سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://t.me/riazisara (@riazisara)

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۳۱- دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط D ، E و F به ترتیب بر اضلاع BC، AB و AC مماس است. اگر $\overset{\frown}{EDF} = 55^\circ$ باشد، انـدازهٔ زاویهٔ A کدام است؟

۱) 55°
۲) 60°
۳) 65°
۴) 70°

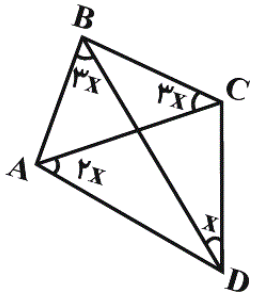
شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- دایره‌های $C(O,3)$ و $C'(O',12)$ مفروض‌اند. اگر طول مماس مشترک خارجی این دو دایره برابر ۱۲ باشد، این دو دایره چند مماس مشترک دارند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

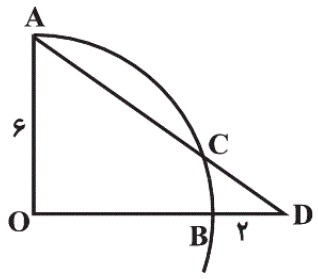
۱۳۳- در شکل زیر، اگر چهارضلعی $ABCD$ محاطی باشد، نسبت اندازهٔ زاویهٔ A به اندازهٔ زاویهٔ B کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۶}{۷}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- در شکل زیر، O مرکز ربع دایره، $OA = ۶$ و $BD = ۲$ است. طول پاره‌خط AC چند واحد است؟



۱) ۷/۲
۲) ۶/۸
۳) ۶/۴
۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۳۵- در مثلث ABC، $a = ۱۲$، $b = ۹$ و $c = ۷$ است. طول بزرگترین قطعه‌ای که دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث، روی یک ضلع آن جدا می‌کند، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۷

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ متخارج‌اند. اگر طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر ۶ و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $۲\sqrt{۲۱}$ باشد، حاصل‌ضرب شعاع‌های دو دایره کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۲۰
۴) ۲۴

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- امتداد قطر BD از دایرهٔ C، خطی مماس بر آن را در A قطع می‌کند. اگر T نقطهٔ تماس با دایره و $TA = TB = ۱۲$ باشد، کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از دایرهٔ C کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) ۶
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) $۳\sqrt{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- مربع $ABCD$ به طول ضلع ۸ واحد مفروض است. دایره‌ای از رئوس A و D گذشته و بر ضلع BC مماس است. شعاع این دایره چند واحد است؟

۱) $۵\sqrt{۲}$
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) ۴
۴) ۵

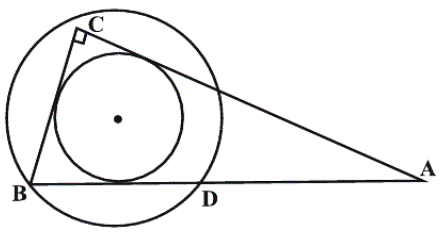
شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- نقاط ثابت B و C در یک صفحه مفروض‌اند. اگر M نقطه‌ای از آن صفحه باشد که از آن، پاره‌خط BC با زاویهٔ α دیده شود، حداکثر فاصلهٔ M از BC کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}BC.\cot\alpha$
۲) $\frac{۱}{۲}BC.\cot\frac{\alpha}{۲}$
۳) $\frac{BC}{۲\sin\alpha}$
۴) $۲BC.\cot\frac{\alpha}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- در شکل زیر دو دایره هم مرکزند و $BC = ۵$ و $AC = ۱۲$ است. طول پاره‌خط BD کدام است؟



۱) ۴
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۱- اگر f تابعی زوج و $f(۲)=۴$ و $f'_+(۲)=۳$ و $f'_-(۲)=۲$ باشد، مشتق راست تابع $y=f(\frac{۲}{x})$ در $x=-۱$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) -۴ ۴) -۶

شما پاسخ نداده اید

۸۲- مشتق سوم تابع $y=(۳x-۱)^۳\sqrt[۳]{۶x-۱}$ به ازای $x=\frac{۱}{۳}$ کدام است؟

۱) ۱۶۲ ۲) صفر ۳) ۲۷ ۴) ۸۱

شما پاسخ نداده اید

۸۳- اگر $f(x)=\sqrt[۳]{\frac{\sin ۲x}{۱+\cos ۲x}}$ باشد، حاصل $f'(\frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

شما پاسخ نداده اید

۸۴- اگر $f(x)=\frac{۵}{۳۶}\sqrt[۵]{x}$، حاصل مشتق سوم تابع f در $x=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵۰}$ ۴) $\frac{۱}{۳۵\times ۱۲۵}$

شما پاسخ نداده اید

۸۵- اگر $f(x)=a.\cos(\sin^{-۱}(\frac{۱}{x}))$ و $f'(۲)=۱$ باشد، حاصل $f'(-۲)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

۸۶- در تابع $f(x)=(۵+x^۲)e^{\sin x}$ با دامنهٔ محدود شدهٔ $[-۱,۱]$، مقدار $(f^{-۱})'(۵)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

شما پاسخ نداده اید

۸۷- عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی $x+x^۲y^۲-y-۱=۰$ در محل برخورد با خط $y=x$ در ربع اول کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۸۸- مشتق تابع $f(x)=\cos x(۳-۴\cos^۲ x)\sin^۲ x$ به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

شما پاسخ نداده اید

۸۹- مشتق راست تابع $f(x)=e^{\sqrt{۱-\cos x}}$، در نقطهٔ به طول $x=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۹۰- اگر $\lim_{x\to ۰}\frac{f(x+۲)-f(۲)}{x}=۳$ و تابع f یک تابع با مشتق پیوسته باشد به طوری که $g(x)=f(۳x-۴)$، آن‌گاه $g'(۲)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۹

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۱- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ ۲ & -۱ & ۱\\ ۳ & ۴ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & -۱\\ -۲ & ۳ & ۰\\ ۴ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$ باشد، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس $AB^{۲}$ کدام است؟

۱) -۱۰ ۲) -۶

۳) -۲ ۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & ۳\\ ۳ & ۰ & ۴\\ ۲ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & -۲ & -۳\\ -۳ & ۲ & -۴\\ -۲ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع همهٔ درایه‌های ماتریس $A^{۲}+AB+۲B$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲

۳) ۱۴ ۴) ۱۶

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $[۱ \quad ۲ \quad -۱]\begin{bmatrix}x & ۲ & ۱\\ ۱ & -x & ۰\\ -۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=۰$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$

۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ با تعریف $a_{ij}=\begin{cases}j-i & ;i\le j\\ j+i & ;i>j\end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times ۳}$ با تعریف $b_{ij}=\begin{cases}i+j & ;i<j\\ i-j & ;i\ge j\end{cases}$، دو ماتریس باشند، ماتریس $A-B$ چگونه است؟

۱) متقارن ۲) پادمتقارن

۳) قطری ۴) بالا مثلثی

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- اگر $C=\begin{bmatrix}۴ & ۷ & ۱\\ ۳ & ۶ & ۲\\ ۳ & ۷ & ۱\end{bmatrix}$ و $BA^{t}=\begin{bmatrix}m & ۳\\ -۱ & ۵\\ ۵ & -۲\end{bmatrix}$، به ازای چه مقداری از m، درایه‌ای که در محل تلاقی سطر اول و ستون دوم ماتریس $A(CB)^{t}$ قرار دارد، برابر ۱۰ است؟

۱) ۲ ۲) -۲

۳) ۱ ۴) -۱

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- اگر A و B دو ماتریس پادمتقارن و C ماتریسی متقارن باشد و $C-B=۲A$، در این‌صورت حاصل $(C-۵I)^{۳}$ کدام است؟

۱) I ۲) $-I$

۳) $۱۲۵I$ ۴) $-۱۲۵I$

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۷- درصورت اضافه کردن یک واحد به a و کم کردن دو واحد از b، ماتریس پادمتقارن $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & d \\ ۰ & ۰ & a-b \\ a-c & ۱-b & ۰ \end{bmatrix}$، تبدیل به ماتریسی متقارن می‌شود. حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$
۲) $\frac{۵}{۷}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- مربع $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ تحت ماتریس $T=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ به یک متوازی الاضلاع تبدیل می‌شود. نسبت مساحت متوازی الاضلاع حاصل به مساحت مربع اولیه کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$ و بیضی به معادلهٔ $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ مفروض است. اگر تصویر این بیضی تحت ماتریس A، یک دایره باشد، نسبت $\frac{c}{b}$ در بیضی کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- حاصل $\begin{bmatrix} \sqrt{۳} & -۱ \\ ۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}^{۴۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}^{۴۲}$ کدام است؟

۱) $۲^{۶۳}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$
۲) $۲^{-۶۳}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$
۳) $۲^{۶۳}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$
۴) $۲^{-۶۳}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، ریاضیات گسسته ، ترکیبیات - ۱۳۹۶۱۲۰۴

۱۲۵- رابطهٔ R روی $A=\{a,b,c,d\}$، ترایایی و متقارن است ولی پاد متقارن نیست. رابطهٔ R حداقل چند عضو دارد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- رابطه‌های R و S روی مجموعهٔ غیرتهی A تعریف شده‌اند. اگر $R \subseteq S$، آنگاه کدام گزارهٔ شرطی زیر صحیح است؟

۱) اگر S بازتابی باشد، آنگاه R بازتابی است.
۲) اگر R تقارنی باشد، آنگاه S تقارنی است.
۳) اگر R پادتقارنی باشد، آنگاه S پادتقارنی است.
۴) اگر S پادتقارنی باشد، آنگاه R پادتقارنی است.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

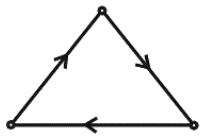
شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- اگر ماتریس $M=\begin{bmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 0 & y\\ z & 1 & 1\end{bmatrix}$ ماتریس مجاورت یک رابطهٔ متقارن باشد، کدام یک از ماتریس‌های زیر نیز بیانگر یک رابطهٔ متقارن است؟

۱) $\begin{bmatrix}0 & 0 & z\\ 0 & x & 0\\ y & 0 & 0\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}x & y & z\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}1 & z & y\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ y & 1 & x\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- به گراف مقابل حداقل چند یال اضافه کنیم تا رابطهٔ متناظر با آن، ترایایی شود؟



۱) ۶ ۲) ۳
۳) ۱ ۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- اگر M ماتریس متناظر با رابطهٔ R باشد، در کدام حالت R همواره حداقل ۳ ویژگی از ویژگی‌های بازتابی، ترایایی، پادتقارنی و تقارنی را دارد؟

۱) $M\wedge M^{T}<<I_n$ ۲) $M\wedge[1]_{n\times n}>>I_n$ ۳) $M\wedge M<<[1]_{n\times n}$ ۴) $M\wedge[1]_{n\times n}<<I_n$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- چند رابطهٔ پادمتقارن سه عضوی روی یک مجموعهٔ سه عضوی می‌توان تعریف کرد؟

۱) ۶۱ ۲) ۶۲ ۳) ۶۳ ۴) ۶۴

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، ریاضیات گسسته ، مجموعه ، ضرب دکارتي و رابطه - ۱۳۹۶۱۲۰۴

۱۲۱- چه تعداد از روابط زیر صحیح است؟

الف) $R\subseteq R^{2}$ ب) $Z\in Z^{2}$ پ) $N^{2}\subseteq R^{2}$ ت) $N\times Z\subseteq Z\times N$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- اگر A ، B و C به ترتیب مجموعه‌هایی ۳، ۴ و ۵ عضوی باشند، آنگاه مجموعهٔ $A\times C-A\times B$ حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۲ ۴) ۲۰

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- تعداد افرازهای مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e\}$ که شامل فقط یک مجموعهٔ دو عضوی باشند، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- رابطهٔ هم ارزی R که به صورت $aRb\Leftrightarrow a^{2}-b^{2}=a-b$ تعریف شده است، مجموعهٔ $\{-2,-1,0,1,2,3\}$ را به چند کلاس هم ارزی افـراز می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، ریاضي پایه ، مثلثات - ۱۳۹۶۱۲۰۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۱- معادلهٔ $|\sin x| - |\cos x| = ۰$ در بازهٔ $[۰, \frac{۳\pi}{۲}]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱
۲) صفر
۳) ۳
۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- جواب کلی معادلهٔ $\cos ۲x - \tan^۲ x = \frac{۱}{۶}$ کدام است؟ $(k \in Z)$

۱) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$
۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(\frac{۵\pi}{۲} + x)\cos(x - ۲\pi) = \sin^۴(\frac{۵\pi}{۴})$ کدام است؟ $(k \in Z)$

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$
۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$
۴) $k\pi + \frac{\pi}{۱۲}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- انتهای کمان جواب‌های معادلهٔ $\tan x \tan ۲x = ۱$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی، رئوس کدام چند ضلعی است؟

۱) مثلث
۲) مربع
۳) مستطیل
۴) شش ضلعی

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- کدام‌یک از گزینه‌های زیر جوابی برای معادلهٔ مثلثاتی $\sqrt{۳}\sin x = ۱ - \cos x$ است؟

۱) $k\pi - \frac{\pi}{۳}$
۲) $۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳}$
۳) $۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$
۴) $۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$

شما پاسخ نداده اید

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۰۹- اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=[x]+[-x]$، دورهٔ تناوب اصلی تابع $gof(x)$ کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.)

۱) $\frac{\pi}{۴}$

۲) $\frac{\pi}{۲}$

۳) π

۴) تابع متناوب نیست.

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- اگر f تابع متناوب با دامنهٔ R و دورهٔ تناوب اصلی ۳ باشد، آنگاه دورهٔ تناوب تابع $y=۲f(\frac{۳x}{۴}+۱)-۳$ کدام خواهد بود؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۷

۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- معادلهٔ $[\frac{[x]}{[x]+[-x]}]=[(x-[x])^{۱۰۰}]$ چند جواب دارد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) بی‌شمار

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- مجموعه جواب معادلهٔ $۳=[\frac{۱-۲x}{۲}]-[\frac{۲x-۱}{۲}]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $[\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲}]$

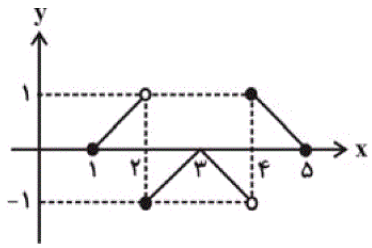
۲) $(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲}]$

۳) $[\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲})$

۴) $(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲})$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- نمودار تابع متناوب f در یک دورهٔ تناوب به شکل زیر است. ضابطهٔ تابع در بازهٔ $(۱۰۳,۱۰۴)$ کدام است؟



۱) $y=x+۱۰۱$

۲) $y=x+۱۰۲$

۳) $y=-x+۱۰۳$

۴) $y=-x+۱۰۴$

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۱- مشتق تابع $f(x)=\sin(\frac{\pi}{۳}+\tan^{-۱}\frac{x}{۲})$، در نقطهٔ $x=۲\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۶}$

۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

شما پاسخ نداده اید

۹۲- اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}۱+a\cos\pi x & ; \quad x>۱\\ bx^{۲}+x & ; \quad x\le ۱\end{cases}$ بر روی R مشتق‌پذیر باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) ۱- ۴) $\frac{۱}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۹۳- اگر $f'(۰)=g(۰)=۱$ و $f(x)=x+۱+(g(x))^{۵}$، مقدار $f''(۰)$ همواره برابر کدام گزینه است؟

۱) $۴g''(۰)$ ۲) $۵g''(۰)$

۳) $۴g''(۰)+۲۰$ ۴) $۵g''(۰)+۲۰$

شما پاسخ نداده اید

۹۴- اگر $g(x)=\frac{۱}{۴}\sqrt{۵x-۹}$ و $f(x)=\sin^{۲}\pi x$، مشتق تابع fog به ازای $x=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۴}\pi$ ۴) $\frac{۵}{۸}\pi$

شما پاسخ نداده اید

۹۵- اگر $f(x)=\frac{x+\sqrt{۲x}}{x-۱}\cot\frac{\pi}{x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) $\frac{-\pi}{۲}$

۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) π

شما پاسخ نداده اید

۹۶- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^{۳}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$، کدام است؟

۱) ۲۱- ۲) ۱۸-

۳) ۱۲ ۴) ۱۵

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

شما پاسخ نداده اید

۹۷- عرض از مبدأ خط قائم بر نمودار $x^3 + y^3 = 3xy + 3$، در نقطهٔ $(1,2)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۹۸- اگر $f(x) = x + e^x$ باشد، معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع f^{-1}، در نقطهٔ تلاقی آن با محور xها کدام است؟

۱) $2y - x = -1$
۲) $2y + x = 1$
۳) $y - 2x = 1$
۴) $y + 2x = 2$

شما پاسخ نداده اید

۹۹- اگر $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ باشد، معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع f^{-1}، در نقطهٔ $x = 2$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $y + 3x = 7$
۲) $y - 3x = -5$
۳) $3y + x = 5$
۴) $3y - x = 1$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- اگر $f(0) = 0$ و $f(x) = \sin(4x - f(x))$، آنگاه مقدار $f'(0)$ کدام است؟

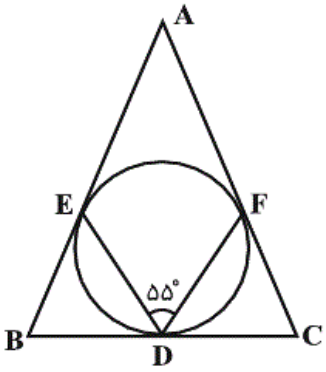
۱) -2
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) 2

شما پاسخ نداده اید

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

-۱۳۱ *(رضا عباسی‌اصل)*

با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



$$\overset{\frown}{EF} = ۲ \times ۵۵^\circ = ۱۱۰^\circ$$

حال:

$$\overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{EDF} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{EDF} = ۲۵۰^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{EDF} - \overset{\frown}{EF}}{۲} = \frac{۲۵۰^\circ - ۱۱۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۵۸، ۶۹ و ۷۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۳۲ *(محمدابراهیم کیتی‌زاده)*

فرض کنیم TT' طول مماس مشترک خارجی دو دایره باشد، داریم:

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} \Rightarrow ۱۲^۲ = d^۲ - (۳ - ۱۲)^۲$$

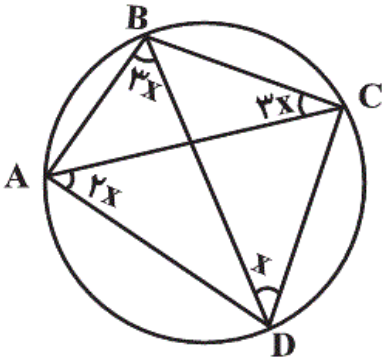
$$\Rightarrow d^۲ = ۲۲۵ \Rightarrow d = ۱۵$$

چون $d = R + R' = ۱۵$، پس دو دایره مماس خارج هستند و در نتیجه دو مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی دارند.

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

چون چهارضلعی محاطی است، پس دایره‌ای از چهار رأس آن می‌گذرد. با توجه بـه شکل داریم:



$$\overset{\frown}{AB} = ۲ \times ۳x = ۶x$$

$$\overset{\frown}{BC} = ۲ \times x = ۲x$$

$$\overset{\frown}{CD} = ۲ \times ۲x = ۴x$$

$$\overset{\frown}{DA} = ۲ \times ۳x = ۶x$$

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۶x + ۲x + ۴x + ۶x = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۸x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = ۲۰^\circ$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{۶ \times ۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ \\ \hat{B} &= \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC}}{۲} = \frac{۱۰ \times ۲۰^\circ}{۲} = ۱۰۰^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{\hat{B}} = \frac{۶۰^\circ}{۱۰۰^\circ} = \frac{۳}{۵}$$

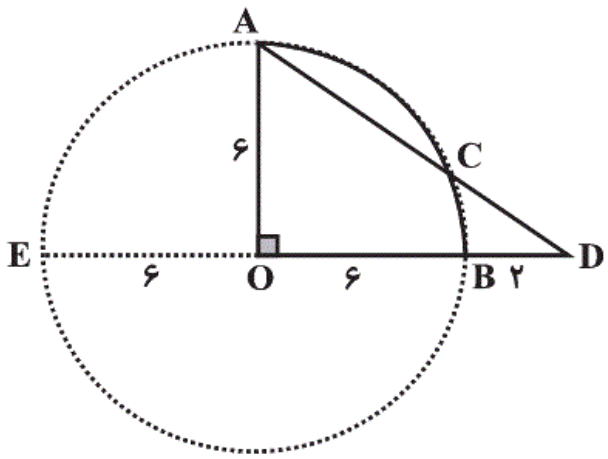
(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۳۴

بنا به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AOD داریم: $AD = ۱۰$

حال:



$$DC.DA = DB.DE$$

$$\Rightarrow DC \times ۱۰ = ۲ \times ۱۴$$

$$\Rightarrow DC = ۲/۸$$

و در نتیجه: $AC = AD - DC = ۱۰ - ۲/۸ = ۷/۲$

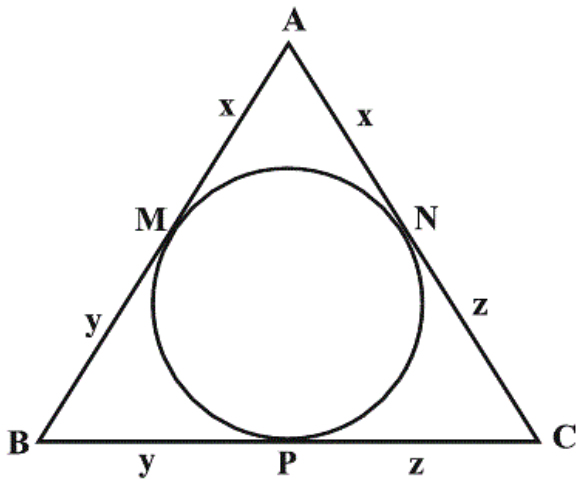
(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۷۴ تا ۷۸)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۳۵ (شروین سیاح نیا)

می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره با هم برابر است. بنـابراین داریم:



$$AM = AN = x\ ,BM = BP = y\ \ ,CN = CP = z$$

$$\begin{cases} AB = x + y = ۷ \\ AC = x + z = ۹ \\ BC = y + z = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow AB + AC + BC = ۲(x + y + z) = ۲۸$$

$$\Rightarrow x + y + z = ۱۴ \xrightarrow{x+y=۷} z = ۷$$

بزرگترین قطعهٔ ایجاد شده $z = ۷$ می‌باشد.

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۳۶ (محمدابراهیم کیتی‌زاده)

اگر $OO' = d$ طول خط‌المرکزین دو دایره باشد، آنگاه:

(طول مماس مشترک خارجی) $l = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$

(طول مماس مشترک داخلی) $l' = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲}$

$$\begin{cases} \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} = ۲\sqrt{۲۱} \\ \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲} = ۶ \end{cases} \Rightarrow -\begin{cases} d^۲ - (R - R')^۲ = ۸۴ \\ d^۲ - (R + R')^۲ = ۳۶ \end{cases}$$

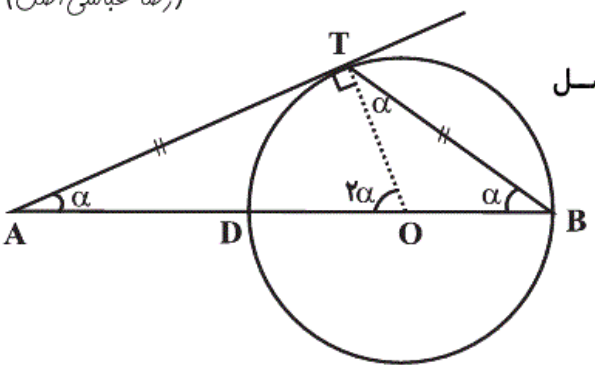
$$\Rightarrow ۴RR' = ۴۸ \Rightarrow RR' = ۱۲$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۷- (رضا عباسی‌اصل)



از T به مرکز دایره وصل می‌کنیم، داریم:

$$OT = OB \Rightarrow \overset{\frown}{OTB} = \hat{B} = \alpha$$

$$TA = TB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \alpha$$

$$\overset{\Delta}{BOT}: \text{زاویهٔ خارجی } \hat{AOT} = \alpha + \alpha = ۲\alpha$$

$$\overset{\Delta}{AOT}: ۳\alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

پس مثلث OAT یک مثلث قائم‌الزاویه با زوایای حادهٔ ۳۰° و ۶۰° است و داریم:

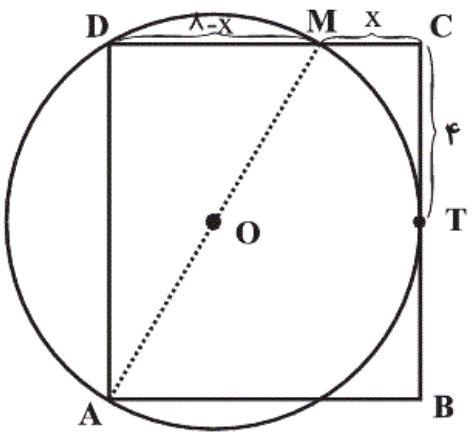
$$OT = \frac{۱}{\sqrt{۳}} AT = \frac{۱}{\sqrt{۳}}(۱۲) = ۴\sqrt{۳}, OA = ۲OT = ۸\sqrt{۳}$$

$$AD = OA - OD = ۸\sqrt{۳} - ۴\sqrt{۳} = ۴\sqrt{۳}$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۴۷ و ۵۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۸- (سیدامیر ستوده)



$$CM \times CD = CT^۲$$

$$\Rightarrow ۸x = ۱۶$$

$$\Rightarrow x = ۲$$

$$\Rightarrow MD = ۶, DA = ۸$$

$$\Rightarrow AM = ۱۰ \Rightarrow R = ۵$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌ی ۷۴ تا ۷۸)

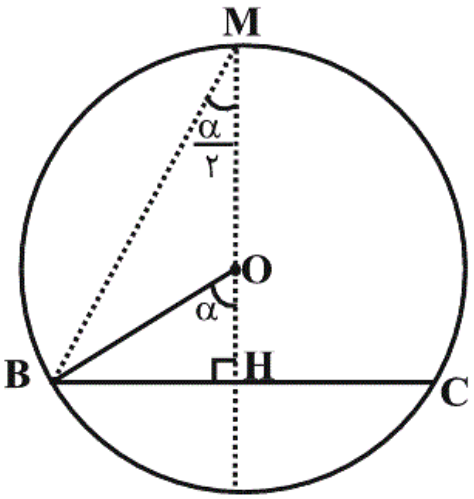
۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۳۹

$$\cot\frac{\alpha}{۲}=\frac{MH}{BH}=\frac{MH}{\frac{۱}{۲}BC}$$

$$\Rightarrow MH=\frac{۱}{۲}BC.\cot\frac{\alpha}{۲}$$

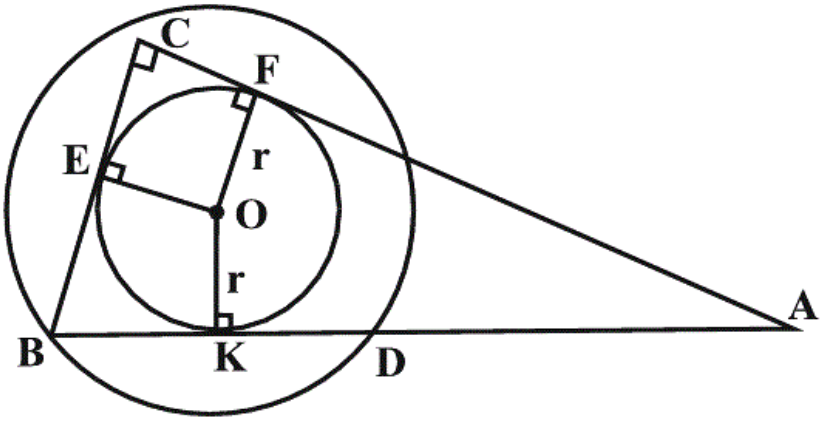


(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

چهارضلعی $OECF$ مربع است، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} BE = BC - CE = ۵ - r \Rightarrow BK = BE = ۵ - r \\ AF = AC - CF = ۱۲ - r \Rightarrow AK = AF = ۱۲ - r \end{cases}$$



اما وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC برابر $AB = \sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲} = ۱۳$ است. پس

می‌توان نوشت:

$$۵ - r + ۱۲ - r = ۱۳ \Rightarrow r = \frac{۱۷ - ۱۳}{۲} = ۲$$

چون OK بر BD عمود است. پس $BK = KD$ و در نتیجه:

$$BD = ۲BK = ۲(۵ - ۲) = ۶$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۴۸ و ۵۱ تا ۵۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۱ (علی شهرابی)

$$y = f(\frac{۲}{x}) \Rightarrow y' = \frac{-۲}{x^۲} f'(\frac{۲}{x})$$

$$\Rightarrow y'_+(-۱) = \frac{-۲}{(-۱)^۲} f'(\frac{۲}{(-۱)^+}) = -۲f'_-(-۲)$$

f زوج است، پس f' فرد است و $f'_-(-۲) = -f'_+(۲) = -۳$، پس:

$$y'_+(-۱) = -۲f'_-(-۲) = -۲(-۳) = ۶$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۹، ۱۶۳ و ۱۶۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۸۲ (قاسم کتابچی)

$$y = \underbrace{(۳x-۱)^۳}_{f(x)} \underbrace{\sqrt[۳]{۶x-۱}}_{g(x)} \Rightarrow y^{(۳)}(\frac{۱}{۳}) = f^{(۳)}(\frac{۱}{۳})g(\frac{۱}{۳})$$

$$f(x) = (۳x-۱)^۳ \Rightarrow f'(x) = ۳(۳x-۱)^۲ \times ۳ \Rightarrow f^{(۲)} = ۱۸(۳x-۱) \times ۳$$

$$f^{(۳)} = ۵۴ \times ۳ = ۱۶۲$$

نکته: در توابعی به فرم $y = f(x)g(x)$ اگر $x = x_۰$ ریشهٔ تابع f از مرتبهٔ n ام باشد و $g(x_۰) \neq ۰$، آنگاه:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x_۰)g(x_۰)$$

$$\Rightarrow y^{(۳)}(\frac{۱}{۳}) = ۱۶۲ \times \sqrt[۳]{۶ \times \frac{۱}{۳} - ۱} = ۱۶۲$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۳ (محمدمهدی وزیری)

$$f(x)=\left(\frac{\sin ۲x}{۱+\cos ۲x}\right)^{\frac{۱}{۳}}=(\frac{۲\sin x\cos x}{۲\cos^{۲} x})^{\frac{۱}{۳}}=(\tan x)^{\frac{۱}{۳}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۳}(\tan x)^{-\frac{۲}{۳}}\times(۱+\tan^{۲} x)$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۳}\times(۱)^{-\frac{۲}{۳}}\times(۱+۱)=\frac{۲}{۳}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۲ و

حسابان - مشتق توابع: صفحه‌های ۱۸۲ تا ۱۸۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۸۴ (محمدمهدی وزیری)

$$f(x)=\frac{۵}{۳۶}\times x^{\frac{۱}{۵}}\Rightarrow f^{(۳)}(۱)=\frac{۵}{۳۶}\times(\frac{۱}{۵})(-\frac{۴}{۵})(-\frac{۹}{۵})\times ۱=\frac{۱}{۲۵}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۵ (حمیدرضا کلاته‌جاری)

$$f(x) = a.\cos(\sin^{-1}(\frac{1}{x}))$$

$$f'(x) = -a.(\frac{\frac{-1}{x^2}}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}).\sin(\sin^{-1}(\frac{1}{x}))$$

$$f'(2) = 1 \Rightarrow -a \times \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$$

$$f'(-2) = -a \times \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{-1}{2} = -1$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۸۶ (مختار منصوری)

$$\begin{cases} 5 = (5+x^2)e^{\sin x} \Rightarrow x = 0 \\ f'(x) = 2xe^{\sin x} + (5+x^2)\cos x\, e^{\sin x} \Rightarrow f'(0) = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۷ (محمدمهدی وزیری)

$$y = x \Rightarrow x + x^{۴} - x - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow x^{۴} = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases} \text{ ربع اول} \Rightarrow y = x = ۱$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} ۱ + ۲xy^{۲} + ۲y'y \times x^{۲} - y' - ۰ = ۰$$

$$\xrightarrow{x=y=۱} ۱ + ۲ + ۲y' - y' = ۰ \rightarrow y' = -۳ = m \quad \text{(شیب مماس)}$$

عرض از مبدأ: $y - ۱ = -۳(x - ۱) \xrightarrow{x=۰} y = ۳ + ۱ = ۴$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

روش اول: با استفاده از رابطهٔ $\cos ۳x = ۴\cos^۳ x - ۳\cos x$ داریم:

$$f(x) = \cos x(۳ - ۴\cos^۲ x)\sin^۲ x = -(۴\cos^۳ x - ۳\cos x)\sin^۲ x$$

$$= -\cos ۳x \sin^۲ x$$

$\cos ۳x$ به ازای $x = \frac{\pi}{۶}$ صفر می‌شود، پس عامل صفر شونده است و می‌توان نوشت:

$$f'(\frac{\pi}{۶}) = ۳\sin(۳\times\frac{\pi}{۶})\sin^۲\frac{\pi}{۶} = ۳\times\frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

روش دوم: عبارت $۳ - ۴\cos^۲ x$ عامل صفر شونده است. پس:

$$f'(\frac{\pi}{۶}) = (۰ + ۸\sin\frac{\pi}{۶}\cos\frac{\pi}{۶})\cos\frac{\pi}{۶}\times\sin^۲\frac{\pi}{۶} =$$

$$۸\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

راه اول:

$$f(x)=e^{\sqrt{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}}=e^{\sqrt{۲}|\sin\frac{x}{۲}|}\xrightarrow{x>۰}f(x)=e^{\sqrt{۲}\sin\frac{x}{۲}}$$

$$f'_{+}(۰)=\sqrt{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\cos\frac{x}{۲}\times e^{\sqrt{۲}\sin\frac{x}{۲}}\Big|_{x=۰}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times۱\times۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

راه دوم:

$$f(x)=e^{\sqrt{۱-\cos(x)}}\Rightarrow f'(۰^{+})=?$$

با توجه به اینکه در حوالی صفر بحث می‌کنیم، مجازیم قبل از مشتق‌گیری، ابتـدا هـم ارز تابع را یافته و سپس از آن مشتق بگیریم.

$$\Rightarrow\sqrt{۱-\cos(x)}\simeq\frac{|x|}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x$$

$$f(x)=e^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}x}\xrightarrow{x>۰}f'(۰^{+})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}.e^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۰^{+})}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{۰}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۶۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۰ (فریدون ساعتی)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x+۲)-f(۲)}{x}=۳\xrightarrow{\text{تعریف مشتق}}f'(۲)=۳$$

$$g(x)=f(۳x-۴)\Rightarrow g'(x)=۳f'(۳x-۴)$$

$$g'(۲)=۳f'(۳(۲)-۴)=۳f'(۲)=۳\times ۳=۹$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۵۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

ریاضي ، هندسه‌ی تحلیلي ، ماتریس و دترمینان ، ماتریس، دترمینان و دستگاه - ۱۳۹۶۱۲۰۴

-۱۱۱ (آژنگ نوید)

باید سطر دوم A را در ستون سوم $B^۲$ ضرب کنیم.

$$B^۲=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & -۱\\ -۲ & ۳ & ۰\\ ۴ & ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\blacksquare & \blacksquare & -۱\\ \blacksquare & \blacksquare & ۰\\ \blacksquare & \blacksquare & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\blacksquare & \blacksquare & -۴\\ \blacksquare & \blacksquare & ۲\\ \blacksquare & \blacksquare & ۰\end{bmatrix}$$

$$AB^۲=\begin{bmatrix}\blacksquare & \blacksquare & \blacksquare\\ ۲ & -۱ & ۱\\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\blacksquare & \blacksquare & -۴\\ \blacksquare & \blacksquare & ۲\\ \blacksquare & \blacksquare & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\blacksquare & \blacksquare & \blacksquare\\ \blacksquare & \blacksquare & -۱۰\\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare\end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس دترمینان؛ صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۲- (کیوان دارابی)

$$X = A^۲ + AB + ۲B = A(A+B) + ۲B$$

اما $A + B = ۲I$ ، بنابراین داریم:

$$X = A(۲I) + ۲B = ۲A + ۲B = ۲(A+B) = ۲(۲I) = ۴I$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow X \text{ مجموع درایه‌های } = ۱۲$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۳- (عباس اسدی‌امیرآبادی)

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & ۲ & ۱ \\ ۱ & -x & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\begin{bmatrix} -x+۱ & -۲x-۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow -x^۲ + x - ۴x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow -x^۲ - ۳x - ۲ = ۰$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -۳$$

$$\alpha.\beta = \frac{c}{a} = ۲$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^۲ + \beta^۲}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{(-۳)^۲ - ۲(۲)}{۲}$$

$$= \frac{۹-۴}{۲} = \frac{۵}{۲}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۱۴ (امیرحسین ابومحبوب)

ماتریس $A-B=[m_{ij}]_{۳\times۳}$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m_{ij}=\begin{cases}j-i-i-j\ ;\ i<j\\ j-i-i+j\ ;\ i=j\\ j+i-i+j\ ;\ i>j\end{cases}\Rightarrow m_{ij}=\begin{cases}-۲i\ ;\ i<j\\ ۲j-۲i\ ;\ i=j\\ ۲j\ ;\ i>j\end{cases}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}۰ & -۲ & -۲\\ ۲ & ۰ & -۴\\ ۲ & ۴ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow (A-B)^t=-(A-B)$$

بنابراین ماتریس $A-B$ ، یک ماتریس پادمتقارن است.

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۸ و ۱۰۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۱۵ (مهدی حاجی‌نژادیان)

$$A(CB)^t=AB^tC^t=(BA^t)^tC^t$$

$$=\begin{bmatrix}m & -۱ & ۵\\ ۳ & ۵ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۳ & ۳\\ ۷ & ۶ & ۷\\ ۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم $=۳m-۶+۱۰=۱۰\Rightarrow m=۲$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان؛ صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۱۶ (سیدعادل‌رضا مرتضوی)

چون C ترکیب خطی دو ماتریس پادمتقارن است لذا خود پادمتقارن است، از طرفی گفته شده که C متقارن نیز هست، بنابراین C قطعاً ماتریس صفر است. پس:

$$(C-۵I)^۳=(O-۵I)^۳=-۱۲۵I^۳=-۱۲۵I$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۱۷ (علیرضا شریف‌خطیبی)

پس از اضافه کردن یک واحد به a و کم کردن دو واحد از b، ماتریس A به شکل زیر می‌شود:

$$A'=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & d \\ ۰ & ۰ & (۱+a)-(b-۲) \\ (۱+a)-c & ۱-(b-۲) & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱-(b-۲)=۱+a-(b-۲)\Rightarrow a=۰ \ (I) \\ ۱+a-c=d \xrightarrow{(I)} ۱-c=d\Rightarrow c+d=۱ \end{cases}$$

به کمک ماتریس پادمتقارن A نیز داریم:

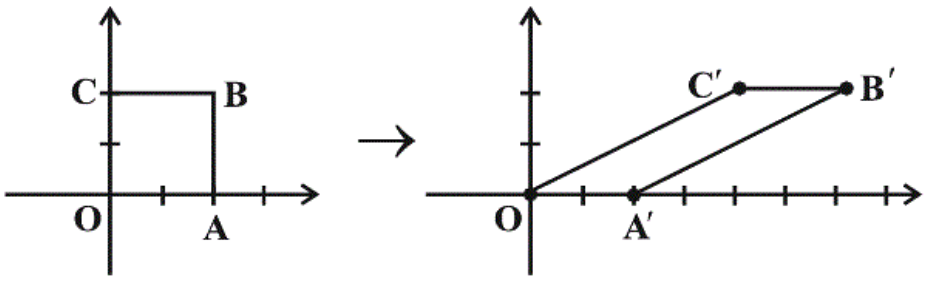
$$۱-b=-a+b \xrightarrow{(I)} b=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a+b+c+d=\frac{۳}{۲}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۶ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$



$$S_{OABC}=۲^۲=۴ \qquad S_{OA'B'C'}=۲\times ۲=۴$$

$$\frac{S_{OA'B'C'}}{S_{OABC}}=۱$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

نقطهٔ دلخواه $M=(x,y)$ روی بیضی و $M'=(x',y')$ تصویر نقطهٔ M تحت

اثر ماتریس را در نظر می‌گیریم. آنگاه داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=x' \\ -۲y=y' \Rightarrow y=\dfrac{-y'}{۲} \end{cases}$$

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱ \Rightarrow \frac{x'^۲}{a^۲}+\frac{y'^۲}{۴b^۲}=۱$$

چون تصویر حاصله، یک دایره است، بنابراین داریم: $a^۲=۴b^۲$

از طرفی: $a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۴b^۲=b^۲+c^۲$

$$\Rightarrow ۳b^۲=c^۲ \Rightarrow \frac{c}{b}=\sqrt{۳}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان؛ صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۰ (امیرحسین ابومحبوب)

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}^{۴۲} = (\sqrt{۲})^{۴۲} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}^{۴۲} = ۲^{۲۱}(R_{\frac{\pi}{۴}})^{۴۲}$$

$$= ۲^{۲۱} R_{۴۲(\frac{\pi}{۴})} = ۲^{۲۱} R_{(۱۰\pi+\frac{\pi}{۲})} = ۲^{۲۱} R_{\frac{\pi}{۲}}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{۳} & -۱ \\ ۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}^{۴۲} = ۲^{۴۲} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}^{۴۲} = ۲^{۴۲}(R_{\frac{\pi}{۶}})^{۴۲}$$

$$= ۲^{۴۲} R_{۴۲(\frac{\pi}{۶})} = ۲^{۴۲} R_{(۶\pi+\pi)} = ۲^{۴۲} R_{\pi}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}^{۴۲} \begin{bmatrix} \sqrt{۳} & -۱ \\ ۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}^{۴۲} = ۲^{۲۱} \times ۲^{۴۲} \times R_{\frac{\pi}{۲}} \times R_{\pi}$$

$$= ۲^{۶۳} R_{\frac{۳\pi}{۲}} = ۲^{۶۳} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: مشابه تمرین ۱۹ صفحه‌ی ۱۱۳)

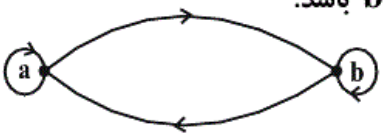
۱ ۲ ۳✓ ۴

ریاضي ، ریاضیات گسسته ، ترکیبیات - ۱۳۹۶۱۲۰۴

-۱۲۵ (کیوان دارابی)

برای آن که R پادمتقارن نباشد، لازم است حداقل یک زوج مرتب و وارون آن را در رابطه داشته باشیم (مانند (a,b) و (b,a)). اما چنین رابطه‌ای ترایایی نیست.

در واقع وجود یال دو طرفه بین a و b در گراف متناظر با رابطهٔ ترایایی ایجاب می‌کند که گراف دارای دو طوقه در رئوس a و b باشد.



بنابراین چنین رابطه‌ای حداقل ۴ عضو دارد.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۶- (کیوان دارابی)

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم؛ مثلاً مجموعهٔ $A = \{a,b,c\}$ را مثال می‌زنیم.

۱) مثال نقض : $R = \{(a,a)\},\ S = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$

۲) مثال نقض : $R = \{(a,b),(b,a)\},\ S = \{(a,b),(b,a),(a,c)\}$

۳) مثال نقض : $R = \{(a,b)\},\ S = \{(a,b),(b,a)\}$

حکم گزینهٔ «۴» را می‌توان به کمک برهان خلف اثبات کرد.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۱ | ۲ | ۳ | ۴✓

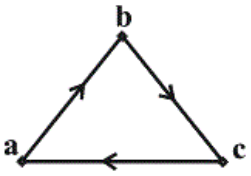
۱۲۷- (سعید زوارقی)

ماتریس متناظر با یک رابطهٔ متقارن، یک ماتریس متقارن است. برای اینکه ماتریس M متقارن باشد باید درایه‌های نظیر در طرفین قطر اصلی با هم برابر باشند، با این توضیحات معلوم است که $x = 0$ و $y = 1$ و $z = 0$ است. پس در گزینهٔ ۳، ماتریس متقارن است.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۱ | ۲ | ۳✓ | ۴

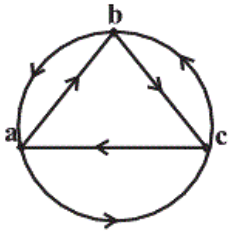
۱۲۸- (محمد صحت‌کار)



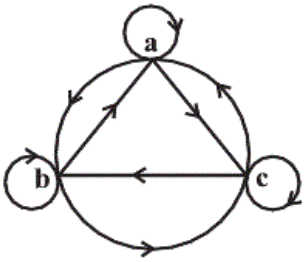
$aRb, bRc \Rightarrow aRc$

به همین ترتیب cRb و bRa.

با افزودن یال‌های متناظر با این زوج‌های مرتب، گراف به صورت مقابل در می‌آید.



حال گراف به سه طوقه نیز نیاز دارد تا رابطهٔ متناظر با آن ترایایی شود.



(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۱✓ | ۲ | ۳ | ۴

۱۲۹- (سعید زوارقی)

اگر $M \wedge [1]_{n\times n} << I_n$، درایه‌های خارج قطر اصلی M، همگی صفرند و فقط درایه‌های قطر اصلی آن می‌تواند یک باشد پس R تما ترایایی، تقارنی و پادتقارنی است.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۱ | ۲ | ۳ | ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۳۰ (کیوان دارابی)

فرض کنیم A ماتریس متناظر با چنین رابطه‌ای باشد:

$$A=\begin{bmatrix} \times & \bigcirc & \square \\ \bigcirc & \times & \triangle \\ \square & \triangle & \times \end{bmatrix}$$

حالت‌هایی که در آن، رابطه‌ای پادمتقارن شامل ۳ عضو می‌توان نوشت عبارتند از:

۱) هر سه درایهٔ قطر اصلی برابر یک و درایه‌های خارج قطر اصلی، همگی صفر باشند که عملاً شامل یک حالت است.

۲) دو درایه روی قطر اصلی و یکی از درایه‌های خارج قطر اصلی برابر یک باشند. تعداد رابطه‌ها در این حالت برابر است با:

$$\binom{۳}{۲}\times\binom{۶}{۱}=۱۸$$

۳) یک درایه روی قطر اصلی برابر یک باشد و سپس دو زوج از سه زوج مشخص شدهٔ خارج قطر اصلی را انتخاب کرده و در هر کدام، یکی از درایه‌ها را برابر یک و دیگری را صفر انتخاب کنیم. تعداد رابطه‌ها در این حالت برابر است با:

$$\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۲}\times\binom{۲}{۱}^{۲}=۳۶$$

۴) درایه‌های قطر اصلی همگی برابر صفر باشند و در سه زوج مشخص شدهٔ خارج قطر اصلی، هر کدام شامل یک درایهٔ ۱ و یک درایهٔ صفر باشند. تعداد رابطه‌ها در این حالت برابر است با:

$$\binom{۳}{۳}\times\binom{۲}{۱}^{۳}=۸$$

پس تعداد کل رابطه‌ها برابر است با:

$$۱+۱۸+۳۶+۸=۶۳$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

ریاضي ، ریاضیات گسسته ، مجموعه ، ضرب دکارتي و رابطه - ۱۳۹۶۱۲۰۴

-۱۲۱ (عباس ثروتی)

اعضای $R^۲$ و $Z^۲$ به صورت زوج مرتب هستند، در حالی که اعضای R و Z، این گونه نیستند، بنابراین $R\not\subseteq R^۲$ و $Z\not\subseteq Z^۲$. از آن‌جا که $N\subseteq R$، پس رابطهٔ $N^۲\subseteq R^۲$ همواره برقرار است ولی با توجه به آن که $Z\not\subseteq N$، پس $N\times Z\not\subseteq Z\times N$.

(جبر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۶۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۲ (نادر حاجی‌زاده)

$|A| = ۳ \ , \ |B| = ۴ \ , \ |C| = ۵$

$|A \times C - A \times B| = |A \times (C - B)| = |A| \times |C - B|$

حداکثر $|A| \times |C - B|$ وقتی است که $C \cap B = \varnothing$، به عبارتی:

$|C - B| = |C| - |C \cap B| = |C|$

بنابراین: $|A \times C - A \times B|_{max} = |A| \times |C| = ۱۵$

(جبر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۵۶ تا ۶۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۲۳ (سیدامیر ستوده)

افرازهای مورد نظر به یکی از دو صورت زیر هستند:

$\{-,-\} \cup \{-,-,-\}$ یا $\{-,-\} \cup \{-\} \cup \{-\} \cup \{-\}$

یعنی یک مجموعهٔ دو عضوی و یک مجموعهٔ سه عضوی یا یک مجموعهٔ دو عضوی و سه مجموعهٔ یک عضوی.

بنابراین تعداد افرازهای مورد نظر برابر با $\binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۲} = ۲۰$ است.

(جبر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۵ و ۶۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۲۴ (حمید کروسی)

$aRb \Leftrightarrow a^۲ - b^۲ = a - b$

هدف ما پیدا کردن تعداد کلاس‌ها است، پس می‌خواهیم بدانیم هر عضو، غیر از خودش چه هم کلاس‌هایی دارد.

$a \neq b \Rightarrow (a - b)(a + b) = a - b \Rightarrow a + b = ۱$

مجموع a و b های هم کلاس باید دو به دو برابر با ۱ باشد.

$\Rightarrow A_۱ = \{-۲, ۳\}, A_۲ = \{-۱, ۲\}, A_۳ = \{۰, ۱\}$

(جبر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

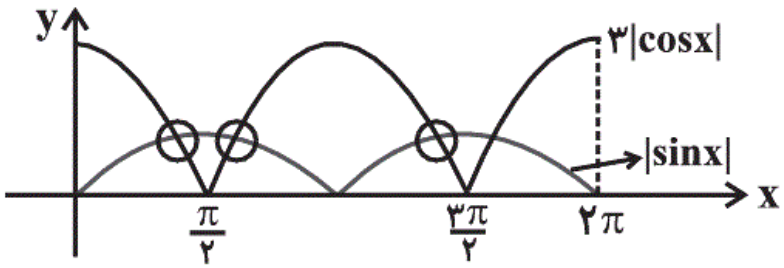
۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۰۱ (سیدمحمد رضوی‌پور)

$$۳|\cos x| - |\sin x| = ۰ \Rightarrow ۳|\cos x| = |\sin x|$$

نمودار دو تابع $۳|\cos x|$ و $|\sin x|$ را رسم می‌کنیم. همانطور که پیداست دو نمودار در بازهٔ $[۰, \frac{۳\pi}{۲}]$ سه بار همدیگر را قطع می‌کنند. پس معادله ۳ جواب دارد.



(حسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$۲\cos^۲ x - ۱ - \tan^۲ x = \frac{۱}{۶} \Rightarrow ۲\cos^۲ x - (۱ + \tan^۲ x) = \frac{۱}{۶}$$

$$۲\cos^۲ x - \frac{۱}{\cos^۲ x} = \frac{۱}{۶} \xrightarrow{\cos^۲ x = t} ۲t - \frac{۱}{t} = \frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow ۱۲t^۲ - t - ۶ = ۰ \Rightarrow (۴t - ۳)(۳t + ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \\ \cos x = \cos\frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \\ t = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow \cos^۲ x = -\frac{۲}{۳} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

به‌طور خلاصه جواب $x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ است.

(حسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۳- (آریان حیدری)

$$\begin{cases}\sin(\frac{5\pi}{2}+x)=\cos x\\ \cos(x-2\pi)=\cos x\Rightarrow \cos x\times\cos x=(-\frac{\sqrt{2}}{2})^4\Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4}\\ \sin(\frac{5\pi}{4})=\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\\ \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

جواب را به‌طور خلاصه می‌توان به فرم $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ نمایش داد.

(حسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۶- (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

$$\tan x\tan 2x=1\Rightarrow \tan 2x=\frac{1}{\tan x}\Rightarrow \tan 2x=\cot x$$

$$\Rightarrow \tan 2x=\tan(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{6}$$

جواب‌های معادله در بازه‌ی $[0,2\pi]$، عبارتند از: $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$. پس انتهای کمان جواب‌های معادلهٔ داده شده بر روی دایرهٔ مثلثاتی، مستطیل می‌باشد. توجه کنید که تانژانت به ازای $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ تعریف نشده است.

(حسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۰۸ (حسن نصرتی ناهوک)

$$\sqrt{۳}\sin x+\cos x=۱\xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}}\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۶})=\sin(\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi\\ x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

(حسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

ریاضي ، ریاضي پایه ، تابع حسابان - ۱۳۹۶۱۲۰۴

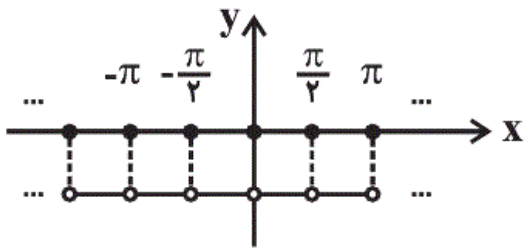
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۹- (سعید مدیرخراسانی)

$$gof(x) = [\sin x] + [-\sin x]$$

در این تست بهترین روش حل، رسم نمودار تابع است.

$$[\sin x] + [-\sin x] = \begin{cases} ۰ & ; x = \frac{k\pi}{۲} \quad (k \in Z) \\ -۱ & ; x \neq \frac{k\pi}{۲} \quad (k \in Z) \end{cases}$$



با توجه به نمودار $T = \frac{\pi}{۲}$ است.

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۷- (فریدون ساعتی)

می‌دانیم تابع f متناوب است هرگاه عدد حقیقی مخالف صفر مانند T موجود باشد، به‌طوری که $f(x+T) = f(x)$ بنابراین $f(x+۳) = f(x)$، پس:

$$۲f(\frac{۳(x+T)}{۴} + ۱) - ۳ = ۲f(\frac{۳x}{۴} + ۱) - ۳$$

$$\Rightarrow f(\frac{۳(x+T)}{۴} + ۱) = f(\frac{۳x}{۴} + ۱) \Rightarrow f(\frac{۳x}{۴} + \frac{۳T}{۴} + ۱) = f(\frac{۳x}{۴} + ۱)$$

دورهٔ تناوب

$$\Rightarrow \frac{۳T}{۴} = ۳ \Rightarrow T = ۴$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

می‌دانیم : $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ;x\in Z\\ -1 & ;x\notin Z\end{cases}$

باید x های غیرصحیح انتخاب شود.

$$0\le x-[x]<1\Rightarrow 0\le (x-[x])^{100}<1\Rightarrow [(x-[x])^{100}]=0$$

$$\Rightarrow \frac{[x]}{[x]+[-x]}=0\Rightarrow [x]=0\Rightarrow 0<x<1$$

در نتیجه معادله بی‌نهایت جواب دارد.

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۰۵

راه حل اول:

$$\frac{۲x-۱}{۲}=A\Rightarrow [A]-[-A]=۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\in Z\Rightarrow ۲A=۳\Rightarrow A=\frac{۳}{۲}\notin Z \\ A\notin Z\Rightarrow [A]-(-[A]-۱)=۳\Rightarrow ۲[A]=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow [A]=۱\xrightarrow{A\notin Z} ۱<A<۲$$

$$\Rightarrow ۱<\frac{۲x-۱}{۲}<۲\Rightarrow \frac{۳}{۲}<x<\frac{۵}{۲}$$

راه حل دوم:

تناقض با گزینه‌های ۱ و ۳ $x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow [\frac{۳-۱}{۲}]-[\frac{۱-۳}{۲}]=۱-(-۱)=۲\neq ۳\Rightarrow$

تناقض با گزینهٔ ۲ $x=\frac{۵}{۲}\Rightarrow [\frac{۵-۱}{۲}]-[\frac{۱-۵}{۲}]=۲-(-۲)=۴\neq ۳\Rightarrow$

بنابراین گزینهٔ «۴» صحیح است.

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۲- (کاظم اجلالی)

با توجه به این که دورهٔ تناوب تابع برابر ۴ است، نمودار تابع در بازهٔ $(۱۰۳,۱۰۴)$ مانند بازهٔ $(۳,۴)$ خواهد بود. یعنی نمودار خطی است که از نقاط $(۱۰۳,۰)$ و $(۱۰۴,-۱)$ عبور خواهد کرد و معادلهٔ آن به‌صورت $y=-x+۱۰۳$ نوشته می‌شود.

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

ریاضي ، ديفرانسيل و انتگرال - گواه ، مشتق تابع ، مشتق - ۱۳۹۶۱۲۰۴

۹۱- (سراسری ریاضی - ۹۶)

$$f(x)=\sin(\frac{\pi}{۳}+\tan^{-۱}\frac{x}{۲})$$

$$\Rightarrow f'(x)=(\frac{\pi}{۳}+\tan^{-۱}\frac{x}{۲})'\cos(\frac{\pi}{۳}+\tan^{-۱}\frac{x}{۲})$$

$$\Rightarrow f'(x)=(۰+\frac{\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{x^{۲}}{۴}})\cos(\frac{\pi}{۳}+\tan^{-۱}\frac{x}{۲})$$

$$\Rightarrow f'(۲\sqrt{۳})=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۱۲}{۴}}\cos(\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳})=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱+۳}\cos(\frac{۲\pi}{۳})=\frac{\frac{۱}{۲}}{۴}\cos(\frac{۲\pi}{۳})$$

$$=\frac{۱}{۸}(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۱۶}$$

(حسابان - مشتق توابع: صفحه‌های ۱۸۲ تا ۱۹۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تابع f در هریک از ضابطه‌ها، مشتق‌پذیر است، بنابراین برای اینکه f روی R مشتق‌پذیر باشد، باید در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، لذا:

۱) باید در $x=1$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(1+a\cos\pi x) = 1-a$$

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(bx^2+x) = b+1$$

$$\xrightarrow[\text{پیوستگی}]{} 1-a=b+1 \Rightarrow a+b=0 \quad (*)$$

۲) $f'_-(1)=f'_+(1)$:

$$f(x)=\begin{cases}1+a\cos\pi x & , x>1\\ bx^2+x & , x\le 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-a\pi\sin\pi x & , x>1\\ 2bx+1 & , x<1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}f'_+(1)=0\\ f'_-(1)=2b+1\end{cases} \Rightarrow 2b+1=0 \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

با قرار دادن $b=-\frac{1}{2}$ در رابطهٔ $(*)$، a را می‌یابیم:

$$a-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۴۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

برای محاسبهٔ $f''(۰)$ در تساوی فوق مقدار $x=۰$ قرار می‌دهیم:

$$f''(۰)=۲۰(g(۰))^{۳}(g'(۰))^{۲}+۵(g(۰))^{۴}g''(۰) \quad (**)$$

از طرفی با قرار دادن $x=۰$ در تساوی $(*)$ و با توجه به تساوی‌های $f'(۰)=g(۰)=۱$، خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{(*)} f'(۰)=۱+۵(g(۰))^{۴}g'(۰) \Rightarrow ۱=۱+۵(۱)^{۴}g'(۰)$$

$$\Rightarrow g'(۰)=۰$$

بنابراین با قرار دادن مقادیر $g'(۰)=۰$ و $g(۰)=۱$ در تساوی $(**)$ خواهیم داشت:

$$f''(۰)=۲۰(۱)^{۳}(۰)^{۲}+۵(۱)^{۴}g''(۰) \Rightarrow f''(۰)=۵g''(۰)$$

راه حل دوم: با توجه به اینکه بعد از مشتق اول و قراردادن $x=۰$ در آن $g'(۰)=۰$ حاصل شد برای محاسبهٔ مشتق عبارت $۵(g(x))^{۴}.g'(x)$ تنها کافی است از عامل صفرشونده مشتق بگیریم بنابراین:

$$f''(x)=۰+۵(g(x))^{۴}.g''(x) \Rightarrow f''(۰)=۵g''(۰)$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۹۴ *(سراسری ریاضی - ۹۱)*

با کمک فرمول مشتق تابع مرکب، مشتق fog را در $x=۲$ می‌نویسیم:

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x)) \Rightarrow (fog)'(۲)=g'(۲)f'(g(۲))$$

چون $g(۲)=\frac{۱}{۴}\sqrt{۵(۲)-۹}=\frac{۱}{۴}$، بنابراین:

$$(fog)'(۲)=g'(۲)f'(\frac{۱}{۴}) \quad (*)$$

با مشتق‌گیری از توابع f و g خواهیم داشت:

$$f(x)=\sin^{۲}\pi x \Rightarrow f'(x)=۲\pi\sin\pi x\cos\pi x$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{۱}{۴}\right)=۲\pi\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۴}=\pi$$

$$g(x)=\frac{۱}{۴}\sqrt{۵x-۹} \Rightarrow g'(x)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۵}{۲\sqrt{۵x-۹}} \Rightarrow g'(۲)=\frac{۵}{۸}$$

بنابراین از $(*)$ و مقادیر به دست آمده، حاصل مشتق را می‌یابیم:

$$(fog)'(۲)=\frac{۵}{۸}\times\pi=\frac{۵\pi}{۸}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۵- (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۶)

حد خواسته شده، مشتق تابع f در $x=۲$ است، یعنی $f'(۲)$ را می‌خواهیم، از آنجایی که $\cot\frac{\pi}{x}$ در $x=۲$ صفر می‌شود، لذا برای محاسبهٔ $f'(۲)$ کافی است از آن مشتق گرفته و در بقیهٔ عبارت ضرب کرده و سپس مقدار $x=۲$ را قرار دهیم:

$$\left(\cot\frac{\pi}{x}\right)' = -\left(\frac{-\pi}{x^۲}\right)\left(۱+\cot^۲\frac{\pi}{x}\right)$$

$$\Rightarrow f'(۲) = \frac{۲+\sqrt{۲\times ۲}}{۲-۱}\left(\frac{\pi}{۴}\right)\left(۱+\cot^۲\frac{\pi}{۲}\right) = \pi$$

(حسابان - مشتق توابع: صفحه‌های ۱۸۲ تا ۱۸۴ و ۱۸۷ تا ۱۹۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۶- (سراسری تجربی - ۹۵)

می‌دانیم $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = f'(۲)$، پس باید ابتدا $f'(x)$ و از روی آن $f'(۲)$ را محاسبه کنیم.

$$f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۳ \Rightarrow f(x) = \left(\frac{x+۲}{۲x-۳}\right)^{\frac{۳}{۲}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{۳}{۲}\left(\frac{x+۲}{۲x-۳}\right)^{\frac{۳}{۲}-۱}\left(\frac{x+۲}{۲x-۳}\right)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{۳}{۲}\left(\frac{x+۲}{۲x-۳}\right)^{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{-۷}{(۲x-۳)^۲}\right)$$

$$\Rightarrow f'(۲) = \frac{۳}{۲}\times\sqrt{\frac{۲+۲}{۴-۳}}\times\frac{-۷}{(۴-۳)^۲} = -۲۱$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۷

شیب خط مماس را با محاسبهٔ مشتق ضمنی در نقطهٔ $(۱,۲)$ می‌یابیم:

$$x^۳+y^۳=۳xy+۳\Rightarrow x^۳+y^۳-۳xy-۳=۰$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{۳x^۲-۳y}{۳y^۲-۳x}$$

$$\xrightarrow[y=۲]{x=۱} y'=-\frac{۳(۱)^۲-۳(۲)}{۳(۲)^۲-۳(۱)}=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

پس شیب خط قائم برابر $-\frac{۱}{\frac{۱}{۳}}=-۳$ است و در نتیجه معادلهٔ خط قائم در نقطهٔ $(۱,۲)$ برابر است با:

$$y-۲=-۳(x-۱)$$

برای محاسبهٔ عرض از مبدأ، $x=۰$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$y-۲=-۳(۰-۱)\Rightarrow y=۵$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

با توجه به ضابطهٔ f:

$$f(x)=x+e^x\Rightarrow f'(x)=۱+e^x\Rightarrow f'(۰)=۱+۱=۲$$

$$\Rightarrow (f^{-۱})'(۱)=\frac{۱}{۲}$$

پس شیب خط قائم بر منحنی برابر -۲ است و در نتیجه معادلهٔ خط قائم در نقطهٔ $A'(۱\ ,\ ۰)$ برابر است با:

$$y-۰=-۲(x-۱)\Rightarrow y=-۲x+۲\Rightarrow y+۲x=۲$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۷ تا ۱۶۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۹ (سراسری ریاضی - ۹۴)

چون $x = ۲$ طول نقطه بر روی تابع $f^{-۱}$ است، پس عرض نقطهٔ متناظر روی تابع f می‌باشد. ابتدا $f(x)$ یا y را مساوی ۲ قرار می‌دهیم تا طول تابع f به دست آید.

$$f(x) = x^۳ - x^۲ + ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱$$

$$\Rightarrow A(۱ , ۲) \in f \Rightarrow A'(۲ , ۱) \in f^{-۱}$$

حال از رابطهٔ $(f^{-۱})'(۲) = \frac{۱}{f'(۱)}$ شیب خط مماس بر تابع معکوس را به دست می‌آوریم.

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۲x + ۲ \Rightarrow f'(۱) = ۳$$

$$\Rightarrow (f^{-۱})'(۲) = \frac{۱}{۳} \quad (\text{شیب خط مماس بر } f^{-۱})$$

$$\left.\begin{matrix} m = -۳ & (\text{شیب خط قائم بر } f^{-۱}) \\ A'(۲ , ۱) & \end{matrix}\right\} \Rightarrow y - ۱ = -۳(x - ۲)$$

$$\Rightarrow y + ۳x = ۷$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۵۷ و ۱۵۸)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۰۰ (سراسری تجربی - ۷۱)

$$f(x) = \sin(۴x - f(x))$$

$$\Rightarrow f'(x) = (۴ - f'(x))\cos(۴x - f(x))$$

$$\Rightarrow f'(۰) = (۴ - f'(۰))\cos(۰ - f(۰))$$

اما $f(۰) = ۰$، در نتیجه:

$$\Rightarrow f'(۰) = (۴ - f'(۰))\cos(۰) \Rightarrow f'(۰) = ۴ - f'(۰)$$

$$\Rightarrow ۲f'(۰) = ۴ \Rightarrow f'(۰) = ۲$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۵۴)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.kanoon.ir

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا