



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

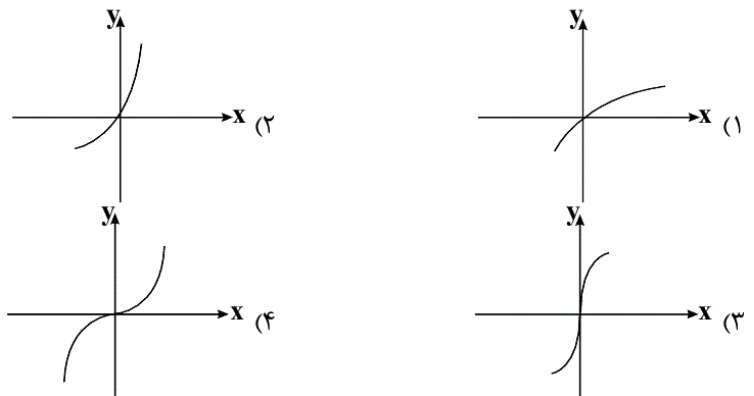
ریاضی ، ریاضی عمومی ، کاربردهای مشتق - ۱۳۹۶۱۲۰۴

۱۰۱- تابع با ضابطه $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ در نقطه دارای است.

- (۱) $x = 1$ ، ماکزیمم نسبی
(۲) $x = 0$ ، می نیمم نسبی
(۳) $x = 0$ ، ماکزیمم نسبی
(۴) $x = 1$ ، می نیمم نسبی

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- نمودار تابع $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟



شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x) = |\sin x|$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- کمترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = 1 - \cos^2 x - \sin x$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- در کدام بازه، تابع با ضابطه $f(x) = e^{x-2x^2}$ صعودی و تقعر نمودار آن رو به پایین است؟

- (۱) $(-\infty, \frac{1}{4})$ (۲) $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (۳) $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ (۴) $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = 2 - |x+1|$ صحیح است؟

- (۱) ماکزیمم مطلق برابر با صفر دارد.
(۲) می نیمم مطلق برابر با صفر دارد.
(۳) ماکزیمم مطلق برابر با ۲ دارد.
(۴) می نیمم مطلق برابر با ۲ دارد.

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- مجموعه مقادیر a برای این که مبدأ مختصات یک نقطه عطف برای تابع $y = \frac{ax}{x^2 - 1}$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\{\pm 1\}$ (۲) $\{\pm 2\}$ (۳) $\{0\}$ (۴) $R - \{0\}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- مجموعه طول نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x^5(4-x)$ کدام است؟

- (۱) $\{0, \frac{3}{4}\}$ (۲) $\{0, \frac{2}{3}\}$ (۳) \emptyset (۴) $\{4, 2\}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- نمودار تابع $f(x) = x^5 - 3x^2$ در حوالی $x=1$ چگونه است؟

- (۱) \setminus (۲) \swarrow (۳) \nearrow (۴) \searrow

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- تابع $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ به ترتیب از راست به چپ چند ماکزیمم نسبی و چند می نیمم نسبی دارد؟

- (۱) ۱، ۱ (۲) ۰، ۱ (۳) ۲، ۱ (۴) ۱، ۲

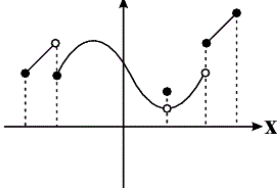
شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- منحنی به معادله $y = (x^2 + x + 2)e^{2x}$ چند نقطه عطف دارد؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، تابع به ترتیب از راست به چپ چند می نیمم نسبی و چند ماکزیمم نسبی دارد؟



- (۱) ۱، ۱ (۲) ۱، ۲ (۳) ۲، ۱ (۴) ۲، ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ چه قدر از می نیمم مطلق آن در فاصله $[-2, 2]$ بیش تر است؟

- (۱) ۳۳ (۲) ۲۷ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ در کدام بازه صعودی و تقر آن روبه بالا است؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(-\infty, 0)$ (۴) $(0, +\infty)$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- اگر توابع با معادله کلی $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - (m+1)x^2 + 8x$ فاقد نقاط ماکزیمم و می نیمم نسبی باشند، مجموعه طول نقاط

عطف نمودار این توابع کدام بازه است؟

- (۱) $[-3, 5]$ (۲) $[-2, 2]$ (۳) $(-3, 3)$ (۴) $(-\infty, 4]$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$ در بازه $(0, 2\pi)$:

(۱) ابتدا رو به پایین و سپس روبه بالا است.

(۲) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است.

(۳) همواره رو به بالا است.

(۴) همواره رو به پایین است.

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- در تابع با ضابطه $f(x) = a \cos 2x + b \sin x$ ، اگر نقطه‌ی می‌نیم آن در $(-\frac{\pi}{6}, -3)$ باشد، a کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- تابع f روی بازه‌ی $[a, b]$ تعریف شده است. در این مورد کدام بیان درست است؟

(۱) هر نقطه‌ی بحرانی، نقطه‌ی اکسترمم نسبی است.

(۲) هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی، نقطه‌ی بحرانی است.

(۳) در هر نقطه‌ی بحرانی، مشتق تابع صفر است.

(۴) در هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی، مشتق تابع صفر است.

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- اگر $x = 2$ ، طول نقطه‌ عطف تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & : x < 2 \\ -x^2 + m & : x \geq 2 \end{cases}$ باشد، مقدار $m + n$ کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) -۱۶ (۳) صفر (۴) ۱۶

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- تابع $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}(x^4 - x) + 4$ چند نقطه‌ عطف دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

-۱۰۱

(مسئله فایلو)

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$$

x	0	1	
12x ²	+	+	+
x-1	-	-	+
f'(x)	-	-	+

↘ ↘ min ↗

با توجه به جدول بالا تابع f در x=1 دارای می‌نیمم نسبی است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲

۱

-۱۰۲

(سراسری تجربی - ۹۱)

$$y = \frac{x^3}{x^2+1} \Rightarrow y' = \frac{(x^3)'(x^2+1) - (x^2+1)'(x^3)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y' = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$$

مقدار مشتق تابع مورد نظر در x=0 برابر صفر است (خط مماس بر نمودار تابع در x=0 افقی است) که این شرط تنها در گزینه‌ی «۴» برقرار است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

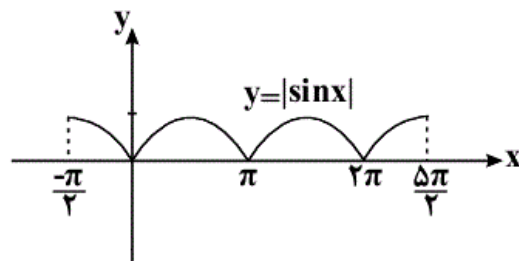
۴

۳

۲

۱

(سراسری ریاضی - ۱۲)

نمودار $|\sin x|$ را می‌توان از روی نمودار $\sin x$ به راحتی رسم نمود.

این تابع دارای سه می‌نیم و دو ماکزیمم است که همگی نقاط بحرانی هستند.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سراسری خارج از کشور تجربی - ۱۷)

از آنجایی که $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ است، پس:

$$f(x) = \sin^2 x - \sin x$$

با فرض $\sin x = t$ ، $-1 \leq t \leq 1$ خواهیم داشت:

$$y = t^2 - t, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$y' = 2t - 1 = 0 \rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$y(1) = 0 \quad \text{و} \quad y(-1) = 2 \quad \text{و} \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{4}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $\frac{-1}{4}$ است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(مسئله هجدهم)

چون تابع f صعودی و پیوسته است، پس باید $f' \geq 0$ باشد. از طرفی تقعر تابع f رو به پایین است، بنابراین $f'' < 0$ است.

$$f(x) = e^{x-2x^2} \rightarrow f'(x) = (1-4x)e^{x-2x^2} \geq 0$$

$$\frac{e^{x-2x^2} > 0}{\rightarrow 1-4x \geq 0} \rightarrow x \leq \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$f''(x) = -4e^{x-2x^2} + (1-4x)e^{x-2x^2}(1-4x)$$

$$= e^{x-2x^2}(-4 + (1-4x)^2) < 0 \quad \frac{e^{x-2x^2} > 0}{\rightarrow}$$

$$(1-4x)^2 - 4 < 0 \rightarrow (1-4x)^2 < 4 \rightarrow -2 < 1-4x < 2$$

$$\rightarrow -3 < -4x < 1 \rightarrow \frac{-1}{4} < x < \frac{3}{4} \quad (2)$$

اگر بین (۱) و (۲)، اشتراک بگیریم $x \in \left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ ، که با توجه به گزینه‌ها

می‌توان گزینه «۲» یعنی $x \in \left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ را انتخاب نمود.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۱ تا ۹۲)

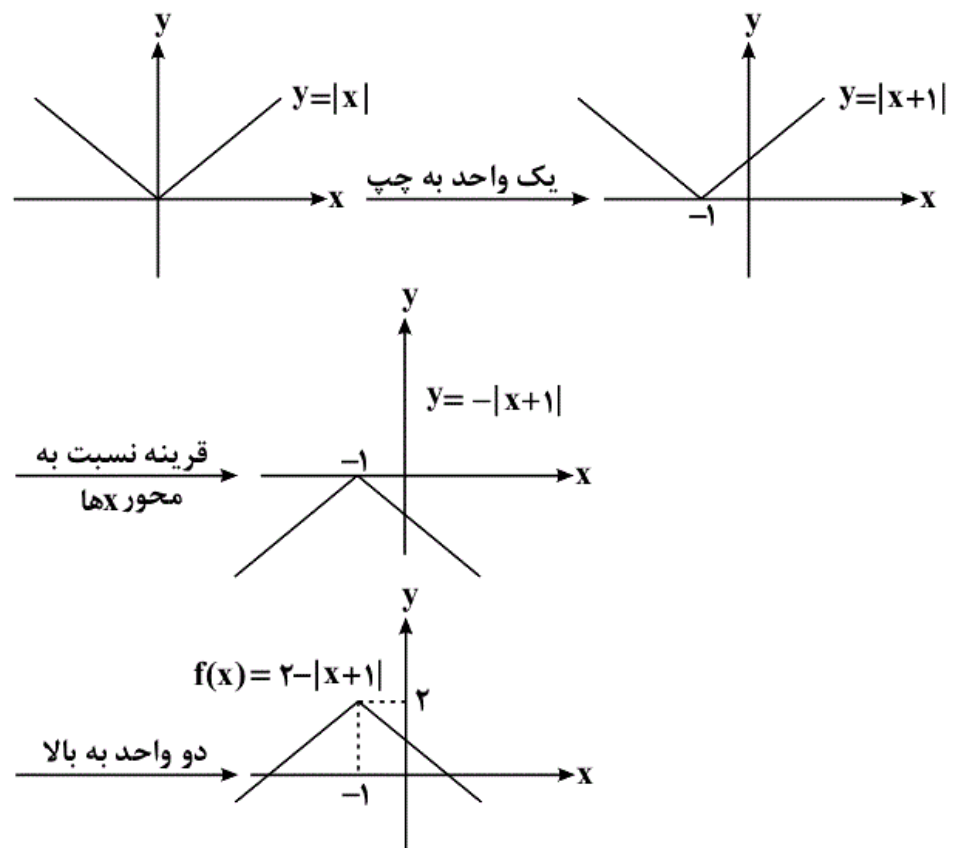
۴

۳

۲ ✓

۱

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



پس تابع f ماکزیمم مطلق برابر ۲ دارد.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

به ازای همه‌ی مقادیر a ، مبدأ مختصات، نقطه‌ی عطف تابع فوق است. فقط چون به ازای $a=0$ تابع، به تابع ثابت $y=0$ تبدیل می‌شود. پس مجموعه مقادیر a به صورت $\mathbf{R}-\{0\}$ است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(صفحه آملی)

$$f(x) = 4x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{8}{5}} \Rightarrow f'(x) = \frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}} - \frac{8}{5}x^{-\frac{3}{5}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{12 - 8x}{5x^{\frac{5}{5}}}$$

به ازای $x = \frac{3}{2}$ مشتق برابر با صفر است و به ازای $x = 0$ مشتق وجود

ندارد، بنابراین ۲ نقطه به طول‌های صفر و $\frac{3}{2}$ نقاط بحرانی تابع f هستند.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶)

۴

۳

۲


۱ ✓

(میثم همزه‌لویی)

باید یکنوایی و جهت تقعر تابع را در حوالی این نقطه تعیین کنیم:

$$f(x) = x^5 - 3x^2 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 5x^4 - 6x \\ f''(x) = 20x^3 - 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 5 - 6 = -1 < 0: \text{ نزولی} \\ f''(1) = 20 - 6 = 14 > 0: \text{ تقعر رو به بالا} \end{cases}$$

پس نمودار تابع در حوالی $x = 1$ به صورت  است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۷، ۸۸ و ۹۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(فخرها، حامی)

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x-1) - (1)(x^2)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, 2 \\ (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

دقت کنید که $x=1$ ریشه مضاعف مخرج مشتق است. پس مشتق در این نقطه تغییر علامت نمی‌دهد. پس نیازی نیست در جدول آورده شود.

x	0	1	2
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗
		max	min

بنابراین نمودار تابع یک می‌نیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی دارد.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی رستمی، مهر)

$$y' = (2x+1)e^{2x} + 2e^{2x}(x^2+x+2) = (2x^2+4x+5)e^{2x}$$

$$y'' = (4x+4)e^{2x} + 2e^{2x}(2x^2+4x+5) = (4x^2+12x+14)e^{2x}$$

$$\Rightarrow (4x^2+12x+14)e^{2x} = 0 \xrightarrow{e^{2x} \neq 0} 4x^2+12x+14 = 0$$

از آنجایی که عبارت $(4x^2+12x+14)$ همواره مثبت است ($a > 0, \Delta < 0$) لذا منحنی مورد نظر نقطه عطف ندارد.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۲)

۴

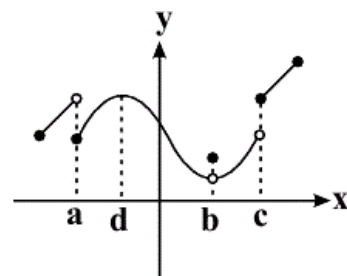
۳

۲

۱ ✓

(عباس امیدوار)

با توجه به شکل زیر تابع در نقطه به طول $x=a$ می‌نیمم نسبی و در نقاط $x=b$ و $x=d$ ماکزیمم نسبی دارد.



(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

(میثم همزه لویی)

ابتدا نقاط بحرانی تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

که تنها $x = -1$ در بازه $[-2, 2]$ قرار دارد. حال مقدار تابع را در این نقطه و نقاط ابتدا و انتهای بازه محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = -2 \Rightarrow f(-2) = -8 - 12 + 18 - 1 = -3 \\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 - 3 + 9 - 1 = 4 \text{ (مطلق max)} \\ x = 2 \Rightarrow f(2) = 8 - 12 - 18 - 1 = -23 \text{ (مطلق min)} \end{cases}$$

پس ماکزیمم مطلق تابع ۲۷ واحد از می‌نیمم مطلق آن بیش‌تر است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(میثم همزه لویی)

برای این‌که تابع صعودی و تقعر آن رو به بالا باشد، باید:

$$f'(x) \geq 0, f''(x) > 0$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

پس داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \geq 0 \\ f''(x) = -\frac{2}{x^3} > 0 \Rightarrow x < 0 \end{cases}$$

به‌ازای هر $x \neq 0$ مثبت است. پس تابع در فاصله‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ صعودی است.

از اشتراک این دو مجموعه جواب نتیجه می‌گیریم تابع f در فاصله $(-\infty, 0)$ صعودی است و تقعر رو به بالا دارد.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۷، ۸۸ و ۹۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(سروش موئینی)

$$f'(x) = 2x^2 - 2(m+1)x + 8$$

طبق فرض این تابع نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ندارد، پس مشتق تابع f ، که تابعی از درجه ۲ است، باید فاقد ریشه ساده باشد، یعنی دلتای آن مثبت نیست.

$$\Delta_{f'} = 4(m+1)^2 - 4(2)(8) \leq 0 \Rightarrow (m+1)^2 \leq 16$$

$$\Rightarrow |m+1| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq m+1 \leq 4 \quad (*)$$

حالا طول نقطه عطف را حساب کنیم:

$$x_I = -\frac{x^2 \text{ ضریب}}{2(x^3 \text{ ضریب})} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-(m+1)}{2(\frac{2}{3})} = \frac{m+1}{2}$$

و با توجه به نامساوی (*) داریم:

$$-2 \leq x_I \leq 2$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۷ تا ۹۲)

۴

۳

۲✓

۱

(امیر زراندوز)

$$f(x) = x^2 + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \Rightarrow f'(x) = 2x + \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$$

$$f''(x) = 2 + \sqrt{2}(-\sin x - \cos x) = 2 - \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

بنابراین:

$$f''(x) = 2 - \sqrt{2} \times \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 2 - 2 \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$= 2(1 - \sin(x + \frac{\pi}{4})) \geq 0$$

همواره نامنفی است.

پس جهت تقعر نمودار تابع f همواره رو به بالاست و نقطه عطف ندارد.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۲)

۴

۳✓

۲

۱

$$\Rightarrow 0 = -2a \sin \frac{\pi}{3} + b \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 0 = -\sqrt{3}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b \Rightarrow b = 2a \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \begin{cases} a + b = -6 \\ b = 2a \end{cases} \Rightarrow a + 2a = -6 \Rightarrow a = -2$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲

۱

(سراسری ریاضی - ۸۳)

-۱۱۸

در هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی، مشتق صفر است یا مشتق وجود ندارد. بنابراین بحرانی است.

برای رد گزینه‌های دیگر:

در گزینه (۱) می‌توان تابع $y = x^3$ را در $x = 0$ در نظر گرفت.

در گزینه (۳) و (۴) می‌توان تابع $y = |x|$ را در $x = 0$ در نظر گرفت.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۹)

۴

۳

۲

۱

(مسئله اسفینی)

-۱۱۹

برای آن که تابع در $x = 2$ عطف داشته باشد باید شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) تابع در $x = 2$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + nx) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + m) = f(2)$$

$$\Rightarrow 4 + 2n = -4 + m \Rightarrow m - 2n = 8 \quad (*)$$

(۲) تابع در $x = 2$ مشتق چپ و راست برابر داشته باشد (خط مماس واحد)

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow (-2x)|_{x=2} = (2x + n)|_{x=2}$$

$$\Rightarrow -4 = 4 + n \Rightarrow n = -8 \xrightarrow{(*)} m = -8$$

$$\Rightarrow m + n = -8 - 8 = -16$$

(۳) $f''(x)$ در $x = 2$ باید تغییر علامت بدهد که این شرط برقرار است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۲)

۴

۳

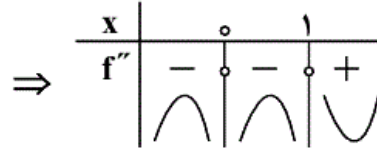
۲

۱

(مسئله اسفینی)

$$f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^4 + \frac{5}{3}x + 4 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - \frac{20}{3}x^3 + \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 20x^3 - 20x^2 = 20x^2(x-1)$$



\Rightarrow طول نقطه عطف $x=1$

توجه کنید که تابع در $x=1$ دارای خط مماس و پیوسته است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

www.kanoon.ir