج کدام است؟

۱) ۱۳۵ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۰۲ ۴) ۹۰

۸۶- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۲+ax+۱=۰$ باشند و a یک عدد حقیقی باشد، در حالت کلی، ریشه‌های کدام معادلهٔ زیر برابر $x_۱^۲+۱$ و $x_۲^۲+۱$ خواهد بود؟

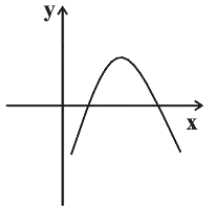
۱) $x^۲-a^۲x-a^۲=۰$ ۲) $x^۲-a^۲x+a=۰$

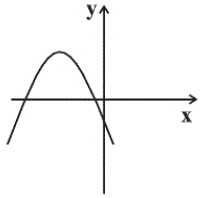
۳) $x^۲-ax-a=۰$ ۴) $x^۲-a^۲x+a^۲=۰$

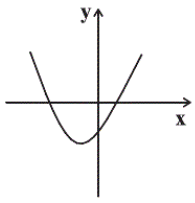
۸۷- در معادلهٔ درجهٔ دوم $mx^۲+(۳+m)x+۶=m^۲$ دو ریشه، معکوس یکدیگرند. مجموع ریشه‌ها کدام است؟

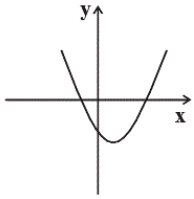
۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) صفر

۸۸- در کدام نمودار سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ ضرایب a، b و c هم‌علامت‌اند؟

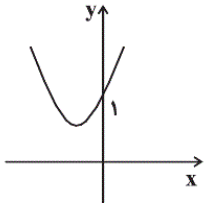
۱)


۲)


۳)


۴)


۸۹- حدود a کدام باشد تا نمودار تابع $f(x)=ax^۲+(۳-a)x+b$ به صورت مقابل باشد؟



۱) $a>۱$

۲) $a<۳$

۳) $۰<a<۳$

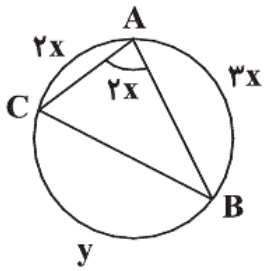
۴) $۱<a<۳$

۹۰- معادلهٔ $(x^۲-x-۱)^۲=۳x^۲-۳x-۵$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) هیچ ریشهٔ صحیحی ندارد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۱- با توجه به شکل مقابل، حاصل $x - y$ کدام است؟



۱) ۹۰°

۲) ۱۵۰°

۳) ۱۲۰°

۴) ۱۳۵°

۱۱۲- در یک دایره طول کمان AB برابر ۴ واحد و اندازهٔ کمان AB برابر ۶۰° است. در این صورت طول شعاع دایره کدام است؟

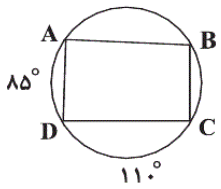
۱) ۱۲π

۲) $\frac{۱۲}{\pi}$

۳) ۲۴

۴) ۲۴π

۱۱۳- در شکل مقابل، قطرهای چهارضلعی ABCD با هم برابرند. اندازهٔ کمان AB چند درجه می‌تواند باشد؟



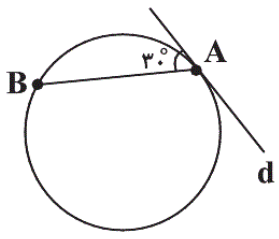
۱) ۷۰

۲) ۸۰

۳) ۹۰

۴) ۸۵

۱۱۴- اگر در شکل مقابل، خط d در نقطهٔ A بر دایره مماس و $AB = ۵$ باشد، شعاع دایره کدام است؟



۱) ۵

۲) ۲/۵

۳) $۵\sqrt{۳}$

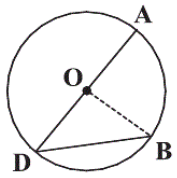
۴) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۵- دو دایرهٔ هم‌مرکز C_1 و C_2 را در نظر بگیرید. اگر خط d بر C_1 مماس باشد و همزمان دایرهٔ C_2 را در دو نقطهٔ A و B قطع کند، به‌طوری‌که $AB = 24$ و اختلاف شعاع دو دایره برابر ۸ باشد، شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر کدام است؟

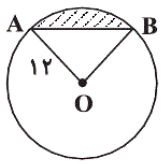
۱) ۵
۲) ۶
۳) ۱۲
۴) ۱۳

۱۱۶- مطابق شکل در دایره‌ای به قطر AD برای اثبات رابطهٔ $A\hat{D}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$، دانش‌آموزی نوشته است: $A\hat{O}B = O\hat{D}B + x = 2y$. در این صورت x و y کدام‌اند؟ (O مرکز دایره است.)



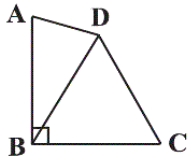
۱) $x = 2O\hat{D}B \quad , \quad y = O\hat{B}D$
۲) $x = O\hat{B}D \quad , \quad y = O\hat{D}B$
۳) $x = y = D\hat{O}B$
۴) $x = y = B\hat{A}O$

۱۱۷- در شکل زیر، طول کمان AB برابر 4π می‌باشد. مساحت ناحیهٔ سایه‌خورده چند برابر $3\sqrt{3} - 2\pi$ است؟ (O مرکز دایره است.)



۱) ۶
۲) ۱۲
۳) ۱۸
۴) ۲۴

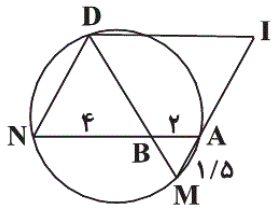
۱۱۸- در چهارضلعی زیر، طول اضلاع AB و BC و قطر BD برابر ۲ است. اگر $\hat{A} = 80^\circ$ و $\hat{B} = 90^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ C چند درجه است؟



۱) ۴۵
۲) ۵۰
۳) ۵۵
۴) ۶۰

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۹- در شکل زیر، چهارضلعی DIAN یک متوازی‌الاضلاع است و نقطهٔ M تقاطع امتداد پاره‌خط IA با دایره و همچنین نقطهٔ B تقاطع پاره‌خط DM با ضلع AN است. اگر $BA = ۲$، $BN = ۴$ و $AM = ۱/۵$ باشند، محیط مثلث NBD کدام است؟



۱) ۱۵

۲) ۱۳

۳) ۱۲

۴) ۱۱

۱۲۰- دو وتر موازی به طول‌های ۴ و ۱۰ در دو طرف مرکز دایره به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که فاصلهٔ مرکز دایره از وتر کوچک‌تر، دو برابر فاصلهٔ آن تا وتر بزرگ‌تر است. طول شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۴

۲) $۴\sqrt{۲}$

۳) $۴\sqrt{۳}$

۴) ۸

حسابان-گواه - ۱۰ سوال

۷۱- بین دو عدد ۸ و۶۳، تعدادی عدد طوری قرار می‌دهیم که کل اعداد تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند. اگر تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین آن‌ها ۳۳ باشد، مجموع کل جملات دنباله کدام است؟

۱) ۱۴۲

۲) ۲۱۳

۳) ۲۸۴

۴) ۳۷۵

۷۲- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ اوّل ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اوّل آن ۱۵۳ است. جملهٔ اول، چند برابر جملهٔ پنجم است؟

۱) $\frac{۸۱}{۱۶}$

۲) ۸

۳) ۹

۴) ۱۶

۷۳- در معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲ - (m+۱)x - ۸ = ۰$، اگر یکی از جواب‌ها نصف مربع جواب دیگر باشد، m کدام است؟

۱) ۲

۲) -۴

۳) -۱

۴) -۲

۷۴- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = (a-۳)x^۲ + ax - ۱$، از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $\{a \mid a \le ۲\}$

۲) $\{a \mid ۰ < a \le ۲\}$

۳) $\{a \mid ۲ < a < ۳\}$

۴) $\{a \mid ۰ < a < ۳\}$

۷۵- مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(x^۲ + x)^۲ - ۱۸(x^۲ + x) + ۷۲ = ۰$، کدام است؟

۱) -۴

۲) -۲

۳) ۲

۴) ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۷۶- تعداد جواب‌های حقیقی معادلهٔ $\frac{x+۴}{x^۲+۲x-۸}+\frac{۱-x}{x^۲+x-۲}=\frac{۱}{۳}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۷۷- یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم از مایع آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟

۱) ۰/۴
۲) ۰/۵
۳) ۰/۶
۴) ۰/۸

۷۸- اگر $x=۴$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x+a=\sqrt{۵x-x^۲}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲
۳) ۳
۴) جواب دیگری ندارد.

