هندسه ۱ دوازدهم - ۱۰ سوال

۱۳۱- کدام یک از گزاره‌های زیر، مثال نقض دارد؟

۱) هر دو مثلث همنهشت، هم مساحت هستند.

۲) عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، همرس‌اند.

۳) چهارضلعی‌ای که قطرهایش هم‌اندازه و عمود بر هم باشند، مربع است.

۴) چهارضلعی‌ای که قطرهایش منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

آزمون ۲۰ مهر

۱۳۲- عکس کدام یک از قضایای شرطی زیر، یک قضیهٔ شرطی نمی‌باشد؟

۱) مساحت‌های هر دو مثلث همنهشت با هم برابرند.

۲) اگر سه ضلع مثلثی برابر باشند، آنگاه هر زاویهٔ آن ۶۰° است.

۳) مثلثی که دو زاویهٔ برابر دارد، دارای دو ضلع برابر است.

۴) در یک مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر است.

آزمون ۲۰ مهر

۱۳۳- در مثلث ABC، $\hat{B}=۵۰^\circ$، $\hat{C}=۳۵^\circ$ و نقطهٔ D روی ضلع BC چنان قرار دارد که $D\hat{A}C=۲۵^\circ$ است. کدام یک از نامساوی‌های زیر نادرست است؟

۱) $AC > AB$ ۲) $AB > BD$ ۳) $AC > AD$ ۴) $BD > AD$

آزمون ۲۰ مهر

۱۳۴- خط d و نقطهٔ P روی آن مفروض است. چند نقطه در صفحه پیدا می‌شود که از d و P، فاصلهٔ ثابت r داشته باشند؟ $(r>۰)$

۱) دقیقاً ۲ نقطه ۲) دقیقاً ۴ نقطه ۳) حداکثر ۲ نقطه ۴) حداکثر ۴ نقطه

آزمون ۲۰ مهر

۱۳۵- نقطهٔ O محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($۵AB = ۱۲AC = ۶۰$ و $\hat{A} = ۹۰^\circ$) است. فاصلهٔ O از ضلع BC کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

آزمون ۲۰ مهر

۱۳۶- دو دایره به مراکز A و B، یکدیگر را در نقاط C و D قطع کرده‌اند. چند نقطه مانند M روی پاره‌خط AB می‌توان یافت به‌گونه‌ای که $MC = MD$ باشد؟

۱) بی‌شمار
۲) هیچ
۳) ۱
۴) ۲

آزمون ۲۰ مهر

۱۳۷- اگر $x + ۵$، $۲x - ۲$ و $x + ۱$، طول اضلاع مثلثی باشند، کدام عدد می‌تواند محیط این مثلث باشد؟

۱) ۵
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۸

آزمون ۲۰ مهر

۱۳۸- B و C دو نقطهٔ ثابت در یک صفحه‌اند. نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC، وقتی نقطهٔ A در صفحه جابه‌جا می‌شود، همواره کجا قرار دارد؟

۱) روی یک خط موازی با BC
۲) روی دایره‌ای به قطر BC
۳) روی یک خط عمود بر BC
۴) روی دو خط موازی با BC

آزمون ۲۰ مهر

۱۳۹- کدام چهارضلعی زیر را نمی‌توان رسم کرد؟

۱) متوازی‌الاضلاعی که طول اضلاع آن ۲ و ۵ و طول یکی از قطرهای آن ۴ باشد.

۲) مستطیلی که طول قطر آن برابر ۵ و زاویهٔ بین دو قطر آن ۳۰° باشد.

۳) مربعی که طول قطر آن ۳ باشد.

۴) لوزی‌ای که طول ضلع آن ۴ و طول قطر بزرگ آن ۱۰ باشد.

آزمون ۲۰ مهر

۱۴۰- نقطهٔ M درون زاویهٔ xOy قرار دارد (Ox و Oy در یک راستا قرار ندارند). حداکثر چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که از اضلاع یا امتداد اضلاع زاویهٔ xOy، به فاصلهٔ یکسان و از نقطهٔ M به فاصلهٔ معین r قرار داشته باشند؟ $(r > ۰)$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

آزمون ۲۰ مهر

ریاضي گسسته دوازدهم - ۱۰ سوال

۱۲۱- حکم «اگر A و B، دو ماتریس هم مرتبه باشند و $AB = \bar{O}$، آنگاه $A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$» مفروض است. برای .... درستی این حکم از روش....... استفاده می‌کنیم.

۱) اثبات- استدلال استنتاجی
۲) رد- مثال نقض
۳) اثبات- برهان خلف
۴) رد- برهان خلف

آزمون ۲۰ مهر

۱۲۲- به ازای کدام عبارت زیر، گزارهٔ «اگر $x = ۱$ باشد، آنگاه ... » قضیه‌ای است که عکس آن لزوماً برقرار نیست؟ $(x \in R)$

۱) $(x-۱)(x^۲+x+۱)=۰$
۲) $(x-۱)(x^۲+۲x-۳)=۰$
۳) $(x-۱)(x^۲-۲x+۱)=۰$
۴) $(x-۱)(x^۲+۱)=۰$

آزمون ۲۰ مهر

۱۲۳- در اثبات نامساوی $\frac{۴}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \geq \frac{۱}{\sqrt{y}}+\frac{۱}{\sqrt{x}}$ از طریق اثبات بازگشتی، رابطهٔ بدیهی به‌دست آمده کدام است؟ (x و y دو عدد حقیقی مثبت هستند.)

۱) $(x+y)^۲>۰$
۲) $x^۲+y^۲>۰$
۳) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^۲ \geq ۰$
۴) $\sqrt{x}+\sqrt{y}>۰$

آزمون ۲۰ مهر

۱۲۴- کدام یک از گزاره‌های زیر، همواره درست است؟ $(a,b,c \in Z)$

۱) اگر $a \mid b+c$، آنگاه $a \mid b$ یا $a \mid c$
۲) اگر $a \mid b+c$، آنگاه $a \mid b$ یا $a \mid c$
۳) اگر $a \mid bc$، آنگاه $a \mid b$ یا $a \mid c$
۴) اگر $a \mid bc$، آنگاه $a \mid b$ و $a \mid c$

آزمون ۲۰ مهر

۱۲۵- برای سه عدد طبیعی a، b و c، اگر $abc \mid ab+ac$، آنگاه کدام گزاره لزوماً درست نیست؟

۱) $b \mid ۳c$
۲) $c \mid ۲b$
۳) $a \mid b+c$
۴) $bc \mid b+c$

آزمون ۲۰ مهر

۱۲۶- اگر $5 | 2n+1$، عبارت $14n^{2}+19n+6$ همواره بر کدام عدد زیر بخش‌پذیر است؟ $(n \in \mathbb{Z})$

۱) ۱۰ ۲) ۲۵ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

آزمون ۲۰ مهر

۱۲۷- چند مقدار صحیح n وجود دارد به‌گونه‌ای که $n+6$ بر $n^{2}+2$ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

آزمون ۲۰ مهر

۱۲۸- اگر $11 | a+3b+k$ و $11 | 5a+4b+3$، آنگاه کم‌ترین مقدار طبیعی k کدام است؟ $(a,b \in \mathbb{Z})$

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

آزمون ۲۰ مهر

۱۲۹- برای دو عدد صحیح a و b $(a \neq 0)$، اگر $a^{3} | b^{2}$، آنگاه کدام رابطهٔ زیر لزوماً درست <u>نیست</u>؟

۱) $a | b$ ۲) $a^{2} | b$ ۳) $a^{4} | b^{5}$ ۴) $a | b^{2}$

آزمون ۲۰ مهر

۱۳۰- اگر $7 | a+3b$ و $7 \nmid b$، به ازای چند مقدار k از مجموعهٔ $A=\{x \mid x \in \mathbb{Z} \,,\, -3 \leq x \leq 7\}$، رابطهٔ $7 | 2a+kb$ لزوماً برقرار است؟ $(a,b \in \mathbb{Z})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون ۲۰ مهر

رياضي پايه - ۱۰ سوال

۱۰۱- اگر دو تابع $f=\{(2,-1),(c,d)\}$ و $g=\{(2a^{2}-1,b^{2}+1),(b+1,2a-1)\}$ برابر باشند، $c+d$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱-

۳) ۲ ۴) ۱

آزمون ۲۰ مهر

۱۰۲- کدام گزینه در مورد توابع $f(x)=\dfrac{1}{(|x|+1)|x|}$ و $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}}}$ درست است؟

۱) دامنهٔ f زیر مجموعهٔ برد آن است.

۲) دامنهٔ f زیر مجموعهٔ برد g است.

۳) دامنه‌های f و g برابرند.

۴) دامنهٔ g زیر مجموعهٔ برد آن است.

۱۰۳- در کدام‌یک از رابطه‌های زیر y تابعی از x **نیست**؟

الف) $|y^{2}-1|+(1-x^{4})=0$

ب) $|y|=\sqrt{x}\pm\sqrt{-x}$

ج) $|x|-|y|=0$

د) $|x|+|y|=0$

۱) الف و ب و ج

۲) ب و ج

۳) الف و ج

۴) الف و د

آزمون ۲۰ مهر

۱۰۴- تابع $f=\{(2b,1),(a+c,a-b),(0,b),(d,c),(0,d-b)\}$ دو عضو دارد. $a+b$ کدام است؟ $(a,b>0)$

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

آزمون ۲۰ مهر

۱۰۵- به ازای کدام مقدار a، رابطهٔ غیرتهی $x^{2}+y^{2}=-8x+2y-a$، تابع است؟

۱) ۴

۲) ۹

۳) ۱۷

۴) ۱۹

آزمون ۲۰ مهر

۱۰۶- تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{x+a}$ مفروض است. اگر $f(x).f(-\dfrac{1}{x})=-1$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱

۲) -1

۳) ۲

۴) -2

آزمون ۲۰ مهر

۱۰۷- اگر رابطهٔ $f=\{(2,a),(a,a^{2}-2),(a,3a-4),(a^{3}-6,b)\}$ یک تابع باشد، حاصل $a^{2}-b^{2}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

آزمون ۲۰ مهر

۱۰۸- در کره‌ای به شعاع ۳، استوانهٔ قائمی با ارتفاع h محاط شده است. تابع حجم استوانه بر حسب h کدام است؟

۱) $V = \pi(۶ - h^۲)h$

۲) $V = \pi(۶ - h)h^۲$

۳) $V = \pi(۹ - \frac{h^۲}{۴})h$

۴) $V = \pi(۹ - \frac{h}{۴})h^۲$

آزمون ۲۰ مهر

۱۰۹- اگر f تابعی خطی باشد به صورتی که رابطهٔ $f(x-۱)+f(x+۲)=x$ برقرار باشد، آن‌گاه $f(۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) ۱

۴) $\frac{۱}{۲}$

آزمون ۲۰ مهر

۱۱۰- چه تعداد از رابطه‌های زیر نمی‌توانند تابع باشند؟

الف) رابطه‌ای که به هر فرد نوشیدنی مورد علاقهٔ او را نسبت می‌دهد.

ب) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشهٔ دوم آن عدد را نسبت می‌دهد.

پ) رابطه‌ای که به هر عدد صحیح مخالف صفر که در نامعادلهٔ $x^۲ - ۴ < ۰$ صدق کند، مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن عدد را نسبت می‌دهد.

ت) رابطه‌ای که دامنهٔ آن، اعداد صحیح مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|x-۱| < ۱$ و بُرد آن، اعداد طبیعی مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۲x^۲ - ۱۸ < ۰$ است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون ۲۰ مهر

آمار و احتمال - ۱۰ سوال

۱۴۱- در کدام‌یک از حالت‌های زیر، ارزش گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$، نادرست است؟

۱) p و q هر دو درست باشند.

۲) p درست و q نادرست باشد.

۳) p نادرست و q درست باشد.

۴) p و q هر دو نادرست باشند.

آزمون ۲۰ مهر

۱۴۲- کدام گزارهٔ زیر معادل گزارهٔ «اگر $x^۲ \geq ۹$ باشد، آنگاه $(x \geq ۳ \vee x \leq -۳)$» می‌باشد؟

۱) اگر $x^۲ \leq ۹$ باشد، آنگاه $(x \geq ۳ \vee x \leq -۳)$

۲) اگر $(-۳ < x < ۳)$ باشد، آنگاه $x^۲ < ۹$

۳) اگر $x^۲ \leq ۹$ باشد، آنگاه $-۳ < x < ۳$

۴) اگر $(x < ۳ \vee x > -۳)$ باشد، آنگاه $x^۲ < ۹$

۱۴۳- نقیض گزارهٔ $p \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ هم‌ارز منطقی با کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟ (T گزارهٔ همیشه درست و F گزارهٔ همیشه نادرست است.)

۱) T ۲) $\sim q$ ۳) q ۴) F

۱۴۴- در کدام‌یک از گزینه‌های زیر، نمی‌توان به‌طور قطعی دربارهٔ ارزش هر دو گزارهٔ p و q اظهارنظر نمود؟

۱) گزارهٔ $p \Rightarrow q$ نادرست باشد. ۲) گزارهٔ $p \wedge \sim q$ درست باشد.

۳) گزاره‌های $p \Leftrightarrow q$ و $p \vee q$ هر دو درست باشند. ۴) گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $p \vee q$ درست باشند.

۱۴۵- اگر $A = \{1,2,3,4,5\}$، دامنهٔ متغیر گزاره‌نما باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱) $\forall x \in A; \frac{x^2 - 4}{x+2} = x - 2$ ۲) $\exists x \in A; x^2 + 5x - 6 = 0$

۳) $\forall x \in A; |3 - x| < 2$ ۴) $\exists x \in A; x^2 \leq x$

۱۴۶- نقیض گزارهٔ «$\forall x \in \mathbb{R}; 1 < x < 2$»، کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟

۱) $\exists x \in \mathbb{R}; x < 1 \vee x > 2$ ۲) $\forall x \in \mathbb{R}; x < 1 \vee x > 2$

۳) $\exists x \in \mathbb{R}; x \leq 1 \vee x \geq 2$ ۴) $\forall x \in \mathbb{R}; x \leq 1 \vee x \geq 2$

۱۴۷- در جدول ارزش سه گزارهٔ p، q و r، در چند حالت ارزش گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ نادرست است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۸- گزارهٔ $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q \vee r)$ هم‌ارز منطقی با کدام یک از گزاره‌های زیر است؟ (T گزارهٔ همیشه درست و F گزارهٔ همیشه نادرست است.)

۱) T ۲) F ۳) p ۴) q

۱۴۹- چه تعداد از گزاره‌های زیر، همیشه درست است؟

الف) $p \Leftrightarrow \sim p$ ب) $p \Rightarrow (p \vee \sim p)$ پ) $(p \wedge \sim p) \Rightarrow p$

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

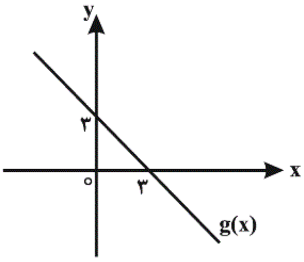
۱۵۰- گزارهٔ $(\sim p \Rightarrow q) \wedge [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q]$ هم‌ارز منطقی با کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟ (T گزارهٔ همیشه درست و F گزارهٔ همیشه نادرست است.)

۱) $\sim p \wedge q$ ۲) F ۳) T ۴) $p \wedge \sim q$

آزمون ۲۰ مهر

حسابان ۲ - ۱۰ سوال

۸۱- نمودار $g(x)=f(x)-2$ به‌صورت مقابل است. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار $h(x)=3f(2x-1)$ و محورهای مختصات چقدر است؟



۱) ۱۵
۲) ۱۲
۳) ۱۸
۴) ۲۷

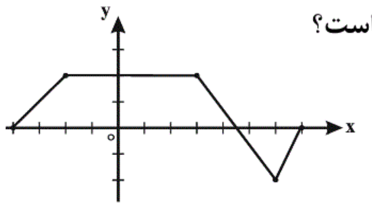
آزمون ۲۰ مهر

۸۲- نقطهٔ $A(-1,3)$ روی نمودار تابع $f(x)$ و نقطهٔ متناظر با آن یعنی $A'(a,b)$ روی نمودار تابع $y=3f(2x-5)-7$ قرار دارد. $a-b$ کدام است؟

۱) ۲-
۲) صفر
۳) ۲
۴) ۴

آزمون ۲۰ مهر

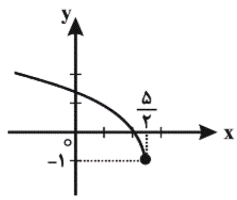
۸۳- نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر است. دامنهٔ تابع $y=2f(2x-1)$ شامل چند عدد صحیح است؟

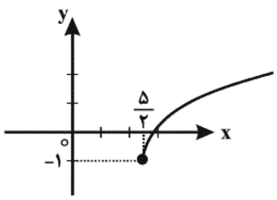


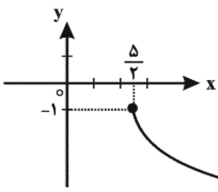
۱) ۴
۲) ۱۲
۳) ۶
۴) ۸

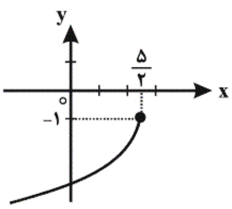
آزمون ۲۰ مهر

۸۴- نمودار تابع $y=\sqrt{5-2x}-1$ کدام است؟

۱)


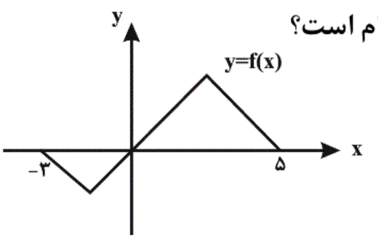
۲)


۳)


۴)


آزمون ۲۰ مهر

۸۵- اگر شکل زیر تابع $y=f(x)$ را نشان دهد، دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{xf\left(-\frac{x}{2}\right)}$ کدام است؟



۱) $[-10,6]$
۲) $[0,6]$
۳) $\{-10,0,6\}$
۴) $\{0\}$

آزمون ۲۰ مهر

۸۶- تابع $f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}+۱۲x-۷$ مفروض است. تابع $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ با کدام یک از انتقال‌های زیر بر تابع $f^{-۱}$ منطبق می‌شود؟

۱) یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت بالا

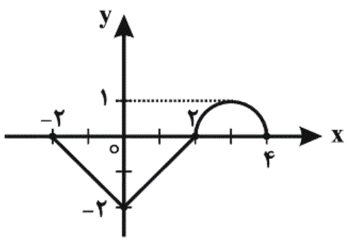
۲) یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت پایین

۳) یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا

۴) یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت پایین

آزمون ۲۰ مهر

۸۷- اگر نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر باشد، حدود m کدام باید باشد تا معادلهٔ $|f(۲x)+۱|-m=۰$، چهار ریشه داشته باشد؟



۱) $۰\le m\le ۱$

۲) $۰\le m\le ۲$

۳) $۰<m\le ۱$

۴) $۰<m\le ۲$

آزمون ۲۰ مهر

۸۸- نمودار تابعی را ۲ واحد به سمت راست انتقال داده‌ایم و سپس قرینهٔ شکل حاصل را نسبت به محور x ها ۳ برابر در جهت عمودی منبسط کرده‌ایم و تابع $y=-|۳x-۱۲|$ به‌دست آمده است. تابع اولیه کدام بوده است؟

۱) $y=۹|x-۶|$

۲) $y=\frac{۱}{۳}|۲-x|$

۳) $y=|x-۶|$

۴) $y=|x-۲|$

آزمون ۲۰ مهر

۸۹- با اعمال موارد کدام گزینه به‌ترتیب، نمودار تابع $y=f(x)$ تبدیل به نمودار تابع $y=-\frac{۱}{۴}f(۱-x)$ می‌شود؟

۱) انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محور x ها و y ها، انقباض $\frac{۱}{۴}$ واحد در راستای افقی

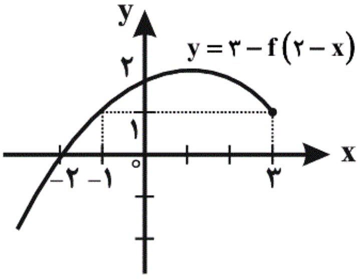
۲) انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محور x ها و y ها، انقباض $\frac{۱}{۴}$ واحد در راستای عمودی

۳) انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محور x ها و y ها، انقباض $\frac{۱}{۴}$ واحد در راستای افقی

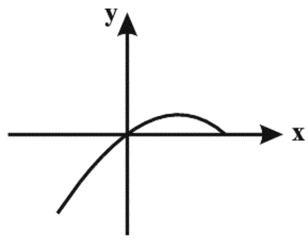
۴) انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محور x ها و y ها، انقباض $\frac{۱}{۴}$ واحد در راستای عمودی

آزمون ۲۰ مهر

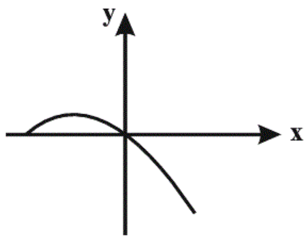
۹۰- با توجه به نمودار $y = ۳ - f(۲ - x)$، نمودار تابع $y = ۲ - f(x + ۳)$ کدام است؟



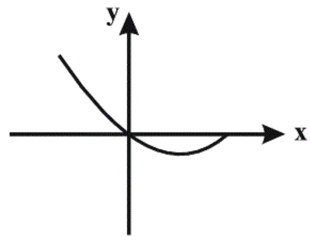
۱)



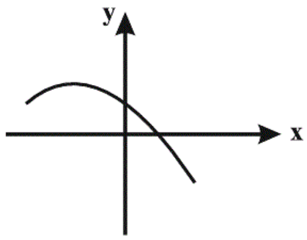
۲)



۳)

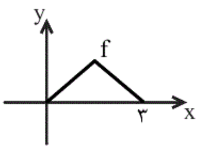


۴)



آزمون ۲۰ مهر

حسابان ۲ - گواه - ۱۰ سوال

۹۱- اگر نمودار تابع f به شکل  باشد، نمودار تابع $y = -f(-x)$ در کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات قرار دارد؟

۱) اول

۲) دوم

۳) سوم

۴) چهارم

آزمون ۲۰ مهر

۹۲- اگر $f(x) = \sqrt{x}$، آنگاه در کدام تابع زیر، دامنه و برد برابر نیستند؟

۱) $f(x+۱)-۱$

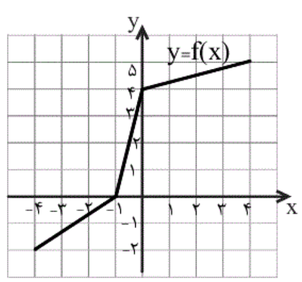
۲) $f(x-۱)+۱$

۳) $f(x-۲)-۲$

۴) $f(x)$

آزمون ۲۰ مهر

۹۳- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد و نمودار تابع $g(x) = kf(x) + b$ از مبدأ مختصات عبور کند، زوج مرتب (k , b) کدام می‌تواند باشد؟



۱) $(-۲ , -۸)$

۲) $(\frac{۱}{۲} , -۲)$

۳) $(۲ , -۴)$

۴) $(\frac{۱}{۲} , ۲)$

آزمون ۲۰ مهر

۹۴- معادلهٔ $||x|-2|=\sqrt{x-k}$ به‌ازای مقادیر مختلف k، حداکثر چند جواب دارد؟

۱) ۳

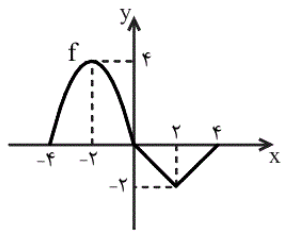
۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

آزمون ۲۰ مهر

۹۵- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، آنگاه دامنهٔ تابع $g(x)=f(\frac{x}{2})-f(2x)$ کدام است؟



۱) $[-2, 2]$

۲) $[-8, 8]$

۳) $[-4, 4]$

۴) $[-2, 4]$

آزمون ۲۰ مهر

۹۶- قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -2

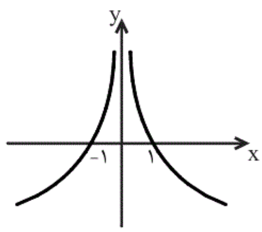
۲) $0/5$

۳) 1

۴) $1/5$

آزمون ۲۰ مهر

۹۷- ضابطهٔ تابع نمودار مقابل کدام است؟



۱) $y=-\log|x|$

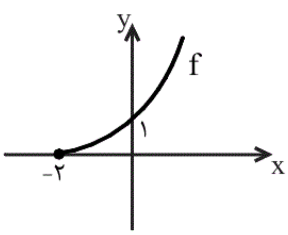
۲) $y=\log|x|$

۳) $y=\log x$

۴) $y=-\log x$

آزمون ۲۰ مهر

۹۸- اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، نمودار تابع $y=-2+f^{-1}(x-1)$ از کدام ناحیه (نواحی) دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟



۱) دوم

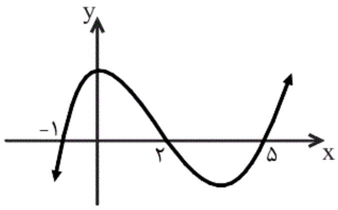
۲) سوم

۳) سوم و چهارم

۴) دوم و سوم

آزمون ۲۰ مهر

۹۹- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، به ازای کدام مقدار a، مجموع ریشه‌های معادلهٔ $f(x-a)=0$ صفر است؟



۱) ۲

۲) ۲-

۳) ۳-

۴) ۳

آزمون ۲۰ مهر

۱۰۰- اگر برد تابع f بازهٔ $R_f=[-\sqrt{5},1]$ باشد، آنگاه برد تابع $g(x)=-\sqrt{2}f(x+1)-3$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) ۴

آزمون ۲۰ مهر

هندسه ۳ - ۱۰ سوال

۱۱۱- اگر $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ با تعریف $a_{ij}=i-j$ و $B=[b_{ij}]_{3\times3}$ با تعریف $b_{ij}=\begin{cases} j-i & ; & i<j \\ i+j & ; & i\geq j \end{cases}$، دو ماتریس باشند، مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A+B$ چقدر است؟

۱) صفر   ۲) ۴   ۳) ۴-   ۴) ۱

آزمون ۲۰ مهر

۱۱۲- اگر $A=\begin{bmatrix} m & 3 & 4 \\ 4 & n-1 & 8 \\ 6 & 9 & k+1 \end{bmatrix}$، $B=\left[i+ij\right]_{3\times3}$ و $A=B$ باشد، آنگاه حاصل $m+n+k$ کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۲۰

۳) ۱۶   ۴) ۲۵

آزمون ۲۰ مهر

۱۱۳- اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{۴\times۳}$ ، $B=\left[b_{ij}\right]_{۳\times۵}$ و $C=AB$ باشد، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس C از کدام رابطه به دست می‌آید؟

۱) $\sum_{i=۱}^{۴} a_{۲i}b_{i۳}$

۲) $\sum_{i=۱}^{۳} a_{۲i}b_{i۳}$

۳) $\sum_{i=۱}^{۴} a_{i۲}b_{۳i}$

۴) $\sum_{i=۱}^{۳} a_{i۲}b_{۳i}$

آزمون ۲۰ مهر

۱۱۴- اگر $\begin{bmatrix}۲\\۱\\۳\end{bmatrix}\times A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ ۳ & ۱ & -۱\\ d & e & f\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b+e$ کدام است؟

۱) ۱۱
۲) ۱۵
۳) ۱۸
۴) ۲۱

آزمون ۲۰ مهر

۱۱۵- اگر α و β، ریشه‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix}-۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & ۲\\ ۱ & -x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۵\end{bmatrix}=۰$ باشند، حاصل $\alpha^۲+\beta^۲$ کدام است؟

۱) ۸۴

۲) ۵۴

۳) ۴۴

۴) معادله جواب ندارد.

آزمون ۲۰ مهر

۱۱۶- اگر A و B دو ماتریس متمایز باشند به طوری‌که $AB=A$ و $BA=B$، آنگاه ماتریس $B^۲$ برابر کدام است؟

۱) I

۲) A

۳) B

۴) $-I$

آزمون ۲۰ مهر

۱۱۷- اگر $\begin{bmatrix}۲ & ۱\end{bmatrix}\times A=\begin{bmatrix}۳ & ۵\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۳ & ۴\end{bmatrix}\times A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{bmatrix}۸ & ۹\end{bmatrix}\times A$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱ & ۹\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}۱ & -۹\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}-۱ & ۹\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix}-۱ & -۹\end{bmatrix}$

آزمون ۲۰ مهر

۱۱۸- اگر $A^{۲} = \begin{bmatrix} ۸ & ۲ \\ ۱۸ & ۴ \end{bmatrix}$ ، $B^{۲} = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ و $A - B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $AB + BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱۵ & ۱۲ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱۲ & -۱ \\ ۱۵ & ۰ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲۱ & -۶ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -۶ & ۱ \\ ۲۱ & ۳ \end{bmatrix}$

آزمون ۲۰ مهر

۱۱۹- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۲}$ کدام است؟

۱) $۲^{۱۲}$

۲) $۲^{۱۱}$

۳) ۳×۲^{۱۱}

۴) ۳×۲^{۱۲}

آزمون ۲۰ مهر

۱۲۰- اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A با چه تعداد از ماتریس‌های زیر تعویض‌پذیر است؟ (I ماتریس همانی مرتبهٔ ۳ است.)

الف) $۲A + I$

ب) $A^{۲} - I$

پ) $A^{۳}$

ت) $A^{۲} + I$

۱) ۱

۲) ۲

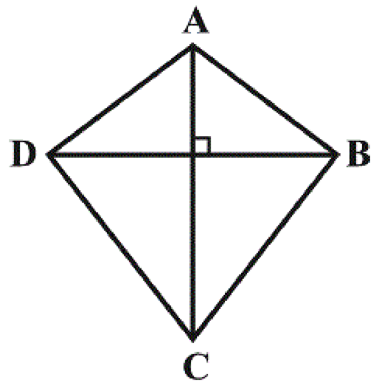
۳) ۳

۴) ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۱۳۱ (محمد خندان)

به عنوان مثال نقض گزینهٔ «۳»، به شکل زیر توجه کنید:



در چهارضلعی ABCD، دو قطر AC و BD هم‌اندازه و بر هم عمود هستند، ولی این چهارضلعی مربع نیست.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۱۳۲ (امیرحسین ابومحبوب)

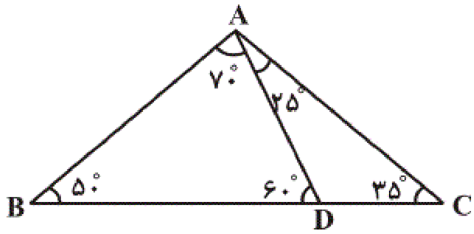
عکس قضیهٔ شرطی گزینهٔ «۱» عبارت است از: «اگر مساحت‌های دو مثلث برابر یکدیگر باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند.»، واضح است که این موضوع در حالت کلی صحیح نیست، پس عبارت مورد نظر نمی‌تواند یک قضیهٔ شرطی باشد.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحهٔ ۲۶)

✓۱ ۲ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

(محمدطاهر شعاعی)



گزینهٔ «۲»: در مثلث ABD ، $B\hat{A}D > B\hat{D}A$ ، پس $BD > AB$.

سایر گزینه‌ها صحیح‌اند:

گزینهٔ «۱»: $\overset{\Delta}{ABC} : \hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB$

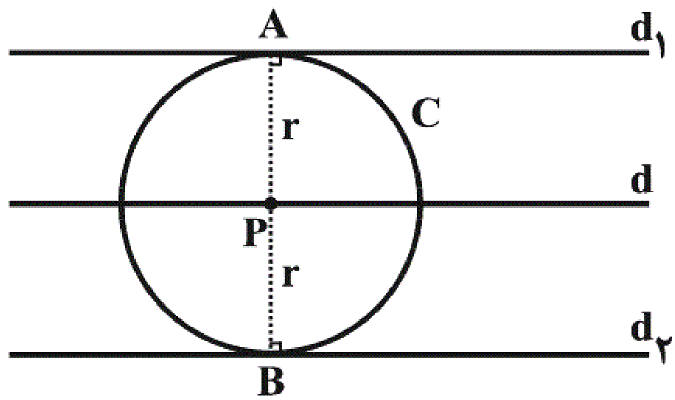
گزینهٔ «۳»: $\overset{\Delta}{ACD} : A\hat{D}C > \hat{C} \Rightarrow AC > AD$

گزینهٔ «۴»: $\overset{\Delta}{ABD} : B\hat{A}D > \hat{B} \Rightarrow BD > AD$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر



نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ثابت r قرار داشته باشند، دو خط موازی با خط d و به فاصلهٔ r از آن هستند (خطوط d_1 و d_2 در شکل). همچنین نقاطی از صفحه که از نقطهٔ P به فاصلهٔ r قرار داشته باشند، روی دایره‌ای به مرکز P و به شعاع r واقع‌اند (دایرهٔ C در شکل). همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، دایرهٔ C در نقاط A و B به ترتیب بر خطوط d_1 و d_2 مماس است، پس تنها این دو نقطه، جواب‌های مسئله هستند.

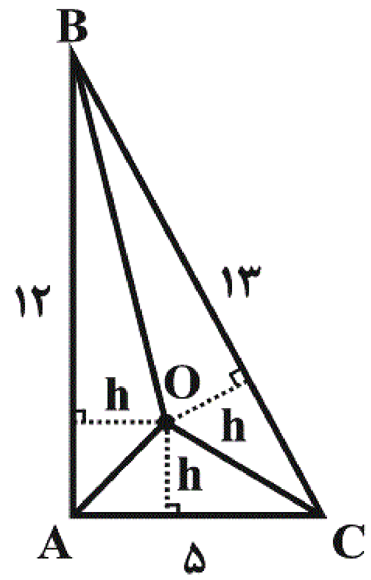
(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۷)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، داریم:

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow BC = ۱۳$$



محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث، از سه ضلع آن فاصلهٔ یکسانی دارد. این فاصله را h می‌نامیم. داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{AOB}} + S_{\overset{\Delta}{AOC}} + S_{\overset{\Delta}{BOC}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

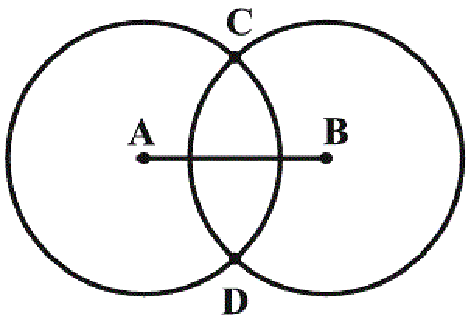
$$\Rightarrow \frac{۱۲h}{۲} + \frac{۵h}{۲} + \frac{۱۳h}{۲} = \frac{۱۲ \times ۵}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۵h = ۳۰ \Rightarrow h = ۲$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر



مطابق شکل، دو دایره یکی به مرکز A و به شعاع R_1 و دیگری به مرکز B و به شعاع R_2 رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط C و D قطع کنند.

داریم:

(۱) A روی عمودمنصف CD است $\Leftarrow AC = AD = R_1$

(۲) B روی عمودمنصف CD است $\Leftarrow BC = BD = R_2$

خط گذرنده از نقاط A و B، عمودمنصف CD است $\Leftarrow (1),(2)$

بنابراین هر نقطهٔ واقع بر پاره‌خط AB، از نقاط C و D به یک فاصله است.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

طول اضلاع مثلث باید در نامساوی مثلثی صدق کند. داریم:

$$۲x-۲+x+۵>x+۱\Rightarrow x>-۱$$

بدیهی: $x+۵+x+۱>۲x-۲\Rightarrow ۶>-۲$

$$۲x-۲+x+۱>x+۵\Rightarrow x>۳$$

بنابراین مقادیر قابل قبول برای x ، به صورت $x>۳$ است.

محیط مثلث $= x+۵+۲x-۲+x+۱=۴x+۴$

$$x>۳\Rightarrow ۴x>۱۲\Rightarrow ۴x+۴>۱۶$$

پس تنها عدد ۱۸ از بین گزینه‌ها می‌تواند محیط این مثلث باشد.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

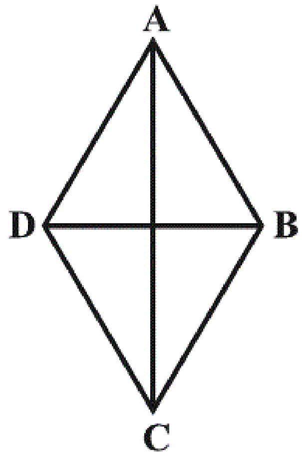
آزمون ۲۰ مهر

نقطهٔ تلاقی سه عمودمنصف، روی عمودمنصف BC واقع است. چون نقاط B و C ثابت هستند، پس عمودمنصف BC نیز ثابت است. در نتیجه همواره نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC ، روی خطی عمود بر ضلع BC (عمودمنصف ضلع BC) قرار دارد.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر



لوزی $ABCD$ را مطابق شکل در نظر بگیرید، به‌گونه‌ای که طول اضلاع آن برابر ۴ و طول قطر AC برابر ۱۰ باشد. در این‌صورت در مثلث ABC داریم:

$$AB+BC=۴+۴=۸, AC=۱۰ \Rightarrow AB+BC<AC$$

بنابراین چنین مثلثی قابل رسم نیست (طبق اصل نامساوی مثلث) و در نتیجه لوزی $ABCD$ قابل رسم نمی‌باشد.

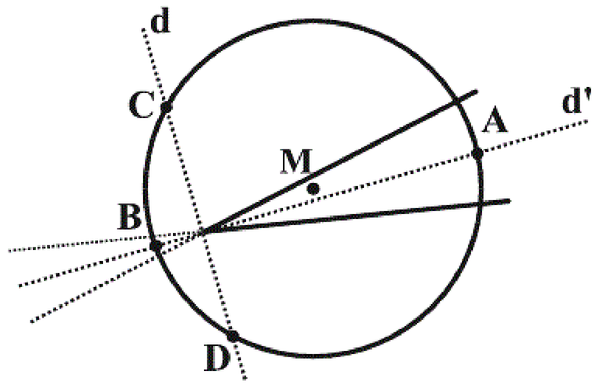
(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$✓

آزمون ۲۰ مهر

-۱۴۰ (سیدعادل حسینی)

نقاطی که از اضلاع و یا امتداد اضلاع یک زاویه بـه یـک فاصـله باشـند، روی نیمساز داخلی یا خارجی این زاویه قرار دارند و نقاطی که از یک نقطه، فاصلهٔ برابر r دارند، روی دایره‌ای به مرکز این نقطه و شعاع r واقع‌اند.



مطابق شکل، حداکثر چهار نقطه (نقاط A ، B ، C و D) در صـفحه وجـود دارد که دارای ویژگی‌های مورد نظر باشند.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۲۰ مهر

-۱۲۱ (فرهاد صابر)

از مثال نقض برای رد کردن حکم استفاده می‌کنیم.

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \neq \bar{O} \text{ و } A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \neq \bar{O}$$

$$AB=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲ تا ۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۱۲۲ (امیرحسین ابومحبوب)

گزینهٔ «۲»: $(x-1)(x^2+2x-3)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2+2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

یعنی اگر $(x-1)(x^2+2x-3)=0$ باشد، x می‌تواند برابر ۱ یا (۳-) باشد، پس عکس قضیه در حالت کلی برقرار نیست.

درستی سایر گزینه‌ها را به عنوان تمرین خودتان بررسی کنید.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۶ و ۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۱۲۳ (هومن نورائی)

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}} \ge \frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \ge \frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\xleftrightarrow{\times(\sqrt{xy})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \ge 4\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy} \ge 4\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy} \ge 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \ge 0$$

با توجه به آن‌که تمامی روابط بازگشت‌پذیر هستند، پس حکم ثابت می‌شود.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۱۲۴ (امیرحسین ابومحبوب)

طبق خاصیت تعدی، گزینهٔ «۴» صحیح است.

$$\left.\begin{matrix} bc \mid a \\ b \mid bc \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \mid a \qquad \left.\begin{matrix} bc \mid a \\ c \mid bc \end{matrix}\right\} \Rightarrow c \mid a$$

مثال نقض برای سایر گزینه‌ها به شرح زیر است:

۱) $c=5, b=3, a=2$

۲) $c=5, b=3, a=8$

۳) $c=2, b=2, a=4$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۲۵ (سیدعادل‌رضا مرتضوی)

a عددی طبیعی و در نتیجه مخالف صفر است. بنابراین داریم:

$$abc \mid ab+ac \Rightarrow abc \mid a(b+c) \xrightarrow{\div a} bc \mid b+c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b \mid b+c \Rightarrow b \mid c \Rightarrow b \mid ۳c \\ c \mid b+c \Rightarrow c \mid b \Rightarrow c \mid ۲b \end{cases}$$

تذکر: $\left.\begin{matrix} b \mid b+c \\ b \mid b \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} b \mid c$

گزینهٔ «۳» در حالت کلی صحیح نیست. (مثال نقض: $a=۳, b=۱, c=۱$)

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱	۲	۳ ✓	۴

-۱۲۶ (جواد حاتمی)

$$۱۴n^۲+۱۹n+۶=(۲n+۱)(۷n+۶)$$

$$=(۲n+۱)(۵n+۵+۲n+۱)=(۲n+۱)\left[۵(n+۱)+۲n+۱\right]$$

با توجه به فرض سؤال، $۲n+۱$ مضرب ۵ است، یعنی $۲n+۱=۵t\ (t \in \mathbb{Z})$. اگر $n+۱=k\ (k \in \mathbb{Z})$ فرض شود، آنگاه داریم:

$$۱۴n^۲+۱۹n+۶=۵t(۵k+۵t)=۲۵t(k+t)$$

$$=۲۵k'\ (k' \in \mathbb{Z})$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۹ و ۱۰)

۱	۲ ✓	۳	۴

-۱۲۷ (جواد حاتمی)

$$n^۲+۲ \mid n+۶ \xrightarrow{\times(n-۶)} n^۲+۲ \mid (n-۶)(n+۶)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow n^۲+۲ \mid n^۲-۳۶ \\ \text{از طرفی}: n^۲+۲ \mid n^۲+۲\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} n^۲+۲ \mid ۳۸$$

$$\Rightarrow n^۲+۲=\pm۱,\pm۲,\pm۱۹,\pm۳۸$$

مقادیر صحیح به‌دست آمده از معادلات فوق عبارتند از:

$$n=۰,۶,-۶$$

مقدار $n=۶$ قابل قبول نیست (در صورت سؤال صدق نمی‌کند)، زیرا در مراحل اثبات، باید شرط $n-۶\neq۰$ را در نظر بگیریم.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۱۲۸ (علیرضا سیف)

$$\left.\begin{array}{r}۱۱ \mid a+۳b+k \Rightarrow ۱۱ \mid ۵a+۱۵b+۵k \\ ۱۱ \mid ۵a+۴b+۳\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۱۱ \mid ۱۱b+۵k-۳$$

$$\left.\begin{array}{l}۱۱ \mid ۱۱b \\ ۱۱ \mid ۱۱b+۵k-۳\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۱۱ \mid ۵k-۳$$

$$\Rightarrow ۵k-۳=۱۱q \Rightarrow k=\frac{۱۱q+۳}{۵} \xrightarrow{q=۲} k_{min}=۵$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۱۲۹ (محسن فاطمی)

$$a^۳ \mid b^۲ \Rightarrow a\times a^۲ \mid b^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \mid b^۲ \\ a^۲ \mid b^۲ \Rightarrow a \mid b \Rightarrow a^۴ \mid b^۴ \Rightarrow a^۴ \mid b^۴\times b \Rightarrow a^۴ \mid b^۵ \end{cases}$$

پس رابطه‌های گزینه‌های «۱» و «۳» و «۴» همواره درست هستند ولی رابطهٔ گزینهٔ «۲» در حالت کلی صحیح نیست. (مثال نقض $a=۴$ و $b=۸$)

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۱۳۰ (محمد قیدی)

$$۷ | a+۳b \Rightarrow ۷ | ۲a+۶b$$

$$\left.\begin{matrix} ۷ | ۲a+۶b \\ ۷ | ۲a+kb \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۷ | (k-۶)b$$

یعنی $b(k-۶)$ بر ۷ بخش‌پذیر است. چون b بر ۷ بخش‌پذیر نیست و ۷ عددی اول است، الزاماً $k-۶$ بر ۷ بخش‌پذیر است که در مجموعهٔ A، فقط ۱- و ۶، این ویژگی را دارند.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۱۰۱ (سیدعادل حسینی)

مجموعه‌های برابر یعنی اعضای برابر، بنابراین:

$$\begin{cases} b+۱=۲ \Rightarrow b=۱ \\ ۲a-۱=-۱ \Rightarrow a=۰ \end{cases} \Rightarrow (c,d)=(۲a^۲-۱, b^۲+۱)$$

$$=(-۱,۲) \Rightarrow c+d=۱$$

توجه کنید که $b^۲+۱=-۱$ نادرست و غیرقابل‌قبول است.

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۲۰ مهر

۱۰۲- (امیرهوشنگ خمسه)

ابتدا دامنهٔ توابع را به‌دست می‌آوریم.

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \middle| \left(|x| + ۱ \right) |x| = ۰ \right\} \Rightarrow \begin{cases} |x| + ۱ \neq ۰ \\ |x| = ۰ \Rightarrow x = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{x \mid \sqrt{x^۲} = ۰\} \Rightarrow |x| = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{۰\}$$

مشاهده می‌شود که دامنه‌ها برابرند.

دقت کنید دامنهٔ توابع شامل اعداد منفی است ولی هر دو تابع همواره مثبت‌اند، پس دامنه نمی‌تواند زیرمجموعهٔ برد باشد یعنی گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ نادرست‌اند.

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۳- (هادی پلاور)

الف) $x = ۱ \Rightarrow |y^۲ - ۱| = ۰ \Rightarrow y = -۱$ و $۱ \Rightarrow$ تابع نیست.

ب) $\begin{cases} x \geq ۰ \\ -x \geq ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = ۰ \Rightarrow |y| = ۰ \Rightarrow y = ۰$

بیانگر یک نقطه و لذا تابع است.

ج) $|x| - |y| = ۰ \Rightarrow |y| = |x| \Rightarrow y = \pm x \Rightarrow$ تابع نیست.

د) $|x| + |y| = ۰ \Rightarrow x = ۰$ و $y = ۰ \Rightarrow$ بیانگر یک نقطه و لذا تابع است.

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(سیدعادل حسینی)

در ابتدا مجموعهٔ مورد نظر باید تابع باشد؛ بنابراین داریم:

$$d-b=b \Rightarrow d=۲b \Rightarrow c=۱$$

$$\Rightarrow f\{(۲b,۱),(a+۱,a-b),(۰,b)\}$$

حال این تابع باید دو عضو داشته باشد. بنابراین حالات زیر امکان‌پذیر است:

$$\Rightarrow \begin{cases} *(۲b,۱)=(۰,b) \Rightarrow b=۰=۱ & \text{غ.ق.ق} \\ *\begin{cases} a-b=b \\ ۱+a=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ b=-\frac{۱}{۲} \end{cases} & \text{چون } a,b>۰\text{، غ.ق.ق است.} \\ *\begin{cases} a-b=۱ \\ ۱+a=۲b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=۲ \\ a=۳ \end{cases} \Rightarrow a+b=۵ \end{cases}$$

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۲۰ مهر

۱۰۵- (نگین یغمایی)

$$x^۲+y^۲+۸x-۲y+a=۰$$

$$\Rightarrow (x+۴)^۲-۱۶+(y-۱)^۲-۱+a=۰$$

$$\Rightarrow (x+۴)^۲+(y-۱)^۲=۱۷-a$$

برای این‌که ضابطهٔ فوق، یک تابع غیرتهی باشد، باید $۱۷-a=۰$ شود، یعنی:

$$۱۷-a=۰ \Rightarrow a=۱۷$$

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

۱۰۶- (نگین یغمایی)

$$f(x)=\frac{x+۱}{x+a} \Rightarrow f(-\frac{۱}{x})=\frac{-\frac{۱}{x}+۱}{-\frac{۱}{x}+a}=\frac{\frac{-۱+x}{x}}{\frac{-۱+ax}{x}}=\frac{x-۱}{ax-۱}$$

$$f(x).f(\frac{-۱}{x})=-۱ \Rightarrow \frac{x+۱}{x+a}\times\frac{(x-۱)}{ax-۱}=-۱ \Rightarrow a=-۱$$

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

$$\left(a,a^{۲}-۲\right)=\left(a,۳a-۴\right)\Rightarrow a^{۲}-۲=۳a-۴\Rightarrow a^{۲}-۳a+۲=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\a=۲\end{cases}\text{یا}$$

اگر $a=۲\Rightarrow f=\left\{(۲,۲),(۲,۲),(۲,۲),\left(\underbrace{۸-۶}_{۲},b\right)\right\}\Rightarrow b=۲$

$$\Rightarrow a^{۲}-b^{۲}=۴-۴=۰$$

اگر $a=۱\Rightarrow f=\left\{(۲,۱),(۱,-۱),(۱,-۱),(-۵,b)\right\}$

$\Rightarrow$ هر مقدار می‌تواند باشد. $b\Rightarrow ۱^{۲}-b^{۲}\leq ۱$

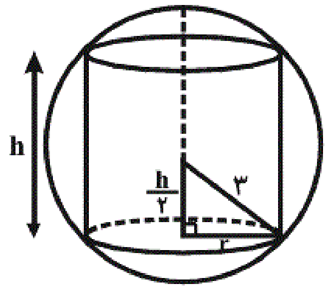
$$\Rightarrow\left(a^{۲}-b^{۲}\right)\in(-\infty,۱]$$

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۲۰ مهر

شعاع استوانه را r در نظر می‌گیریم.



ابتدا حجم استوانه را برحسب r و h می‌نویسیم: $V = \pi r^2 h$

برای به‌دست آوردن رابطه‌ای بر حسب r و h، در مثلث قائم‌الزاویهٔ رسم‌شده، از قاعدهٔ فیثاغورس کمک می‌گیریم:

$$r^2 + \frac{h^2}{4} = 9 \Rightarrow r^2 = 9 - \frac{h^2}{4}$$

$$\Rightarrow V = \pi r^2 h = \pi(9 - \frac{h^2}{4})h$$

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

(علیرضا شاکری)

$$f(x)=ax+b$$

$$\Rightarrow f(x-۱)+f(x+۲)=a(x-۱)+b+a(x+۲)+b=x$$

$$\Rightarrow ۲ax+a+۲b=x\Rightarrow (۲a-۱)x+(a+۲b)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a-۱=۰\Rightarrow a=\frac{۱}{۲} \\ a+۲b=۰\Rightarrow b=-\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۴}\Rightarrow f(۲)=\frac{۳}{۴}$$

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۸)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$✓ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

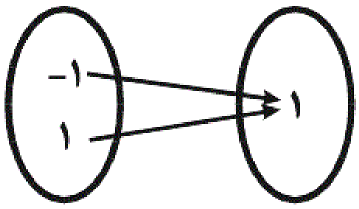
آزمون ۲۰ مهر

به‌ترتیب همهٔ رابطه‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) تابع نیست؛ زیرا یک فرد می‌تواند بیش از یک نوشیدنی مورد علاقه داشته باشد.

ب) تابع نیست؛ زیرا به عنوان مثال عدد ۱۶ دو ریشهٔ دوم ۴+ و ۴- دارد.

پ) $x^2-4<0 \Rightarrow x^2<4 \Rightarrow -2<x<2 \Rightarrow$ دامنه $: D=\{-1,1\}$

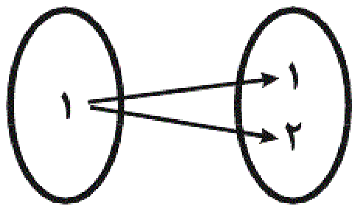


این اعداد فقط یک مقسوم‌علیه طبیعی دارند که آن هم عدد یک است؛ پس این حالت تابع است.

ت) دامنه $: |x-1|<1 \Rightarrow -1<x-1<1 \Rightarrow 0<x<2 \Rightarrow D=\{1\}$

برد $: 2x^2-18<0 \Rightarrow x^2-9<0 \Rightarrow -3<x<3 \Rightarrow x=1,2$

$\Rightarrow R=\{1,2\}$



پس این حالت نیز تابع نیست.

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

۱۴۱- (امیرحسین ابومحبوب)

گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ زمانی نادرست است که مقدم آن یعنی $p \Rightarrow q$ درست و تالی آن یعنی q نادرست باشد. چون q نادرست است، پس ارزش گزارهٔ $p \Rightarrow q$ تنها در صورتی درست است که p نادرست باشد، بنابراین ارزش هر دو گزارهٔ p و q نادرست است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۹ تا ۱۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۲۰ مهر

۱۴۲- (مرتضی فهیم‌علوی)

می‌دانیم که عکس نقیض هر گزاره، با آن گزاره معادل است. عکس نقیض گزارهٔ صورت سؤال به شکل زیر است:

$$\sim(x \geq ۳ \vee x \leq -۳) \Rightarrow \sim(x^۲ \geq ۹)$$

$$\equiv (x < ۳ \wedge x > -۳) \Rightarrow x^۲ < ۹ \equiv (-۳ < x < ۳) \Rightarrow x^۲ < ۹$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۹ تا ۱۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

(یاسین سپهر)

اگر ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ را به ترکیب فصلی تبدیل کنیم، آنگاه داریم:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

با توجه به هم‌ارزی منطقی به‌دست آمده داریم:

$$\sim[(p \wedge \sim q) \Rightarrow p] \equiv (p \wedge \sim q) \wedge \sim p$$

$$\equiv \underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F} \wedge \sim q \equiv F$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۲۰ مهر

گزینهٔ «۲»: اگر $p \wedge \sim q$ درست باشد،آن‌گاه هر دو گزارهٔ p و $\sim q$ درست هستند، پس p درست و q نادرست است.

گزینهٔ «۳»: اگر $p \Leftrightarrow q$ درست باشد، یعنی هر دوی آنها دارای ارزش یکسان هستند. اگر هر دو دارای ارزش نادرست باشند، $p \vee q$ درست نخواهد بود. پس قطعاً p و q هر دو درست هستند.

گزینهٔ «۴»: در این حالت نمی‌توان راجع به ارزش هر دو گزارهٔ p و q با قطعیت اظهارنظر کرد، زیرا کافی است q درست باشد و p می‌تواند درست یا نادرست باشد.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۶ تا ۱۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۲۰ مهر

گزینهٔ «۱»: معادلهٔ $\frac{x^{۲}-۴}{x+۲}=x-۲$ بـه ازای $x\neq -۲$ و در نتیجـه بـرای

همهٔ اعضای مجموعهٔ A، صحیح است. پس این گزارهٔ سوری درست است.

گزینهٔ «۲»: $x^{۲}+۵x-۶=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\in A\\x=-۶\end{cases}$

در نتیجه این گزارهٔ سوری درست است.

گزینهٔ «۳»:

$$|۳-x|<۲\Rightarrow|x-۳|<۲\Rightarrow -۲<x-۳<۲\Rightarrow ۱<x<۵$$

بنابراین نامساوی به ازای $x=۱$ و $x=۵$ برقرار نیسـت و در نتیجـه گـزارهٔ

سوری نادرست است.

گزینهٔ «۴»:

$$x^{۲}\leq x\Rightarrow x^{۲}-x\leq ۰\Rightarrow x(x-۱)\leq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۱$$

بنابراین نامساوی به ازای $x=۱$ برقرار است و در نتیجهٔ گزارهٔ سوری درست

است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

نقیض گزارهٔ سوری « $\forall x; P(x)$ » به صورت « $\exists x; \sim P(x)$ » است. از طرفی داریم:

$$\sim(۱ < x < ۲) \equiv \sim[x > ۱ \wedge x < ۲]$$

$$\equiv \sim(x > ۱) \vee \sim(x < ۲) \equiv x \leq ۱ \vee x \geq ۲$$

بنابراین نقیض گزارهٔ صورت سؤال، عبارت است از:

$$\exists x \in \mathbb{R}; x \leq ۱ \vee x \geq ۲$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۱۴۷ (امیرحسین ابومحبوب)

مطابق جدول ارزش گزاره‌های p، q و r داریم:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	ن	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	د	د
ن	ن	ن	د	ن

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در ۳ حالت از جدول، ارزش گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$، نادرست است.

راه حل دوم: ارزش گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ وقتی نادرست است که r نادرست و $p \Rightarrow q$ درست باشد و ارزش $p \Rightarrow q$ در ۳ حالت از ۴ حالت ارزش گزاره‌های p و q درست است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۴ و ۱۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۱۴۸ (هومن نورائی)

می‌دانیم $\sim p \Rightarrow q \equiv p \vee q$، بنابراین داریم:

$$(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q \vee r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow [(p \vee q) \vee r]$$

۱✓ ۲ ۳ ۴

-۱۴۹ (هومن نورائی)

گزینهٔ «الف»: ارزش دو گزارهٔ p و $\sim p$، همیشه مخالف یکدیگر است، پس ارزش ترکیب دو شرطی این دو گزاره، همواره نادرست است.

گزارهٔ «ب»: ارزش دو گزارهٔ p و $\sim p$، همیشه مخالف یکدیگر است، پس ارزش ترکیب فصلی این دو گزاره، همواره درست و در نتیجه ترکیب شرطی $p \Rightarrow (p \vee \sim p)$ به دلیل درست بودن تالی، همواره درست است.

گزارهٔ «پ»: ارزش دو گزارهٔ p و $\sim p$، همیشه مخالف یکدیگر است، پس ارزش ترکیب عطفی این دو گزاره، همواره نادرست و در نتیجه ترکیب شرطی $(p \wedge \sim p) \Rightarrow p$ به انتفای مقدم، همواره درست است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۶ تا ۱۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

دو عبارت $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$، هم‌ارز منطقی هستند. پس داریم:

$$(\sim p \Rightarrow q) \wedge [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q]$$

$$\equiv (p \vee q) \wedge [(\sim p \vee q) \wedge \sim q]$$

$$\equiv (p \vee q) \wedge \left[(\sim p \wedge \sim q) \vee \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F}\right]$$

$$\equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \vee q) \equiv F$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۶ تا ۱۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

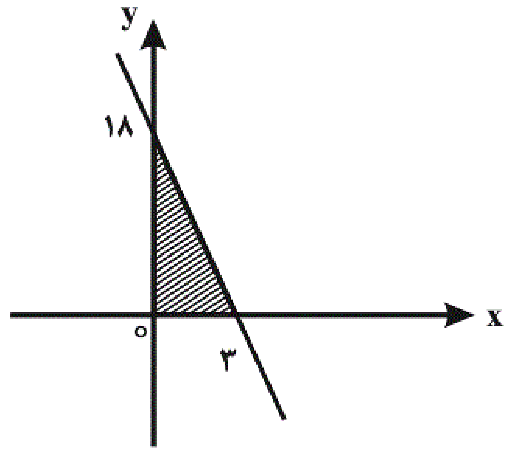
-۸۱ (عزیزاله علی‌اصغری)

تابع $g(x)$ یک خط با شیب (-۱) و عرض از مبدأ ۳+ است؛ بنابراین:

$$g(x) = -x + ۳ \Rightarrow f(x) = -x + ۵$$

$$h(x) = ۳\left[-(۲x - ۱) + ۵\right] = -۶x + ۱۸$$

شکل زیر، نمودار $h(x)$ را نمایش می‌دهد:



$\Rightarrow$ مساحت مثلث هاشور خورده : $S = \frac{۱}{۲}(۳)(۱۸) = ۲۷$

(حسابان۲ - تابع: صفحه‌های ۲ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۲۰ مهر

-۸۲ (سیدعادل حسینی)

$$\begin{cases} ۲a - ۵ = -۱ \Rightarrow a = ۲ \\ b = ۳f(-۱) - ۷ = ۳(۳) - ۷ = ۲ \end{cases} \Rightarrow a - b = ۰$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۲ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۸۳ (یاسین سپهر)

دامنهٔ تابع f، بازهٔ $[-۴,۷]$ می‌باشد. بنابراین:

$$-۴ \le ۲x - ۱ \le ۷ \Rightarrow -۳ \le ۲x \le ۸ \Rightarrow -\frac{۳}{۲} \le x \le ۴$$

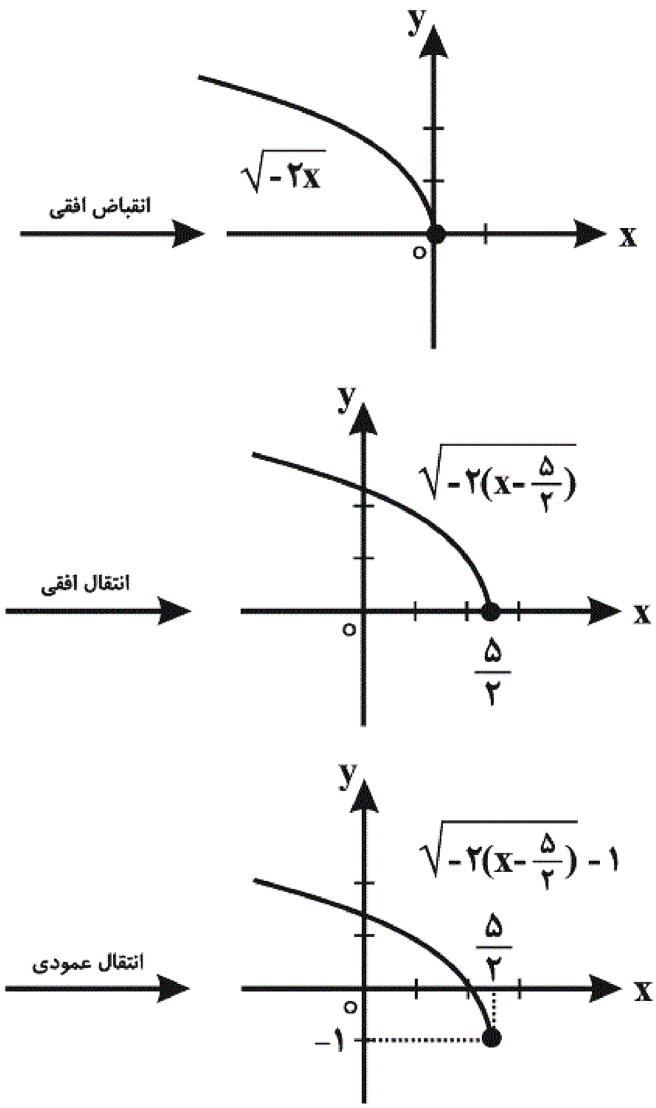
اعداد صحیح موجود در بازهٔ $\left[-\frac{۳}{۲},۴\right]$ عبارت‌اند از:

$-۱,۰,۱,۲,۳,۴$

(حسابان۲ - تابع: صفحه‌های ۶ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

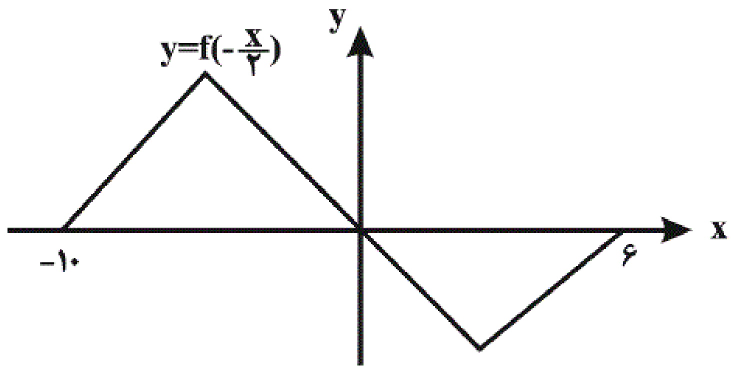


(حسابان۲ - تابع: صفحه‌های ۲ تا ۱۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

ابتدا از روی $f(x)$ نمودار $f(-x)$ را رسم کرده و سپس در راستای افقی آن را ۲ برابر منبسط می‌کنیم تا $f\left(-\frac{x}{۲}\right)$ به‌دست آید.



حال دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{xf\left(-\frac{x}{۲}\right)}$ را می‌یابیم:

$$xf\left(-\frac{x}{۲}\right)\geq ۰$$

	-۱۰		۰		۶
x		$-$	۰	$+$	
$f\left(-\frac{x}{۲}\right)$	۰	$+$	۰	$-$	۰
$xf\left(-\frac{x}{۲}\right)$	۰	$-$	۰	$-$	۰

$$\Rightarrow D_g=\{-۱۰,۰,۶\}$$

(حسابان۲ - تابع: صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

$$y = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۲x - ۸ + ۱ = (x-۲)^{۳} + ۱$$

$$\Rightarrow x - ۲ = \sqrt[۳]{y-۱} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y-۱} + ۲$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x-۱} + ۲$$

با توجه به ضابطهٔ $f^{-۱}$ داریم:

$$f^{-۱}(x) = g(x-۱) + ۲$$

بنابراین $g(x)$ را باید یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

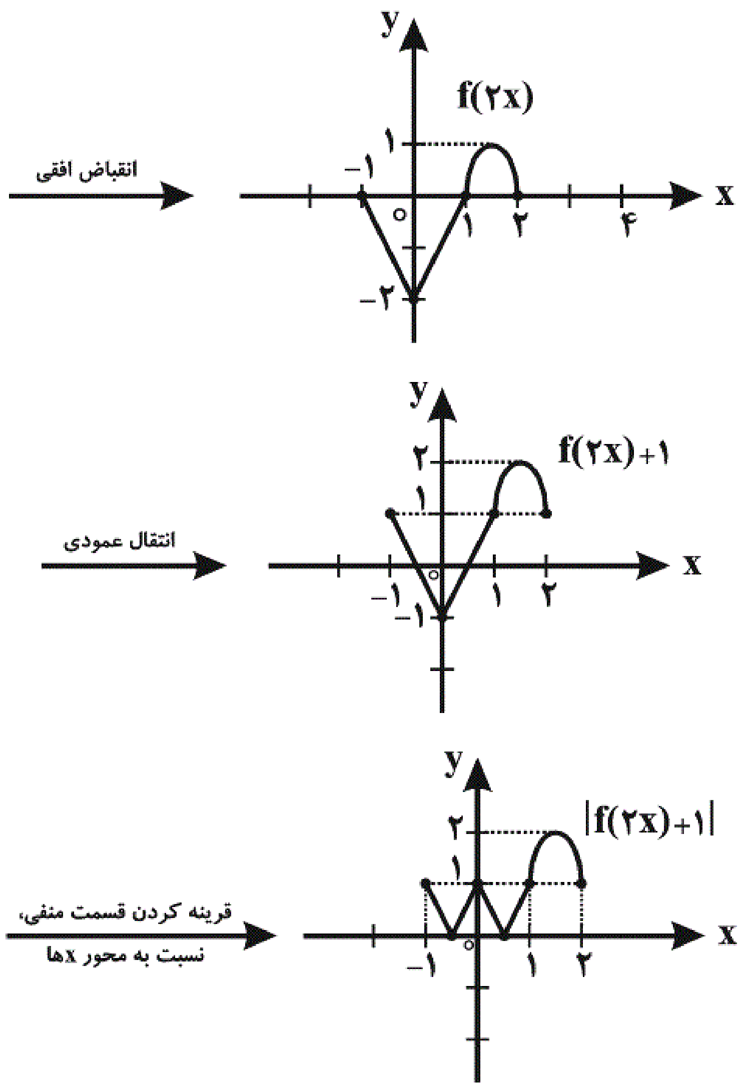
(حسابان۲ - تابع: صفحه‌های ۲ تا ۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۸۷ (جهانبخش نیکنام)

معادله را به فرم $\left|f(2x)+1\right| = m$ می‌نویسیم. نمودار $\left|f(2x)+1\right|$ را رسم می‌کنیم.



مطابق نمودار، برای این که خط $y = m$ نمودار را در ۴ نقطه قطع کند باید $0 < m \le 1$ باشد.

(حسابان۲ - تابع: صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۸۸ (نسترن زارع)

کافی است مراحل گفته‌شده را به‌صورت معکوس از آخر به اول انجام دهیم:

ابتدا $\frac{۱}{۳}$ واحد در جهت عمودی منقبض می‌کنیم:

$$y = -\frac{۱}{۳}|۳x - ۱۲| = -|x - ۴|$$

سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم: $y = |x - ۴|$

و در انتها ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم: $y = |x - ۲|$

(حسابان۲ - تابع: صفحه‌های ۲ تا ۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۲۰ مهر

-۸۹ (نسترن زارع)

$$f(x) \xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{انتقال یک واحدی}} f(x+۱)$$

$$f(x+۱) \xrightarrow[\text{به محور y ها}]{\text{انعکاس نسبت}} f(-x+۱)$$

$$f(۱-x) \xrightarrow[\text{به محور x ها}]{\text{انعکاس نسبت}} -f(۱-x)$$

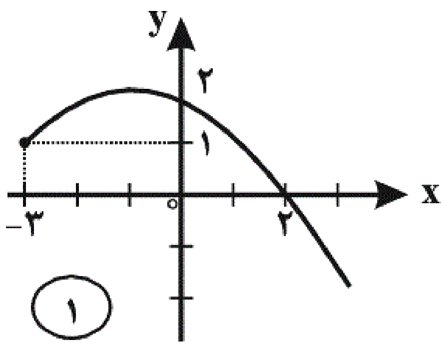
$$-f(۱-x) \xrightarrow[\frac{۱}{۴}\ \text{واحدی}]{\text{انقباض عمودی}} -\frac{۱}{۴}f(۱-x)$$

(حسابان۲ - تابع: صفحه‌های ۲ تا ۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

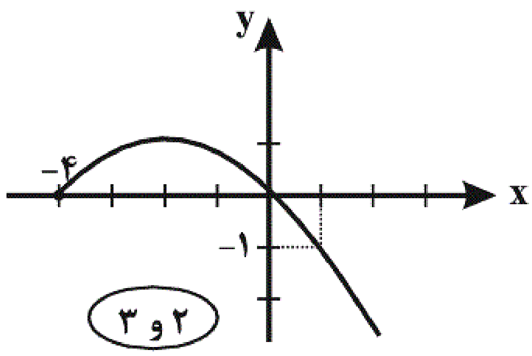
آزمون ۲۰ مهر

۱- اگر تابع $y = ۳ - f\left(۲ - x\right)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم، تابع $y = ۳ - f\left(۲ + x\right)$ بدست می‌آید.



۲- این تابع را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا $y = ۳ - f\left(x + ۳\right)$ بدست آید.

۳- سپس این تابع را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا $y = ۲ - f\left(x + ۳\right)$ بدست آید.



(حسابان۲ - تابع: صفحه‌های ۲ تا ۵)

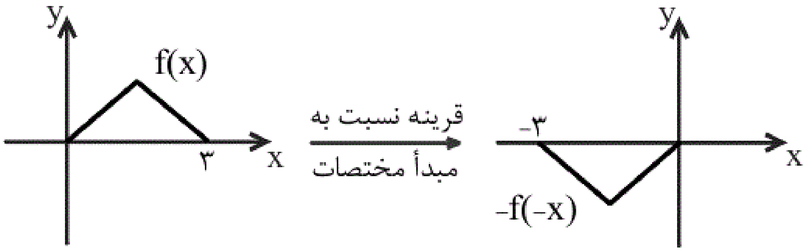
۱   ۲✓   ۳   ۴

آزمون ۲۰ مهر

(کتاب آبی - سؤال ۵۲)

برای رسم نمودار تابع $y=-f(-x)$ کافی است نمودار تـابع $y=f(x)$ را

نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم، بنابراین:



بنابراین نمودار تابع $y=-f(-x)$ در ناحیهٔ سوم قرار دارد.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{x}$ برابر است با:

$$\begin{cases} x \geq \circ \Rightarrow D_f = [\circ, +\infty) \\ x \geq \circ \Rightarrow \sqrt{x} \geq \circ \Rightarrow R_f = [\circ, +\infty) \end{cases}$$

با توجه به اینکه انتقال افقی فقط روی دامنه و انتقال عمودی فقط روی برد تأثیر دارد، دامنه و برد هر یک از گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:

گزینهٔ (۱) : $f(x+۱)-۱$

دامنه : $[\circ-۱, +\infty) = [-۱, +\infty)$

برد : $[\circ-۱, +\infty) = [-۱, +\infty)$

گزینهٔ (۲) : $f(x-۱)+۱$

دامنه : $[\circ+۱, +\infty) = [۱, +\infty)$

برد : $[\circ+۱, +\infty) = [۱, +\infty)$

گزینهٔ (۳) : $f(x-۲)-۲$

$$\left.\begin{array}{l} \text{دامنه}: [\circ+۲, +\infty) = [۲, +\infty) \\ \text{برد}: [\circ-۲, +\infty) = [-۲, +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow$$ **دامنه و برد برابر نیستند.**

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

(کتاب آبی- سؤال ۲۳)

نمــودار تــابع $g(x)=kf(x)+b$ از مبــدأ مختصــات عبــور مــی‌کنــد،

بنابراین $g(\circ)=\circ$ و خواهیم داشت:

$$g(x)=kf(x)+b\xrightarrow{g(\circ)=\circ}\circ=kf(\circ)+b\Rightarrow f(\circ)=\frac{-b}{k}$$

با توجـه بـه نمـودار $f(\circ)=۴$، پـس داریـم: $\frac{-b}{k}=۴$ یـا $b=-۴k$. تنهـا

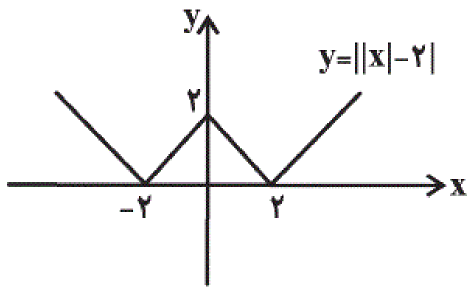
گزینه‌ای که در این رابطه صدق می‌کند گزینهٔ (۲) است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

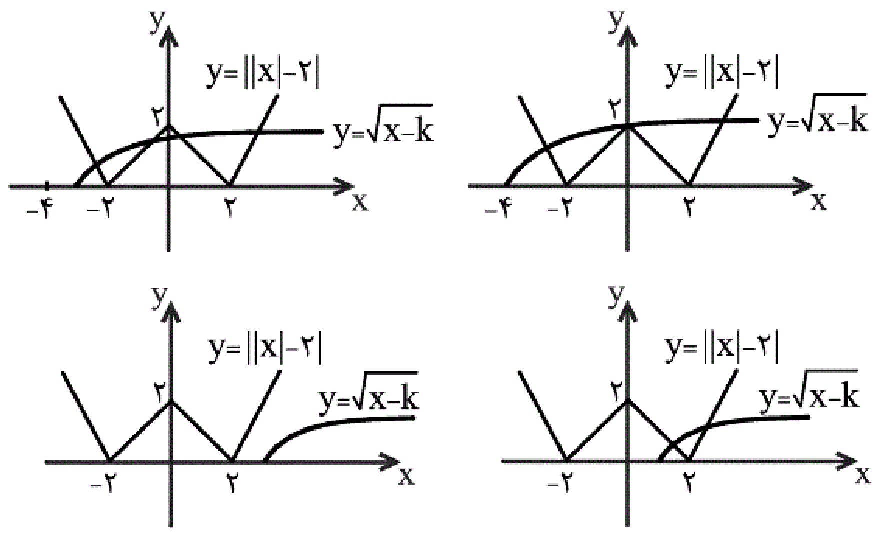
نمودار تابع $y=||x|-۲|$ به شکل زیر است:



نمودار تابع $y=\sqrt{x-k}$ همان نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ است که $|k|$ واحد به چپ یا راست منتقل می‌شود.

مطابق شکل‌های زیر، با توجه به محدودهٔ k، نمودار تابع $y=\sqrt{x-k}$ ممکن است نمودار تابع $y=||x|-۲|$ را حداکثر در چهار نقطه قطع کند.

پس معادلهٔ $\sqrt{x-k}=||x|-۲|$ حداکثر چهار جواب دارد.



(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱   ۲✓   ۳   ۴

آزمون ۲۰ مهر

با توجه به نمودار، دامنهٔ تابع f بازهٔ $D_f = [-۴ , ۴]$ است. برای یافتن دامنهٔ

تابع $f(\frac{x}{۲})$ دامنهٔ تابع f را در ۲ ضرب و برای یافتن دامنهٔ تابع $f(۲x)$،

دامنهٔ تابع f را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. پس داریم:

$$D_{f(\frac{x}{۲})} = [۲\times(-۴) , ۲\times۴] = [-۸ , ۸]$$

$$D_{f(۲x)} = [\frac{-۴}{۲} , \frac{۴}{۲}] = [-۲ , ۲]$$

لذا دامنهٔ تابع $g(x) = f(\frac{x}{۲}) - f(۲x)$ برابر است با:

$$D_g = D_{f(\frac{x}{۲})} \cap D_{f(۲x)} = [-۸ , ۸] \cap [-۲ , ۲] = [-۲ , ۲]$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{محور y ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y=\sqrt{-(x-۲)}=\sqrt{-x+۲}$$

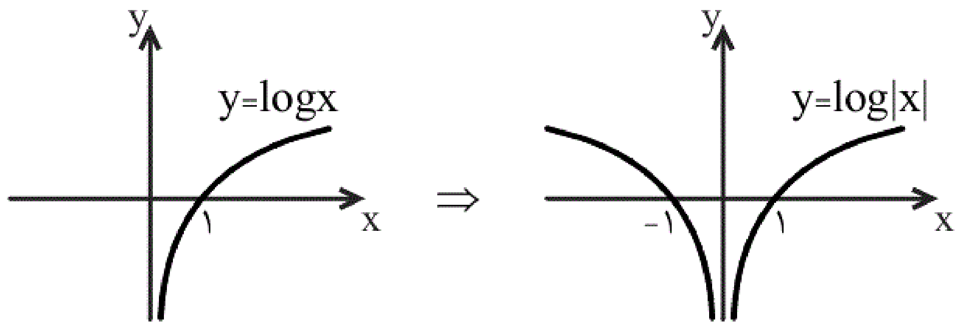
برای یافتن نقـاط تلاقـی نمـودار توابـع $y=\sqrt{-x+۲}$ و $y=x$ (نیمسـاز ناحیهٔ اول و سوم)، آنها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

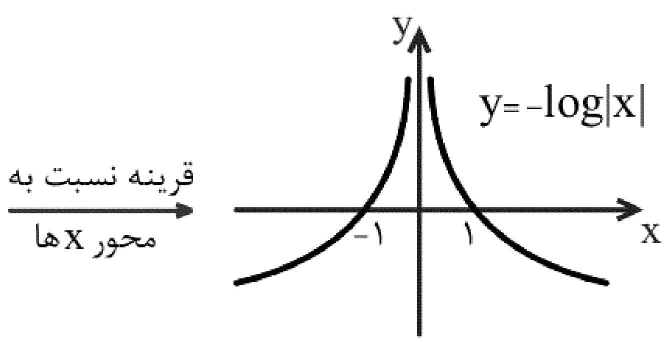
$$\sqrt{-x+۲}=x\xrightarrow{\text{به توان ۲}} -x+۲=x^{۲}\Rightarrow x^{۲}+x-۲=۰$$

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

نمودار داده شده نسبت به محور y ها متقارن است یعنی با تبدیل x بـه $-x$ مقدار تابع تغییر نمی‌کند، پس ضابطهٔ آن شامل $|x|$ اسـت، بنـابراین یکـی از گزینه‌های (۱) یا (۲) می‌تواند پاسخ باشد. توجه کنید که برای رسـم نمـودار تابع $f(|x|)$، قسمت چپ محور y ها از نمودار را حذف کرده، قسمت راسـت آن‌را نگه داشته و نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. بنابراین داریم:





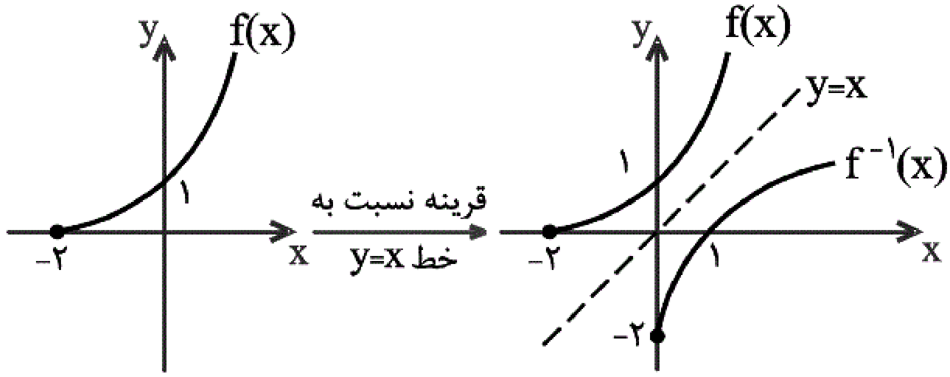
بنابراین گزینهٔ «۱» صحیح است.

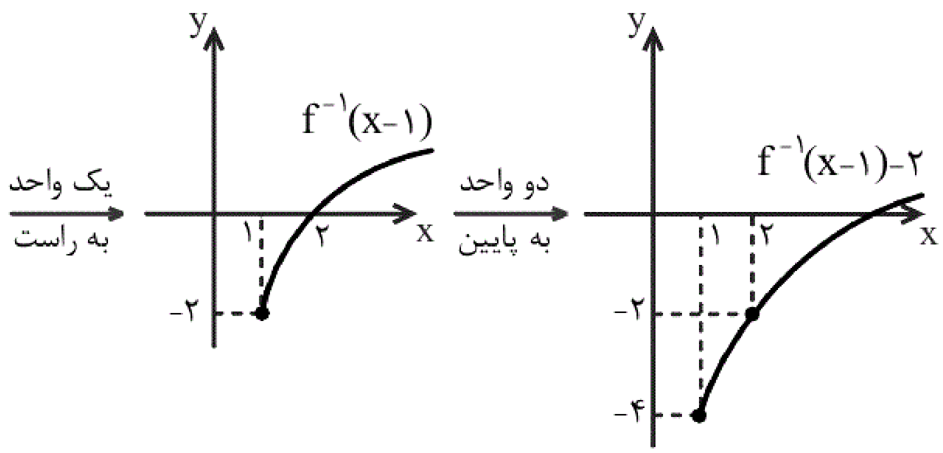
(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۹۸- (کتاب آبی- سؤال ۱۷)

نمودار تابع $y=-2+f^{-1}(x-1)$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم.





بنابراین نمودار از ناحیهٔ دوم و سوم عبور نمی‌کند.

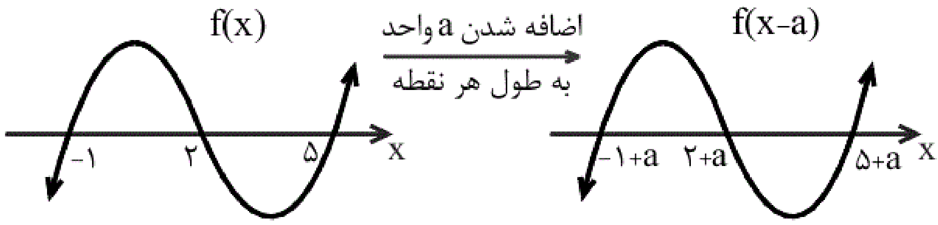
(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱   ۲   ۳   ۴ ✓

۹۹- (کتاب آبی- سؤال ۱۳)

به طول هر نقطهٔ تابع $f(x)$، a واحد اضافه می‌شود و تابع $f(x-a)$ تشـکیل

می‌شود، پس نمودار تابع $f(x-a)$ به صورت زیر خواهد بود:



با توجه به نمودار تابع $f(x-a)$، ریشه‌های معادلهٔ $f(x-a)=۰$ به‌صـورت

$x_۱=-۱+a$ ، $x_۲=۲+a$ و $x_۳=۵+a$ است

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

۱۰۰- (کتاب آبی- سؤال ۲٤)

انتقال افقی روی برد تابع تأثیر ندارد ولی انتقـال‌هـای عمـودی و انبسـاط (یـا

انقباض) عمودی برد تابع را تغییر می‌دهد و دقیقـاً همـان تغییـرات روی بـرد

اعمال می‌شود.

$$R_f=[-\sqrt{۵},۱]\Rightarrow -\sqrt{۵}\le f(x)\le ۱$$

$$\xrightarrow[\text{برد تغییر نمی‌کند.}]{\text{انتقال افقی}} -\sqrt{۵}\le f(x+۱)$$

$$\xrightarrow{\times(-\sqrt{۲})} -\sqrt{۲} \le -\sqrt{۲}f(x+۱) \le \sqrt{۱۰}$$

$$\xrightarrow{-۳} -\sqrt{۲}-۳ \le -\sqrt{۲}f(x+۱)-۳ \le \sqrt{۱۰}-۳$$

$$\Rightarrow -\sqrt{۲}-۳ \le g(x) \le \sqrt{۱۰}-۳$$

$$\Rightarrow R_g = [-\sqrt{۲}-۳\ ,\ \sqrt{۱۰}-۳]$$

از آنجا که $-۵ < -\sqrt{۲}-۳ \le g(x) \le \sqrt{۱۰}-۳ < ۱$ برد تابع g شامل پنج عدد صحیح ۴−، ۳−، ۲−، ۱− و صفر است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ✓   ۲   ۳   ۴

آزمون ۲۰ مهر

(عادل ابراهیمی)

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۴ & ۰ \\ ۶ & ۶ & ۶ \end{bmatrix}$$

اگر به تعریف ماتریس‌های A و B دقت کنیم، درایه‌های بالای قطر اصلی آنها قرینه‌اند، پس مجموع این درایه‌ها صفر است.

نکته: در ماتریس $[a_{ij}]_{n\times n}$:

$$\begin{cases} i < j \rightarrow \text{درایه‌های بالای قطر اصلی} \\ i = j \rightarrow \text{درایه‌های روی قطر اصلی} \\ i > j \rightarrow \text{درایه‌های پایین قطر اصلی} \end{cases}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

✓ ۱ ‌ ‌ ‌ ۲ ‌ ‌ ‌ ۳ ‌ ‌ ‌ ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۱۱۲ (محمدجواد نوری)

طبق تعریف ماتریس B داریم:

$$B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۶ & ۸ \\ ۶ & ۹ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

دو ماتریس A و B مساوی یکدیگرند، پس درایه‌های آنها باید نظیر به نظیر برابر یکدیگر باشند:

$$\begin{cases} m=۲ \\ n-۱=۶ \Rightarrow n=۷ \\ k+۱=۱۲ \Rightarrow k=۱۱ \end{cases}$$

$$m+n+k=۲+۷+۱۱=۲۰$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۱   ۲✓   ۳   ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۱۱۳ (کاظم باقرزاده)

طبق تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$c_{۲۳} = A \text{ سطر دوم} \times B \text{ ستون سوم} = \begin{bmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱۳} \\ b_{۲۳} \\ b_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$= a_{۲۱}b_{۱۳} + a_{۲۲}b_{۲۳} + a_{۲۳}b_{۳۳} = \sum_{i=۱}^{۳} a_{۲i}b_{i۳}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۱   ۲✓   ۳   ۴

آزمون ۲۰ مهر

واضح است که A، ماتریسی ۳×۱ می‌باشد، بنابراین اگر $A=\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$

در نظر گرفته شود، آنگاه داریم:

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} ۲x & ۲y & ۲z \\ x & y & z \\ ۳x & ۳y & ۳z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x=۳ \\ y=۱ \\ z=-۱ \end{cases}$$

حال:

$$a+b+e=۲x+۲y+۳y=۲x+۵y=۲(۳)+۵(۱)=۱۱$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

✓۱ ۲ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۱۱۵ (محمد قیدی)

$$\begin{bmatrix}-۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & ۲\\ ۱ & -x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۵\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}-۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & ۲\\ ۱ & -x\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x\\ ۵\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-x+۲ & -۲-۲x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۵\end{bmatrix}=-x^۲+۲x-۱۰-۱۰x$$

$$=-x^۲-۸x-۱۰=۰\Rightarrow x^۲+۸x+۱۰=۰$$

اولاً توجه کنید که چون $\Delta=۸^۲-۴\times۱\times۱۰>۰$، پس معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

ثانیاً می‌دانیم: $\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta$ و در معادلهٔ بالا داریم:

$$\alpha+\beta=S=-۸ \quad \text{و} \quad \alpha\beta=P=۱۰$$

$$\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=(-۸)^۲-۲(۱۰)=۶۴-۲۰=۴۴$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

-۱۱۶ (سیدامیر ستوده)

با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری و مفروضات سؤال، داریم:

$$B^۲=B\times B=(BA)B=B(AB)=BA=B$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۲۰ مهر

با توجه به معادلات داده شده، A یک ماتریس ۲×۲ است.

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، داریم:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} ۲a+c=۳ \\ ۲b+d=۵ \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} ۳a+۴c=-۱ \\ ۳b+۴d=۲ \end{cases} \quad (۲)$$

دو برابر معادلات (۲) را با معادلات (۱) جمع می‌کنیم، داریم:

$$\begin{cases} (۲a+c)+۲(۳a+۴c)=۳+۲(-۱)\Rightarrow ۸a+۹c=۱ \\ (۲b+d)+۲(۳b+۴d)=۵+۲(۲)\Rightarrow ۸b+۹d=۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} ۸ & ۹ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۹ \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۲۰ مهر

(جواد حاتمی)

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})^{۲} = \mathbf{A}^{۲} - \mathbf{AB} - \mathbf{BA} + \mathbf{B}^{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۸ \\ ۴ & ۱۸ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} - \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۱۲ \\ ۰ & ۲۱ \end{bmatrix} - \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$$

$$\Rightarrow \mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} ۵ & ۱۲ \\ ۰ & ۲۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱۲ \\ ۰ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۰)

۱   ۲✓   ۳   ۴

آزمون ۲۰ مهر

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\ ۰&۰&۰\\ ۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\ ۰&۰&۰\\ ۱&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۲&۲\\ ۰&۰&۰\\ ۲&۲&۲\end{bmatrix}=۲A$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix}۲&۲&۲\\ ۰&۰&۰\\ ۲&۲&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\ ۰&۰&۰\\ ۱&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۴&۴\\ ۰&۰&۰\\ ۴&۴&۴\end{bmatrix}=۴A=۲^{۲}A$$

$$\vdots$$

$$A^{۱۲}=۲^{۱۱}A\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=۶\times ۲^{۱۱}=۳\times ۲^{۱۲}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۲۰ مهر

چون A و I تعویض‌پذیرند، پس هر عبارت ماتریسی که فقط شامل ماتریس‌هایی از A و I باشد، با ماتریس A تعویض‌پذیر است. بنابراین ماتریس A با هر ۴ ماتریس $2A+I$، $I-A^2$، A^2، A^3 و A^2+I تعویض‌پذیر است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۲۰ مهر