سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

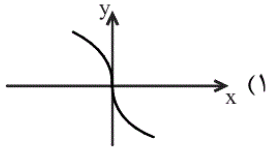
نرم افزارهای ریاضیات

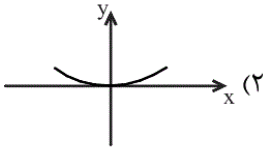
و...

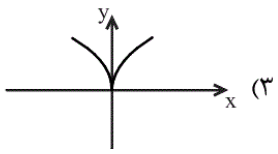
کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

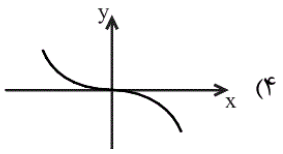
https://t.me/riazisara (@riazisara)

۲۱- نمودار تابع $y = x^{\frac{8}{5}} - 4x^{\frac{3}{5}}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

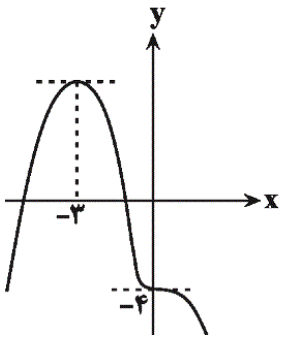
شما پاسخ نداده اید

۲۲- تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x^3 - x|$ روی بازهٔ $[-1, 2]$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۲۳- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + 2c$ است. $a + b + c$ کدام است؟



۱) ۳

۲) -۱

۳) ۱

۴) -۳

شما پاسخ نداده اید

۲۴- مجموعه طول نقاط عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟

۱) $\{-1, 0, 1\}$ ۲) $\{0, 1\}$ ۳) $\{-1, 1\}$ ۴) $\varnothing$

شما پاسخ نداده اید

۲۵- اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y = x + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ در آن نزولی است و تقعر رو به پایین دارد، به‌صورت (a, b) باشد، $b - a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۲۶- مختصات نقطهٔ عطف منحنی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ به‌صورت $(1, -6)$ است. طول نقطهٔ می‌نیمم نسبی f کدام است؟

۱) $1 + \frac{\sqrt{7}}{3}$ ۲) $1 - \frac{\sqrt{7}}{3}$ ۳) $1 + \sqrt{\frac{7}{3}}$ ۴) $1 - \sqrt{\frac{7}{3}}$

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۷- مجموعهٔ طول نقاط می‌نیمم نسبی تابع $y = ۲\sin x + \cos ۲x$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\{\frac{۵\pi}{۶},\frac{۳\pi}{۲}\}$ ۲) $\{\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}\}$ ۳) $\{\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۲}\}$ ۴) $\{\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\}$

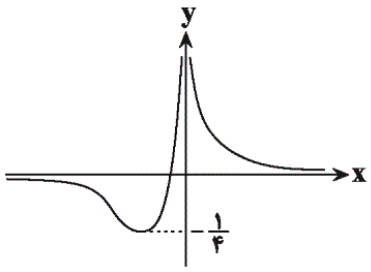
شما پاسخ نداده اید

۲۸- نقطهٔ اکسترمم نسبی (ماکزیمم یا می‌نیمم) تابع به معادلهٔ $y = \frac{x+۱}{x^۳}$ از چه نوعی است و در کدام ناحیه دستگاه مختصات قرار دارد؟

۱) ماکزیمم – دوم ۲) می‌نیمم – دوم ۳) ماکزیمم – سوم ۴) می‌نیمم – سوم

شما پاسخ نداده اید

۲۹- شکل کلی نمودار تابع $y = \frac{x+a}{x^۲+bx}$ به‌صورت زیر است. حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) ۲
۲) -۱
۳) -۲
۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۳۰- نقطهٔ تلاقی مجانب‌های منحنی $y = x - \sqrt{x^۲+۲x}$ کدام است؟

۱) $(۱,۱)$ ۲) $(-۱,-۱)$ ۳) $(۲,-۱)$ ۴) $(۱,-۲)$

شما پاسخ نداده اید

۳۱- ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۱$ در بازهٔ $[۱,۳]$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، ریاضي عمومي ، مقاطع مخروطي ، هندسه مختصاتي و منحني‌هاي درجه‌ي دوم - 13970228

۳۲- در بیضی به معادلهٔ $۱۶y^۲ + ۵x^۲ - ۱۰x = ۷۵$ خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، بیضی را در M و N قطع می‌کند. اندازهٔ MN کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

شما پاسخ نداده اید

۳۳- دو خط به معادلات $۲y - x + ۱ = ۰$ و $۲y + x - ۱ = ۰$، مجانب‌های یک هذلولی گذرا بر نقطهٔ (۰ , ۳) هستند. معادلهٔ این هذلولی کدام است؟

۱) $۴x^۲ - y^۲ - ۸x = ۰$ ۲) $y^۲ - ۴x^۲ - ۸y = ۸$
۳) $x^۲ - ۴y^۲ - ۲x = ۳$ ۴) $۴y^۲ - x^۲ + ۲x = ۵$