۷۹- به ازای کدام مقادیر m، از معادلهٔ $mx-۳\sqrt{x}+m-۲=۰$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{-۳}{۲}<m<۲$
۲) $۰<m<۲$
۳) $\frac{۳}{۲}<m<\frac{۵}{۲}$
۴) $۲<m<۳$

۸۰- معادلهٔ $\sqrt{۳-x}+\sqrt{x-۳}=\sqrt{x}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) یک ریشه
۲) دو ریشه
۳) سه ریشه
۴) ریشهٔ حقیقی ندارد.

آمار و احتمال - ۱۰ سوال

۱۲۱- اگر $D=\{-۱,-\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲},۱,۲\}$ دامنهٔ متغیر باشد، آن‌گاه مجموعهٔ جواب گزارهٔ «حاصل جمع عدد x و معکوس آن بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است»، کدام است؟

۱) $\{-۱,\frac{۱}{۲},۱\}$
۲) $\{\frac{۱}{۲},۱,۲\}$
۳) $\{\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲},۱\}$
۴) $\{-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},۱\}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۲- گزاره‌های p، q و r را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. ارزش کدام گزاره نادرست است؟

p : «هر مربع یک متوازی‌الاضلاع است.»

q : «هر متوازی‌الاضلاع یک مستطیل است.»

r : «هر لوزی یک مربع است.»

۱) $p \vee q$ ۲) $p \vee \sim p$

۳) $(p \vee q) \vee (q \vee r)$ ۴) $(q \vee r) \vee \sim p$

۱۲۳- نقیض گزارهٔ «اگر n عددی صحیح و مثبت و $n^۲$ زوج باشد، آن‌گاه n زوج است.» کدام است؟

۱) n عددی صحیح و مثبت نیست یا $n^۲$ فرد است و n زوج است.

۲) n عددی صحیح و مثبت و $n^۲$ زوج است و n فرد است.

۳) n عددی صحیح و مثبت و $n^۲$ زوج است یا n فرد است.

۴) n عددی صحیح و مثبت نیست یا $n^۲$ فرد است یا n زوج است.

۱۲۴- در چند حالت از جدول ارزش گزاره‌های p، q و r، ارزش گزارهٔ $\sim r \vee (\sim p \Rightarrow q)$ نادرست است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۵- گزارهٔ $\sim [p \wedge (\sim p \vee q)] \wedge [\sim q \vee (p \wedge q)]$ هم‌ارز با کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) p ۲) q ۳) $\sim p$ ۴) $\sim q$

۱۲۶- کدام گزاره نادرست است؟ (E مجموعه اعداد زوج و O مجموعه اعداد فرد است.)

۱) $\forall x \in Z ;\ ۵|x|+۲ \geq ۰$ ۲) $\forall x \in R ;\ \sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$

۳) $\exists x \in E ;\ x+۳ \in O$ ۴) $\exists x \in R ;\ x > |x|$

۱۲۷- کدام یک از گزاره‌های سوری زیر از لحاظ ارزش با بقیه متفاوت است؟ $(x \in R)$

۱) $\forall x ;\ (x+۱)^۲ > ۰$ ۲) $\exists x ;\ x^۲ + x + ۱ < ۰$

۳) $\forall x ;\ x^۲ + ۳x + ۳ > ۰$ ۴) $\exists x ;\ \frac{۱}{x-۱} = ۰$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۸- اگر $A=\{x\in\mathbb{N}\mid 0<x\leq 5\}$، دامنهٔ متغیر گزاره‌نما باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱) $\forall x\in A\ ;\ x^2\geq x$

۲) $\forall x\in A\ ;\ \frac{x^2-1}{x+1}=x-1$

۳) $\exists x\in A\ ;\ |x-3|<1$

۴) $\exists x\in A\ ;\ x^2+x=0$

۱۲۹- نقیض گزارهٔ «تمام انسان‌ها فناپذیرند.» کدام است؟

۱) بعضی از انسان‌ها فناپذیرند.

۲) بعضی از انسان‌ها فنا ناپذیرند.

۳) هیچ انسانی نیست که فنا ناپذیر باشد.

۴) تمام انسان‌ها فنا ناپذیرند.

۱۳۰- نقیض گزارهٔ $(\exists x\in\mathbb{R}\ ;\ 3x>2)\vee(\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x^2>0)$ کدام است؟

۱) $(\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x\leq\frac{2}{3})\vee(\exists x\in\mathbb{R}\ ;\ x^2\leq 0)$

۲) $(\exists x\in\mathbb{R}\ ;\ 3x\geq 2)\wedge(\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x^2\geq 0)$

۳) $(\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x\leq\frac{2}{3})\wedge(\exists x\in\mathbb{R}\ ;\ x^2\leq 0)$

۴) $(\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ 3x\leq 2)\wedge(\exists x\in\mathbb{R}\ ;\ x^2<0)$

حسابان گواه-سوالات موازی - ۱۰ سوال

۹۱- بین دو عدد ۸ و ۶۳، تعدادی عدد طوری قرار می‌دهیم که کل اعداد تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند. اگر تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین آن‌ها ۳۳ باشد، مجموع کل جملات دنباله کدام است؟

۱) ۱۴۲ ۲) ۲۱۳ ۳) ۲۸۴ ۴) ۳۷۵

۹۲- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع ۵ جملهٔ اول، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جملهٔ بعدی است. جملهٔ دوم چند برابر جملهٔ اول است؟ $(a_1\neq 0)$

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۳- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ اوّل ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اوّل آن ۱۵۳ است. جملهٔ اول، چند برابر جملهٔ پنجم است؟

۱) $\frac{81}{16}$ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۶

۹۴- مستطیلی در نظر می‌گیریم که طول و عرض آن به‌ترتیب ۲ و ۱ سانتی‌متر باشند. در داخل آن مجدداً مستطیلی در نظر می‌گیریم که نسبت طول به عرض آن ۲ باشد و در داخل مستطیل پدید آمده این عمل را مجدداً تکرار می‌کنیم. مجموع محیط‌های مستطیل‌های رنگی تا مرحلهٔ ششم، چند برابر محیط مستطیل اول است؟

مرحلهٔ (۱) مرحلهٔ (۲) مرحلهٔ (۳)

۱) $\frac{31}{8}$

۲) $\frac{63}{32}$

۳) $\frac{31}{4}$

۴) $\frac{3}{2}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۵- در معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲-(m+۱)x-۸=۰$، اگر یکی از جواب‌ها نصف مربع جواب دیگر باشد، m کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۴ ۳) -۱ ۴) -۲

۹۶- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۳x+۱=۰$ باشند و $\alpha>\beta$، آن‌گاه معادله‌ای که ریشه‌هایش ۵α و ۴β باشد، کدام است؟

۱) $x^۲-۱۵x+۹=۰$ ۲) $x^۲+۷x+۱۰=۰$ ۳) $x^۲-۷x+۱۰=۰$ ۴) $x^۲+۱۵x+۹=۰$

۹۷- خط به معادلهٔ $y=-\frac{۵}{۲}$ محور تقارن منحنی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۱}{۲}x^۲-۳x+a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند. a کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۹۸- رأس سهمی به معادلهٔ $y=x^۲+mx-\frac{۱}{۴}$، روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم محورهای مختصات واقع است. اگر این سهمی محور x ها را در نقاط A و B قطع کند، طول پاره خط AB کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=(a-۳)x^۲+ax-۱$، از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $\{a\,|\,a\le ۲\}$ ۲) $\{a\,|\,۰<a\le ۲\}$ ۳) $\{a\,|\,۲<a<۳\}$ ۴) $\{a\,|\,۰<a<۳\}$

۱۰۰- مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰$، کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۶۱- (مجتبی مظاهری‌فرد)

ابتدا S و P معادلهٔ $2x^2 - 3x - 1 = 0$ را می‌یابیم. داریم:

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \quad , \quad P = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

حال جمع و ضرب ریشه‌های معادلهٔ دوم را S' و P' نامیده و آن را می‌یابیم:

$$S' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} \Rightarrow S' = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$$

$$P' = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{P} \Rightarrow P' = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

از طرفی با توجه به معادلهٔ $8x^2 + mx - n = 0$ داریم:

$$S' = -\frac{m}{8} \quad , \quad P' = -\frac{n}{8}$$

در نتیجه:

$$S' = -\frac{m}{8} = -3 \Rightarrow m = 24$$
$$P' = -\frac{n}{8} = -2 \Rightarrow n = 16$$
$$\Rightarrow m - n = 24 - 16 = 8$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۶۲- *(امیرهوشنگ خمسه)*

اگر α و β ریشه‌ها باشند:

$$\alpha=\frac{۱}{\beta}\Rightarrow\alpha\beta=۱\Rightarrow\frac{c}{a}=۱\Rightarrow\frac{۶-m^۲}{m}=۱$$

$$\Rightarrow m^۲+m-۶=۰\Rightarrow m=۲\ ,\ -۳$$

اگر $m=-۳$ باشد، معادله ریشه ندارد، زیرا Δ منفی می‌شود. به ازای $m=۲$ داریم:

$$۲x^۲+۵x+۲=۰\Rightarrow\alpha+\beta=-\frac{۵}{۲}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۶۳- *(سینا محمدپور)*

از آنجایی که اختلاف مجموع سی جملهٔ اول و ده جملهٔ سوم، در واقع همان مجموع بیست جملهٔ اول دنباله می‌باشد، پس:

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}[۲(a_۱)+۱۹\times(۳)]\Rightarrow ۴۵=۲a_۱+۵۷\Rightarrow a_۱=-۶$$

در نتیجه:

$$S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}[۲\times(-۶)+۹\times(۳)]=۷۵$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۶۴- *(محمدمصطفی ابراهیمی)*

مجموع جملات ردیف فرد: $S_{۱۰}=\frac{a_۱((q^۲)^{۱۰}-۱)}{q^۲-۱}=\frac{a_۱(q^{۲۰}-۱)}{q^۲-۱}=۱۳۵$

مجموع جملات ردیف زوج: $S'_{۱۰}=\frac{a_۲((q^۲)^{۱۰}-۱)}{q^۲-۱}=\frac{a_۱q(q^{۲۰}-۱)}{q^۲-۱}$

$$=q(\frac{a_۱(q^{۲۰}-۱)}{q^۲-۱})=\frac{۲}{۳}\times۱۳۵=۹۰$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۴ تا ۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۶۵- (مهرداد اسپیدکار)

باید $a > ۰$ باشد. چون دهانهٔ سهمی رو به بالا است. به علاوه عرض از مبدأ سهمی $b = ۱$ است. پس داریم:

$$f(x) = ax^۲ + (۳ - a)x + ۱$$

به علاوه طول رأس سهمی منفی است:

$$\frac{-(۳-a)}{۲a} < ۰ \Rightarrow \frac{۳-a}{۲a} > ۰ \xrightarrow{a>۰} ۳ - a > ۰ \Rightarrow a < ۳$$

شرط آخر هم این است که $\Delta > ۰$ باشد:

$$\Delta = (۳-a)^۲ - ۴(a)(۱) = ۹ + a^۲ - ۶a - ۴a = a^۲ - ۱۰a + ۹$$
$$= (a-۹)(a-۱) < ۰ \Rightarrow ۱ < a < ۹$$

از اشتراک شرط‌های به دست آمده $۱ < a < ۳$ می‌شود.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۶۶- (محمد پوراحمدی)

اگر تعداد روزهای لازم برای آن‌که کارگر A کار را به تنهایی انجام دهد برابر x فرض کنیم، داریم:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x+۵} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{x+۵+x}{x(x+۵)} = \frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow ۶(۲x+۵) = x(x+۵) \Rightarrow ۱۲x + ۳۰ = x^۲ + ۵x$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۷x - ۳۰ = ۰ \Rightarrow (x-۱۰)(x+۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۰ & \text{ق ق} \\ x = -۳ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

کارگر A کار را به تنهایی در ۱۰ روز و کارگر B کار را به تنهایی در $۱۰ + ۵ = ۱۵$ روز انجام می‌دهد.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۶۷- (میثم حمزه‌لویی)

معادله را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\sqrt{۴x^۲+۸x}=(x+۱)^۲ \Rightarrow \sqrt{۴(x^۲+۲x)}=x^۲+۲x+۱$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{x^۲+۲x}=x^۲+۲x+۱$$

با فرض $\sqrt{x^۲+۲x}=t$ داریم:

$$۲t=t^۲+۱ \Rightarrow t^۲-۲t+۱=۰ \Rightarrow (t-۱)^۲=۰$$

$$t=۱ \xrightarrow{t=\sqrt{x^۲+۲x}} \sqrt{x^۲+۲x}=۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^۲+۲x=۱$$

با کمک مربع کامل کردن، ریشه‌ها را می‌یابیم:

۱) ۲) ۳✓ ۴)

۶۸- (امیرحسین گلسرخی)

قبل از حل سوال حواسمان هست که $x \neq ۰$ می‌باشد:

$$\frac{tx+۲}{-۲}=\frac{x+t-۱}{x} \Rightarrow tx^۲+۲x=-۲x-۲t+۲$$

$$tx^۲+۴x+۲t-۲=۰$$

برای این‌که معادله فقط یک ریشه داشته باشد ۲ حالت داریم:

(۱) $\Delta=۰$ باشد:

$$\Delta=۴^۲-۴(t)(۲t-۲)=۰ \xrightarrow{\div ۴} ۴-۲t^۲+۲t=۰$$

$$۲t^۲-۲t-۴=۰ \xrightarrow{\div ۲} t^۲-t-۲=۰ \Rightarrow (t-۲)(t+۱)=۰$$

$$\Rightarrow t=-۱ \quad , \quad t=۲$$

(۲) معادله ۲ ریشه دارد که یکی از آن‌ها $x=۰$ است و قابل قبول نیست:

$$\xrightarrow{x=۰ \text{ ریشه است}} ۲t-۲=۰ \Rightarrow t=۱$$

بنابراین مجموعهٔ مقادیر t برابر است با: $\{-۱ , ۱ , ۲\}$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۲ و ۱۷ تا ۱۹)

۱) ۲) ۳) ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۶۹- (محمدمصطفی ابراهیمی)

فرض کنید $\sqrt{x+1}=t$ باشد. داریم:

$$x-2\sqrt{x+1}=-1\Rightarrow (x+1)-2\sqrt{x+1}=0\Rightarrow t^2-2t=0$$

$$\Rightarrow t(t-2)=0\Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+1}=0\Rightarrow x=-1$$

$$\sqrt{x+1}=2\Rightarrow x=3$$

مجموع جواب‌ها برابر $2=1-3$ است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۳ و ۲۰ تا ۲۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۷۰- (محمدمصطفی ابراهیمی)

$$(x^2+\frac{1}{x^2})+(-2x-\frac{2}{x})-1=0\Rightarrow ((x+\frac{1}{x})^2-2)-2(x+\frac{1}{x})-1=0$$

$$\Rightarrow (x+\frac{1}{x})^2-2(x+\frac{1}{x})-3=0$$

اگر $x+\frac{1}{x}=t$ در نظر بگیریم، داریم:

$$t^2-2t-3=0\Rightarrow (t-3)(t+1)=0\Rightarrow t=3 \text{ یا } t=-1$$

$$t=3\Rightarrow x+\frac{1}{x}=3\xrightarrow{\times x} x^2+1=3x\Rightarrow x^2-3x+1=0 \quad (1)$$

مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر با $\frac{-b}{a}=3$ است.

$$t=-1\Rightarrow x+\frac{1}{x}=-1 \qquad (2)$$

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۱- (رحیم مشتاق‌نظم)

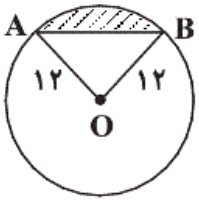
$A\hat{O}B$ زاویهٔ خارجی $\overset{\Delta}{ODB}$ است پس $A\hat{O}B=O\hat{D}B+O\hat{B}D$. چون مثلث BOD متساوی‌الساقین است $O\hat{D}B=O\hat{B}D$؛ پس $A\hat{O}B=2O\hat{D}B$؛ بنابراین $y=O\hat{D}B$ و $x=O\hat{B}D$ می‌باشد.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۲- *(علی فتح‌آبادی)*



$$\frac{\text{اندازهٔ کمان AB}}{۳۶۰^\circ} = \frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}}$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{AB}}{۳۶۰^\circ} = \frac{۴\pi}{۲۴\pi} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{۳۶۰^\circ}{۶} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{O} = ۶۰^\circ$$

پس $\overset{\Delta}{AOB}$ متساوی‌الاضلاع است.

$$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{\overset{\bigtriangledown}{AOB}} - S_{\overset{\Delta}{AOB}}$$

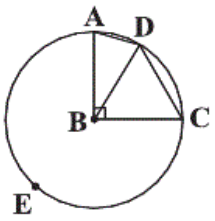
$$= ۱۲^۲ \times \pi \times \frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۱۲^۲ = ۲۴\pi - ۳۶\sqrt{۳} = ۱۲(۲\pi - ۳\sqrt{۳})$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۳- *(مهرداد ملوندی)*

چون $AB = BC = BD = ۲$، پس سه نقطهٔ A، C و D روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲ قرار دارند. مطابق شکل زاویهٔ D محاطی بوده و داریم:



$$\hat{D} = \frac{\widehat{AEC}}{۲} = \frac{۲۷۰^\circ}{۲} = ۱۳۵^\circ$$

با جمع زوایای چهارضلعی، زاویهٔ C به دست می‌آید:

$$\hat{C} = ۳۶۰^\circ - (\hat{A} + \hat{D} + \hat{B}) = ۳۶۰^\circ - (۸۰^\circ + ۱۳۵^\circ + ۹۰^\circ) = ۵۵^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

از تشابه دو مثلث ABM و DBN خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{NB}=\frac{MB}{DB}=\frac{AM}{DN}\Rightarrow\frac{۲}{۴}=\frac{۱/۵}{DN}\Rightarrow DN=۳$$

می‌دانیم که $\overset{\Delta}{NBD}$ متساوی‌الساقین است و $NB=DB=۴$، پس:

$$\text{محیط } NBD=۴+۴+۳=۱۱$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۵- (امیرحسین ابومحبوب)

از مرکز دایره، عمودهایی بر این دو وتر رسم می‌کنیم. می‌دانیم قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند. داریم:

$$\overset{\Delta}{AHO}: OA^۲=OH^۲+AH^۲\Rightarrow R^۲=۴x^۲+۴ \qquad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{CH'O}: OC^۲=OH'^۲+CH'^۲\Rightarrow R^۲=x^۲+۲۵ \qquad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲)\Rightarrow ۴x^۲+۴=x^۲+۲۵\Rightarrow ۳x^۲=۲۱\Rightarrow x^۲=۷$$

$$\xrightarrow{(۲)} R^۲=x^۲+۲۵=۷+۲۵=۳۲\Rightarrow R=۴\sqrt{۲}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

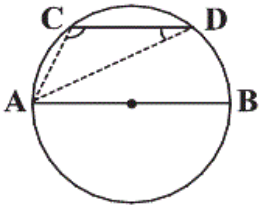
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۶- (حامد یحیی‌اوغلی)

می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند و برعکس.

از طرفی اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی، برابر نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن است.

پس داریم:



$$CD \parallel AB \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

همچنین:

$$A\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ + \overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ + \overset{\frown}{AC}}{۲}$$

و نیز:

$$A\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$$

حال خواهیم داشت:

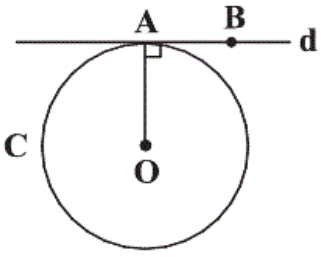
$$A\hat{C}D - A\hat{D}C = \frac{۱۸۰^\circ + \overset{\frown}{AC}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ + \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AC}}{۲} = ۹۰^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۷- (رحیم مشتاق‌نظم)

چون $d \perp OA$ پس d بر دایرهٔ C مماس است. بنابراین گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» درست هستند. چون در مثلث OAB، زاویهٔ A قائمه است پس OB وتر مثلث است. بنابراین: $OA < OB$.



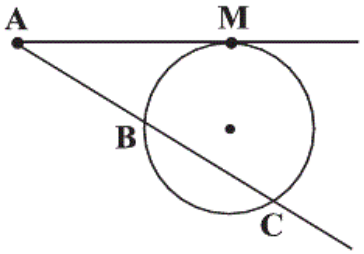
(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۸- *(حامد یحیی‌اوغلی)*

می‌دانیم مجموع اندازه‌های کل کمان‌های مجزای یک دایره برابر ۳۶۰° است.



در نتیجه:

$$\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{CM}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \frac{۳}{۲}\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{BM}+\frac{۳}{۲}\overset{\frown}{BM}=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۴\overset{\frown}{BM}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BM}=۹۰^\circ \quad , \quad \overset{\frown}{CM}=۱۳۵^\circ$$

از طرفی می‌دانیم $M\hat{B}C$، زاویهٔ خارجی مثلث ABM می‌باشد، پس:

$$M\hat{B}C=A\hat{M}B+\hat{A}\Rightarrow \hat{A}=M\hat{B}C-A\hat{M}B$$

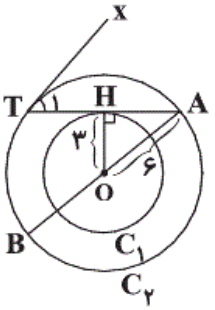
$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{CM}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{BM}}{۲}=\frac{۱۳۵^\circ-۹۰^\circ}{۲}=۲۲/۵^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۹- *(فرشاد فرامرزی)*

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH، OH نصف وتر است. پس: $\hat{A}=۳۰^\circ$.



$$\text{محاطی } \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BT}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{BT}=۶۰^\circ$$

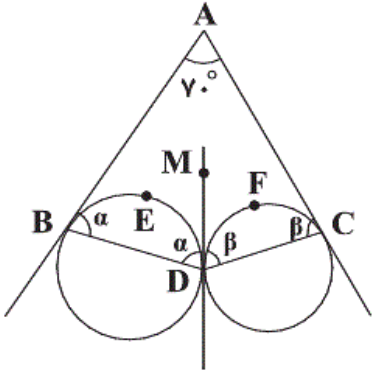
$$\Rightarrow \overset{\frown}{AT}=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$$

$$\text{ظلّی } \hat{T}_۱=\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}=\frac{۱۲۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



$$A\hat{B}D = M\hat{D}B = \frac{\overset{\frown}{BED}}{۲} = \alpha$$

$$A\hat{C}D = M\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{DFC}}{۲} = \beta$$

حال مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی $ABDC$، ۳۶۰° است و داریم:

$$\hat{A} = ۷۰^\circ$$

در نتیجه: $۲\alpha + ۲\beta = ۳۶۰^\circ - ۷۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۴۵^\circ \Rightarrow B\hat{D}C = ۱۴۵^\circ$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۸۱ (شروین سیاح‌نیا)

با توجه به رابطهٔ $S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$ داریم:

$$\left.\begin{aligned} S_{۱۲} = \frac{۱۲}{۲}(۲a_۱ + ۱۱d) = ۱۳۲ \Rightarrow ۲a_۱ + ۱۱d = ۲۲ \\ S_{۲۱} = \frac{۲۱}{۲}(۲a_۱ + ۲۰d) = ۴۲۰ \Rightarrow ۲a_۱ + ۲۰d = ۴۰ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{(-)} ۹d = ۱۸ \Rightarrow d = ۲$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

-۸۲ (سینا محمدپور)

از آنجایی که اختلاف مجموع سی جملهٔ اول و ده جملهٔ سوم، در واقع همان مجموع بیست جملهٔ اول دنباله می‌باشد، پس:

$$S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}[۲(a_۱) + ۱۹ \times (۳)] \Rightarrow ۴۵ = ۲a_۱ + ۵۷ \Rightarrow a_۱ = -۶$$

در نتیجه:

$$S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}[۲ \times (-۶) + ۹ \times (۳)] = ۷۵$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۳ *(امین قربانعلی‌پور)*

نقطهٔ اول را به هر یک از ۲۹ نقطهٔ دیگر وصل می‌کنیم که ۲۹ وتر پدید می‌آید و از اتصال نقطهٔ دوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطهٔ اول) ۲۸ وتر به دست می‌آید با ادامهٔ این روند تعداد وترها برابر است با:

$$۲۹+۲۸+...+۱$$

پس باید مجموع ۲۹ جملهٔ ابتدایی از یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۲۹ و قدرنسبت ۱- را حساب کنیم:

$$S_{۲۹}=\frac{۲۹}{۲}[۲\times ۲۹+(۲۹-۱)(-۱)]=\frac{۲۹}{۲}[۵۸-۲۸]=\frac{۲۹\times ۳۰}{۲}=۴۳۵$$

در حل این سوال از نکتهٔ زیر نیز می‌توانیم استفاده کنیم:

$$۱+۲+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۸۴ *(امیرهوشنگ خمسه)*

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی به صورت $a_n=a_۱q^{n-۱}$ است، پس:

$$a_{۱۰}=(a_۶)^۲\Rightarrow a_۱q^۹=(a_۱q^۵)^۲$$

$$\Rightarrow a_۱q^۹=a_۱^۲q^{۱۰}\Rightarrow ۱=a_۱q\xrightarrow{a_۱=۳}q=\frac{۱}{۳}$$

$$S_۴=a_۱\frac{۱-q^۴}{۱-q}=۳\times\frac{۱-(\frac{۱}{۳})^۴}{۱-\frac{۱}{۳}}=۳\times\frac{\frac{۸۰}{۸۱}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۴۰}{۹}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۴ تا ۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۵- (محمدمصطفی ابراهیمی)

مجموع جملات ردیف فرد: $S_{10} = \frac{a_1((q^2)^{10}-1)}{q^2-1} = \frac{a_1(q^{20}-1)}{q^2-1} = 135$

مجموع جملات ردیف زوج: $S'_{10} = \frac{a_2((q^2)^{10}-1)}{q^2-1} = \frac{a_1 q(q^{20}-1)}{q^2-1}$

$$= q\left(\frac{a_1(q^{20}-1)}{q^2-1}\right) = \frac{2}{3} \times 135 = 90$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۴ تا ۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۸۶- (امیرحسین افشار)

$$x^2 + ax + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = S = -a \\ x_1 \times x_2 = P = 1 \end{cases}$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ موردنظر را به دست می‌آوریم:

$$S' = x_1^2 + 1 + x_2^2 + 1 = \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{S^2 - 2P} + 2 = S^2 - 2P + 2 = a^2 - 2 + 2 = a^2$$

$$P' = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1 = P^2 + S^2 - 2P + 1$$

$$= 1^2 + a^2 - 2 + 1 = a^2$$

معادلهٔ جدید: $x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - a^2 x + a^2 = 0$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸ و ۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۷ *(امیرهوشنگ خمسه)*

اگر α و β ریشه‌ها باشند:

$$\alpha=\frac{۱}{\beta}\Rightarrow\alpha\beta=۱\Rightarrow\frac{c}{a}=۱\Rightarrow\frac{۶-m^۲}{m}=۱$$

$$\Rightarrow m^۲+m-۶=۰\Rightarrow m=۲\ ,\ -۳$$

اگر $m=-۳$ باشد، معادله ریشه ندارد، زیرا Δ منفی می‌شود. به ازای $m=۲$ داریم:

$$۲x^۲+۵x+۲=۰\Rightarrow\alpha+\beta=-\frac{۵}{۲}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۸۸ *(محمد پوراحمدی)*

گزینهٔ «۱»: از آنجا که ماکزیمم دارد $a<۰$ و محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها پایین‌تر از محور x ها است پس $c<۰$. با توجه به مختصات رأس سهمی $x=-\frac{b}{۲a}>۰$ پس $b>۰$.

گزینهٔ «۲»: از آنجا که ماکزیمم دارد $a<۰$ و محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها پایین محور x ها است پس $c<۰$. با توجه به مختصات رأس سهمی $x=-\frac{b}{۲a}<۰$ پس $b<۰$

گزینهٔ «۳»: از آنجا که می‌نیمم دارد $a>۰$ و محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها پایین محور x ها است پس $c<۰$. با توجه به مختصات رأس سهمی $x=-\frac{b}{۲a}<۰$ پس $b>۰$

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۹– (مهرداد اسپیدکار)

باید $a > ۰$ باشد. چون دهانهٔ سهمی رو به بالا است. به علاوه عرض از مبدأ سهمی $b = ۱$ است. پس داریم:

$$f(x) = ax^۲ + (۳ - a)x + ۱$$

به علاوه طول رأس سهمی منفی است:

$$\frac{-(۳-a)}{۲a} < ۰ \Rightarrow \frac{۳-a}{a} > ۰ \xrightarrow{a>۰} ۳ - a > ۰ \Rightarrow a < ۳$$

شرط آخر هم این است که $\Delta < ۰$ باشد:

$$\Delta = (۳-a)^۲ - ۴(a)(۱) = ۹ + a^۲ - ۶a - ۴a = a^۲ - ۱۰a + ۹$$
$$= (a-۹)(a-۱) < ۰ \Rightarrow ۱ < a < ۹$$

از اشتراک شرط‌های به دست آمده $۱ < a < ۳$ می‌شود.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۰– (محمدحسین صابری)

فرض کنیم $x^۲ - x - ۱ = t$ باشد:

$$(x^۲ - x - ۱)^۲ = ۳(x^۲ - x - ۱) - ۲ \Rightarrow t^۲ - ۳t + ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۲ \\ t = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲ - x - ۱ = ۲ \Rightarrow x^۲ - x - ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۳ \Rightarrow \text{دو ریشهٔ غیرصحیح می‌دهد} \\ x^۲ - x - ۱ = ۱ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \\ \Rightarrow (x-۲)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۲ \end{cases} \end{cases}$$

پس معادلهٔ بالا، دو ریشهٔ صحیح و دو ریشهٔ غیرصحیح دارد.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷ و ۱۰ تا ۱۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۱۱ (محمد پوراحمدی)

اندازهٔ زاویهٔ محاطی، نصف کمان روبه‌رو به آن است یعنی $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$

پس $۲x=\frac{y}{۲}$، در نتیجه: $y=۴x$. با توجه به این‌که در هر دایره مجموع کمان‌ها برابر ۳۶۰° است، داریم:

$$۲x+y+۳x=۳۶۰^\circ \xrightarrow{y=۴x} ۵x+۴x=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۹x=۳۶۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} x=۴۰^\circ \\ y=۱۶۰^\circ \end{cases}$$

$$y-x=۱۶۰^\circ-۴۰^\circ=۱۲۰^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۱۲ (رحیم مشتاق‌نظم)

می‌دانیم رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{\text{اندازهٔ کمان } AB}{۳۶۰^\circ}=\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}$$

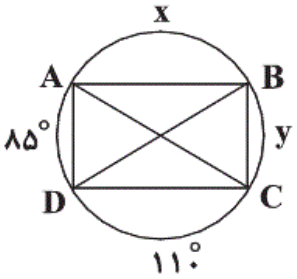
پس: $\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}=\frac{۴}{۲\pi R}$ لذا: $۲\pi R=۲۴$ و در نتیجه: $R=\frac{۱۲}{\pi}$.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۱۳ (علی فتح‌آبادی)

می‌دانیم کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند. پس:



$$AC=BD \Rightarrow \overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{BAD}$$

$$\Rightarrow x+y=۸۵^\circ+x \Rightarrow y=۸۵^\circ$$

$$x+۸۵^\circ+۸۵^\circ+۱۱۰^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow x=۳۶۰^\circ-۲۸۰^\circ=۸۰^\circ$$

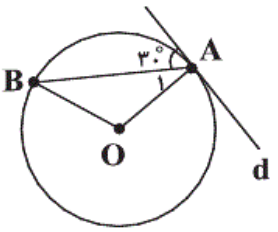
(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۴- *(سارا خسروی)*

کافی است از مرکز دایره به نقاط A و B وصل کنیم. شعاع در نقطهٔ تماس بر خط مماس بر دایره عمود است، پس:



$$\hat{A}_1 = ۹۰^\circ - ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$$

از طرفی $R = OA = OB$، بنابراین داریم: $\hat{A}_1 = \hat{B} = ۶۰^\circ$ (*)

$$\overset{\Delta}{AOB} : \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{O} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{(*)} \hat{O} = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow OB = OA = AB = R = ۵$$

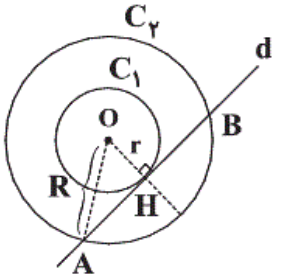
(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۵- *(هانیه ساعی‌یکتا)*

چون OH قسمتی از شعاع دایرهٔ C_2 است، قطعاً وتر AB را در نقطهٔ H نصف می‌کند: $AH = ۱۲$ (۱)

از طرفی $R - r = ۸$ است. داریم:



طبق قضیهٔ فیثاغورس: $OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow R^2 = r^2 + ۱۴۴$

$$\Rightarrow R^2 - r^2 = ۱۴۴ \Rightarrow (R-r)(R+r) = ۱۴۴ \xrightarrow{R-r=۸} R + r = ۱۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R - r = ۸ \\ R + r = ۱۸ \end{cases} \Rightarrow R = ۱۳$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

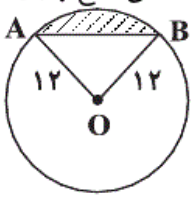
۱۱۶- (رحیم مشتاق‌نظم)

$\hat{AOB}$ زاویهٔ خارجی $\overset{\Delta}{ODB}$ است پس $\hat{AOB} = \hat{ODB} + \hat{OBD}$. چون مثلث BOD متساوی‌الساقین است $\hat{ODB} = \hat{OBD}$؛ پس $\hat{AOB} = ۲\hat{ODB}$؛ بنابراین $y = \hat{ODB}$ و $x = \hat{OBD}$ می‌باشد.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۷- (علی فتح‌آبادی)



$$\frac{\text{اندازهٔ کمان } AB}{۳۶۰^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AB}}{۳۶۰^\circ} = \frac{۴\pi}{۲۴\pi} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \frac{۳۶۰^\circ}{۶} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{O} = ۶۰^\circ$$

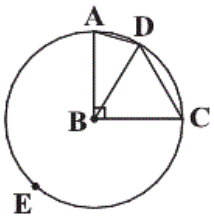
پس $\overset{\Delta}{AOB}$ متساوی‌الاضلاع است.

$$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{\overset{\bigtriangledown}{AOB}} - S_{\overset{\Delta}{AOB}}$$

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۸- (مهرداد ملوندی)

چون $AB = BC = BD = ۲$، پس سه نقطهٔ A، C و D روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲ قرار دارند. مطابق شکل زاویهٔ D محاطی بوده و داریم:



$$\hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AEC}}{۲} = \frac{۲۷۰^\circ}{۲} = ۱۳۵^\circ$$

با جمع زوایای چهارضلعی، زاویهٔ $\hat{C}$ به دست می‌آید:

$$\hat{C} = ۳۶۰^\circ - (\hat{A} + \hat{D} + \hat{B}) = ۳۶۰^\circ - (۸۰^\circ + ۱۳۵^\circ + ۹۰^\circ) = ۵۵^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۹- *(نوید مجیدی)*

دو زاویهٔ DNA و DMI، زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان هستند از این‌رو برابرند، یعنی $D\hat{N}A = D\hat{M}I = \frac{\overset{\frown}{DA}}{۲}$؛ از سوی دیگر $D\hat{I}M = D\hat{N}A$ زیرا چهارضلعی DIAN متوازی‌الاضلاع است، پس می‌توان نتیجه گرفت که هر یک از مثلث‌های DMI، ABM و NBD متساوی‌الساقین هستند.

حال از تشابه دو مثلث ABM و DBN خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{NB} = \frac{MB}{DB} = \frac{AM}{DN} \Rightarrow \frac{۲}{۴} = \frac{۱/۵}{DN} \Rightarrow DN = ۳$$

می‌دانیم که $\overset{\Delta}{NBD}$ متساوی‌الساقین است و $NB = DB = ۴$، پس:

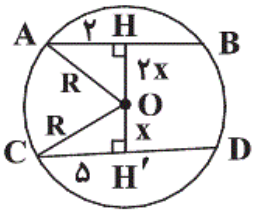
$$\text{محیط } NBD = ۴ + ۴ + ۳ = ۱۱$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۲۰- *(امیرحسین ابومحبوب)*

از مرکز دایره، عمودهایی بر این دو وتر رسم می‌کنیم. می‌دانیم قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند. داریم:



$$\overset{\Delta}{AHO}: OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \Rightarrow R^۲ = ۴x^۲ + ۴ \qquad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{CH'O}: OC^۲ = OH'^۲ + CH'^۲ \Rightarrow R^۲ = x^۲ + ۲۵ \qquad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow ۴x^۲ + ۴ = x^۲ + ۲۵ \Rightarrow ۳x^۲ = ۲۱ \Rightarrow x^۲ = ۷$$

$$\xrightarrow{(۲)} R^۲ = x^۲ + ۲۵ = ۷ + ۲۵ = ۳۲ \Rightarrow R = ۴\sqrt{۲}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۷۱ *(کتاب آبی)*

اگر قدر نسبت دنبالهٔ حسابی حاصل را d بنامیم، جملات به‌صورت زیر خواهند بود:

$$۸, ۸+d, \ldots, ۶۳-d, ۶۳$$

پس بزرگ‌ترین عدد واسطه $۶۳-d$ و کوچک‌ترین آن‌ها $۸+d$ است، در نتیجه:

$$(۶۳-d)-(۸+d)=۳۳ \Rightarrow d=۱۱$$

تعداد اعداد اضافه شده را از رابطهٔ $d=\frac{b-a}{n+۱}$ می‌یابیم، پس:

$$۱۱=\frac{۶۳-۸}{n+۱} \Rightarrow n=۴$$

$$\Rightarrow \text{مجموع کل جملات}: S_۶=\frac{۶}{۲}(a_۱+a_۶)=۳\times(۸+۶۳)=۲۱۳$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۷۲ *(کتاب آبی)*

در هر دنبالهٔ هندسی، $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ بنابراین:

$$\begin{cases} S_3 = 136 \\ S_6 = 153 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_3 = a_1 \times \frac{1-q^3}{1-q} = 136 \\ S_6 = a_1 \times \frac{1-q^6}{1-q} = 153 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_3}{S_6} = \frac{136}{153}$$

$$\Rightarrow \frac{1-q^3}{1-q^6} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{1-q^3}{(1-q^3)(1+q^3)} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+q^3} = \frac{8}{9} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 q^4} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16$$

(حسابان ۱- صفحهٔ ۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۷۳ *(کتاب آبی)*

اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه (*) $\alpha = \frac{\beta^2}{2}$ و از طرفی $\alpha\beta = -\frac{8}{2} = -4$، پس:

$$\alpha\beta = -4 \xrightarrow{(*)} \frac{\beta^3}{2} = -4 \Rightarrow \beta = -2 \Rightarrow \alpha = 2$$

از طرفی: $\alpha + \beta = \frac{m+1}{2} = 0 \Rightarrow m = -1$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸ و ۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

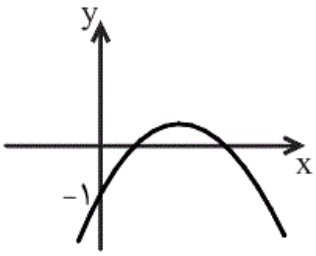
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۷۴ *(کتاب آبی)*

ضریب $x^۲$ باید منفی باشد زیرا در غیر این‌صورت نمودار تابع درجهٔ دوم الزاماً از ناحیهٔ اول می‌گذرد. بنابراین:

$$a-۳<۰\Rightarrow a<۳$$

با توجه به این‌که $a<۳$ است، حالتی را در نظر می‌گیریم که نمودار حتماً از ناحیهٔ اول بگذرد، سپس مجموعهٔ جواب بدست آمده را از جواب $a<۳$ کم می‌کنیم. چون عرض از مبدأ ۱- است و $a<۳$ است (ماکزیمم دارد) پس نمودار زیر برای عبور تابع از ناحیهٔ اول قابل رسم است.



با توجه به نمودار، شرط‌های زیر برقرار خواهند بود:

$\Delta>۰\Rightarrow a^۲-۴(a-۳)(-۱)>۰$: دو ریشه دارد

$$\Rightarrow a^۲+۴a-۱۲>۰\Rightarrow (a-۲)(a+۶)>۰$$

$$a>۲ \text{ یا } a<-۶ \quad \text{I}$$

$\frac{-۱}{a-۳}>۰\Rightarrow a<۳$: ضرب ریشه‌ها مثبت $\quad \text{II}$

$\frac{-a}{a-۳}>۰\Rightarrow ۰<a<۳$: جمع ریشه‌ها مثبت $\quad \text{III}$

از اشتراک شرط‌های I، II و III، مجموعهٔ مقادیر a به‌صورت $۲<a<۳$ خواهد بود. یعنی اگر $۲<a<۳$ باشد نمودار حتماً از ناحیهٔ اول می‌گذرد. با کم کردن این جواب، از شرط $a<۳$ خواهیم داشت:

$$a\leq ۲$$

پس با شرط $a\leq ۲$ نمودار تابع از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸ تا ۱۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\Rightarrow (x+3)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$x^2+x=12 \Rightarrow x^2+x-12=0$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -4+3-3+2=-2$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۷۶ (کتاب آبی)

مخرج کسرها را تجزیه، سپس عبارت را ساده و در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم.

$$\frac{x+4}{(x+4)(x-2)}+\frac{1-x}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{x\neq -4,1} \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\times 3(x-2)(x+2)} 3(x+2)-3(x-2)=(x-2)(x+2)$$

$$\Rightarrow 12=x^2-4 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$$

از میان این جواب‌ها، فقط $x=4$ قابل قبول است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۷۷ (کتاب آبی)

فرض کنید x، مقدار تبخیر برحسب کیلوگرم باشد، ابتدا محاسبه می‌کنیم که چند کیلوگرم رنگ خالص داریم:

وزن رنگ خالص $= 11 \times \%40 + 4 \times \%70 = 7/2$ کیلوگرم

بنابراین در $11+4=15$ کیلوگرم رنگ موجود، ۷/۲ کیلوگرم رنگ خالص وجود دارد، اگر x میزان تبخیر باشد، آن‌گاه:

$$\frac{7/2}{15-x}=\%50=\frac{50}{100}$$

$$\Rightarrow 720=750-50x \Rightarrow x=0/6 \text{ کیلوگرم}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۷۸ *(کتاب آبی)*

$$x+a=\sqrt{5x-x^2} \xrightarrow{x=4} 4+a=\sqrt{20-16}=\sqrt{4}=2$$

$$\Rightarrow a=-2$$

$$x-2=\sqrt{5x-x^2} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x-2)^2=5x-x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2-9x+4=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{49}}{4} \begin{cases} x'=4 & \text{ق} \\ x''=\frac{1}{2} & \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

اگر در معادله به جای x مقدار $\frac{1}{2}$ قرار دهیم سمت چپ تساوی منفی و سمت راست، مثبت می‌شود؛ یعنی $x=\frac{1}{2}$ در معادله صدق نمی‌کند.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۷۹

$$mx - ۳\sqrt{x} + (m-۲) = ۰$$

با باز نویسی معادله به صورت زیر داریم:

$$\Rightarrow m(\sqrt{x})^۲ - ۳\sqrt{x} + (m-۲) = ۰ \quad (*)$$

با در نظر گرفتن $\sqrt{x} = t \geq ۰$، معادلهٔ (*) به $mt^۲ - ۳t + (m-۲) = ۰$ تبدیل می‌شود، اگر این معادله دارای یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی باشد، معادلهٔ (*) فقط یک ریشه دارد.

برای این‌که معادله شرایط فوق را داشته باشد باید:

$$P = t_۱ . t_۲ = \frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{m-۲}{m} < ۰$$

$$\Rightarrow ۰ < m < ۲ \quad (۱)$$

توجه کنید که به ازای $m = ۰$ معادله جواب حقیقی ندارد و به ازای $m = ۲$ معادلهٔ اصلی دو جواب حقیقی دارد، پس قابل قبول نیستند.

هم‌چنین اگر معادلهٔ $mt^۲ - ۳t + (m-۲) = ۰$ دارای یک ریشهٔ مضاعف نامنفی باشد نیز معادلهٔ (*) فقط یک جواب دارد:

$$t = \frac{-b}{۲a} \geq ۰ \Rightarrow \frac{-(-۳)}{۲m} \geq ۰ \Rightarrow \frac{۳}{۲m} \geq ۰ \Rightarrow m > ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۰ \Rightarrow ۹ - ۴m(m-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow -۴m^۲ + ۸m + ۹ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۲ \pm \sqrt{۱۳}}{۲}$$

$$\xrightarrow{m>۰} m = \frac{۲ + \sqrt{۱۳}}{۲} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که مجموعهٔ مقادیر m به صورت $(۰ < m < ۲) \cup \left\{ m = \frac{۲ + \sqrt{۱۳}}{۲} \right\}$ است که تنها گزینهٔ (۲) زیرمجموعه‌ای از آن است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳ و ۲۰ تا ۲۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۰ *(کتاب آبی)*

زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد، پس:

$$۳-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۳ \quad (۱)$$

$$x-۳\geq ۰\Rightarrow x\geq ۳ \quad (۲)$$

$$x\geq ۰ \quad (۳)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (۱)، (۲) و (۳)}} x=۳$$

به ازای $x=۳$ معادله برقرار نیست.

$$\sqrt{۳-۳}+\sqrt{۳-۳}=۰\neq\sqrt{۳}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۲۱ *(سیدوحید ذوالفقاری)*

ارزش گزارهٔ «حاصل جمع عدد x و معکوسش بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است» زمانی درست است که عدد مورد نظر مثبت باشد و تنها مجموعه‌ای که اعضای آن مثبت هستند و زیرمجموعهٔ دامنهٔ متغیر می‌باشد، گزینهٔ «۲» است. دقت کنید که در گزینهٔ «۳»، $\frac{۱}{۳}$ به دامنهٔ متغیر تعلق ندارد.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۵ و ۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۲۲ *(امین قربانعلی‌پور)*

ارزش p درست، q نادرست و r نادرست است.

p	q	r	$q\vee r$	$\sim p$	$(q\vee r)\vee\sim p$
د	ن	ن	ن	ن	ن

بنابراین ارزش گزارهٔ گزینهٔ «۴» نادرست است. برای سایر گزینه‌ها داریم:

p	q	r	$p\vee q$	$p\vee\sim p$	$(p\vee q)\vee(q\vee r)$
د	ن	ن	د	د	د
			گزینهٔ «۱»	گزینهٔ «۲»	گزینهٔ «۳»

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۲ تا ۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۳- *(سیدوحید ذوالفقاری)*

اگر گزاره‌های« n عددی صحیح و مثبت و n^2 زوج است.» و « n زوج است.» را به‌ترتیب با p و q نشان دهیم، آن‌گاه با توجه به هم‌ارزی زیر، نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ را می‌توان به صورت گزارهٔ « n عددی صحیح و مثبت و n^2 زوج است و n فرد است.» نمایش داد.

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۱ ✓۲ ۳ ۴

۱۲۴- *(امیرحسین ابومحبوب)*

ارزش گزارهٔ $\sim r \vee (\sim p \Rightarrow q)$ تنها در حالتی نادرست است که گزاره‌های $(\sim r)$ و $(\sim p \Rightarrow q)$ هر دو نادرست باشند. در این صورت گزارهٔ r درست، گزارهٔ $(\sim p)$ درست و گزارهٔ q نادرست است. بنابراین تنها در حالتی از جدول که گزارهٔ r درست و دو گزارهٔ p و q نادرست باشند، ارزش گزارهٔ مورد نظر نادرست می‌گردد.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

✓۱ ۲ ۳ ۴

۱۲۵- *(مرتضی فهیم‌علوی)*

$$\sim [p \wedge (\sim p \vee q)] \wedge [\sim q \vee (p \wedge q)]$$
$$\equiv \sim [(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)] \wedge [(\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee q)]$$
$$\equiv \sim [F \vee (p \wedge q)] \wedge [(\sim q \vee p) \wedge T] \equiv \sim (p \wedge q) \wedge (\sim q \vee p)$$
$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv \sim q \vee (\sim p \wedge p) \equiv \sim q \vee F \equiv \sim q$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۱ ۲ ۳ ✓۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۶- *(امیرهوشنگ خمسه)*

گزینهٔ «۱»: همواره برای هر عدد صحیح برقرار است.

گزینهٔ «۲»: اتحاد مثلثاتی است و همواره برقرار است.

گزینهٔ «۳»: برای هر عدد زوجی مثل $x = ۲$ برقرار است.

گزینهٔ «۴»: به ازای تمامی اعداد حقیقی، $|x| \leq x$ است. بنابراین گزینهٔ «۴» نادرست است.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۲۷- *(مرتضی فهیم‌علوی)*

گزینهٔ «۱»: نادرست است؛ چرا که $x = -۱$ در آن صدق نمی‌کند.

گزینهٔ «۲»: نادرست است. عبارت $x^۲ + x + ۱$ همواره مثبت است، زیرا Δ آن (-۳) و ضریب $x^۲$ نیز مثبت است.

گزینهٔ «۳»: درست است. عبارت $x^۲ + ۳x + ۳$ همواره مثبت است، زیرا Δ آن (-۳) و ضریب $x^۲$ نیز مثبت است.

گزینهٔ «۴»: نادرست است. هیچ مقداری برای x وجود ندارد که عبارت $\frac{۱}{x-۱}$ را صفر کند.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۸- *(محمد پوراحمدی)*

دامنهٔ متغیر گزاره‌نما: $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

گزینهٔ «۴»:

$$\exists x \in A \;;\quad x^۲ + x = ۰ \Rightarrow x(x+۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x+۱ = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x = -۱ \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = \varnothing$$

بنابراین ارزش گزارهٔ گزینهٔ «۴» نادرست است، در حالی که ارزش گزاره‌های سه گزینهٔ دیگر، درست می‌باشد.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۹- *(محمد پوراحمدی)*

$$\sim(\forall x\ ;\ p(x)) \equiv \exists x\ ;\ \sim p(x)$$

بنابراین نقیض گزارهٔ «تمام انسان‌ها فناپذیرند.» به‌صورت گزارهٔ «بعضی از انسان‌ها فناناپذیرند.» می‌باشد.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۰- *(امیرهوشنگ خمسه)*

با توجه به رابطهٔ هم‌ارزی $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$، نقیض گزاره‌نمای صورت سوال به شکل زیر است:

$$(\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \ ۳x \leq ۲) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}\ ;\ \ x^۲ \leq ۰)$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۱- *(کتاب آبی)*

اگر قدر نسبت دنبالهٔ حسابی حاصل را d بنامیم، جملات به‌صورت زیر خواهند بود:

$$۸, ۸+d, \ldots, ۶۳-d, ۶۳$$

پس بزرگ‌ترین عدد واسطه $۶۳-d$ و کوچک‌ترین آن‌ها $۸+d$ است، در نتیجه:

$$(۶۳-d)-(۸+d)=۳۳ \Rightarrow d=۱۱$$

تعداد اعداد اضافه شده را از رابطهٔ $d=\frac{b-a}{n+۱}$ می‌یابیم، پس:

$$۱۱=\frac{۶۳-۸}{n+۱} \Rightarrow n=۴$$

$$\Rightarrow \text{مجموع کل جملات}: S_۶=\frac{۶}{۲}(a_۱+a_۶)=۳\times(۸+۶۳)=۲۱۳$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۲- *(کتاب آبی)*

اگر مجموع n جملهٔ اول این دنباله را با S_n نشان دهیم، آن‌گاه مجموع پنج جملهٔ اول آن برابر با S_5 و مجموع پنج جملهٔ بعدی برابر با $S_{10} - S_5$ است. طبق فرض سؤال:

$$S_5 = \frac{1}{3}(S_{10} - S_5) \Rightarrow 3S_5 = S_{10} - S_5$$

$$\Rightarrow S_{10} = 4S_5 \quad (*)$$

از طرفی می‌دانیم که در هر دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و قدر نسبت d، داریم $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$، بنابراین از معادلهٔ $(*)$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 4 \times \frac{5}{2}(2a_1 + 4d)$$

$$\Rightarrow 5(2a_1 + 9d) = 10(2a_1 + 4d) \Rightarrow d = 2a_1 \quad (**)$$

در نتیجه با فرض $a_1 \neq 0$، می‌توان نوشت:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} \overset{(**)}{=\!=} \frac{a_1 + 2a_1}{a_1} = \frac{3a_1}{a_1} = 3$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۳

در هر دنبالهٔ هندسی، $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ بنابراین:

$$\begin{cases} S_3 = 136 \\ S_6 = 153 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_3 = a_1 \times \frac{1-q^3}{1-q} = 136 \\ S_6 = a_1 \times \frac{1-q^6}{1-q} = 153 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_3}{S_6} = \frac{136}{153}$$

$$\Rightarrow \frac{1-q^3}{1-q^6} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{1-q^3}{(1-q^3)(1+q^3)} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+q^3} = \frac{8}{9} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 q^4} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16$$

(حسابان ۱- صفحهٔ ۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۴- *(کتاب آبی)*

محیط مستطیل اول، ۶ سانتی‌متر و محیط مستطیل دوم به دلیل آن‌که اضلاعش، ۱ و $\frac{۱}{۲}$ است، برابر ۳ می‌باشد، پس محیط مستطیل‌ها در هر مرحله عبارتند از:

$$۶ \ , \ ۳ \ , \ \frac{۳}{۲} \ , \ ...$$

که یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱ = ۶$ و قدر نسبت $\frac{۱}{۲}$ داریم، با توجه به خواستهٔ مسئله خواهیم داشت:

$$\frac{S_۶}{a_۱} = \frac{\frac{a_۱(۱-(\frac{۱}{۲})^۶)}{۱-\frac{۱}{۲}}}{a_۱} = \frac{۱-\frac{۱}{۶۴}}{۱-\frac{۱}{۲}} = \frac{۶۳}{۳۲}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۴ تا ۶)

۱) ۲) ✓ ۳) ۴)

۹۵- *(کتاب آبی)*

اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه (*) $\alpha = \frac{\beta^۲}{۲}$ و از طرفی $\alpha\beta = -\frac{۸}{۲} = -۴$، پس:

$$\alpha\beta = -۴ \xrightarrow{(*)} \frac{\beta^۳}{۲} = -۴ \Rightarrow \beta = -۲ \Rightarrow \alpha = ۲$$

از طرفی: $\alpha + \beta = \frac{m+۱}{۲} = ۰ \Rightarrow m = -۱$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸ و ۹)

۱) ۲) ۳) ✓ ۴)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۶ *(کتاب آبی)*

چون مجموع ضرایب صفر است، پس ریشه‌ها $x' = ۱$ و $x'' = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$ هستند، چون $\alpha > \beta$ بنابراین $\alpha = ۱$ و $\beta = \frac{۱}{۲}$ است. پس $\alpha' = ۵\alpha = ۵$ و $\beta' = ۴\beta = ۲$ پس:

$$S = \alpha' + \beta' = ۵ + ۲ = ۷$$
$$P = \alpha'\beta' = ۵ \times ۲ = ۱۰$$

معادلهٔ درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن P است به صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ است.

بنابراین:

معادله: $x^۲ - ۷x + ۱۰ = ۰$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸ و ۹)

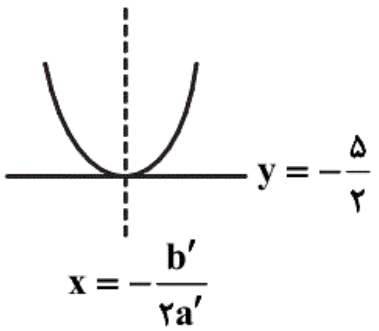
۱ ۲ ۳✓ ۴

-۹۷ *(کتاب آبی)*

با توجه به مفروضات مسأله $y = \frac{-۵}{۲}$ عرض نقطهٔ می‌نیمم منحنی است.

به شکل زیر توجه کنید.

$$-\frac{۵}{۲} = -\frac{\Delta}{۴a'}$$
$$\Rightarrow \frac{۵}{۲} = \frac{۹ - ۲a}{۲} \Rightarrow a = ۲$$



(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۸

رأس هر سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ ، $(a \neq ۰)$ ، نقطهٔ $S(\frac{-b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a})$ است.

رأس این سهمی روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم مختصات، یعنی خط $y = x$ واقع است، پس داریم:

$$y = x^۲ + mx - \frac{۱}{۴} \ , \ y_S = x_S \Rightarrow \frac{-b}{۲a} = \frac{-\Delta}{۴a}$$

$$\Rightarrow \frac{-m}{۲} = \frac{-(m^۲ + ۱)}{۴} \Rightarrow ۲m = m^۲ + ۱ \Rightarrow (m-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow m = ۱$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ سهمی}: y = x^۲ + x - \frac{۱}{۴}$$

می‌دانیم اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ ، باشند، آن‌گاه، $|x_۱ - x_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

طول پاره‌خط AB برابر قدرمطلق تفاضل جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ + x - \frac{۱}{۴} = ۰$ است، پس:

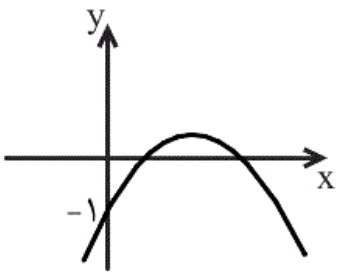
$$AB = |x_۱ - x_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۲}}{۱} = \sqrt{۲}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نمودار زیر برای عبور تابع از ناحیهٔ اول قابل رسم است.



با توجه به نمودار، شرط‌های زیر برقرار خواهند بود:

دو ریشه دارد : $\Delta > ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴(a-۳)(-۱) > ۰$

$\Rightarrow a^۲ + ۴a - ۱۲ > ۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۶) > ۰$

$a > ۲$ یا $a < -۶$ I

ضرب ریشه‌ها مثبت : $\frac{-۱}{a-۳} > ۰ \Rightarrow a < ۳$ II

جمع ریشه‌ها مثبت : $\frac{-a}{a-۳} > ۰ \Rightarrow ۰ < a < ۳$ III

از اشتراک شرط‌های I، II و III، مجموعهٔ مقادیر a به‌صورت $۲ < a < ۳$ خواهد بود. یعنی اگر $۲ < a < ۳$ باشد نمودار حتماً از ناحیهٔ اول می‌گذرد. با کم کردن این جواب، از شرط $a < ۳$ خواهیم داشت:

$a \leq ۲$

پس با شرط $a \leq ۲$ نمودار تابع از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸ تا ۱۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۰۰

با تغییر متغیر $x^۲ + x = a$ معادلهٔ درجهٔ دوم زیر حاصل می‌شود:

$$a^۲ - ۱۸a + ۷۲ = ۰ \Rightarrow (a-۶)(a-۱۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۶ \\ a = ۱۲ \end{cases}$$

$$x^۲ + x = ۶ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۳)(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۳ \end{cases}$$

$$x^۲ + x = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۴)(x-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۴ \\ x = ۳ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ مجموع ریشه‌ها $= -۴ + ۳ - ۳ + ۲ = -۲$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا