



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی**

**سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور**

**نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نرم افزارهای ریاضیات**

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

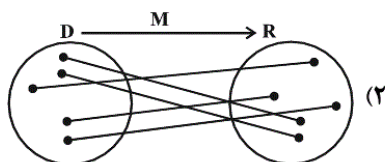
<https://t.me/riazisara>



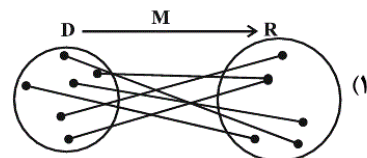
(@riazisara)

ریاضی ، هندسه ۲ ، تبدیل ها - ۱۳۹۶۱۲۱۸

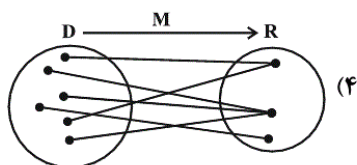
۱۴۱- در صفحه، کدام تناظر از D به R تبدیل است؟



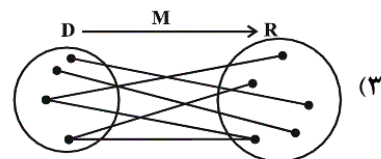
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- اگر  $A(۴, -۳)$  و  $B(۶, ۵)$  دو رأس مقابل یک متوازی الاضلاع باشند، آنگاه تصویر مرکز این متوازی الاضلاع تحت تبدیل

$T(x, y) = (۲x - ۴, ۳y + ۱)$  کدام است؟

(۲)  $(۶, ۴)$

(۱)  $(۵, ۱)$

(۴)  $(۴, ۳)$

(۳)  $(۳, -۲)$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۳- ترکیبی از کدام دو تبدیل زیر، لزوماً ایزومتري نیست ولی شیب خطها را حفظ می کند؟

(۲) بازتاب نسبت به نقطه و دوران

(۱) انتقال و بازتاب نسبت به خط

(۴) بازتاب نسبت به نقطه و تجانس

(۳) تجانس و بازتاب نسبت به خط

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴- معادله بازتاب خط  $y + ۲x = ۵$  نسبت به نقطه  $(۱, ۵)$  کدام است؟

(۲)  $y + ۲x = ۷$

(۱)  $y + ۲x = ۶$

(۴)  $y + ۲x = ۹$

(۳)  $y + ۲x = ۸$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵- معادله دوران یافته خط  $y = ۳x$  به مرکز مبدأ مختصات و زاویه  $۹۰^\circ$  کدام است؟

(۲)  $۳x + y = ۰$

(۱)  $x + ۳y = ۰$

(۴)  $x = -y$

(۳)  $x = ۳y$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۶- کدام بردار انتقال، محور  $y$  ها را به خط  $x=1$  تصویر می‌کند؟ ( $a \neq 1$ )

(۱)  $(a, 1)$  (۲)  $(1, a)$

(۳)  $(a, a)$  (۴)  $(a, 0)$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- اگر بازتاب نقطه  $A(3, 1)$  نسبت به نقطه  $O$  را  $A'$  و بازتاب  $A'$  نسبت به نقطه  $O'$  را  $A''$  بنامیم و  $\vec{OO'} = (-1, -2)$ ، آنگاه

مختصات  $A''$  کدام است؟

(۱)  $(1, 3)$  (۲)  $(-1, 3)$

(۳)  $(1, -3)$  (۴)  $(-3, 1)$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- کدام خط می‌تواند تصویر خط  $2x + 3y = 6$  تحت یک تبدیل تجانس باشد؟

(۱)  $3x + 2y = 6$  (۲)  $4x - 6y = 11$

(۳)  $6y = -4x + 5$  (۴)  $y = \frac{3}{2}x + 4$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹- دو خط  $\Delta: y = 3x$  و  $\Delta': x = -3y + 10$  مفروضند. بازتاب نقطه  $A(1, 2)$  نسبت به  $\Delta$  را  $B$  و بازتاب  $B$  نسبت به  $\Delta'$  را  $C$

می‌نامیم. مختصات نقطه  $C$  کدام است؟

(۱)  $(1, 4)$  (۲)  $(4, 1)$

(۳)  $(2, 3)$  (۴)  $(3, 2)$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- بازتاب خط  $x - 2y = 1$  نسبت به یک خط گذرنده از مبدأ مختصات، خودش می‌شود. معادله محور بازتاب کدام است؟

(۱)  $x - 2y = 0$  (۲)  $x + 2y = 0$

(۳)  $2x - y = 0$  (۴)  $2x + y = 0$

شما پاسخ نداده اید

۸۱- خط  $5y + x = 32$  قائم بر منحنی در نقطه‌ای به طول  $x = 2$  روی منحنی تابع مشتق‌پذیر  $f$  می‌باشد. حاصل

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f(x) - 30}{5x - 10} \text{ کدام است؟}$$

(۱) ۱۱ (۲) -۱۱

(۳)  $\frac{11}{25}$  (۴)  $-\frac{11}{25}$

شما پاسخ نداده اید

۸۲- اگر  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 2$  باشد، حاصل مشتق تابع  $y = f(\sin \frac{\pi}{x} - 1)$  در  $x = 1$  کدام است؟

(۱)  $-2\pi$  (۲)  $4\pi$

(۳)  $2\pi$  (۴)  $-4\pi$

شما پاسخ نداده اید

۹۱- در رابطه  $x^3 + y^2 - y = 1$ ، مشتق دوم  $y$  نسبت به  $x$  در نقطه‌ای به طول  $x = -1$  و عرض منفی روی منحنی کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱

(۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $-\frac{4}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۹۲- خط  $y - 4x + 5 = 0$  در نقطه‌ای به طول ۲ بر منحنی  $f(x)$  مماس است. اگر  $g(x) = (x^2 - 1)f^{-1}(2x - 1)$  باشد، مقدار  $g'(2)$

کدام است؟

(۱)  $8/75$  (۲) ۹

(۳)  $9/25$  (۴)  $9/5$

شما پاسخ نداده اید

۹۳- اگر  $f'(x) = 2f(x) + \sqrt{4f^2(x) + 1}$  باشد،  $(f^{-1})'(x)$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt{4x^2 + 1} + 2x$  (۲)  $\sqrt{4x^2 + 1} - 2x$

(۳)  $\frac{1}{2f(x) + \sqrt{4f^2(x) + 1}}$  (۴)  $\frac{1}{\sqrt{4f^2(x) + 1} - 2x}$

شما پاسخ نداده اید

۹۴- اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 + (2c+1)x - d & ; x \geq -1 \\ e^{2x+2} + cx + 2d & ; x < -1 \end{cases}$  و  $f$  در  $\mathbb{R}$  مشتق پذیر باشد،  $c-d$  کدام است؟

(۱) -۲ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۹۵- مشتق تابع  $f(x) = e^{2\ln x} \ln \frac{x}{x+1}$  به ازای  $x=1$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2} - 2\ln 2$  (۲)  $\ln 2 + 3$

(۳)  $3 - \ln 2$  (۴)  $\frac{1}{4} - 2\ln 2$

شما پاسخ نداده اید

۹۶- با فرض  $f(x) = x^{\sin x}$ ، مقدار  $f'(\frac{\pi}{2})$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\pi}{2}$  (۲)  $\frac{2}{\pi}$

(۳) ۱ (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۹۷- به ازای چند مقدار صحیح  $a$ ، تابع  $y = x + \sin ax$  صعودی است؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۸۴- مقدار مشتق تابع  $f(x) = \frac{1+x+\dots+x^7}{1+x^2}$  در نقطه  $x=-1$  کدام است؟

(۱) ۳ (۲) -۳

(۳) ۲ (۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

۸۵- اگر  $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ ،  $g(x) = \sqrt{x-2}$  و  $(f \circ g)'(a) = \frac{1}{4}$ ، مقدار  $a$  چقدر است؟

(۱) ۳ (۲) ۲

(۳) ۴ (۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۸۶- اگر در تابع  $f(x) = \begin{cases} \sin ax + bx^n & ; x \geq 0 \\ 3x^2 + \tan x & ; x < 0 \end{cases}$  مقدار  $f''(0)$  موجود باشد،  $b$  کدام است؟ ( $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$ )

(۱) ۲ (۲) ۳

(۳) صفر (۴) هر مقدار می تواند باشد.

شما پاسخ نداده اید

۸۷- اگر  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  و  $f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = \frac{k}{x^n}$  باشد، حاصل  $k+n$  کدام است؟ ( $k, n \in \mathbb{Z}$ )

(۱) ۴ (۲) ۲

(۳) ۱ (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۸۸- اگر  $y = ax^2 + bx + c$  در رابطه  $y + y' + y'' = x^2 + x + 1$  صدق کند، مقدار  $a+b+c$  چقدر است؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) -۱ (۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۸۹- مشتق مرتبه پنجم تابع  $y = \frac{1}{x+1}$  به ازای  $x=1$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{15}{8}$  (۲)  $-\frac{15}{4}$

(۳)  $\frac{15}{4}$  (۴)  $\frac{15}{8}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، کاربرد مشتق ، مشتق - ۱۳۹۶۱۲۱۸

۹۰- خط مماس بر نمودار منحنی  $x^3 + y^3 = 6xy$  در نقطه  $(3,3)$  روی آن، محورهای مختصات را در نقاط  $A$  و  $B$  قطع می کند. مساحت

مثلث  $AOB$  کدام است؟ ( $O$  مبدأ مختصات است.)

(۱) ۲۷ (۲) ۱۸

(۳) ۳۶ (۴) ۱۵

شما پاسخ نداده اید

۹۸- مجموعه طول نقاط بحرانی تابع  $f(x) = \frac{1}{4}x(2[x] + x - 1)$  کدام است؟ ( [ ] ، نماد جز صحیح است.)

(۱)  $Z$  (۲)  $Z - \{0\}$

(۳)  $Z \cup \{\frac{1}{4}\}$  (۴)  $Z \cup \{\frac{3}{4}\}$

شما پاسخ نداده اید

۹۹- بیشترین مقدار تابع  $y = \sqrt{x - \sqrt{2 - x}}$  کدام است؟

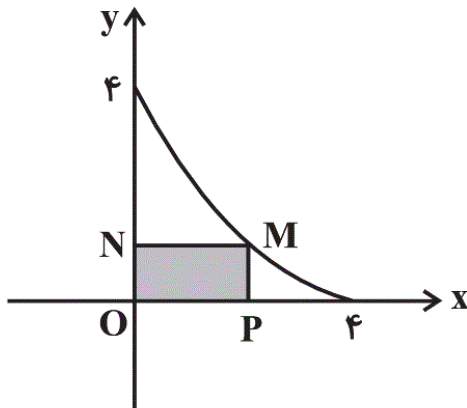
(۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{2}$

(۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- شکل زیر مربوط به تابع  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$  است، اگر نقطه  $M$  همواره روی این تابع قرار داشته باشد، طول نقطه  $P$  چقدر باشد تا

مساحت مستطیل  $ONMP$  ماکزیمم شود؟



(۱) ۱

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{1}{4}$

(۴)  $\frac{3}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۸۳- آهنگ تغییر مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول وتر  $a$  و زاویه متغیر حاده  $\alpha$  در لحظه‌ای که  $\alpha = 22^\circ / 5^\circ$  باشد، کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$  (۲)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$

(۳)  $\frac{\sqrt{2}}{4}a^2$  (۴)  $-\frac{\sqrt{2}}{4}a^2$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی ، مقاطع مخروطی - ۱۳۹۶۱۲۱۸

۱۱۱- اگر دو خط  $2y = x + 2$  و  $y = kx - 3$  مجانب‌های یک هذلولی و  $A = (5, -1)$  یک رأس آن باشد، طول رأس دیگر هذلولی کدام است؟

(۱) -۱۳ (۲) -۱۲

(۳) -۱۴ (۴) -۱۱

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- اگر محورهای مختصات را به اندازه  $\frac{\pi}{6}$  حول مبدأ مختصات و در جهت مثلثاتی دوران دهیم، معادله منحنی  $x^2 + 4y^2 = 1$ ، در دستگاه

جدید کدام است؟

$$7x'^2 + 6\sqrt{3}x'y' + 13y'^2 = 1 \quad (1)$$

$$13x'^2 + 6\sqrt{3}x'y' + 7y'^2 = 1 \quad (2)$$

$$7x'^2 + 6\sqrt{3}x'y' + 13y'^2 = 4 \quad (3)$$

$$13x'^2 - 6\sqrt{3}x'y' + 7y'^2 = 4 \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، ماتریس و دترمینان، ماتریس، دترمینان و دستگاه - ۱۳۹۶۱۲۱۸

۱۱۳- اگر ماتریس 
$$\begin{bmatrix} m^2 - 4 & m - 3 & -5 \\ 2m - 3 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$
 پادمتقارن باشد،  $m$  کدام است؟

(۱) فقط -۲

(۲) فقط ۲

(۳) فقط  $\frac{3}{2}$

(۴)  $\frac{3}{2}, 2$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- حاصل  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 1 \end{bmatrix}$  کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- نقطه  $A(-\sqrt{3}, 2)$  را ابتدا نسبت به محور  $y$  ها قرینه می‌کنیم، سپس مجانس نقطه حاصل را با نسبت ۲ و مرکز مبدأ مختصات به دست

آورده و در نهایت آن را با زاویه  $30^\circ$  حول مبدأ دوران می‌دهیم. مختصات نقطه  $A$  به چه مختصاتی تبدیل می‌شود؟

$$(1, \sqrt{3}) \quad (1)$$

$$(1, 2\sqrt{3}) \quad (2)$$

$$(1, 3\sqrt{3}) \quad (3)$$

$$(1, 4\sqrt{3}) \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه ماتریس  $A^5$  کدام است؟

$$\begin{bmatrix} -1024 & -1024\sqrt{3} \\ 1024\sqrt{3} & -1024 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} -512 & 512\sqrt{3} \\ -512\sqrt{3} & -512 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 512 & 512\sqrt{3} \\ -512\sqrt{3} & 512 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} -1024 & -1024\sqrt{3} \\ -1024\sqrt{3} & -1024 \end{bmatrix} \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- اگر  $A^t$  ترانهادۀ  $A$  و  $AA^t = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ x & y & 1 \end{bmatrix}$  باشد،  $|A|$  کدام است؟ ( $|A| > 0$ )

- (۱)  $xy$  (۲)  $x + y$  (۳) ۳ (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- اگر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$  به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و پادمتقارن نوشته شود، آن گاه به ازای چند مقدار  $a$ ، دترمینان

ماتریس متقارن برابر  $\frac{1}{16}$  می شود؟

- (۱) بی شمار (۲) هیچ (۳) دو (۴) یک

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- اگر دو دترمینان  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ k & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$  و  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ k & 1+a & -2+b \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$  هر دو برابر صفر باشند، کدام رابطه همواره صحیح است؟

(۱)  $a - b = 0$  (۲)  $a + b = 1$

(۳)  $a + b = 0$  (۴)  $a - b = 1$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- اگر  $\begin{vmatrix} x & y & 3z \\ x+y & 2 & -1 \\ 4y & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$  باشد و به درایۀ سطر اول و ستون اول ۱ واحد اضافه کنیم، حاصل دترمینان ماتریس جدید کدام خواهد بود؟

(۱) ۵ (۲) -۵

(۳) ۱۲ (۴) -۱۲

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، همنهشتی ، نظریه ی اعداد - ۱۳۹۶۱۲۱۸

۱۳۱- مجموع ارقام کوچکترین عدد طبیعی  $a$  که باقی مانده اش بر ۱۸، ۲۴ و ۲۸ به ترتیب ۷، ۱۳ و ۱۷ باشد، کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

شما پاسخ نداده اید

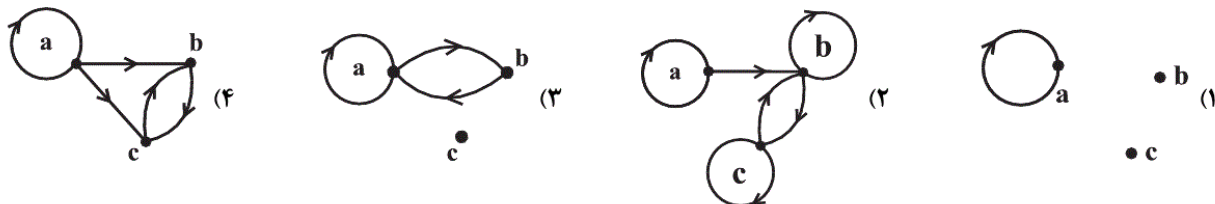
۱۳۲- به ازای کدام مقدار  $a$ ، عدد چهار رقمی  $\overline{583a}$  به کلاس هم ارزی  $q[6]$  تعلق دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، ترکیبیات - ۱۳۹۶۱۲۱۸

۱۳۵- رابطه متناظر با کدام گراف هیچ یک از خواص بازتابی، تقارنی و پادتقارنی را ندارد؟



شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- ماتریس متناظر با رابطه  $R$  برابر  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  است. ماتریس متناظر با رابطه  $RoR$  کدام است؟

(۱)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- چند عضو از اعضای مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 96\}$  فقط بر دو عدد از بین اعداد ۲، ۳ و ۵ بخش پذیرند؟

(۱) ۱۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۲۲

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- دستگاه معادلات مقابل، چند جواب طبیعی دارد؟  

$$\begin{cases} x + y + z + u + v = 15 \\ x + z + v = 10 \end{cases}$$

(۱) ۴۰ (۲) ۱۴۴ (۳) ۲۱۶ (۴) ۳۹۶

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- چند عدد طبیعی  $a$  می توان یافت، به طوری که  $a < 120$  و  $(a, 30) = 1$  باشد؟

(۱) ۳۲ (۲) ۲۴ (۳) ۱۶ (۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- چند عدد چهار رقمی وجود دارد که نه رقم یکان آن ۱ باشد و نه رقم دهگان آن ۲؟

(۱) ۱۷۱۰ (۲) ۷۲۰۰ (۳) ۷۲۹۰ (۴) ۸۹۱۰

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، مجموعه ، ضرب دکارتی و رابطه - ۱۳۹۶۱۲۱۸

۱۳۳- اگر  $A = \{-1, 2, 3, 5\}$  و  $B = \{-2, -1, 1, 2, 4, 6\}$  باشد، آنگاه  $A^2 \cup B^2$  چند عضو دارد؟

(۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۵۴ (۴) ۶۰

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- رابطه ای هم ارزی روی یک مجموعه ۱۸ عضوی است. تعداد اعضای  $R$  کدام می تواند باشد؟

(۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۲۱ (۴) ۲۴

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، الگو و دنباله - ۱۳۹۶۱۲۱۸

۱۰۱- حاصل ضرب مقادیر مثبت  $x$  از دو معادله  $x^{\sqrt{2}} = 2$  و  $x^{\sqrt{2}} = 3$  کدام است؟

(۴)  $\sqrt[2]{\frac{\sqrt{3}}{6}}$

(۳)  $\sqrt[2]{\frac{\sqrt{2}}{6}}$

(۲)  $\sqrt[2]{6\sqrt{3}}$

(۱)  $\sqrt[2]{6\sqrt{2}}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- اگر  $a, x, b$  یک دنباله حسابی و  $a, y, z, b$  یک دنباله هندسی باشد، در این صورت حاصل  $\frac{y^3 + z^3}{xyz}$  کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{3}$

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۲) ۲

(۱) ۱

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، توابع نمایی و لگاریتم - ۱۳۹۶۱۲۱۸

۱۰۴- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $9^x - 15(3^{x-1}) + 6 = 0$  باشند،  $\frac{x_1}{x_2}$  کدام است؟ ( $x_1 > x_2$ )

(۴)  $\log_{\frac{1}{2}}$

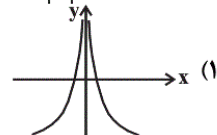
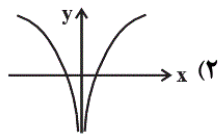
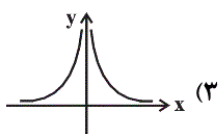
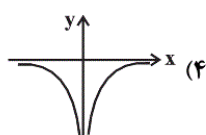
(۳)  $\log_{\frac{1}{3}}$

(۲)  $\log_{\frac{1}{2}}$

(۱)  $\log_{\frac{1}{3}}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- نمودار تابع  $y = \text{Log} \frac{1}{|x|}$  شبیه کدام گزینه است؟



شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات - ۱۳۹۶۱۲۱۸

۱۰۶- بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عبارت  $A = x^6 - 1$  و  $B = x^5 - x$  کدام است؟

(۴)  $x+1$

(۳)  $x-1$

(۲)  $x^2+1$

(۱)  $x^2-1$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- اگر چند جمله‌ای  $x^4 - 3x^3 + mx + n$  بر  $x^2 - 5x + 6$  بخش پذیر باشد،  $m+n$  کدام است؟

(۴) -۳۲

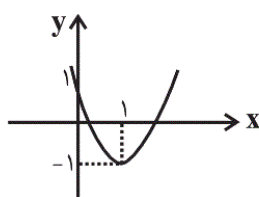
(۳) -۱۶

(۲) ۳۲

(۱) ۱۶

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- اگر سهمی مقابل نمودار تابع  $f$  باشد، معادله درجه دومی که ریشه‌های آن از ریشه‌های معادله  $f(x) = 0$ ،  $f$  واحد کمتر باشد، کدام است؟



(۲)  $2x^2 - 4x + 1 = 0$

(۴)  $2x^2 + 4x + 1 = 0$

(۱)  $x^2 + 4x + 1 = 0$

(۳)  $x^2 - 4x + 1 = 0$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- اگر  $\log a$  و  $\log b$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 - \sqrt{7}x + \sqrt{2} = 0$  باشند، آنگاه مقدار عبارت  $(\log a)^6 (\log b)^6 (\log ab)^4$  کدام است؟

(۴) ۳۹۲

(۳) ۱۹۶

(۲) ۱۴

(۱) ۹۸

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- اگر ریشه‌های معادله  $x^3 + 2x^2 - 25x + 12 = 0$ ،  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  باشند، حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $x^3 + 25x^2 + 12x - 2 = 0$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$  (۲)  $\frac{-1}{\alpha\beta\gamma}$  (۳)  $\frac{2}{\alpha\beta\gamma}$  (۴)  $-\alpha\beta\gamma$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- اگر حد مجموع جملات دنباله هندسی  $2q^3, 2q^2, 2q, 2$  برابر ۴ باشد و مجموع  $n$  جمله اول دنباله حسابی  $3, 3+q, 3+2q, \dots$  برابر با ۳۸ باشد،  $n$  کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی - گواه ، مقاطع مخروطی - ۱۳۹۶۱۲۱۸

۱۲۱- هر دو کانون هذلولی به معادله  $2y^2 - 4x + y^2 + ax^2 = 0$ ، بر روی خطی موازی محور  $x$  هاست. مجموعه مقادیر  $a$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $-8 < a < -4$  (۲)  $-4 < a < 0$   
(۳)  $-2 < a < 0$  (۴)  $0 < a < 8$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- ماتریس دوران  $A$ ، با رابطه  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ، معادله مقطع مخروطی  $12 = 2y^2 + 24xy + 5x^2$  را به صورت استاندارد برحسب  $x'$  و

$y'$  تبدیل می‌کند. تانژانت زاویه دوران کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{3}{4}$   
(۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی - گواه ، ماتریس و دترمینان ، ماتریس، دترمینان و دستگاه - ۱۳۹۶۱۲۱۸

۱۲۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$  و  $A^2 = \alpha A + \beta I$  باشد، دوتایی مرتب  $(\alpha, \beta)$  کدام است؟

- (۱)  $(2, 11)$  (۲)  $(2, 13)$   
(۳)  $(4, 11)$  (۴)  $(4, 13)$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- اگر  $A - A^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ a & b \end{bmatrix}$ ، آنگاه دوتایی  $(a, b)$  کدام است؟

- (۱)  $(0, -3)$  (۲)  $(-3, 0)$   
(۳)  $(3, 0)$  (۴)  $(0, 3)$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- اگر ماتریس  $A^2$  را که در آن  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  است، به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و پادمتقارن بنویسیم، مجموع درایه‌های

ماتریس متقارن کدام است؟

- (۱)  $\frac{19}{2}$  (۲) ۱۹  
(۳) ۳۸ (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$  مفروض است. اگر ماتریس  $A^3$  روی نقطه  $(-2, 1)$  اثر کند، مختصات نقطه حاصل کدام است؟

- (۱)  $(-16, 8)$  (۲)  $(-8, 16)$   
(۳)  $(8, -16)$  (۴)  $(16, -8)$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- اگر دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & m & -2 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$  برابر ۲۰ و همسازیه‌های  $A_{11} = 2A_{12} = -A_{13} = 10$  باشند،  $m$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳  
(۳) -۲ (۴) -۳

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- اگر  $abc \neq 0$  باشد، از معادله  $\begin{vmatrix} 1 & a+1 & b+1 \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$  کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

- (۱)  $a + b + c = 0$  (۲)  $a - b + c = 0$   
(۳)  $a + b - c = 0$  (۴)  $-a + b + c = 0$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- حاصل دترمینان  $\begin{vmatrix} 1+x & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$ ، با شرط  $y = x + z$  کدام است؟

- (۱)  $x(x+z)$  (۲)  $2x(x+z)$   
(۳)  $x^2(x+z)$  (۴)  $2x^2(x+z)$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- در ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a+x & a & a \\ b & b+x & b \\ c & c & c+x \end{bmatrix}$ ، اگر مجموع تمام درایه‌ها برابر ۶ و مقدار  $|A| = 8$  باشد،  $x$  کدام است؟

- (۱) ۰ (۲)  $\pm 1$   
(۳)  $\pm 2$  (۴)  $\pm 3$



تعریف ۱- نگاشت از  $D$  به  $R$  تناظری بین دو مجموعه  $D$  و  $R$  است که در آن

هر عضو مجموعه  $D$  با یک و تنها یک عضو از مجموعه  $R$  متناظر باشد. اما، یک عضو

مجموعه  $R$  می تواند با بیش از یک عضو مجموعه  $D$  در تناظر باشد.

تعریف ۲- تبدیل در صفحه نگاشتی یک به یک است، یعنی هر نقطه از صفحه، تصویر

فقط یک نقطه از صفحه است و هر نقطه بیشتر از یک تصویر ندارد.

گزینه (۱): نگاشت است، اما یک به یک نیست.

گزینه (۲): نگاشت یک به یک است، بنابراین تبدیل می باشد.

گزینه (۳): نگاشت نیست.

گزینه (۴): نگاشت است، ولی یک به یک نیست.

(هندسه ۲ - تبدیل های هندسی: صفحه های ۱۴ و ۱۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

می‌دانیم در هر متوازی الاضلاع قطرهای منصف یکدیگرند. بنابراین نقطه  $O$  (نقطه تقاطع

قطرهای متوازی الاضلاع)، نقطه وسط پاره خط  $AB$  است.

$$O = \frac{A+B}{2} \Rightarrow O\left(\frac{4+6}{2}, \frac{-3+5}{2}\right) = (5, 1)$$

$$\Rightarrow T(O) = O' = (2(5) - 4, 2(1) + 1) = (6, 4)$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی؛ صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۴

۳

۲✓

۱

(رضا بفشندره)

۱۴۳-

بازتاب نسبت به نقطه و تجانس هر دو شیب خط را حفظ می‌کنند، پس ترکیب آن‌ها نیز

شیب خط را حفظ می‌کند. بازتاب نسبت به نقطه ایزومتری است ولی تجانس لزوماً

ایزومتری نیست پس ترکیب آن‌ها نیز لزوماً ایزومتری نیست و مطلوب مسأله است.

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۱۱۹)

۴✓

۳

۲

۱

بازتاب یک خط نسبت به نقطه با خودش موازی است، پس شیب خط تبدیل یافته هم

(۲-) است. تبدیل یافته نقطه  $(1, 3)$  از خط را به دست می آوریم:

$$T(x, y) = (2\alpha - x, 2\beta - y) \xrightarrow{(\alpha, \beta) = (1, 5)}$$

$$T(1, 3) = (2 - 1, 10 - 3) = (1, 7)$$

پس معادله خط تبدیل یافته با شیب ۲- و شامل نقطه  $(1, 7)$ ، به صورت

$$y + 2x = 9 \text{ است.}$$

(هندسه ۲ - تبدیل های هندسی: صفحه های ۹۷ تا ۱۰۳ و ۱۱۹ تا ۱۲۲)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(مصدر صحت کار)

$$R(x, y) = (-y, x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases} \xrightarrow{y=3x} -x' = 3y'$$

$$\Rightarrow x' + 3y' = 0$$

(هندسه ۲ - تبدیل های هندسی: صفحه های ۱۰۴ تا ۱۱۱ و ۱۱۹ تا ۱۲۲)

☐ ۴

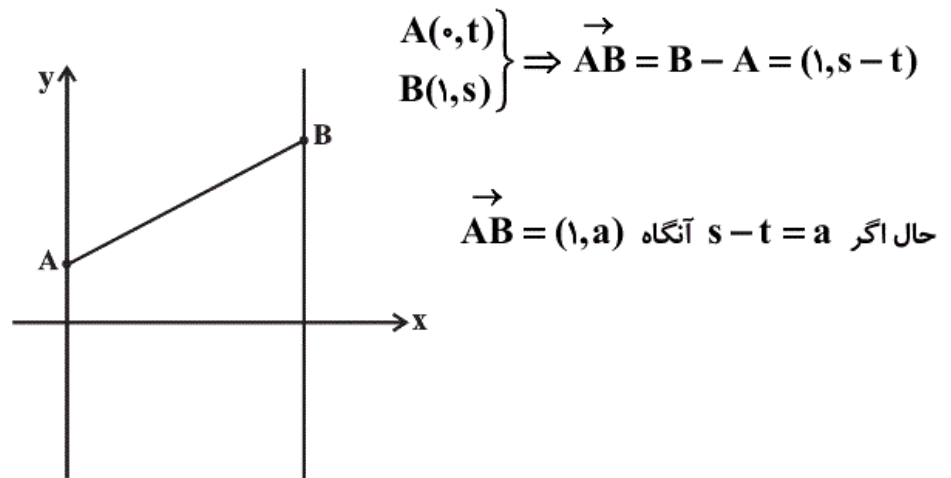
☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

کافی است برداری (پیکانی) بسازیم که ابتدای آن روی محور  $y$  ها و انتهای آن روی

خط  $x = 1$  باشد. از نقاط پارامتری استفاده می‌کنیم.



(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۹۱ تا ۹۶)

۴

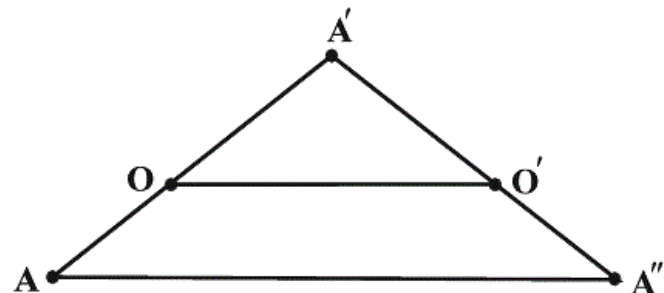
۳

۲✓

۱

(کیوان دارایی)

-۱۴۷



$$\frac{A'O}{OA} = \frac{A'O'}{O'A''} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} OO' \parallel AA''$$

$$OO' = \frac{1}{2} AA'' \Rightarrow \vec{AA''} = 2\vec{OO'}$$

پس  $A''$  انتقال یافته  $A$  تحت بردار  $2\vec{OO'}$  است.

$$T(A) = A + 2\vec{OO'} = (3, 1) + (-2, -4) \Rightarrow A'' = (1, -3)$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۹۱ تا ۱۰۳)

۴

۳✓

۲

۱

می‌دانیم تجانس تبدیلی است که شیب خط را حفظ می‌کند، بنابراین مجانس خط

$$2x + 3y = 6 \text{ باید با آن موازی باشد و تنها گزینه (۳) چنین خاصیتی دارد.}$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۲۲)

۴

۳✓

۲

۱

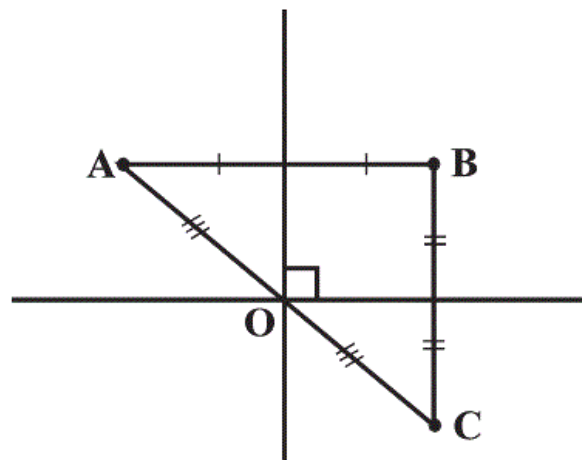
(کیوان دارابی)

-۱۴۹

$$\text{دو خط } \Delta \text{ و } \Delta' \text{ متعامد هستند. زیرا: } m = 3, m' = -\frac{1}{3} \Rightarrow mm' = -1$$

حاصل دو بازتاب متوالی نسبت به دو خط متعامد معادل است با یک تبدیل بازتاب

نسبت به محل تلاقی دو خط.



$$\text{تلاقی دو خط} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ x = -3y + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow O = (1, 3)$$

$$O \text{ نسبت به } A \text{ قرینه} = 2O - A = (2, 6) - (1, 2) = (1, 4)$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی؛ صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴

۳

۲

۱✓

بازتاب یک خط، نسبت به خودش و هر خط عمود بر آن، روی خودش می‌افتد.

در اینجا شیب  $1 - 2y = x$ ، برابر  $\frac{1}{2}$  است. پس شیب محور باید  $-2$  باشد و

معادله آن  $y + 2x = 0$  خواهد بود.

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی؛ صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

☐ ۴ ✓

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال، مشتق تابع، مشتق - ۱۳۹۶۱۲۱۸

-۸۱

(جهانبش نیکنام)

$$\Delta y + x = 32 \xrightarrow{x=2} y = 6 \Rightarrow f(2) = 6, f'(2) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - f(x) - 30}{\Delta x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) + 5)(f(x) - 6)}{\Delta(x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) - 6)}{x - 2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) + 5)}{\Delta} = f'(2) \times \frac{11}{5} = 5 \times \frac{11}{5} = 11$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۶)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = f'(-1) = 2$$

$$y = f\left(\sin \frac{\pi}{x} - 1\right) \Rightarrow y' = \left(-\frac{\pi}{x^2} \cos \frac{\pi}{x}\right) f'\left(\sin \frac{\pi}{x} - 1\right)$$

$$\Rightarrow y'(1) = \left(-\frac{\pi}{(1)^2} \cos(\pi)\right) f'(\sin \pi - 1) = \pi \times f'(-1) = 2\pi$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۴)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(جهانبفش نیکنام)

-۹۱

$$x = -1 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - y = 1 \Rightarrow 2x^2 + 2yy' - y' = 0 \xrightarrow{x=y=-1} y' = 1$$

$$6x + 2(y')^2 + 2yy'' - y'' = 0 \xrightarrow[\substack{x=y=-1 \\ y'=1}]{y'=1} 3y'' = -4 \Rightarrow y'' = -\frac{4}{3}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۷)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$y = 4x - 5 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 2 \\ f'(2) = 4 \Rightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$g'(x) = 2x \cdot f^{-1}(2x - 1) + (x^2 - 1)2(f^{-1})'(2x - 1)$$

$$\Rightarrow g'(2) = 4 \underbrace{f^{-1}(3)}_2 + 6 \underbrace{(f^{-1})'(3)}_{\frac{1}{4}} = 9 \frac{1}{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۷ تا ۱۶۵)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(جهانبش نیکنام)

-۹۳

فرض کنیم  $(a, b) \in f$ ، پس  $f(a) = b$  و در نتیجه:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{2f(a) + \sqrt{4f^2(a) + 1}} = \frac{1}{2b + \sqrt{4b^2 + 1}}$$

$$= \sqrt{4b^2 + 1} - 2b \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - 2x$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۷ تا ۱۶۵)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (e^{\gamma x + \gamma} + cx + \gamma d) = 1 - c + \gamma d$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x^{\gamma} + (\gamma c + 1)x - d = 1 - \gamma c - 1 - d = -\gamma c - d$$

$$1 - c + \gamma d = -\gamma c - d \Rightarrow c + \gamma d = -1 \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \gamma x + (\gamma c + 1) & ; x > -1 \\ \gamma e^{\gamma x + \gamma} + c & ; x < -1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(-1) &= -\gamma + \gamma c + 1 = \gamma c - 1 \\ f'_-(-1) &= \gamma + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma c - 1 = \gamma + c$$

$$\Rightarrow c = \gamma \xrightarrow{(1)} d = -1$$

$$c - d = \gamma - (-1) = \epsilon$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۴۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

با توجه به آن که  $e^{\text{Ln}M} = M$ ، بنابراین تابع را به صورت ساده تر زیر می نویسیم:

$$f(x) = e^{\text{Ln}x^r} \text{Ln} \frac{x}{x+1} \Rightarrow f(x) = x^r \text{Ln} \frac{x}{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = r x^{r-1} \text{Ln} \frac{x}{x+1} + \left( \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x+1}} \right) (x^r)$$

$$\Rightarrow f'(x) = r x^{r-1} \text{Ln} \frac{x}{x+1} + \frac{x^r}{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(1) = r \text{Ln} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -r \text{Ln} 2 + \frac{1}{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه های ۱۵۹ تا ۱۶۵)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

$$f(x) = x^{\sin x} \Rightarrow \ln f(x) = \sin x \ln x$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می گیریم.}} \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \left( \cancel{\cos \frac{\pi}{2}} \times \ln \frac{\pi}{2} + \frac{\cancel{\sin \frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}} \right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sin \frac{\pi}{2}} \left(0 + \frac{2}{\pi}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{2}{\pi} = 1$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

(ممد رضا شوکتی بیرق)

-۹۷

$$y = x + \sin ax \Rightarrow y' = 1 + a \cos ax$$

$$|\cos ax| \leq 1 \Rightarrow |a \cos ax| \leq |a| \Rightarrow -|a| \leq a \cos ax \leq |a|$$

$$\Rightarrow 1 - |a| \leq 1 + a \cos ax \leq 1 + |a|$$

$$\Rightarrow 1 - |a| \leq y' \leq 1 + |a| \Rightarrow 1 - |a| \geq 0 \Rightarrow |a| \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq a \leq 1 \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a = -1, 0, 1$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۷۸ تا ۱۸۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

صورت کسر، دنباله هندسی با قدر نسبت  $X$  می باشد.

$$\frac{1+x+\dots+x^y}{1+x^2} = \frac{1(1-x^{\lambda})}{1-x} = \frac{1-x^{\lambda}}{(1-x)(1+x^2)}$$

$$\frac{(1-x^4)(1+x^4)}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)}{(1-x)(1+x^2)}$$

$$= \frac{(1-x)(1+x)(1+x^4)}{(1-x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = (1+x)(1+x^4)$$

برای محاسبه مشتق در  $X = -1$ ، کافی است از عامل صفر شونده مشتق بگیریم.

$$f'(-1) = 1(1+(-1)^4) = 2$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه های ۱۳۶ تا ۱۳۹)

۴

۳✓

۲

۱

(سیروس نصیری)

$$y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x)) \Rightarrow y'(a) = g'(a)f'(g(a))$$

$$y'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a-2}} \times \frac{1}{\sqrt{a-2}+1} = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{a-2}=t} \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow t = -2, 1 \xrightarrow{t>0} \sqrt{a-2} = 1 \Rightarrow a = 3$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه های ۱۵۱ تا ۱۵۴)

۴

۳

۲

۱✓

$$f(x) = \begin{cases} \sin ax + bx^n & ; x \geq 0 \\ 3x^2 + \tan x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

در نتیجه شرط پیوستگی برقرار است.

$$f'(x) = \begin{cases} a \cos ax + nbx^{n-1} & ; x > 0 \\ 6x + (1 + \tan^2 x) & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = a \\ f'_-(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

$$f''(x) = \begin{cases} -a^2 \sin ax + n(n-1)bx^{n-2} & ; x > 0 \\ 6 + 2 \tan x (1 + \tan^2 x) & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow f''_-(0) = 6$$

برای وجود  $f''(0)$  و ناصرفبودن آن وقتی  $x > 0$  است، لازم است  $n = 2$  باشد.

$$\xrightarrow{n=2} f''_+(0) = 2b$$

$$f''_+(0) = f''_-(0) \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۵۰)

۴

۳

۲✓

۱

(میلاد سبازی لاریجانی)

-۸۷

$$f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = (f(x).f'(x))'$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f(x) \times f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{-1}{2x\sqrt{x}} = \frac{-1}{2x^2}$$

$$f(x) \times f'(x) = \frac{-1}{2x^2} \Rightarrow (f(x) \times f'(x))' = \frac{4x}{4x^4} = \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{k}{x^n} \Rightarrow k = 1, n = 3 \Rightarrow k + n = 4$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۵۰)

۴

۳

۲

۱✓

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 2ax + b \Rightarrow y'' = 2a$$

$$y + y' + y'' = x^2 + x + 1 \Rightarrow ax^2 + bx + c + 2ax + b + 2a = x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow ax^2 + (b + 2a)x + (c + b + 2a) = x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 1 \\ c + b + 2a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1, b = -1, c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۵۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مشتار منصوری)

-۸۹

$$y = (x+1)^{-1} \Rightarrow y' = -(x+1)^{-2} \Rightarrow y'' = 2(x+1)^{-3}$$

$$\Rightarrow y^{(n)} = (-1)^n \times n! \times (x+1)^{-(n+1)}$$

$$\Rightarrow y^{(5)} = -120(x+1)^{-6} \xrightarrow{x=1} y^{(5)}(1) = -120(2)^{-6} = \frac{-15}{8}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، کاربرد مشتق ، مشتق - ۱۳۹۶۱۲۱۸

$$x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow 3x^2 + 3y'y^2 = 6y + 6xy'$$

$$\xrightarrow{x=y=3} 27 + 27y' = 18 + 18y'$$

$$\Rightarrow 9y' = -9 \Rightarrow y' = -1 \xrightarrow[\text{در نقطه } (3,3)]{\text{شیب خط مماس}} m = -1$$

$$\xrightarrow{\text{خط مماس}} y = -x + 6$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow A(0, 6)$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow B(6, 0)$$

$$S(AOB) = \frac{1}{2} OA \times OB = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = \frac{36}{2} = 18$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۷)

۴

۳

۲✓

۱

این تابع در نقاط صحیح غیر صفر  $(Z - \{0\})$  ناپیوسته است و در نتیجه این نقاط

بحرانی هستند. در  $x = 0$  پیوسته است اما مشتق پذیر نیست. زیرا:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} (2[x] + x - 1) \Rightarrow \text{وجود ندارد}$$

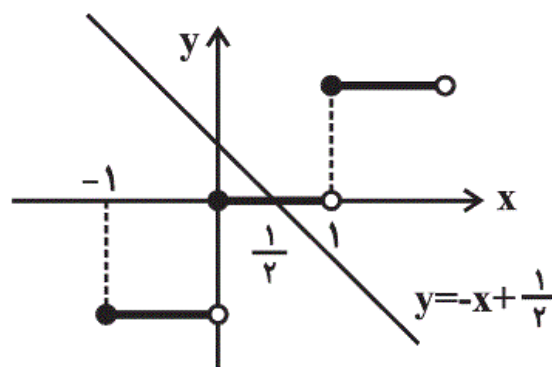
اما در نقاط غیر صحیح پیوسته و مشتق پذیر است.

$$f(x) = x[x] + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \xrightarrow{x \notin Z} f'(x) = [x] + x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow [x] = -x + \frac{1}{2} \quad (1)$$

اگر دو تابع  $y = [x]$  و  $y = -x + \frac{1}{2}$  را رسم کنیم، نقاط برخورد ریشه معادله (۱)

خواهد بود.



ملاحظه می کنیم که معادله  $f'(x) = 0$  یک ریشه  $x = \frac{1}{2}$  دارد، پس مجموعه طول

نقاط بحرانی تابع  $Z \cup \{\frac{1}{2}\}$  خواهد بود.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه های ۱۶۵ تا ۱۷۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

ابتدا دامنه تابع را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \\ x - \sqrt{2-x} \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{2-x} \xrightarrow{x \geq 0} x^2 \geq 2-x \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \text{دامنه} = [1, 2]$$

توابع  $y = x$  و  $y = -\sqrt{2-x}$  روی بازه فوق، پیوسته و صعودی اکیدند. بنابراین

مجموع آن‌ها و در نتیجه تابع داده شده، پیوسته و صعودی اکید خواهد بود. پس ماکزیمم

مطلق تابع داده شده، به ازای  $x = 2$  به دست می‌آید که برابر  $\sqrt{2}$  خواهد بود.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۸۰)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

در رابطه  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ ، مقدار  $y$  را بر حسب  $x$  محاسبه می‌کنیم:

$$y = (2 - \sqrt{x})^2$$

نقطه  $M$ ، مختصاتش به صورت  $M(x, (2 - \sqrt{x})^2)$  خواهد بود. مساحت مستطیل

را بر حسب  $x$  محاسبه کرده و مشتق آن را به دست می‌آوریم.

$$S = x(2 - \sqrt{x})^2 \Rightarrow S' = (2 - \sqrt{x})^2 + x \times 2(2 - \sqrt{x})\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (2 - \sqrt{x})(2 - \sqrt{x} - \sqrt{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow S = 1 \\ x = 4 \Rightarrow S = 0 \end{cases} \Rightarrow S_{\text{Max}} = 1$$

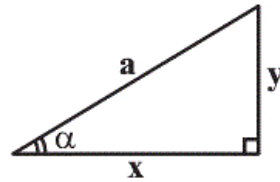
(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۷۷)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱



$$\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \sin(2\alpha)$$

$$S = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{(a \cdot \cos(\alpha)) \cdot (a \cdot \sin(\alpha))}{2} = \frac{a^2 \cdot \sin(2\alpha)}{4}$$

$$\Rightarrow S(\alpha) = \frac{1}{4} a^2 \cdot \sin(2\alpha)$$

$$\Rightarrow S'(\alpha) = \frac{1}{4} a^2 \times 2 \cos(2\alpha)$$

$$\Rightarrow S'(22/5^\circ) = \frac{1}{4} a^2 \times 2 \underbrace{\cos(45^\circ)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} a^2$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۶ تا ۱۳۰)

۴

۳✓

۲

۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، مقاطع مخروطی - ۱۳۹۶۱۲۱۸

می‌دانیم شیب مجانب‌های هذلولی قرینه هم هستند، پس

$$\text{و مرکز} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{-1}{2}x - 3 \end{cases}$$

هذلولی محل برخورد دو مجانب است، یعنی  $O(-4, -1)$  مرکز هذلولی است.

چون  $A = (5, -1)$  رأس هذلولی است و  $y_A = y_O = -1$ ، پس هذلولی افقی

است. در نتیجه  $a = OA = 9$  و  $x_{A'} = \alpha - a = -13$ .

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۴

۳

۲

۱✓

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y' \\ y = \frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y' \end{cases}$$

$$x'^2 + 4y'^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y'\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} x'^2 + \frac{1}{4} y'^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} x' y' + x'^2 + 3y'^2 + 2\sqrt{3} x' y' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4} x'^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} x' y' + \frac{13}{4} y'^2 = 1$$

$$\xrightarrow{\times 4} 7x'^2 + 6\sqrt{3}x'y' + 13y'^2 = 4$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۷)

۴

۳✓

۲

۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، ماتریس و دترمینان، ماتریس، دترمینان و دستگاه - ۱۳۹۶۱۲۱۸

در ماتریس پادمتقارن، درایه‌های روی قطر اصلی صفرند، بنابراین:

$$m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$$

درایه‌های موجود در طرفین قطر اصلی نیز باید نظیر به نظیر قرینه باشند. در نتیجه:

$$m = 2 \Rightarrow \begin{cases} m - 3 = -1 \\ 2m - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 2 \text{ ق ق}$$

۴

۳

۲✓

۱

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0-1+2-\dots+10-11 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(0-1) + (2-3) + \dots + (10-11) = \underbrace{-1-1-\dots-1}_{\text{۶ جمله}} = -6$$

تذکر:

(هنر سه تالیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \text{ماتریس تقارن نسبت به محور } y \text{ ها}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \text{ماتریس تجانس با نسبت ۲ نسبت به مبدأ}$$

$$R_{۳۰^\circ} = \begin{bmatrix} \cos ۳۰^\circ & -\sin ۳۰^\circ \\ \sin ۳۰^\circ & \cos ۳۰^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\text{ماتریس تبدیل} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{۳} & -۱ \\ ۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{۳} & -۱ \\ -۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} -\sqrt{۳} & -۱ \\ -۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{۳} \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳\sqrt{۳} \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

۴

۳✓

۲

۱

$$-\frac{1}{4}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = R_{(-\frac{\pi}{3})}$$

$$\Rightarrow A = -2^2 R_{(-\frac{\pi}{3})} \Rightarrow A^\Delta = -2^1 \circ R_{(-\frac{\pi}{3})} = -2^1 \circ R_{(\frac{\pi}{3})}$$

$$\Rightarrow A^\Delta = -2^1 \circ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -512 & 512\sqrt{3} \\ -512\sqrt{3} & -512 \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲✓

۱

(رضا عباسی اصل)

-۱۱۷

با بسط حول ستون سوم ماتریس  $AA^t$  داریم:

$$|AA^t| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9$$

می‌دانیم:

$$|A| = |A^t| \text{ و } |AB| = |A| \cdot |B|$$

$$|AA^t| = |A| |A^t| = |A| |A| \Rightarrow |AA^t| = |A|^2$$

$$\Rightarrow 9 = |A|^2 \xrightarrow{|A| > 0} |A| = 3$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷ و ۱۲۵)

۴

۳✓

۲

۱

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & -1 \\ a & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & -1 \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{16}$$

$$\xrightarrow[\text{بسط می‌دهیم}]{\text{حول سطر اول}} \frac{1}{8} (-a - a - 2a^2) = \frac{1}{16} \xrightarrow{\times(-8)} 2a^2 + 2a + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2(a + \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان؛ صفحه‌های ۱۰۶، ۱۰۷ و ۱۱۴ و ۱۱۵)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(عباس اسری امیرآبادی)

-۱۱۹

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ k & 1+a & -2+b \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ k & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & a & b \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & a & b \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3a - 2b = 0 \Rightarrow a + b = 0$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان؛ صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۳)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & 3z \\ x+y & 2 & -1 \\ 4y & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} x & y & 3z \\ x+y & 2 & -1 \\ 4y & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\Delta} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & y & 3z \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{1(6+1)} = 12$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۳)

۴

۳✓

۲

۱

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، همنهشتی ، نظریه اعداد - ۱۳۹۶۱۲۱۸

-۱۳۱

(پوار فاطمی)

$$\left. \begin{array}{l} \begin{matrix} 18 & 18 \\ a \equiv 7 \Rightarrow a \equiv -11 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 24 & 24 \\ a \equiv 13 \Rightarrow a \equiv -11 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 28 & 28 \\ a \equiv 17 \Rightarrow a \equiv -11 \end{matrix} \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv -11 \Rightarrow a = 504k - 11$$

$$\Rightarrow a = 493 = 504 \times 1 - 11 = \text{کوچکترین مقدار طبیعی } a$$

$$\Rightarrow a = 16 = 4 + 9 + 3 = \text{مجموع ارقام } a$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

۲

۱✓

-۱۳۲

(عباس اسدی امیرآبادی)

$$\overline{583a} \in [6]_9$$

$$\Rightarrow \overline{583a} \equiv 6 \Rightarrow 16 + a \equiv 6 \Rightarrow a \equiv -10 \equiv 8$$

با توجه به آن که  $a$  عددی یک رقمی است، پس  $a = 8$  خواهد بود.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴✓

۳

۲

۱

۱۳۵-

(مهدي عزيزي)

گزینه (۱): تقارنی و پادتقارنی است.

گزینه (۲): بازتابی است.

گزینه (۳): تقارنی است.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۱۳۶-

(رضا پورحسینی)

$$M(RoR) = [M(R)]^2$$

می‌دانیم:

پس کافیت با اعمال بولی، ماتریس را در خودش ضرب کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۰ و ۶۱)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

۱۳۷-

(عباس ثروتی)

اگر A را مجموعه مضارب ۲، B را مجموعه مضارب ۳ و C را مجموعه مضارب ۵ تعریف کنیم، آنگاه:

$$\begin{aligned} \text{تعداد جواب‌های مطلوب} &= |A \cap B \cap C'| + |A \cap B' \cap C| + |A' \cap B \cap C| \\ &= |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 3|A \cap B \cap C| \\ &= \left\lfloor \frac{96}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{96}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{96}{15} \right\rfloor - 3 \left\lfloor \frac{96}{30} \right\rfloor = 22 \end{aligned}$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۴ و ۶۵)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

اگر دو معادله را از هم کم کنیم، معادله دیگری با مجهول‌های مستقل تشکیل می‌شود.

$$(x + y + z + u + v) - (x + z + v) = 15 - 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y + u = 5 \\ x + z + v = 10 \end{cases} \xrightarrow[\text{طبیعی هستند.}]{\text{جواب‌ها عددی هستند.}} \begin{cases} y' + u' = 3 \\ x' + z' + v' = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل جواب‌ها} = \binom{3+2-1}{2-1} \times \binom{7+3-1}{3-1} = 4 \times 36 = 144$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۴

۳

۲✓

۱

از آن‌جا که  $30 = 2 \times 3 \times 5$  و  $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ ، پس عامل‌های اول دو عدد ۳۰ و ۱۲۰ یکسان هستند و در نتیجه داریم:

$$(a, 30) = 1 \Rightarrow (a, 120) = 1$$

با توجه به آن‌که  $a < 120$ ، پس هدف یافتن تعداد اعداد طبیعی‌ای است که کوچکتر از ۱۲۰ بوده و نسبت به ۱۲۰ اول هستند. بنابراین داریم:

$$\Phi(120) = 120 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 120 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 32$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

۴

۳

۲

۱✓

فرض کنید A مجموعه اعداد چهار رقمی با رقم یکان ۱ و B مجموعه اعداد چهار رقمی با رقم دهگان ۲ و S مجموعه اعداد چهار رقمی باشند. داریم:

$$|S| = 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$$

$$|A| = 9 \times 10 \times 10 \times 1 = 900$$

$$|B| = 9 \times 10 \times 1 \times 10 = 900$$

$$|A \cap B| = 9 \times 10 \times 1 \times 1 = 90$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 900 + 900 - 90 = 1710$$

هدف مسأله یافتن حاصل  $|\overline{A} \cap \overline{B}|$  است که برابر است با:

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - |A \cup B| = 9000 - 1710 = 7290$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۴

۳✓

۲

۱

$$|A| = ۴, |B| = ۶, |A \cap B| = ۲$$

$$|A^c \cup B^c| = |A^c| + |B^c| - |A^c \cap B^c|$$

$$\Rightarrow |A^c \cup B^c| = |A|^c + |B|^c - |A \cap B|^c$$

$$\Rightarrow |A^c \cup B^c| = ۱۶ + ۳۶ - ۴ = ۴۸$$

(پیپر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۵۶ تا ۶۰)

۴

۳

۲✓

۱

(رسول مفسنی‌منش)

رابطه  $R$  باید تمام  $(i, i)$  ها را داشته باشد، لذا حداقل ۱۸ عضو دارد ولی باید دقت

کنیم که برای حفظ خاصیت تقارنی، اگر زوج مرتب  $(x, y)$  در  $R$  وجود دارد، باید

$(y, x)$  نیز در  $R$  حضور داشته باشد، لذا تعداد اعضای  $R$  به صورت  $۱۸ + ۲k$ ،

یعنی عددی زوج و بزرگ‌تر یا مساوی ۱۸ و کوچکتر یا مساوی  $۱۸^2$  است.

$(k \in W)$

(پیپر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۴✓

۳

۲

۱

$$x^{\sqrt{2}} = 2 \xrightarrow{\sqrt{2} \text{ توان}} (x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow x^2 = 2^{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2^{\sqrt{2}}} \Rightarrow x = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$x^{\sqrt{2}} = 3 \Rightarrow x = 3^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

به همین ترتیب داریم:

$$2^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times 3^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt[6]{6^{\sqrt{2}}}$$

(ریاضی ۲ - الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۴)

۴

۳

۲

۱✓

(موانبش نیکنام)

$$2x = a + b$$

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = az \Rightarrow a = \frac{y^2}{z} \\ z^2 = by \Rightarrow b = \frac{z^2}{y} \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{y} = \frac{y^3 + z^3}{yz}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{y^3 + z^3}{xyz}$$

(ریاضی ۲ - الگو و دنباله: صفحه‌های ۶ تا ۱۲)

۴

۳

۲✓

۱

$$(3^x)^2 - 15\left(\frac{3^x}{3}\right) + 6 = 0 \xrightarrow{3^x = A}$$

$$A^2 - 5A + 6 = 0 \Rightarrow (A - 3)(A - 2) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 3^{x_1} = 3 \Rightarrow x_1 = 1 \\ A = 3^{x_2} = 2 \Rightarrow x_2 = \log_3 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\log_3 2} = \log_2 3$$

(ریاضی ۲ - توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

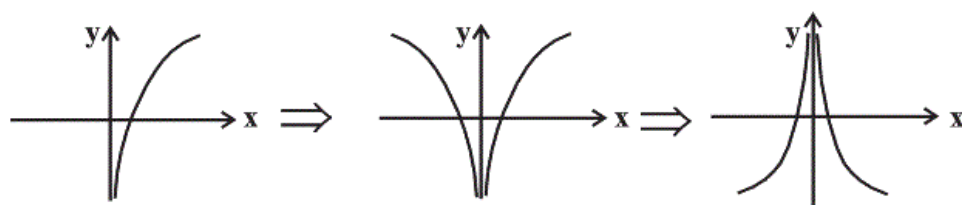
۴

۳

۲

۱ ✓

(محمدرضا شوکتی بیرق)



$$y = \log x$$

$$y = \log |x| \quad y = -\log |x| = \log \frac{1}{|x|}$$

(ریاضی ۲ - توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۱۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$A = x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$$

$$= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$B = x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

$$= x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

$$(A, B) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$$

(مسابان - مقاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

(عیب شفیع)

اگر چند جمله‌ای  $P(x) = x^4 - 3x^3 + mx + n$  بر  $(x - 2)(x - 3)$

بخش پذیر باشد، آنگاه  $P(2) = 0$  و  $P(3) = 0$ . بنابراین:

$$P(2) = 0 \Rightarrow 16 - 24 + 2m + n = 0$$

$$P(3) = 0 \Rightarrow 81 - 81 + 3m + n = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m + n = 8 \\ 3m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -8, n = 24 \Rightarrow m + n = +16$$

(مسابان - مقاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۶ تا ۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$t = x - 2 \Rightarrow x = t + 2 \Rightarrow 2(t + 1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2t^2 + 4t + 1 = 0$$

پس معادله مورد نظر  $2x^2 + 4x + 1 = 0$  می‌باشد.

(مسابقه - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(فریدون ساعتی)

-۱۰۹

$$\begin{cases} x_1 = \log a \\ x_2 = \log b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \log a + \log b = \log ab = \sqrt{7} \\ x_1 \cdot x_2 = \log a \cdot \log b = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$A = (\log a)^6 (\log b)^6 (\log ab)^4 = (\log a \log b)^6 (\log a + \log b)^4$$

$$= (\sqrt{2})^6 (\sqrt{7})^4 = 8(49) = 392$$

(ریاضی ۲ - توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷ و

مسابقه - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

ریشه‌های معادله  $۲(-x)^۳ + (-x)^۲ - ۲۵(-x) + ۱۲ = ۰$  برابر  $-\alpha$ ،  $-\beta$  و

$-\gamma$  است، که چند جمله‌ای وارونه آن  $(x \rightarrow -\frac{1}{x})$  به صورت زیر به دست

می‌آید:

$$-۲x^۳ + x^۲ + ۲۵x + ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۱۲x^۳ + ۲۵x^۲ + x - ۲ = ۰$$

بنابراین ریشه‌های معادله  $\frac{-1}{\alpha}$ ،  $\frac{-1}{\beta}$  و  $\frac{-1}{\gamma}$  می‌باشند. که حاصل ضرب آن‌ها

$$\frac{-1}{\alpha\beta\gamma} \text{ است.}$$

(مسئله - تناسب پیری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۴)

۴

۳

۲✓

۱

در دنباله حسابی، مجموع  $n$  جمله اول به صورت

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \text{ می‌باشد، بنابراین:}$$

$$\left. \begin{array}{l} ۳, ۳+q, ۳+۲q, \dots \\ \text{قدر نسبت} = q \end{array} \right\} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(۶ + (n-1)q) = ۳۸$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left(۶ + \frac{n-1}{2}\right) = ۳۸ \Rightarrow ۳n + \frac{n^2 - n}{۴} = ۳۸$$

$$\Rightarrow n^2 + ۱۱n = ۴(۳۸) \Rightarrow n(n+۱۱) = ۸(۱۹) \Rightarrow n = ۸$$

(مسئله - تناسب پیری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۲ تا ۹)

۴

۳

۲✓

۱

مطابق فرض سؤال، چون محور کانونی هذلولی موازی محور  $X$  ها است، بنابراین هذلولی افقی است. می‌دانیم که معادله هذلولی افقی در حالت کلی به صورت

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

است. یعنی همواره ضریب عبارت  $(y - \beta)^2$ ،

منفی است. اگر معادله داده شده را استاندارد کنیم، داریم:

$$a\left(x + \frac{4}{a}\right)^2 + (y - 1)^2 = 1 + \frac{4}{a}$$

برای آن که در معادله بالا این شرط برقرار باشد، باید دو نامعادله

$$\begin{cases} a < 0 \\ 1 + \frac{4}{a} < 0 \end{cases} \quad \text{توأمًا}$$

برقرار باشند:

$$\begin{cases} a < 0 \\ 1 + \frac{4}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow -4 < a < 0$$

$$\Rightarrow (a < 0) \cap (-4 < a < 0) = -4 < a < 0$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$5x^2 + 24xy - 2y^2 = 12$$

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a-c} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{24}{7} = \frac{2t}{1-t^2} \quad (\tan \theta = t)$$

$$\Rightarrow 12t^2 + 7t - 12 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(12)(-12)}}{24} = \frac{-7 \pm 25}{24}$$

با در نظر گرفتن زاویه حاده برای  $\theta$  :

$$\tan \theta = \frac{3}{4}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

۴

۳

۲✓

۱

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی - گواه ، ماتریس و دترمینان ، ماتریس، دترمینان و دستگاه - ۱۳۹۶۱۲۱۸

نکته: اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  باشد، داریم:

$$A^2 - (a+d)A + |A|I = \overline{O}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - (-2+4)A + (-2 \times 4 - 1 \times 5)I = \overline{O}$$

$$\Rightarrow A^2 - 2A - 13I = \overline{O}$$

$$\Rightarrow A^2 = 2A + 13I \Rightarrow (\alpha, \beta) = (2, 13)$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۵)

۴

۳

۲✓

۱

توجه شود که  $A - A^t$  همواره یک ماتریس پادمتقارن است، بنابراین اولاً درایه‌های قطر اصلی آن صفر است، در نتیجه  $b = 0$ . ثانیاً برای هر درایه غیرواقع بر قطر اصلی،

مانند  $x_{ij}$ ، داریم:  $x_{ij} = -x_{ji}$ ، پس  $a = -3$  و  $(a, b) = (-3, 0)$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۶ و ۱۰۷)

۴

۳

۲✓

۱

(آزاد ریاضی - ۸۷)

$$B = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس مربعی دلخواه  $B$  را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس

پاد متقارن بنویسیم، ماتریس متقارن برابر  $\frac{1}{2}(B + B^t)$  و ماتریس پادمتقارن برابر

$\frac{1}{2}(B - B^t)$  خواهد بود. در نتیجه ماتریس متقارن برابر است با:

$$\frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 19$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: مشابه تمرین ۱۶ صفحه ۱۱۲)

۴

۳

۲✓

۱

توجه شود که ماتریس A دو برابر ماتریس دوران  $60^\circ$  است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ = 2 \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} = 2 R_{\frac{\pi}{3}}$$

بنابراین برای به توان رساندن ماتریس A می‌توانیم از رابطه  $(R_\theta^n = R_{n\theta})$  استفاده کنیم.

$$A^3 = \left( 2 R_{\frac{\pi}{3}} \right)^3 = 8 R_\pi = 8 \begin{bmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{bmatrix} \\ = 8 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر  $A^3 = -8I$  و در نتیجه داریم:

$$A^3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -8 \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۱)

$$A_{11} = 10, A_{12} = 5, A_{13} = -10$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 20$$

$$\Rightarrow 10 + 5m + 20 = 20 \Rightarrow m = -2$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌ی ۱۱۳ تا ۱۱۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\begin{vmatrix} 1 & a+1 & b+1 \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

راه حل اول:

بر حسب سطر دوم، دترمینان را بسط می‌دهیم:

$$a(bc + c) + 0 - c(-c + ab + b) = 0$$

$$abc + ac + c^2 - abc - bc = 0$$

$$\Rightarrow ac - bc + c^2 = c(a - b + c) = 0$$

چون  $abc \neq 0$ ، پس  $c \neq 0$ ، لذا:  $a - b + c = 0$ 

راه حل دوم:

$$\begin{vmatrix} 1 & a+1 & b+1 \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}}_{\text{بسط حول سطر ۱ پادمتقارن از مرتبه فرد}} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}}_{\text{بسط حول سطر ۱ پادمتقارن از مرتبه فرد}}$$

بسط حول سطر ۱ پادمتقارن از مرتبه فرد

$$= 0 + c^2 - bc + ac = 0$$

$$c(c - b + a) = 0 \xrightarrow{c \neq 0} c - b + a = 0$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۹)

۴

۳

۲✓

۱

راه حل اول:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x & x & y+z \\ 1 & y & x+z \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}}_{|A|} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & x+z \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}}_{|B|} + \underbrace{\begin{vmatrix} x & x & y+z \\ 0 & y & x+z \\ 0 & z & x+y \end{vmatrix}}_{|C|}$$

برای محاسبه  $|B|$ ، ابتدا ستون دوم آن را با ستون سوم جمع می‌کنیم و از  $(x+y+z)$  در ستون سوم دترمینان حاصل فاکتور می‌گیریم:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & x+z \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x+y+z \\ 1 & y & x+y+z \\ 1 & z & x+y+z \end{vmatrix}$$

+

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{vmatrix} = (x+y+z)(0) = 0$$

این دترمینان به دلیل داشتن دو ستون یکسان برابر صفر است.

برای محاسبه  $|C|$ ، آن را نسبت به ستون اول بسط می‌دهیم:

$$|C| = \begin{vmatrix} x & x & y+z \\ 0 & y & x+z \\ 0 & z & x+y \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(x) \begin{vmatrix} y & x+z \\ z & x+y \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{y=x+z}{=} x \begin{vmatrix} x+z & x+z \\ z & 2x+z \end{vmatrix} = 2x^2(x+z)$$

و در نتیجه:  $|A| = |B| + |C| = 0 + 2x^2(x+z) = 2x^2(x+z)$

راه حل دوم: با انتخاب  $x=3$  و  $z=1$  و  $y=4$  داریم:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 4(24) - 3(3) + 5(-3) = 72$$

که به ازای مقادیر انتخاب شده برای  $x, y, z$ ،  $2x^2(x+z)$  برابر ۷۲ می‌شود.

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\begin{aligned}
 |A| &= |A^t| = \begin{vmatrix} a+x & b & c \\ a & b+x & c \\ a & b & c+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+x & b & c \\ a+b+c+x & b+x & c \\ a+b+c+x & b & c+x \end{vmatrix} \\
 &= (a+b+c+x) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b+x & c \\ 1 & b & c+x \end{vmatrix} = (a+b+c+x) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} \\
 &= (a+b+c+x)x^2 \quad (*)
 \end{aligned}$$

از آن جا که مجموع درایه ها برابر ۶ است، پس داریم:

$$3(a+b+c+x) = 6 \Rightarrow a+b+c+x = 2$$

$$|A| = 8 \xrightarrow{(*)} 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه های ۱۱۳ تا ۱۲۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

www.kanoon.ir