شما پاسخ نداده اید

۳۴- به ازای کدام مقدار a، دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + a = ۰$ بر خط به معادلهٔ $x + ۳y = ۰$ مماس است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۵- یک تلسکوپ انعکاسی دارای آینه‌ی سهموی است که فاصله‌ی رأس تا کانون آن ۷۲ سانتی‌متر و قطر قاعده‌ی آن ۱۶۸ سانتی‌متر است. عمق آینه در مرکز، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۴/۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۶/۵

شما پاسخ نداده اید

۳۶- نقطهٔ متغیر $A(x=e^{t}-e^{-t}, y=e^{t}+e^{-t})$ با تغییر $t \in R$ روی یک مقطع مخروطی قرار می‌گیرد. فاصلهٔ بین کانون‌های این مقطع مخروطی کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) ۴ ۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، ریاضي عمومي ، خط و نقطه ، هندسه مختصاتي و منحني‌هاي درجه‌ي دوم - 13970228

۳۷- دو خط $(2a+1)x+2y=2a+3$ و $3x+(2a+6)y=2$ که هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند، چه‌قدر از هم فاصله دارند؟

۱) $\frac{5}{3\sqrt{7}}$ ۲) $\frac{3}{5\sqrt{7}}$ ۳) $\frac{7}{3\sqrt{5}}$ ۴) $\frac{7}{5\sqrt{3}}$

شما پاسخ نداده اید

۳۸- اگر نقطهٔ $S(1,-2)$ رأس سهمی $x^{2}+2ax+y+b=0$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴-

شما پاسخ نداده اید

۳۹- دو ضلع مستطیلی منطبق بر دو خط به معادلات $3x+4y=1$ و $4x-3y=4$ است. اگر مختصات نقطهٔ تلاقی قطرها برابر $O(2,1)$ باشد، اندازهٔ محیط مستطیل کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، ریاضي عمومي ، مقاطع مخروطي ، هندسه مختصاتي و منحني‌هاي درجه‌ي دوم - 13970228

۴۰- کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(3,4)$ از نقاط دایره به معادلهٔ $x^{2}+y^{2}+2x-2y+1=0$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۴۱- یک بیضی به مرکز $O(-1,1)$ بر خطوط $x=-3$ و $y=-3$ مماس است. نمودار بیضی محور yها را با کدام عرض مثبت قطع می‌کند؟

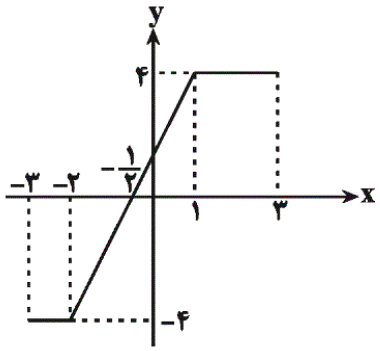
۱) $1+\sqrt{3}$ ۲) $1+2\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{3}-1$ ۴) $\sqrt{3}-1$

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، ریاضي عمومي ، انتگرال - 13970228

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴۲- نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است، مقدار $\int_{-۳}^{۳} f(x)dx$ کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۲

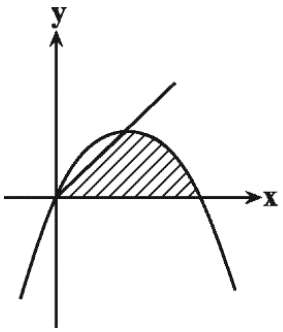
شما پاسخ نداده اید

۴۳- اگر $A = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{۱}{\cos^۲ x}dx$ و $B = \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{\sin^۲ x}dx$، آنگاه $A+B$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۴۴- مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی به معادلهٔ $y = -x^۲ + ۲x$ نیمساز ربع اول و محور طول‌ها (قسمت هاشورخورده در نمودار زیر) کدام است؟



۱) $\frac{۱۹}{۶}$ ۲) $\frac{۷}{۶}$
۳) $\frac{۱۱}{۳}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۴۵- حاصل $\int_{۱}^{۲} \frac{x+۲}{x^۲}dx$ کدام است؟

۱) $Ln۴$ ۲) $Ln۲$ ۳) $۱-Ln۲$ ۴) $۱+Ln۲$

شما پاسخ نداده اید

۴۶- حاصل $\int_{۰}^{\frac{۳\pi}{۲}} (۱-|\cos x|)dx$ کدام است؟

۱) $\pi-۱$ ۲) $\pi-۳$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}-۳$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲}-۱$

شما پاسخ نداده اید

۴۷- اگر $f(x) = |[\sqrt{x}] - x|$، آن‌گاه $\int_{۰}^{۳} f(x)dx$ کدام است؟ ([ ]: جزء صحیح)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۴۸- اگر $\int \frac{۱}{\sqrt{x}}(\frac{\sqrt{x}-۱}{x})^۲ dx = \frac{۲}{۳x\sqrt{x}}f(x) + C$، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $-۶x + ۶\sqrt{x} + ۱$ ۲) $-۳x + ۳\sqrt{x} - ۱$
۳) $۳x - ۳\sqrt{x} + ۱$ ۴) $۳x - ۳\sqrt{x} - ۱$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

شما پاسخ نداده اید

۴۹- حاصل $\int (3x^2 + 2x)dx$ کدام است؟

۱) $x^3 + x^2 + C$

۲) $\frac{x^3}{2} + x^2 + C$

۳) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

۴) $x^3 + \frac{x^2}{2} + C$

شما پاسخ نداده اید

۵۰- اگر $f(x) = \int_1^x \frac{t}{t^2+1} dt$ آن‌گاه مشتق تابع f در $x = 1$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) $\frac{1}{2}$

۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۲۱- *(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)*

$$y = x^{\frac{۸}{۵}} - ۴x^{\frac{۳}{۵}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{۸}{۵}x^{\frac{۸}{۵}-۱} - ۴\left(\frac{۳}{۵}\right)x^{\frac{۳}{۵}-۱} = \frac{۸}{۵}x^{\frac{۳}{۵}} - \frac{۱۲}{۵}x^{-\frac{۲}{۵}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{۸}{۵}\sqrt[۵]{x^۳} - \frac{۱۲}{۵\sqrt[۵]{x^۲}} \Rightarrow y' = \frac{۸x - ۱۲}{۵\sqrt[۵]{x^۲}}$$

از معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود که خط مماس بر نمودار تابع، در نقطهٔ $x = ۰$ قائم است $(y'(۰) \to -\infty)$، همچنین از $y'(۰) \to -\infty$ می‌توان نتیجه گرفت که در اطراف $x = ۰$، مقدار y' منفی و در نتیجه تابع نزولی است، که این شرایط، تنها در گزینهٔ «۱» وجود دارد.

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۲ تا ۹۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۲۲ *(سراسری ریاضی - ۹۰)*

در تابع با ضابطهٔ $y=|f(x)|$، (f چندجمله‌ای است) طول‌های نقاط بحرانی، ریشه‌های معادله‌های $f'(x)=۰$ و $f(x)=۰$ خواهند بود، البته اگر بازه‌ای داده شده باشد، باید ریشه‌های به دست آمده، نقاط درونی آن بازه باشند، لذا در این تست:

$$x^۳-x=۰ \rightarrow x(x^۲-۱)=۰$$

$$\rightarrow x=۰\ ,\ x=\pm ۱ \xrightarrow{x\in(-۱,۲)} x=۰\ ,\ ۱$$

$$f'(x)=۳x^۲-۱=۰ \rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\ ,\ \frac{-۱}{\sqrt{۳}} \in (-۱\ ,۲)$$

پس تابع در ۴ نقطهٔ ۱، $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$، ۰ و $\frac{-۱}{\sqrt{۳}}$ بحرانی است.

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۴ و ۸۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۲۳ *(عباس اسری امیرآبادی)*

تابع در نقطهٔ $x=-۳$، ماکزیمم دارد. پس باید داشته باشیم: $f'(-۳)=۰$

$$f'(x)=-x^۳+۳ax^۲+۲bx \Rightarrow f'(-۳)=۰$$

$$\Rightarrow -(-۳)^۳+۳a(-۳)^۲+۲b(-۳)=۰$$

$$\Rightarrow +۲۷+۲۷a-۶b=۰ \Rightarrow ۹a-۲b=-۹$$

$x=۰$ طول نقطهٔ عطف تابع است:

$$f''(۰)=۰ \Rightarrow f''(x)=-۳x^۲+۶ax+۲b \Rightarrow -۳(۰)^۲+۶a(۰)+۲b=۰$$

$$\Rightarrow ۲b=۰ \Rightarrow b=۰$$

$$(۰,-۴)\in f \Rightarrow f(۰)=-۴ \Rightarrow ۲c=-۴ \Rightarrow c=-۲$$

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۴- *(میثم حمزه‌لویی)*

$$f(x)=x^{\frac{۴}{۳}}+۲x^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}+\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{۴}{۹}x^{-\frac{۲}{۳}}-\frac{۴}{۹}x^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{۴}{۹}\left(\frac{۱}{x^{\frac{۲}{۳}}}-\frac{۱}{x^{\frac{۴}{۳}}}\right)=\frac{۴}{۹}\left(\frac{x^{\frac{۲}{۳}}-۱}{x^{\frac{۴}{۳}}}\right)=\frac{۴}{۹}\left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲}-۱}{\sqrt[۳]{x^۴}}\right)=۰$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲}=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$$

در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ علامت f'' عوض می‌شود و خط مماس بر نمودار تابع موجود است. پس این نقاط، نقاط عطف تابع هستند.

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۲۵- *(فرهاد حامی)*

باید $y'<۰$ و $y''<۰$ باشد:

$$y=x+\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{x^۲} \Rightarrow y'=۱+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}<۰$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[۳]{x}+۱}{\sqrt[۳]{x}}<۰ \Rightarrow -۱<x<۰$$

هم‌چنین:

$$y''=-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۴}}<۰ \Rightarrow$$ به‌ازای هر $x\in R-\{۰\}$ برقرار است.

بزرگ‌ترین بازهٔ موردنظر $(-۱,۰)$ است. پس $a=-۱$ و $b=۰$ و لذا $b-a=۱$.

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۲ تا ۹۵)

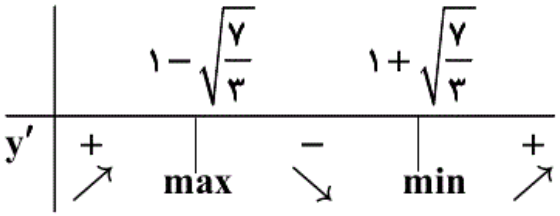
۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ضابطهٔ تابع $f(x)=x^۳-۳x^۲-۴x$ است و داریم:

$$f'(x)=۳x^۲-۶x-۴=۰\Rightarrow x_{۱,۲}=\frac{۳\pm\sqrt{۲۱}}{۳}=۱\pm\sqrt{\frac{۷}{۳}}$$

با توجه به تعیین علامت y'، نقطهٔ اکسترمم با طول بیش‌تر، می‌نیمم است:



پس: $x_{min}=۱+\sqrt{\frac{۷}{۳}}$

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۷ تا ۹۵)

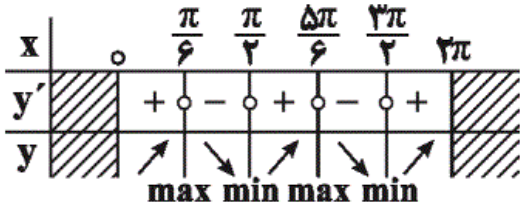
۱ ۲ ۳✓ ۴

۲۷- *(میثم حمزه‌لویی)*

$$y=۲\sin x+\cos ۲x\Rightarrow y'=۲\cos x-۲\sin ۲x=۰$$

$$\Rightarrow ۲\cos x-۲(۲\sin x\cos x)=۰\Rightarrow ۲\cos x(۱-۲\sin x)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۰\xrightarrow{x\in(۰,۲\pi)}x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\\ ۱-۲\sin x=۰\Rightarrow\sin x=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{x\in(۰,۲\pi)}x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}$$



پس طول نقاط می‌نیمم تابع $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ است.

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۷ تا ۸۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۸- *(بهرام طالبی)*

$$y=\frac{x+1}{x^3}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-2}{x^3}-\frac{3}{x^4}=0\Rightarrow\frac{-2x-3}{x^4}=0$$

$$\Rightarrow 3=-2x\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$ بحرانی :

پس جدول تعیین علامت مشتق به‌صورت زیر است:

x	$-\frac{3}{2}$	
y'	$+$	$-$
y	↗	↘
	max	

پس نوع اکسترمم، ماکزیمم است. از طرفی:

$$y(-\frac{3}{2})=\frac{-\frac{3}{2}+1}{(-\frac{3}{2})^3}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{27}{8}}=\frac{4}{27}$$

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۲۹- *(آرش رحیمی)*

$x=0$ تنها مجانب قائم تابع است. پس $b=0$ بنابراین: $y=\frac{x+a}{x^2}$، از طرفی عرض می‌نیمم تابع $y=-\frac{1}{4}$ است. پس معادلهٔ تلاقی منحنی با خط $y=-\frac{1}{4}$ ریشهٔ مضاعف می‌دهد.

$$\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{x+a}{x^2}\\ y=-\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\frac{x+a}{x^2}=-\frac{1}{4}\Rightarrow 4x+4a=-x^2$$

$$\Rightarrow x^2+4x+4a=0\xrightarrow{\Delta=0}16-4(4a)=0\Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow a+b=1+0=1$$

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۲ تا ۱۰۷)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۰- *(فرهاد حامی)*

تابع مجانب قائم ندارد. برای محاسبهٔ مجانب‌های مایل یا افقی از هم ارزی رادیکالی استفاده می‌کنیم:

$$y = x - \sqrt{x^2 + 2x} \underset{x \to \pm\infty}{\sim} x - \left|x + \frac{2}{2}\right|$$

$$\Rightarrow y = x - |x+1| \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x \to +\infty} y = x - x - 1 \\ \Rightarrow y = -1 : \text{مجانب افقی} \\ \xrightarrow{x \to -\infty} y = x + x + 1 \\ \Rightarrow y = 2x + 1 : \text{مجانب مایل} \end{cases}$$

حال نقطهٔ تلاقی دو خط را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y = -1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow -1 = 2x + 1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow \text{نقطهٔ تلاقی}: (-1,-1)$$

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \xrightarrow{\text{در تابع}} f(1) = -1 \\ x = 2 \xrightarrow{\text{در تابع}} f(2) = -3 \\ x = 3 \xrightarrow{\text{در تابع}} f(3) = 1 \leftarrow \text{ماکزیمم مطلق} \end{cases}$$

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۵ و ۸۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

ریاضي ، ریاضي عمومي ، مقاطع مخروطي ، هندسه مختصاتي و منحني‌هاي درجه‌ي دوم - 13970228

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

-۳۲ *(سراسری تجربی – ۹۶)*

طول وتر کانونی، مد نظر سؤال است که از رابطهٔ $MN = \frac{۲b^۲}{a}$ به‌دست می‌آید.

$$۱۶y^۲ + ۵x^۲ - ۱۰x = ۷۵ \Rightarrow ۱۶y^۲ + ۵(x^۲ - ۲x + ۱) - ۵ = ۷۵$$

$$\Rightarrow ۱۶y^۲ + ۵(x-۱)^۲ = ۸۰ \Rightarrow \frac{y^۲}{۵} + \frac{(x-۱)^۲}{۱۶} = ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^۲ = ۱۶ \Rightarrow a = ۴ \\ b^۲ = ۵ \end{cases} \Rightarrow \frac{۲b^۲}{a} = \frac{۲ \times ۵}{۴} = ۲/۵$$

(هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۳۹)

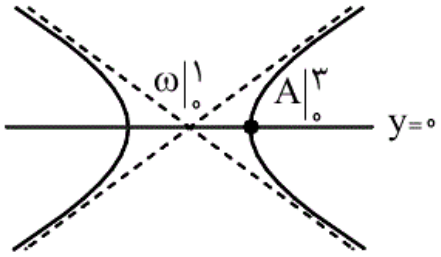
۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نقطهٔ تلاقی مجانب‌ها، مرکز تقارن هذلولی است، پس:

$$\begin{cases} ۲y - x + ۱ = ۰ \\ ۲y + x - ۱ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴y = ۰ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow \omega(۱ , ۰) \text{ : مرکز تقارن هذلولی}$$



طبق فرض، این هذلولی از نقطه‌ی $A(۳ , ۰)$ می‌گذرد، چون $y_\omega = y_A = ۰$، پس این هذلولی افقی و نقطه‌ی A یکی از رأس‌های آن است. (به شکل بالا توجه کنید.)

$$\Rightarrow a = \omega A = | x_A - x_\omega | = ۲$$

در هذلولی افقی، قدرمطلق شیب مجانب‌ها برابر است با $\frac{b}{a}$.

معادلات مجانب‌ها: $\begin{cases} ۲y - x + ۱ = ۰ \\ ۲y + x - ۱ = ۰ \end{cases}$

$$\Rightarrow \text{قدرمطلق شیب مجانب‌ها} = \frac{۱}{۲}$$

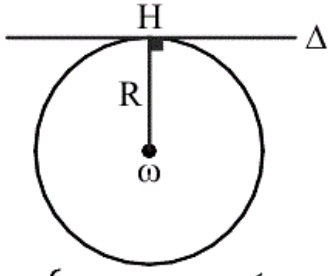
$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{a=۲} \frac{b}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = ۱$$

$$\Rightarrow \text{معادله‌ی استاندارد هذلولی افقی} \Rightarrow \frac{(x - x_\omega)^۲}{a^۲} - \frac{(y - y_\omega)^۲}{b^۲} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{۴} - \frac{y^۲}{۱} = ۱$$

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۳۴ *(سراسری تجربی – ۸۵)*



راه حل اول:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y+a=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز دایره: } \omega\left(-\frac{-۲}{۲},-\frac{۴}{۲}\right)=(۱,-۲) \\ \text{شعاع دایره: } R=\sqrt{(۱)^۲+(-۲)^۲-a}=\sqrt{۵-a} \end{cases}$$

فاصله‌ی نقطه‌ی $\omega(۱,-۲)$ از خط $\Delta: x+۳y=۰$، برابر است با:

$$\omega H=\frac{|۱+۳(-۲)|}{\sqrt{۱^۲+۳^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۱۰}}$$

اگر خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصله‌ی مرکز دایره از آن خط، برابر با شعاع دایره است، پس باید:

$$\omega H=R \Rightarrow \sqrt{۵-a}=\frac{۵}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow (\sqrt{۵-a})^۲=\left(\frac{۵}{\sqrt{۱۰}}\right)^۲$$

$$\Rightarrow ۵-a=\frac{۲۵}{۱۰} \Rightarrow ۵-a=\frac{۵}{۲} \Rightarrow a=\frac{۵}{۲}$$

راه حل دوم:

$$\begin{cases} x+۳y=۰ \Rightarrow x=-۳y \quad (*) \\ x^۲+y^۲-۲x+۴y+a=۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} (-۳y)^۲+y^۲-۲(-۳y)+۴y+a=۰$$

$$\Rightarrow ۱۰y^۲+۱۰y+a=۰ \quad \text{(معادله‌ی تقاطع)}$$

معادله‌ی تقاطع، یک معادله‌ی درجه دوم است، پس برای آن‌که دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، باید:

$$\Delta=۰ \Rightarrow ۱۰^۲-۴(۱۰)(a)=۰ \Rightarrow ۱۰۰-۴۰a=۰ \Rightarrow a=\frac{۱۰۰}{۴۰}=\frac{۵}{۲}$$

(هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

در هر سهمی فاصله‌ی رأس تا کانون برابر p است، پس مطابق شکل:

$$p = FS = ۷۲ \Rightarrow \text{معادله‌ی سهمی} : ۴\times ۷۲y = x^۲$$

این سهمی از نقطه‌ی $A(۸۴ , Y_۰)$ می‌گذرد، پس:

$$۴\times ۷۲Y_۰ = ۸۴^۲ \Rightarrow Y_۰ = \frac{۸۴\times ۸۴}{۴\times ۷۲} = ۲۴/۵$$

که $Y_۰$ همان عمق آینه، در مرکز آن است.

(هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۳۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۳۶ *(حسین حاجیلو)*

$$\begin{cases} x = e^t - e^{-t} \Rightarrow x^۲ = e^{۲t} + e^{-۲t} - ۲ \\ y = e^t + e^{-t} \Rightarrow y^۲ = e^{۲t} + e^{-۲t} + ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^۲ - x^۲ = ۴ \rightarrow \frac{y^۲}{۴} - \frac{x^۲}{۴} = ۱$$

پس با تغییر پارامتر t، نقطهٔ A روی یک هذلولی قرار می‌گیرد که در آن:

$$a^۲ = b^۲ = ۴ \Rightarrow c = \sqrt{a^۲ + b^۲} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\text{فاصلهٔ بین کانون‌ها} = ۲c = ۴\sqrt{۲}$$

(هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

ریاضي ، ریاضي عمومي ، خط و نقطه ، هندسه مختصاتي و منحني‌هاي درجه‌ي دوم - 13970228

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۳۷ *(حسین اسفینی)*

چون دو خط هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند، پس موازی و غیرمنطبق‌اند و باید داشته باشیم:

$$\underbrace{\frac{۲a+۱}{۳}=\frac{۲}{۲a+۶}}_{(۲a+۱)(۲a+۶)=۶}\neq\frac{۲a+۳}{۲}\quad (*)$$

$$\Rightarrow ۴a^{۲}+۱۴a+۶=۶\Rightarrow ۲a(۲a+۷)=۰\Rightarrow a=۰,-\frac{۷}{۲}$$

بررسی کنیم که به‌ازای کدام a شرط $(*)$ برقرار است:

$a=۰\xrightarrow{(*)}\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}\neq\frac{۳}{۲}\Rightarrow$ برقرار است.

$$a=-\frac{۷}{۲}\xrightarrow{(*)}\frac{۲(-\frac{۷}{۲})+۱}{۳}=\frac{۲}{۲(-\frac{۷}{۲})+۶}=\frac{۲(-\frac{۷}{۲})+۳}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{-۶}{۳}=\frac{۲}{-۱}=\frac{-۴}{۲}\Rightarrow -۲=-۲=-۲$$

به‌ازای $a=-\frac{۷}{۲}$ دو خط برهم منطبق‌اند و بی‌شمار نقطهٔ مشترک دارند.

پس $a=۰$ درست است و با جایگذاری آن در معادلات خواهیم داشت:

$$۳\times\begin{cases}۳x+۶y=۲\\ x+۲y=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳x+۶y\Rightarrow c=۲\\ ۳x+۶y\Rightarrow c'=۹\end{cases}$$

۴ ۳✓ ۲ ۱

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۳۸ *(بهرام طالبی)*

معادله را استاندارد می‌کنیم:

$$x^۲ + ۲ax + y + b = ۰ \Rightarrow (x+a)^۲ - a^۲ + y + b = ۰$$

$$(x+a)^۲ = -y - b + a^۲ \Rightarrow (x+a)^۲ = -(y + b - a^۲)$$

$$\Rightarrow \text{رأس} : S(-a, a^۲ - b)$$

از آن‌جا که $S(۱,-۲)$ است، پس:

$$\begin{cases} -a = ۱ \Rightarrow a = -۱ \\ a^۲ - b = -۲ \xrightarrow{a=-۱} ۱ - b = -۲ \Rightarrow b = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = ۲$$

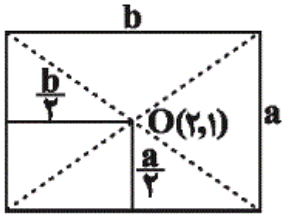
(هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۳۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۹- *(بابک سادات)*

با توجه به شکل فرضی زیر، فاصلهٔ نقطهٔ O از دو ضلع برابر نصف طول اضلاع مستطیل است. پس داریم:



فاصلهٔ نقطهٔ $O(۲,۱)$ از ضلع $۳x+۴y=۱$:

$$\begin{cases} O(۲,۱) \\ ۳x+۴y-۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{۲}=\frac{|۳(۲)+۴(۱)-۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۹}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{۲}=\frac{۹}{۵} \Rightarrow b=\frac{۱۸}{۵}$$

فاصلهٔ نقطهٔ $O(۲,۱)$ از ضلع $۴x-۳y=۴$:

$$\begin{cases} O(۲,۱) \\ ۴x-۳y-۴=۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{۲}=\frac{|۴(۲)-۳(۱)-۴|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۲}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow a=\frac{۲}{۵}$$

پس محیط مستطیل برابر است با:

$$P=۲(a+b)=۲(\frac{۱۸}{۵}+\frac{۲}{۵})=۲(\frac{۲۰}{۵})=\frac{۴۰}{۵}=۸$$

(هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

ریاضي ، رياضي عمومي ، مقاطع مخروطي ، هندسه مختصاتي و منحني‌هاي درجه‌ي دوم - 13970228

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

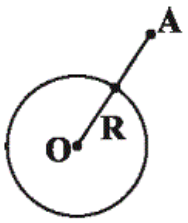
-۴۰ *(سروش موئینی)*

معادلهٔ دایره را استاندارد می‌کنیم:

$$x^۲ + y^۲ + ۲x - ۲y + ۱ = ۰ \Rightarrow (x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} O(-۱,۱) \\ R = ۱ \end{cases}$$

برای محاسبهٔ کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳,۴)$ از دایره مطابق شکل زیر باید $OA - R$ را محاسبه کنیم:



$$OA - R = \sqrt{(۳-(-۱))^۲ + (۴-۱)^۲} - ۱ = ۵ - ۱ = ۴$$

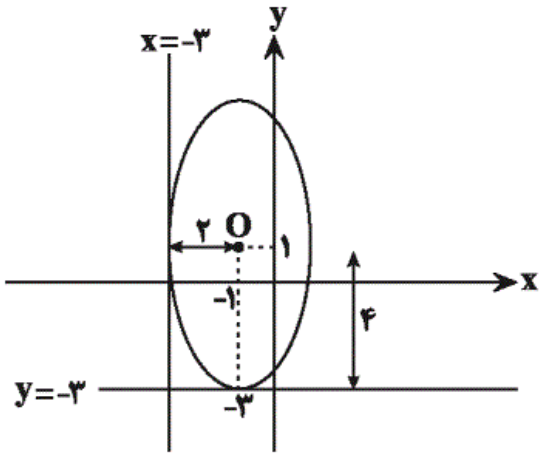
(هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۴۱ (محمدرضا میرجلیلی)

مطابق شکل زیر، داریم:



$$\begin{cases} a = ۴ \\ b = ۲ \end{cases}$$

از آن‌جا که بیضی قائم است و مرکز آن $O(-۱,۱)$ است. معادلهٔ بیضی برابر است با:

$$\frac{(x+۱)^۲}{۴} + \frac{(y-۱)^۲}{۱۶} = ۱$$

برای یافتن نقطهٔ تلاقی بیضی با محور yها، $x = ۰$ را قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱}{۴} + \frac{(y-۱)^۲}{۱۶} = ۱ \Rightarrow \frac{(y-۱)^۲}{۱۶} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow (y-۱)^۲ = ۱۲$$

$$\Rightarrow y - ۱ = \pm ۲\sqrt{۳} \Rightarrow y = ۱ \pm ۲\sqrt{۳}$$

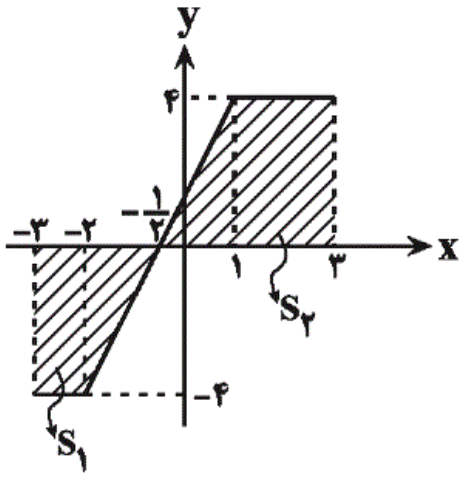
$$\Rightarrow \text{عرض مثبت} = ۱ + ۲\sqrt{۳}$$

(هندسه مقطعاتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۳۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

ریاضي ، ریاضي عمومي ، انتگرال - 13970228

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



$$\int_{-۳}^{۳} f(x)dx = \int_{-۳}^{-\frac{۱}{۲}} f(x)dx + \int_{-\frac{۱}{۲}}^{۳} f(x)dx$$

$$= -S_۱ + S_۲ = -\frac{(۱+\frac{۵}{۲})(۴)}{۲} + \frac{(\frac{۷}{۲}+۲)(۴)}{۲} = -۷ + ۱۱ = ۴$$

(انتگرال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۴۳ (حسین هاجیلو)

$$A = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{۱}{\cos^۲ x}dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} (۱+\tan^۲ x)dx = \tan x\Big]_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} = ۱ - ۰ = ۱$$

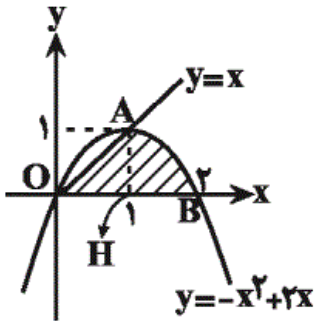
$$B = \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{\sin^۲ x}dx = \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} (۱+\cot^۲ x)dx = -\cot x\Big]_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$= -(۰-۱) = ۱ \quad \Rightarrow A + B = ۲$$

(انتگرال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۷۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



$$\begin{cases} S(\overset{\Delta}{OAH}) = \frac{۱}{۲}AH \times OH = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱ = \frac{۱}{۲} \\ \Rightarrow \int_{۱}^{۲} (-x^{۲} + ۲x)dx = -\frac{x^{۳}}{۳} + x^{۲} \Big]_{۱}^{۲} \\ = (-\frac{۸}{۳} + ۴) - (-\frac{۱}{۳} + ۱) = \frac{-۷}{۳} + ۳ = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳} = \frac{۳+۴}{۶} = \frac{۷}{۶}$ مساحت قسمت هاشورخورده

(انتگرال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۷۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۴۵- *(عباس امیدوار)*

$$\int_{۱}^{۲} \frac{x+۲}{x^{۲}}dx = \int_{۱}^{۲} (\frac{۱}{x} + \frac{۲}{x^{۲}})dx$$

$$= Lnx - \frac{۲}{x} \Big]_{۱}^{۲} = (Ln۲ - (۱)) - (\cancel{Ln۱}^{۰} - ۲)$$

$$= Ln۲ - ۱ + ۲ = ۱ + Ln۲$$

(انتگرال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۷۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴۶- (میثم حمزه‌لویی)

$$\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} (1-|\cos x|)dx = \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} (1)dx - \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} 1dx - (\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x)dx)$$

$$= x\Big]_{0}^{\frac{3\pi}{2}} - (\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}})$$

$$= (\frac{3\pi}{2} - 0) - ((1-0) - (-1-1)) = \frac{3\pi}{2} - 3$$

(انتگرال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۷۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۴۷- (مهدی ملارمضانی)

$$\int_{0}^{3} f(x)dx = \int_{0}^{3} \left|[\sqrt{x}] - x\right|dx = \int_{0}^{1} |-x|dx + \int_{1}^{3} |1-x|dx$$

$$= \int_{0}^{1} xdx + \int_{1}^{3} (x-1)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} + (\frac{x^2}{2} - x)\Big|_{1}^{3}$$

$$= \frac{1}{2} + ((\frac{9}{2} - 3) - (\frac{1}{2} - 1)) = \frac{5}{2}$$

(انتگرال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۷۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴۸- (میثم حمزه‌لویی)

$$\int \frac{۱}{\sqrt{x}}(\frac{\sqrt{x}-۱}{x})^۲ dx = \int \frac{۱}{\sqrt{x}}(\frac{x-۲\sqrt{x}+۱}{x^۲})dx = \int \frac{x-۲\sqrt{x}+۱}{x^{\frac{۱}{۲}} x^۲} dx$$

$$= \int \frac{x-۲\sqrt{x}+۱}{x^{\frac{۵}{۲}}} dx = \int (x^{-\frac{۳}{۲}} - ۲x^{-۲} + x^{-\frac{۵}{۲}})dx$$

$$= \frac{x^{-\frac{۱}{۲}}}{-\frac{۱}{۲}} - ۲\frac{x^{-۱}}{-۱} + \frac{x^{-\frac{۳}{۲}}}{-\frac{۳}{۲}} + C = -\frac{۲}{\sqrt{x}} + \frac{۲}{x} - \frac{۲}{۳x\sqrt{x}} + C$$

$$= \frac{-۶x+۶\sqrt{x}-۲}{۳x\sqrt{x}} + C = \frac{۲}{۳x\sqrt{x}} \underbrace{(-۳x+۳\sqrt{x}-۱)}_{f(x)} + C$$

(انتگرال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۷ تا ۱۷۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۴۹- (بهرام طالبی)

$$\int (۳x^۲ + ۲x)dx = ۳\int x^۲ dx + ۲\int x dx$$

$$= ۳(\frac{x^۳}{۳}) + ۲(\frac{x^۲}{۲}) + C = x^۳ + x^۲ + C$$

(انتگرال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۷ تا ۱۷۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۵۰- (فائزه رضایی‌بقاء)

$$f'(x) = (۱)(\frac{x}{x^۲+۱}) \Rightarrow f'(۱) = \frac{۱}{۲}$$

(انتگرال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۳ و ۱۶۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا