سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://telegram.me/riazisara (@riazisara)

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ریاضي ، هندسه ۲ ، هندسه‌ی فضايي (هندسه‌ی ۲) ، هندسه‌ی فضايي - ۱۳۹۶۰۲۱۵

۱۳۱- خط D بر دو صفحه‌ی متمایز P و P' عمود است و صفحه‌ی Q، صفحه‌ی P را در خط Δ قطع می‌کند. در این‌صورت کدام گزینه درست است؟

۱) Q عمود بر P' است.

۲) Q موازی با P' است.

۳) Q، صفحه‌ی P' را در خطی عمود بر Δ قطع می‌کند.

۴) Q، صفحه‌ی P' را در خطی موازی با Δ قطع می‌کند.

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- کدام گزاره‌ی زیر همواره درست نیست؟

۱) اگر دو صفحه متقاطع بر یک صفحه عمود باشند، فصل مشترک آنها بر آن صفحه عمود است.

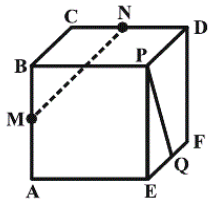
۲) اگر دو صفحه موازی باشند، هر صفحه که بر یکی از این دو صفحه عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

۳) اگر یکی از دو صفحه‌ی متقاطع، بر صفحه‌ای عمود باشد، دیگری نیز بر آن صفحه عمود است.

۴) اگر صفحه‌ای بر فصل مشترک دو صفحه‌ی متقاطع عمود باشد، بر هر دو صفحه عمود است.

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- در مکعب زیر، نقاط M، N و Q به‌ترتیب وسط یال‌های AB، CD و EF قرار دارند. زاویه‌ی بین خط‌های MN و PQ کدام است؟



۱) 60°

۲) 45°

۳) 90°

۴) نمی‌توان تعیین کرد.

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- صفحه‌ی P بر P' عمود است هرگاه:

۱) خطی از صفحه‌ی P بر فصل مشترک دو صفحه عمود باشد.

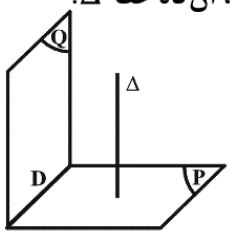
۲) خطی عمود بر P با P' موازی باشد.

۳) یک خط از صفحه‌ی P بر دو خط دلخواه از صفحه‌ی P' عمود باشد.

۴) هر خط در صفحه‌ی P بر صفحه‌ی P' عمود باشد.

شما پاسخ نداده اید

۱۳۵- دو صفحه‌ی P و Q بر هم عمودند و خط D فصل مشترک آن‌ها است. اگر خط Δ بر صفحه‌ی P عمود باشد، آن‌گاه خط Δ:



۱) بر تمامی خط‌های صفحه‌ی Q که با خط D موازی هستند، عمود است.

۲) با تمامی خط‌های صفحه‌ی Q که با خط D موازی هستند، موازی است.

۳) بر تمامی خط‌های صفحه‌ی Q که بر خط D عمود هستند، عمود است.

۴) با تمامی خط‌های صفحه‌ی Q موازی است.

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- دو نقطه‌ی ثابت A و B و خط d که در هیچ‌کدام از صفحه‌های گذرنده از این دو نقطه قرار ندارد، مفروض‌اند. نقطه‌ی C را روی خط d چنان در نظر می‌گیریم که $CA = CB$ باشد. براساس شرایط مختلف قرار گرفتن خط d در فضا، تعداد جواب‌های ممکن C، کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- خط L بر صفحه‌ی P واقع است، B و C دو نقطه‌ی متمایز در صفحه‌ی P هستند و خط BC در نقطه‌ی C بر L عمود است. اگر A نقطه‌ای در فضا باشد به گونه‌ای که AB بر صفحه‌ی P عمود گردد، کدام گزینه درست است؟

۱) L بر AB عمود است ولی بر AC عمود نیست.
۲) L بر هر دو خط AB و AC عمود است.
۳) L بر AC عمود است ولی بر AB عمود نیست.
۴) L بر هیچ کدام از دو خط AB و AC عمود نیست.

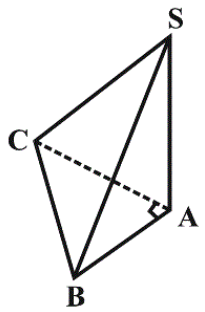
شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- خط L بر صفحه‌ی مثلث ABC عمود است. چند صفحه‌ی موازی با L می‌توان رسم کرد، که هر سه رأس مثلث یاد شده، از آن به یک فاصله باشند؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) نشدنی

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $(A = ۹۰^\circ$، $AB = ۳$ و $AC = ۳\sqrt{۳})$، قاعده‌ی هرم SABC است. که یال SA برقاعده عمود می‌باشد. طول عمود مشترک دو خط متنافر SA و BC کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{۳\sqrt{۶}}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

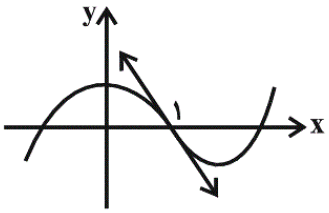
۱۴۰- چند پاره‌خط مانند AH عمود بر خط $d (d \parallel P)$ وجود دارد که نقطه‌ی H روی خط d ثابت و نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P متحرک باشد؟

۱) بی‌شمار
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

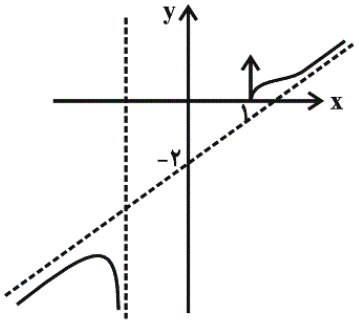
۸۳- اگر نمودار تابع $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx+۲$ به‌صورت زیر باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟



۱) $(-۳,۱)$
۲) $(۳,۱)$
۳) $(-۳,۰)$
۴) $(۳,۰)$

شما پاسخ نداده اید

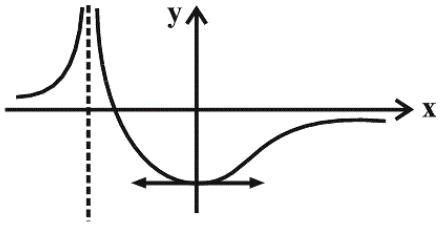
۸۴- اگر قسمتی از تابع $y=x\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$ به‌صورت زیر باشد، معادله‌ی مجانب قائم تابع کدام است؟



۱) $x=-۲$
۲) $x=-۳$
۳) $x=-۱$
۴) $x=-۴$

شما پاسخ نداده اید

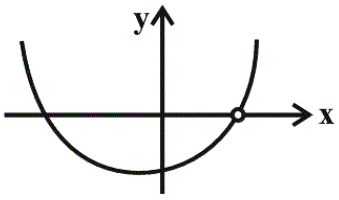
۸۵- شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\frac{ax^{۲}+bx-۱}{x^{۲}+cx+۴}$ است، $f(-۱)$ کدام است؟



۱) صفر
۲) $-\frac{۱}{۸}$
۳) -۱
۴) $-\frac{۳}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۸۶- شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=\frac{x^{۳}-۱۲x+a}{x-b}$ است. عرض نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع کدام است؟



۱) -۸
۲) -۹
۳) -۱۰
۴) -۱۱

شما پاسخ نداده اید

۸۷- ذره‌ای روی مسیر $\sqrt{xy}+۲x=y$ در حال حرکت است. اگر در نقطه‌ی $(۱,۴)$ مولفه‌ی x آن با سرعت ۲ متر بر ثانیه کاهش یابد، سرعت مولفه‌ی y آن چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۸
۲) ۴
۳) -۴
۴) -۸

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۸- شخصی بر چرخ و فلکی به شعاع ۱۰ متر سوار شده است که در هر دو دقیقه یک دور می‌زند. وقتی فاصله‌ی افقی شخص از خط قائم گذرنده از مرکز چرخ و فلک برابر ۵ متر باشد، اندازه‌ی سرعت حرکت شخص در راستای عمودی چند رادیان بر دقیقه خواهد بود؟

۱) ۲۰π ۲) ۱۰π

۳) ۵π ۴) ۱۵π

شما پاسخ نداده اید

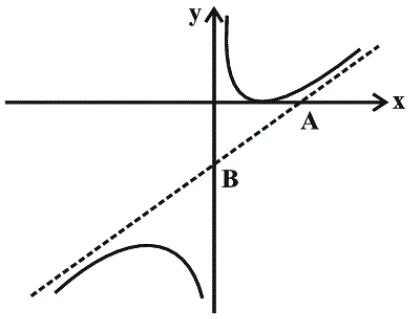
۸۹- در یک استوانه به ارتفاع ثابت، آهنگ تغییر حجم نسبت به سطح جانبی در لحظه‌ای که شعاع قاعده $۲۰cm$ است، چند سانتی‌متر می‌باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰

۳) ۴۰ ۴) بستگی به ارتفاع استوانه دارد.

شما پاسخ نداده اید

۹۰- اگر شکل زیر، نمودار تابع $y=\frac{x^۲+ax+b}{x+c}$ و $AB=۲\sqrt{۲}$ باشد، $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) -۱

۳) ۳ ۴) -۳

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، دیفرانسیل و انتگرال ، انتگرال - ۱۳۹۶۰۲۱۵

۸۱- حاصل $\sum_{i=۱}^{۲۰}(۳i+۲)$ کدام است؟

۱) ۶۳۰ ۲) ۶۳۲ ۳) ۶۲۲ ۴) ۶۷۰

شما پاسخ نداده اید

۸۲- حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^{n+۱}}{۳^n}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۴ ۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، هندسه‌ی تحلیلي ، دستگاه‌های معادلات خطي - ۱۳۹۶۰۲۱۵

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۱- کدام گزینه در مورد دستگاه $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = a - 1 \\ cx_1 + 2x_2 + 3x_3 = b - 1 \\ -x_1 + x_3 = c + 1 \end{cases}$ مقابل نادرست است؟

۱) به ازاء $a = b = c = 1$، یک جواب منحصر به فرد دارد.
۲) به ازاء $a = b = 1$ و $c = -1$، یک جواب منحصر به فرد دارد.
۳) به ازاء $a = b = 1$ و $c = 3$، بی نهایت جواب دارد.
۴) به ازاء $a = b = c = 3$، جواب ندارد.

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- اگر دستگاه زیر دارای یک جواب منحصر به فرد باشد، m کدام است؟

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ 2x + z = m^2 - 2m + 5 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- اگر در یک دستگاه سه معادله و سه مجهول، برای یافتن x_1، x_2 و x_3 به روش کرامر، $A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشند، مقدار x_3 کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱
۳) صفر ۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- دستگاه $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ 2x - y - z = 6 \end{cases}$ را با روش حذفی گاوس حل کرده‌ایم و در مرحله‌ای به ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 1 \\ 0 & b & -3 & 4 \end{bmatrix}$ رسیده‌ایم. حاصل $a - b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- دستگاه $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ چند دسته جواب دارد؟

۱) یک ۲) دو
۳) صفر ۴) بی‌شمار

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ با دترمینان مثبت، ماتریس ضرایب دستگاه $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ است. اگر $A^* = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه جواب این دستگاه کدام است؟ (A^*، ماتریس الحاقی ماتریس A است.)

۱) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۷- چه رابطه‌ای بین a، b و c برقرار باشد تا معادلات $\begin{cases} ۲x-y+۳z=a \\ x+۲y+z=b \\ ۷x+۴y+۹z=c \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشند؟

۱) معادله‌ی فوق همواره دارای جواب منحصر به فرد است.

۲) $c=۳b+۲a$

۳) $c\neq ۳b+۲a$

۴) $c+۳b+۲a=۰$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- معادله‌های دستگاه $\begin{cases} mx+ay-z=a^۲-b^۲ \\ ۲x+by+az=a+b \\ x-۲by+mz=a+۱ \end{cases}$، معادلات سه صفحه‌ی گذرا از مبدأ مختصات هستند. این دستگاه دارای کدام ویژگی است؟

۱) همواره جواب منحصر به فرد صفر دارد.

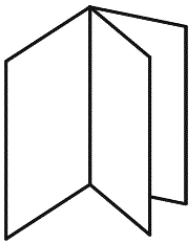
۲) به ازای یک مقدار m، جواب غیرصفر دارد.

۳) فقط به ازای یک مقدار m، جواب منحصر به فرد دارد.

۴) همواره جواب غیرصفر دارد.

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- شکل هندسی متناظر با دستگاه $\begin{cases} ۲x+۳y-۷z=۵ \\ ۳x-y+z=b \\ ۵x+۲y+az=۷ \end{cases}$ به‌صورت شکل مقابل است، $a+b$ کدام است؟



۱) -۱

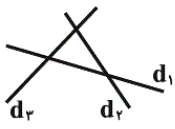
۲) -۲

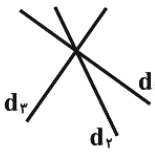
۳) -۳

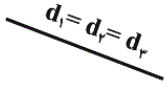
۴) -۴

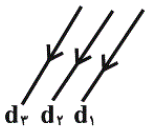
شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- اگر $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ فصل مشترک‌های دوبه‌دوی سه صفحه به معادلات $x_۱-x_۲+۲x_۳=۱$، $x_۱+۲x_۲-x_۳=-۱$ و $۴x_۱-x_۲+۳x_۳=۰$ باشند، این سه خط نسبت به هم کدام وضعیت را دارند؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، ریاضیات گسسته ، احتمال - ۱۳۹۶۰۲۱۵

۱۲۱- تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر زوج آمد، یک تاس دیگر و در غیر این‌صورت، به تعداد عدد ظاهر شده سکه پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

۱) ۳۰

۲) ۴۰

۳) ۵۰

۴) ۶۰

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۲- ۶ نفر دارای گروه خونی A و ۳ نفر دارای گروه خونی B هستند. اگر به تصادف ۳ نفر از بین آن‌ها انتخاب کنیم، احتمال این کـه دقیقـاً ۲ نفر گروه خونی یکسان داشته باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- در پرتاب سه تاس با هم، چه‌قدر احتمال دارد سه رقم رو شده زوج یا مجموع بیشتر از ۶ باشد؟

۱) $\frac{۲۰۰}{۲۱۶}$ ۲) $\frac{۱۹۹}{۲۱۶}$ ۳) $\frac{۱۹۸}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۱۹۷}{۲۱۶}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- احتمال قبولی یک شخص در هر آزمون برابر $\frac{۱}{۲}$ است. اگر این شخص در یک دوره با ۵ آزمون شرکت کند، احتمال این‌که ۳ یا ۴ آزمون خود را قبول شود، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۳۲}$ ۳) $\frac{۱۵}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

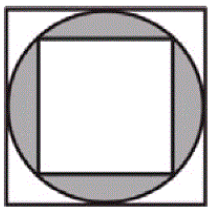
شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- یک تاس که احتمال آمدن هر عدد آن متناسب با معکوس آن عدد می‌باشد را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن کـه یـک عـدد اول رو شـود، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۶۰}{۱۴۷}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳۰}{۳۱}$ ۴) $\frac{۶۲}{۱۴۷}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- تیری پس از شلیک به مربع بزرگ‌تر اصابت می‌کند. با چه احتمالی به قسمت رنگی برخورد می‌کند؟



۱) $\frac{۲\pi-۱}{۸}$ ۲) $\frac{\pi-۱}{۴}$

۳) $\frac{\pi-۲}{۸}$ ۴) $\frac{\pi-۲}{۴}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- در یک اداره ٪ ۴۰ کارمندان زن هستند و ٪ ۷۰ زنان و ٪ ۵۰ مردان متاهل هستند. کارمندی به تصادف انتخاب مـی‌کنـیم. اگـر متاهـل باشد، احتمال مرد بودن او چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱۶}{۲۹}$ ۲) $\frac{۱۵}{۲۹}$ ۳) $\frac{۱۴}{۲۹}$ ۴) $\frac{۱۳}{۲۹}$

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۸- دو ظرف مختلف که اولی شامل ۵ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی آبی و دومی شامل ۴ مهره‌ی قرمز و ۶ مهره‌ی آبی است، در اختیار داریم.

۲ مهره از ظرف اول و ۳ مهره از ظرف دوم به تصادف خارج کرده و در ظرف خالی دیگری قرار می‌دهیم و سپس از این ظرف، مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال قرمز بودن این مهره کدام است؟

۱) ۰/۴۹ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۳۹ ۴) ۰/۳۵

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- در پرتاب دو تاس، اگر متغیر تصادفی X قدرمطلق تفاضل دو عدد رو شده باشد و تابع احتمال X به‌صورت $P(X=x)=\begin{cases}\frac{a-x}{18} & ;x>0\\ \frac{1}{6} & ;x=0\end{cases}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- در یک سمینار علمی، ۵ ریاضیدان و ۳ فیزیکدان می‌خواهند سخنرانی کنند. احتمال آن‌که دومین و پنجمین سخنران، فیزیکدان باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{3}{28}$ ۲) $\frac{9}{64}$ ۳) $\frac{2}{7}$ ۴) $\frac{5}{7}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، ریاضي پایه ، تابع حسابان - ۱۳۹۶۰۲۱۵

۱۰۱- در کدام بازه‌ی زیر، تابع $f(x)=|\cos x|$ صعودی است؟

۱) $(\frac{\pi}{2},\pi)$ ۲) $(0,\frac{\pi}{2})$

۳) $(\pi,\frac{3\pi}{2})$ ۴) $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- اگر $f(x)=2x+1$ و $g(f(x))=x^2+x-2$ باشد، آن‌گاه حاصل $(fog)(3)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) -2 ۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، تابع $f(x)=|2x+a|$ در فاصله‌ی $[-1,2]$ یک به یک است؟

۱) $R-(-1,\frac{1}{2})$ ۲) $[-4,2]$

۳) $R-(-4,2)$ ۴) $[-1,\frac{1}{2}]$

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۴- اگر $f=\{(k-۱,\frac{m}{۲}),(k,\frac{-m}{۲}),(۰,m-۳)\}$ تابعی فرد باشد و $g(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲} & ;x\le ۰\\ \frac{-۱}{۲} & ;x>۰\end{cases}$، آن‌گاه $fog(-k)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{-۳}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{-۱}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=\frac{۲^{x+۱}+۳}{۲^{x}-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{\log_{۲}^{x}+۳}{\log_{۲}^{x}-۲}$ ۲) $\log_{۲}\frac{x+۳}{x-۲}$

۳) $\log_{۲}\frac{x-۲}{x+۳}$ ۴) $۲\log_{۲}\frac{x-۲}{x+۳}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- اگر $f(x)=\frac{۱-\sqrt{x}}{x}$ و $g(x)=\sqrt{x}+۱$ باشد، برد تابع $f.g$ کدام است؟

۱) $R-\{۰\}$ ۲) $R-\{-۱\}$

۳) $(-۱,+\infty)$ ۴) $(۰,+\infty)$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=\tan^{-۱}x$ باشند، آن‌گاه دامنه‌ی $f^{-۱}(g(x))$ کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $(\frac{-\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$

۳) $[\frac{-\pi}{۴},\frac{\pi}{۴})$ ۴) $[\frac{-\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}]$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- اگر $f(x)=\frac{۲x}{x-۱}$ و تابع g به گونه‌ای باشد که $f(g(x))=x$، آن‌گاه $g(۴)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲

۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) -۴

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۹- اگر $f(x)=x^3+x+1$ باشد، آن‌گاه در کدام بازه، تابع $y=(f-f^{-1})(x)$ بالای محور xها قرار دارد؟

۱) $(-2,0)$ ۲) $(-1,+\infty)$

۳) $(-4,1)$ ۴) $(-\infty,1)$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- تابع $f(x)=(-1)^{[x]}x$ با دامنه‌ی $R-Z$ دارای کدام ویژگی زیر است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) زوج ۲) فرد

۳) هم زوج و هم فرد ۴) نه زوج و نه فرد

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، ديفرانسيل و انتگرال - گواه ، مشتق تابع ، مشتق - ۱۳۹۶۰۲۱۵

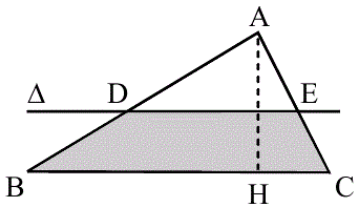
۹۱- سطح یک لکه‌ی نفت به شکل دایره با سرعت 150π متر مربع بر ثانیه افزایش می‌یابد، در زمانی که سطح لکه‌ی نفت 10000π متر مربع است، شعاع این لکه‌ی نفت در هر ثانیه چند سانتی‌متر افزایش می‌یابد؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۰

۳) ۶۵ ۴) ۷۵

شما پاسخ نداده اید

۹۲- در مثلث ABC، ضلع $BC=20$ و ارتفاع $AH=12$ واحد است. خط Δ موازی BC با سرعت ثابت ۰/۲ واحد در ثانیه از آن دور می‌شود. سرعت افزایش مساحت ذوزنقه در لحظه‌ای که فاصله‌ی دو خط موازی ۹ واحد باشد، کدام است؟



۱) ۰/۸

۲) ۰/۹

۳) ۱

۴) ۱/۲

شما پاسخ نداده اید

۹۳- معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3-x^2-x+a=0$، فقط یک ریشه‌ی ساده‌ی منفی دارد، مجموعه‌ی مقادیر a به کدام صورت است؟

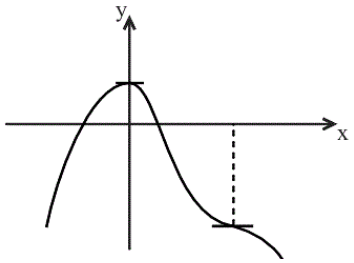
۱) $a<1$ ۲) $a>1$

۳) $-1<a<1$ ۴) $1<a<2$

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۴- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^۴ + ۸x^۳ + ax^۲ + b$ است. a کدام است؟



۱) -۱۸

۲) -۱۵

۳) -۱۲

۴) -۹

شما پاسخ نداده اید

۹۵- تابع با ضابطه‌ی $y = ax + b + \frac{x^۲}{۲x - ۱}$ تابع هموگرافیکی است که محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کنـــد. $a + b$ کدام است؟

۱) ۲

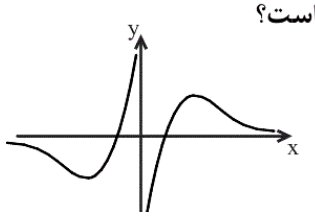
۲) -۲

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $-\frac{۱}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۹۶- شکل زیر نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^۲ + ax - ۳}{x^۳ + b}$ می‌باشد، دوتایی مرتب (a , b) کدام است؟



۱) $(۰ , ۰)$

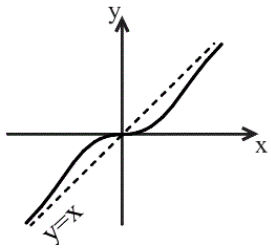
۲) $(۰ , ۱)$

۳) $(۱ , ۰)$

۴) $(۲ , ۰)$

شما پاسخ نداده اید

۹۷- شکل زیر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{ax^۳ + bx^۲}{x^۲ + ۱}$ است، زوج مرتب (a , b) کدام است؟



۱) $(-۱ , ۰)$

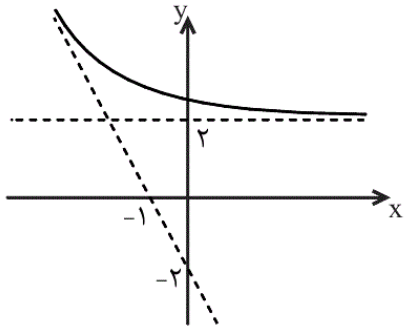
۲) $(-۱ , ۱)$

۳) $(۱ , ۰)$

۴) $(۱ , ۱)$

شما پاسخ نداده اید

۹۸- شکل زیر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax + \sqrt{x^۲ + bx + ۵}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟



۱) $(-۱,-۴)$

۲) $(-۱,۴)$

۳) $(۱,-۴)$

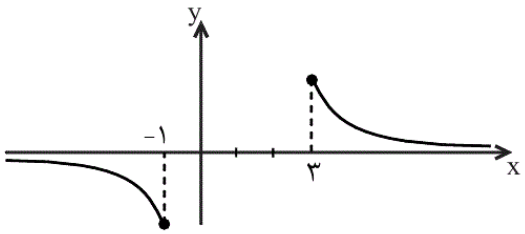
۴) $(۱,۴)$

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۹- شکل زیر، نمودار تابع $y = \sin^{-1}(U(x))$ است. ضابطه‌ی $U(x)$، به کدام صورت است؟



۱) $\frac{۲}{x-۱}$

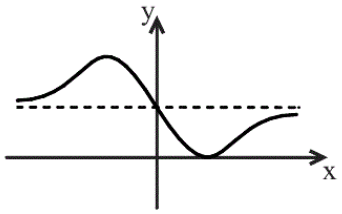
۲) $\frac{۲}{۱-x}$

۳) $\frac{۱}{x-۲}$

۴) $\frac{۱}{۲-x}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- شکل زیر نمایش تابعی با ضابطه‌ی $y = \frac{x^۲ + ax + b}{۲x^۲ + x + ۱}$ است. مقدار a کدام است؟



۱) ۲

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $-\sqrt{۲}$

۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

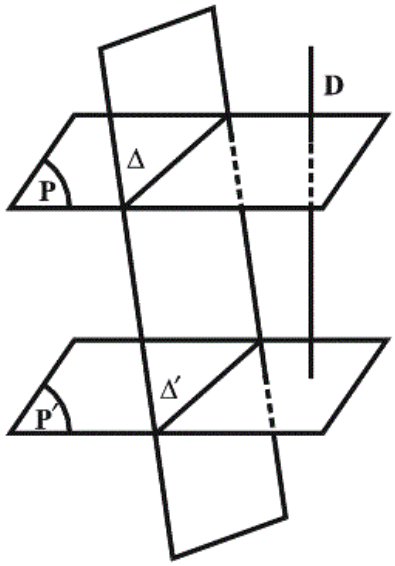
www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

ریاضي ، هندسه ۲ ، هندسه‌ی فضايي (هندسه‌ی ۲) ، هندسه‌ی فضايي - ۱۳۹۶۰۲۱۵

۱۳۱- (نوید مجیدی)

چون دو صفحه‌ی عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند، پس با توجه به تعامد P و P' بر خط D، $P \parallel P'$. از سوی دیگر هر صفحه‌ای که یکی از دو صفحه‌ی موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند و فصل مشترک این صفحات، با هم موازی هستند.



$\Delta \parallel \Delta'$

(هندسه ۲ – هندسه‌ی فضایی: صفحه‌های ۱۴۹ تا ۱۵۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۲- (داریوش ناظمی)

اگر دو صفحه متقاطع باشند، در صورتی هر دو بر صفحه‌ای عمودند که فصل مشترکشان بر آن صفحه عمود باشد.

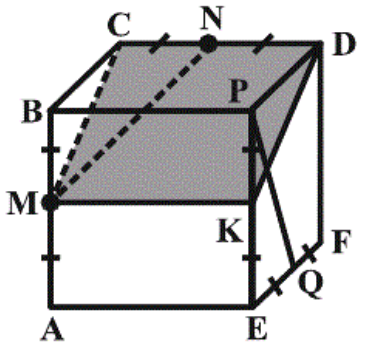
(هندسه ۲ – هندسه‌ی فضایی: صفحه‌های ۱۵۵ تا ۱۵۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

MK بر صفحه‌ی $PEFD$ عمود است. پس MK بر PQ عمود است. از طرفی DK بر PQ عمود است. لذا PQ بر دو خط متقاطع DK و MK از صفحه‌ی $CMKD$ عمود است و در نتیجه بر این صفحه عمود است.

چون MN در این صفحه قرار دارد پس $PQ \perp MN$.



(هندسه ۲ - هندسه‌ی فضایی: صفحه‌های ۱۴۹ تا ۱۵۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

گزینه‌ی «۲» درست است. زیرا اگر خطی مانند d بر P عمود و با P' موازی باشد حتماً در P' خطی مانند d' موازی d وجود دارد که بر P عمود است. پس شرط عمود بودن دو صفحه‌ی P و P' که عمود بودن خطی از یکی بر دیگری است، خودبه‌خود برقرار است.

گزینه‌ی (۱) نادرست است، زیرا اگر خطی از P بر فصل مشترک P و P' عمود باشد، شرط عمود بودن را ندارد و باید بر دو خط متقاطع از آن عمود باشد.

گزینه‌ی (۳) نادرست است، زیرا صفحه‌ی P به شرطی بر P' عمود است که خطی مانند d از آن بر P' عمود باشد و شرط عمود بودن d بر P'، عمود بودن d بر دو خط متقاطع از P' عمود است (نه هردو خط دلخواه)

گزینه‌ی (۴) نادرست است. لزومی ندارد تمام خطوط صفحه‌ی P بر صفحه‌ی P' عمود باشد. دو صفحه‌ی عمود بر هم، هریک دارای خطوطی هستند که با دیگری موازی است.

(هندسه ۲ - هندسه‌ی فضایی؛ صفحه‌ی ۱۵۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۵- (محمدابراهیم گیتی‌زاده)

گزینه‌ی «۱»: خط Δ بر خط D از صفحه‌ی P عمود است، بنابراین بر هر خط موازی با خط D نیز عمود می‌باشد.

گزینه‌ی «۲»: چون (۱) درست است، گزینه «۲» نادرست می‌باشد.

گزینه‌ی «۳»: خط Δ با هر خط صفحه‌ی Q که بر خط D عمود باشد، موازی است.

گزینه‌ی «۴»: خط Δ با صفحه‌ی Q موازی است، اما با هر خطی از این صفحه موازی نیست.

(هندسه ۲ - هندسه‌ی فضایی: صفحه‌های ۱۵۵ تا ۱۵۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۶- (امیرحسین ابومحبوب)

اگر $CA = CB$ باشد، آنگاه نقطه‌ی C باید روی صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار گیرد. اگر خط d و صفحه‌ی عمودمنصف AB، متقاطع باشند، مسأله یک جواب دارد. اگر خط d با صفحه‌ی عمودمنصف AB موازی بوده و در خارج آن قرار گیرد، مسأله فاقد جواب است و در صورتی که خط d بر صفحه‌ی عمودمنصف AB، منطبق شود، مسأله بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه ۲ - هندسه‌ی فضایی: صفحه‌ی ۱۵۴)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

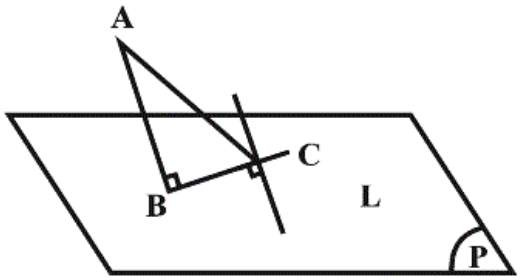
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۳۷ (نوید مجیدی)

خط AB بر صفحه‌ی P عمود است، پس بر تمامی خطوط این صفحه از جمله خط L عمود می‌باشد، یعنی $L \perp AB$.

از طرفی طبق فرض $L \perp BC$. چون خط L بر دو خط متقاطع از صفحه‌ی مثلث ABC عمود می‌باشد، پس L بر این صفحه عمود است.

در نتیجه L بر تمامی خطوط صفحه‌ی ABC از جمله AC نیز عمود می‌باشد.

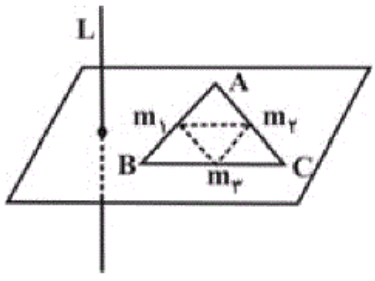


(هندسه ۲ - هندسه‌ی فضایی: مشابه سؤال ۸ صفحه‌ی ۱۵۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۳۸ (نوید مجیدی)

فرض کنیم m_1، m_2 و m_3 به ترتیب نقاط وسط ضلع‌های AB، AC و BC باشد. هر صفحه‌ای که شامل هر کدام از خط‌های m_1m_2، m_1m_3 و m_2m_3 باشد و بر صفحه‌ی مثلث ABC عمود شود، موازی با خط L است و از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است. تنها همین ۳ صفحه با ویژگی موردنظر وجود دارند.



(هندسه ۲ - هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۵۰ تا ۱۵۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

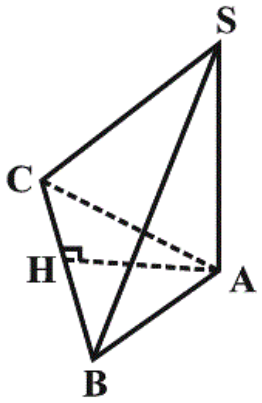
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۳۹

صفحه‌ی قاعده‌ی هرم، شامل خط BC و عمود بر خط SA است. به این ترتیب عمود مشترک دو خط متنافر SA و BC، در صفحه‌ی ABC قرار دارد و از نقطه‌ی A بر خط BC عمود می‌شود، بنابراین ارتفاع AH، عمود مشترک بین دو خط متنافر SA و BC می‌باشد.

$$\Rightarrow BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} = ۹ + ۲۷ = ۳۶ \Rightarrow BC = ۶$$

$$\Rightarrow BC \times AH = AB \times AC \Rightarrow ۶AH = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow AH = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$



(هندسه ۲ - هندسه‌ی فضایی: صفحه‌های ۱۵۷ تا ۱۵۹)

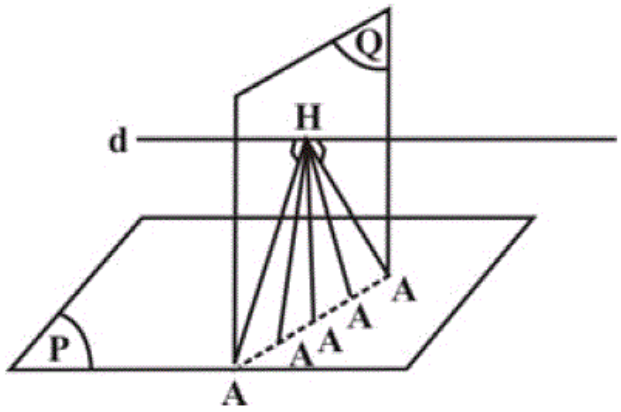
۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۴۰ (رضا شریف‌خطیبی)

مکان هندسی خطوطی از فضا که در نقطه‌ی H بر خط d عمود باشند، صفحه‌ای عمود بر d در نقطه‌ی H است. (مثل صفحه‌ی Q)

تمامی پاره‌خط‌هایی که یک سر آن‌ها در نقطه‌ی H بر خط d ثابت و عمود هستند و یک سر آن‌ها روی فصل مشترک صفحات P و Q باشند، جواب این سؤال هستند.



(هندسه ۲ - هندسه‌ی فضایی: صفحه‌های ۱۴۹ تا ۱۵۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

ریاضي ، ديفرانسيل و انتگرال ، مشتق تابع ، مشتق - ۱۳۹۶۰۲۱۵

-۸۳ (هادی پلاور)

با توجه به شکل، نقطه‌ی $(۱,۰)$ عطف تابع است، بنابراین:

$$\begin{cases} f(۱)=۰ \Rightarrow ۱+a+b+۲=۰ \Rightarrow a+b=-۳ \\ f''(۱)=۰ \Rightarrow \xrightarrow[f''(x)=۶x+۲a]{f'(x)=۳x^۲+۲ax+b} ۶+۲a=۰ \Rightarrow ۲a=-۶ \Rightarrow a=-۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow b=۰$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نقطه‌ی $(0,-2)$ در این خط صدق می‌کند:

$$-2=0+\frac{-1-b}{2}\Rightarrow -4=-1-b\Rightarrow b=3$$

در نتیجه ضابطه‌ی تابع $y=x\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ است و معادله‌ی مجانب قائم تابع $x=-3$ است.

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ✓۲ ۳ ۴

-۸۵ (ایمان نشتین)

طول مجانب قائم منفی است و تابع در دو همسایگی آن به $+\infty$ میل می‌کند. پس مخرج ریشه‌ی مضاعف دارد و باید Δ مخرج برابر صفر باشد:

$$c^2-16=0\Rightarrow c=\pm 4$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c=4: x^2+4x+4=(x+2)^2=0\Rightarrow x=-2 & \text{ق ق}\\ c=-4: x^2-4x+4=(x-2)^2=0\Rightarrow x=2 & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

وقتی $x\to\infty$ میل می‌کند $f(x)$ یک مجانب افقی $y=0$ دارد. پس باید درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج کمتر باشد. یعنی $a=0$، پس:

$$f(x)=\frac{bx-1}{(x+2)^2}$$

$$f'(0)=0\Rightarrow f'(x)=\frac{b(x+2)^2-2(x+2)(bx-1)}{(x+2)^4}$$

$$=\frac{b(x+2)-2(bx-1)}{(x+2)^3}=\frac{-bx+2b+2}{(x+2)^3}$$

$$\xrightarrow{f'(0)=0} -b(0)+2b+2=0\Rightarrow b=-1$$

$$f(x)=\frac{-x-1}{(x+2)^2}\Rightarrow f(-1)=0$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۵ تا ۲۱۰)

۱ ✓۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\xrightarrow[\text{بر مخرج}]{\text{تقسیم صورت}} \lim_{x\to b}\frac{(x-b)(x^{۲}+bx+b^{۲}-۱۲)+b^{۳}-۱۲b+a}{(x-b)}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow}\lim_{x\to b}(x^{۲}+bx+b^{۲}-۱۲)=b^{۲}+b^{۲}+b^{۲}-۱۲=۰\Rightarrow b=\pm ۲$$

$$\xrightarrow[\text{مثبت است.}]{\text{چون ریشه}} b=۲\Rightarrow a=۱۲(۲)-(۲)^{۳}=۲۴-۸=+۱۶$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^{۳}-۱۲x+۱۶}{x-۲}=\frac{(x-۲)(x^{۲}+۲x-۸)}{x-۲}$$

$$\overset{x\neq ۲}{=\!=\!=} x^{۲}+۲x-۸\Rightarrow f'(x)=۲x+۲=۰\Rightarrow x=-۱$$

$$\Rightarrow f(-۱)=(-۱)^{۲}+۲(-۱)-۸=۱-۲-۸=-۹$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۸۷ (نگین یغمایی)

از طرفین نسبت به زمان مشتق می‌گیریم: $\frac{x'_t y+y'_t x}{۲\sqrt{xy}}+۲x'_t=y'_t \quad (*)$

در نقطه‌ی $(۱,۴)$ مولفه‌ی x، با سرعت ۲ متر بر ثانیه کاهش می‌یابد، بنابراین:

$$x=۱\ ,\ y=۴\ ,\ x'_t=-۲\ (\frac{m}{s})$$

$$\xrightarrow{(*)}\frac{(-۲)(۴)+y'_t}{۲\sqrt{۴}}+۲(-۲)=y'_t\Rightarrow\frac{-۸+y'_t}{۴}-۴=y'_t$$

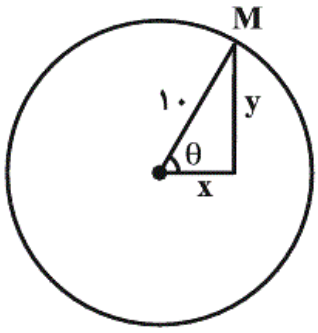
$$\xrightarrow{\times ۴}-۸+y'_t-۱۶=۴y'_t\Rightarrow ۳y'_t=-۲۴\Rightarrow y'_t=-۸\ (\frac{m}{s})$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۸ (هادی پلاور)



اگر M محل نشستن شخص روی چرخ و فلک باشد، آن‌گاه با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} x = ۱۰\cos\theta \\ y = ۱۰\sin\theta \end{cases}$$

چون سرعت بالا رفتن یا پائین آمدن را می‌خواهیم، بنابراین از رابطه‌ی $y = ۱۰\sin\theta$ استفاده می‌کنیم. از طرفین این تساوی نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$y'_t = ۱۰\theta'_t \cos\theta \quad (*)$$

چون چرخ و فلک در هر دو دقیقه یک دور می‌زند، پس در هر دقیقه نصف دور می‌زند، بنابراین:

$$\theta'_t = \frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۲} \text{(دور بر دقیقه)} = \pi \text{ (رادیان بر دقیقه)}$$

از طرفی در لحظه‌ای که $x = ۵$ است. داریم:

$$\cos\theta = \frac{x}{۱۰} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه با توجه به $(*)$ داریم:

$$y'_t = ۱۰(\pi)(\frac{۱}{۲}) = ۵\pi$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۸۹ (فریدون ساعتی)

حجم استوانه $V = \pi r^۲ h$

سطح جانبی $S = ۲\pi rh$

$$\frac{dV}{dS} = \frac{\frac{dV}{dr}}{\frac{dS}{dr}} = \frac{\frac{d}{dr}(\pi r^۲ h)}{\frac{d}{dr}(۲\pi rh)} = \frac{۲\pi rh}{۲\pi h} = r \xrightarrow{r=۲۰cm} \frac{dV}{dS} = ۲۰cm$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

چون $x = ۰$ معادله‌ی مجانب قائم است، پس $c = ۰$.

بنابراین معادله‌ی تابع به‌صورت $y = \frac{x^۲ + ax + b}{x}$ یا $y = x + a + \frac{b}{x}$ در می‌آید. لذا خط $y = x + a$ مجانب مایل آن خواهد بود. چون شیب مجانب مایل برابر ۱ است، پس $OA = OB$، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس خواهیم داشت:

$$OA^۲ + OB^۲ = AB^۲ \Rightarrow ۲OA^۲ = AB^۲$$

$$\xrightarrow{AB=۲\sqrt{۲}} OA = ۲ \Rightarrow \begin{cases} A = (۲,۰) \\ B = (۰,-۲) \end{cases}$$

اما نقطه‌ی A (و البته B) روی مجانب مایل واقع است، پس مختصات آن در معادله‌ی مجانب مایل صدق می‌کند.

$$\Rightarrow ۰ = ۲ + a \Rightarrow a = -۲ \xrightarrow{\text{معادله‌ی تابع}} y = \frac{x^۲ - ۲x + b}{x}$$

اما نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است، پس تابع ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\frac{x^۲ - ۲x + b}{x} = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x + b = ۰ \Rightarrow (-۲)^۲ - ۴(۱)(b) = ۰$$

$$\Rightarrow ۴ - ۴b = ۰ \Rightarrow b = ۱$$

$$\Rightarrow a + b + c = -۲ + ۱ + ۰ = -۱$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۱- (عباس امیدوار)

$$\sum_{i=۱}^{۲۰} (۳i+۲) = \sum_{i=۱}^{۲۰} ۳i + \sum_{i=۱}^{۲۰} ۲ = ۳\sum_{i=۱}^{۲۰} i + \sum_{i=۱}^{۲۰} ۲$$

$$= ۳(\frac{(۲۰)(۲۱)}{۲}) + ۲(۲۰) = ۶۳۰ + ۴۰ = ۶۷۰$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۱۳ تا ۲۱۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۸۲- (هادی پلاور)

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۲^n)\times ۲}{۳^n} = \sum_{n=۱}^{\infty} ۲(\frac{۲}{۳})^n = ۲\sum_{n=۱}^{\infty} (\frac{۲}{۳})^n = ۲(\frac{\frac{۲}{۳}}{۱-\frac{۲}{۳}})$$

$$= ۲(\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}}) = ۴$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۱۳ تا ۲۱۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۱۱ (نصیر مصبی نژاد)

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ c & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۱ + ۴ - c = ۳ - c$$

اگر $c = ۳$، دستگاه یا جواب ندارد یا بی‌شمار جواب دارد.

اگر $c \neq ۳$، دستگاه فقط یک جواب دارد. پس گزینه‌های «۱» و «۲» صحیح می‌باشند. در مورد گزینه «۳» $a = b = ۱$ و $c = ۳$، در نتیجه:

چون $|A| = ۰$ و $|A_۱| = ۴$ پس $|A_۱| = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۴$

دستگاه جواب ندارد. پس گزینه‌ی «۳» نادرست است.

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی؛ صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۱۲ (حسین خزایی)

این دستگاه بیانگر وضعیت نسبی ۳ خط در دستگاه دو بعدی می‌باشد. که باید محل برخورد دوتای آنها را به‌دست آورده و در معادلات سومی قرار دهیم، پس:

$$\begin{cases} x - z = -۱ \\ ۲x - z = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = ۱ \ , \ z = ۲$$

$$۲x + z = m^۲ - ۲m + ۵ \xrightarrow{x=۱ \ , \ z=۲} ۲(۱) + (۲) = m^۲ - ۲m + ۵$$

$$\Rightarrow (m-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow m = ۱$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی؛ صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۳- (امیرحسین ابومحبوب)

$$x_۳ = \frac{|A_۳|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۵ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & -۱ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}} = \frac{۳}{-۳} = -۱$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۴ و ۱۴۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۴- (محمدجواد نوری)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & -۱ & -۱ & ۶ \end{array}\right] \xrightarrow[-۲R_۱+R_۳\to R_۳]{-R_۱+R_۲\to R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۳ & ۴ \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۱ \end{cases} \Rightarrow a - b = ۰$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۵- (محمدمصطفی پورکندلوس)

$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰ \\ ۳x_۱ - x_۲ + x_۳ = ۰ \end{cases}$ معادلات اول و دوم یکی هستند، پس دستگاه به‌صورت

است و این دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۲ و ۱۴۳)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$|A^*| = (۶+۰+۰)-(۵+۰+۰) = ۱$$

دترمینان ماتریس A^* برابر یک است. با توجه به رابطه‌ی $|A^*| = |A|^۲$ و مثبت بودن دترمینان ماتریس A، نتیجه می‌شود $|A| = ۱$ است.

جواب دستگاه: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{|A|}A^*\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ y = ۱ \\ z = ۳ \end{cases}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۸ و ۱۳۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ & ۹ \end{vmatrix} = ۲(۱۴) + ۱(۲) + ۳(-۱۰) = ۰$$

بنابراین معادله می‌تواند بی‌شمار جواب داشته باشد. اگر دستگاه را با روش حـذفی گاوس حل کنیم، داریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۲ & -۱ & ۳ & a \\ ۱ & ۲ & ۱ & b \\ ۷ & ۴ & ۹ & c \end{array}\right] \xrightarrow[\text{جدید } R_۱=R_۱-۲R_۲]{\text{جدید } R_۳=R_۳-۷R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۰ & -۵ & ۱ & a-۲b \\ ۱ & ۲ & ۱ & b \\ ۰ & -۱۰ & ۲ & c-۷b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{جدید } R_۳=R_۳-۲R_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۰ & -۵ & ۱ & a-۲b \\ ۱ & ۲ & ۱ & b \\ ۰ & ۰ & ۰ & \underbrace{c-۷b-۲a+۴b}_{c-۳b-۲a} \end{array}\right]$$

اگـر $c = ۳b + ۲a$، آن‌گـاه دسـتگاه بـی‌شـمار جـواب دارد ولـی اگـر $c \neq ۳b + ۲a$ دستگاه بدون جواب است.

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی؛ صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مختصات $(۰,۰,۰)$ در سه معادله صدق می‌کند.

$$(a^۲-b^۲=۰ \text{ ، } a+b=۰ \text{ و } a+۱=۰) \xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{جواب}} a=-۱ \text{ , } b=۱$$

دستگاه معادلات همگن زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} mx-y-z=۰ \\ ۲x+y-z=۰ \\ x-۲y+mz=۰ \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} m & -۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۲ & m \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=m^۲+۶\neq ۰$$

پس دستگاه به ازای همه مقادیر m فقط جواب صفر دارد.

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی؛ صفحه‌های ۱۳۸ و ۱۴۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

چون دستگاه بی‌شمار جواب دارد، دترمینان ضرایب صفر است:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & -۷ \\ ۳ & -۱ & ۱ \\ ۵ & ۲ & a \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow ۲(-a-۲) - ۳(۳a-۵) - ۷\times ۱۱ = ۰$$

$$-۱۱a = ۶\times ۱۱ \Rightarrow a = -۶$$

از سوی دیگر هنگامی که سه صفحه در یک خط مشترکند (اعضای یک دسته صفحه‌اند) هر یک ترکیب خطی دوتای دیگر است. با کمی دقت معلوم می‌شود که صفحه‌ی سوم از جمع صفحات اول و دوم پدید آمده است. پس:

$$۵ + b = ۷ \Rightarrow b = ۲$$

برای یافتن b می‌توان روش دیگری نیز انتخاب کرد. هر نقطه روی فصل مشترک صفحات اول و سوم، روی صفحه‌ی دوم نیز هست. نقطه‌ای با این شرط می‌یابیم:

$$\begin{cases} ۲x + ۳y = ۵ \\ ۵x + ۲y = ۷ \end{cases} \Rightarrow x = y = ۱$$

$$(۱,۱,۰) \in P_۲ \Rightarrow ۳ - ۱ + ۰ = b \Rightarrow b = ۲ \Rightarrow a + b = -۴$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۰- (محمدابراهیم کیتی‌زاده)

تشخیص حالت فصل مشترک‌ها نسبت به یک‌دیگر، بـه وضـعیت جـواب دسـتگاه

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 & (1) \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 & (2) \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 & (3) \end{cases}$$ بستگی دارد. چون دستگاه پـارامتری نیسـت،

حل آن به روش حذفی معمولی سریع‌تر نتیجه می‌دهد،

$$(1)\ ,\ (2) \xrightarrow{\text{حذف } x_3} 3x_1 + 3x_2 = -1$$

$$(2)\ ,\ (3) \xrightarrow{\text{حذف } x_3} 7x_1 + 5x_2 = -3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = -1 \\ 7x_1 + 5x_2 = -3 \end{cases}$$

اما چون دستگاه دو معادله دو مجهولی جواب دارد، دستگاه سه معادله سه مجهولی نیز جواب منحصر به فرد دارد، یعنی سه صفحه و در نتیجه سـه فصـل مشـترک، از یک نقطه می‌گذرند.

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

ریاضي ، ریاضیات گسسته ، احتمال - ۱۳۹۶۰۲۱۵

۱۲۱- (رضا پورحسینی)

به ازای رو شدن هر یک از اعداد زوج، یک بار تاس می‌ریزیم، پس $3 \times 6 = 18$ حالت امکان‌پذیر است. همچنین به‌ازای رو شدن هر عدد فرد، به همان تعداد سـکه پرتاب می‌کنیم که تعدد حالت‌های ممکن در n بار پرتاب سکه، برابر 2^n است.

در نتیجه $2^1 + 2^3 + 2^5 = 42$ حالت در این شرایط امکان‌پذیر است. بنـابراین تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با: $18 + 42 = 60$

(جبر و احتمال - احتمال و پدیده‌های تصادفی: صفحه‌های ۷۲ تا ۷۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۲ (نوید مجیدی)

تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای برابر است با $n(S)=\binom{۹}{۳}=۸۴$.

اگر H پیشامد آن باشد که دقیقا دو نفر گروه خونی یکسان داشته باشند، آنگاه تعداد عضوهای H به صورت $n(H)=\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۶}{۱}\binom{۳}{۲}=۴۵+۱۸=۶۳$ به دست می‌آید. پس احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(H)=\frac{۶۳}{۸۴}=\frac{۳}{۴}$$

(جبرواحتمال - احتمال: اندازه‌گیری شانس: صفحه‌های ۸۴ تا ۸۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

$$n(A')=۱+۳+۳+۳+۶+۳=۱۹$$

$$P(A')=\frac{۱۹}{۲۱۶}\Rightarrow P(A)=\frac{۱۹۷}{۲۱۶}$$

(جبر و احتمال - احتمال: اندازه‌گیری شانس: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۲۴ (رضا پورحسینی)

احتمال قبولی این فرد در هر آزمون برابر $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین براساس احتمال دو جمله‌ای، احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۴}}{۲^۵}=\frac{۱۰+۵}{۳۲}=\frac{۱۵}{۳۲}$$

(جبر و احتمال - احتمال: اندازه‌گیری شانس: صفحه‌های ۸۷ تا ۹۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\begin{cases} P(۱)=\frac{x}{۱}\ ,\ P(۲)=\frac{x}{۲}\ ,\ P(۳)=\frac{x}{۳} \\ P(۴)=\frac{x}{۴}\ ,\ P(۵)=\frac{x}{۵}\ ,\ P(۶)=\frac{x}{۶} \end{cases}$$

$$P(۱)+P(۲)+...+P(۶)=۱\Rightarrow \frac{x}{۱}+\frac{x}{۲}+...+\frac{x}{۶}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۶۰x+۳۰x+۲۰x+۱۵x+۱۲x+۱۰x}{۶۰}=۱\Rightarrow x=\frac{۶۰}{۱۴۷}$$

$$=\frac{۲۰}{۴۹}$$

$$P(\text{اول آمدن})=P(۲)+P(۳)+P(۵)=\frac{۲۰}{۴۹}(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵})$$

$$=\frac{۲۰}{۴۹}\times\frac{۳۱}{۳۰}=\frac{۶۲}{۱۴۷}$$

(جبر و احتمال - احتمال: اندازه‌گیری شانس: صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر ضلع مربع بزرگ‌تر را a فرض کنیم، قطر دایره برابر با a و قطر مربع کوچک‌تر نیز برابر با a خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$\text{مساحت مربع بزرگ‌تر} = a^۲$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi(\frac{a}{۲})^۲ = \frac{\pi}{۴}a^۲$$

در ضمن مساحت مربع کوچک‌تر را به کمک فرمول مربوط به لوزی به دست می‌آوریم:

$$\text{مساحت مربع کوچک‌تر} = \frac{a \times a}{۲} = \frac{a^۲}{۲}$$

حال احتمال مربوطه عبارت است از:

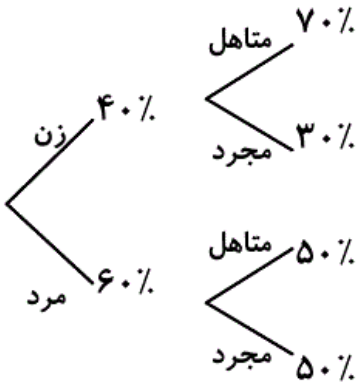
$$P = \frac{\text{مساحت قسمت رنگی}}{\text{مساحت مربع بزرگ‌تر}} = \frac{\frac{\pi}{۴}a^۲ - \frac{a^۲}{۲}}{a^۲} = \frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲} = \frac{\pi - ۲}{۴}$$

(جبر و احتمال - احتمال: اندازه‌گیری شانس: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۷ (عباس اسدی‌امرآبادی)



اگر پیشامد متاهل بودن را A و پیشامد مرد بودن را B_1 بنامیم، آن‌گاه داریم:

$$P(B_1 \mid A) = \frac{\frac{۵۰}{۱۰۰} \times \frac{۶۰}{۱۰۰}}{\frac{۵۰}{۱۰۰} \times \frac{۶۰}{۱۰۰} + \frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۷۰}{۱۰۰}} = \frac{\frac{۳۰۰۰}{۱۰۰۰۰}}{\frac{۵۸۰۰}{۱۰۰۰۰}} = \frac{۳۰}{۵۸} = \frac{۱۵}{۲۹}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۸۵ تا ۹۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۲۸ (سامان اسپهرم)

اگر پیشامدهای انتخاب ظرف‌های اول و دوم را به‌ترتیب با A و B و انتخاب مهره‌ی قرمز را با R نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$P(R) = P(R \mid A)P(A) + P(R \mid B)P(B)$$

$$= \frac{۵}{۸} \times \frac{۲}{۵} + \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۱}{۴} + \frac{۶}{۲۵} = \frac{۲۵+۲۴}{۱۰۰} = \frac{۴۹}{۱۰۰} = ۰/۴۹$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۸۵ تا ۹۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۹- (محمدمهدی محسن‌زاده‌طبری)

$$P(X=۰)+P(X=۱)+P(X=۲)+...+P(X=۵)=۱$$

$$\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۸}[(a-۱)+(a-۲)+...+(a-۵)]=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۱۸}(۵a-۱۵)=\frac{۵}{۶}\Rightarrow ۵a-۱۵=۱۵\Rightarrow ۵a=۳۰\Rightarrow a=۶$$

(ریاضیات گسسته - توزیع‌های گسسته‌ی احتمال: صفحه‌های ۹۱ تا ۹۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۰- (محمد صحت‌کار)

ابتدا احتمال آن‌که دومین سخنران فیزیکدان باشد را حساب می‌کنیم:

P (دومین نفر فیزیکدان باشد) =

P (اولی ریاضیدان و دومی فیزیکدان باشد) + P (اولی فیزیکدان و دومی فیزیکدان باشد) =

$$=(\frac{۳}{۸}\times\frac{۲}{۷})+(\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷})=\frac{۶+۱۵}{۵۶}=\frac{۲۱}{۵۶}=\frac{۳}{۸}$$

مشاهده می‌کنیم که شانس «دومی فیزیکدان باشد» با شانس «اولی فیزیکدان باشد» برابر است. بنابراین احتمال آن‌که نفر دوم و پنجم، فیزیکدان باشند، برابر آن است که نفرات اول و دوم فیزیکدان باشند، یعنی:

$$\frac{۳}{۸}\times\frac{۲}{۷}=\frac{۶}{۵۶}=\frac{۳}{۲۸}$$

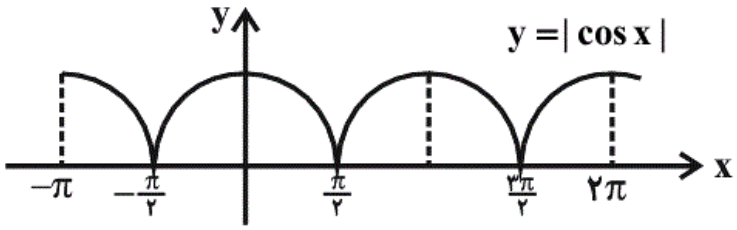
(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۸۵ تا ۹۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۱- (بهرام طالبی)

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



بنابراین در بازه‌ی $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ تابع صعودی است.

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۸۰ تا ۸۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۲- (مهدی ملارمضانی)

$$g(f(x)) = x^۲ + x - ۲ \xrightarrow{f(x)=۲x+۱} g(۲x+۱) = x^۲ + x - ۲$$

$$\xrightarrow{x=۱} g(۳) = ۱ + ۱ - ۲ = ۰ \Rightarrow g(۳) = ۰$$

$$f(g(۳)) = f(۰) = ۲(۰) + ۱ = ۱$$

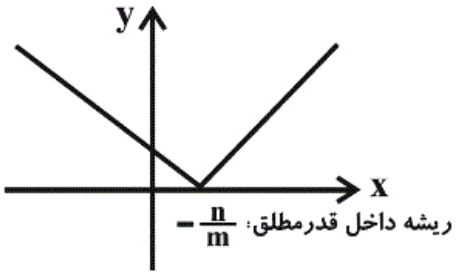
(حسابان - تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۳-

دقت کنید که در نمودار تابع $f(x)=|mx+n|$ نقطه‌ی شکستگی نمودار تابع، ریشه‌ی داخل قدر مطلق است، پس



حال برای این‌که f تابعی یک‌به یک باشد، باید ریشه‌ی داخل قدرمطلق در فاصله‌ی $(-1,2)$ نباشد. پس ابتدا حدود a را طوری می‌یابیم که ریشه در فاصله‌ی $(-1,2)$ باشد. سپس مجموعه‌ی جواب به‌دست آمده را از R کم می‌کنیم:

$$2x+a=0 \Rightarrow x=-\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow -1<-\frac{a}{2}<2 \xrightarrow{\times(-2)} -4<a<2$$

پس مجموعه‌ی جواب مورد نظر برابر است با:

$$a \in R-(-4,2)$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۸۶ تا ۸۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۴- (حمید علیزاده)

$$D_f = \{k-1, k, 0\} \xrightarrow[\text{تقارن دامنه}]{\text{شرط}} k-1 = -k \Rightarrow 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$fog(-k) = f(g(\frac{-1}{2})) = f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۹۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۵- (میلاد منصوری)

$$y = \frac{2^{x+1} + 3}{2^x - 1} \Rightarrow (2^x - 1)y = 2^{x+1} + 3$$

$$\Rightarrow 2^x y - y = 2^{x+1} + 3 \Rightarrow 2^x y - 2^{x+1} = 3 + y$$

$$\Rightarrow 2^x(y-2) = y + 3 \Rightarrow 2^x = \frac{y+3}{y-2} \Rightarrow x = \log_2 \frac{y+3}{y-2}$$

نتیجه می‌گیریم که:

$$f^{-1}(x) = \log_2 \frac{x+3}{x-2}$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۸۹ تا ۹۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x} \times (\sqrt{x}+1) = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$$

در نهایت با توجه به دامنه‌ی تابع، برد را می‌یابیم:

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 > -1$$

$$\Rightarrow f.g \text{ برد تابع} = (-1, +\infty)$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۰۷ (حمید علیزاده)

$$f(x) = \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$$

$$g(x) = \tan^{-1} x \Rightarrow D_g = R$$

$$D_{f^{-1}(g(x))} = \{x : x \in D_g \ , \ g(x) \in D_{f^{-1}}\}$$

$$= \{x : x \in R \ , \ \tan^{-1} x \geq 0 \rightarrow x \geq 0\}$$

$$\Rightarrow D_{f^{-1}(g(x))} = [0, +\infty)$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶ و ۸۹ تا ۹۵)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۸- (مرتضی روزبهانی)

$$f(g(x)) = x \Rightarrow g(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow g(۴) = f^{-1}(۴) \Rightarrow f(x) = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{۲x}{x-۱} = ۴ \Rightarrow ۴x - ۴ = ۲x \Rightarrow x = ۲$$

$$\Rightarrow g(۴) = ۲$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶ و ۸۹ تا ۹۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۹- (میثم حمزه‌لویی)

برای اینکه تابع $y = (f - f^{-1})(x)$ بالای محور x ها قرار بگیرد، باید:

$$(f - f^{-1})(x) > ۰ \Rightarrow f(x) - f^{-1}(x) > ۰ \Rightarrow f(x) > f^{-1}(x)$$

در بازه‌ای نمودار f بالاتر از نمودار تابع f^{-1} قرار دارد که نمودار f بالای خط $y = x$ باشد. در نتیجه برای حل نامعادله‌ی فوق، کافیست نامعادله‌ی $f(x) > x$ را حل کنیم:

$$f(x) > x \Rightarrow x^۳ + x + ۱ > x \Rightarrow x^۳ > -۱ \Rightarrow x > -۱$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۹ و ۸۹ تا ۹۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۱۰ (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

$$f(-x)=(-1)^{[-x]}(-x)=(-1)^{[-x]+1}x=(-1)^{-[x]-1+1}x=f(x)$$

$\Rightarrow$ f تابعی زوج است.

تذکر ۱) $$\forall x\in R-Z:[-x]+1=-[x]$$

تذکر ۲) $$(-1)^{-[x]}=(-1)^{[x]}$$

(حسابان - تابع؛ صفحه‌های ۷۶ تا ۷۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

ریاضي ، ديفرانسيل و انتگرال - گواه ، مشتق تابع ، مشتق - ۱۳۹۶۰۲۱۵

-۹۱ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۲)

می‌دانیم مساحت دایره‌ای به شعاع r، برابر است با $S(r)=\pi r^2$، لذا:

$$S'_t=2\pi r.r'_t$$

اما طبق فرضیات $S'_t=150\pi$، در لحظه‌ای که مساحت 10000π متر مربع است،

شعاع را می‌یابیم: $$10000\pi=\pi r^2\Rightarrow r^2=10000\Rightarrow r=100\ m$$

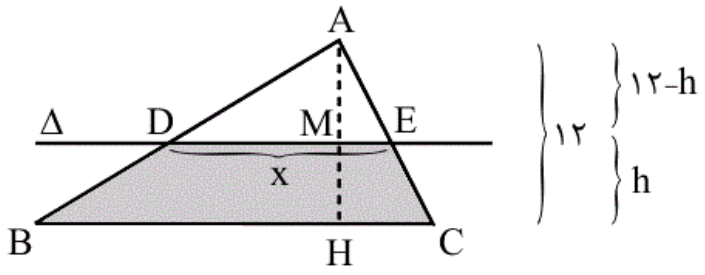
پس: $$150\pi=2\pi(100)r'_t\Rightarrow r'_t=\frac{3}{4}\frac{m}{s}\ \text{یا}\ 75\ \frac{cm}{s}$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر ضلع $DE = x$ و ارتفاع $MH = h$ در نظر گرفته شود بـرای حـل مسـأله در مرحله‌ی اول، متغیرها را مشخص می‌کنیم.



$$(۱)\quad \begin{cases} h'_t = ۰/۲ \\ S'_t = ? \\ h_۰ = ۹ \end{cases}$$

در مرحله‌ی دوم باید بین متغیرها یک رابطه بنویسیم که در این مثال می‌تـوانیم رابطـه‌ی مساحت ذوزنقه را بنویسیم:

$$(۲)\quad S = \frac{۱}{۲}(DE + BC)MH = \frac{۱}{۲}(x + ۲۰)h \quad (*)$$

با استفاده از رابطه‌ی تالس داریم:

$$\frac{x}{۲۰} = \frac{۱۲ - h}{۱۲} \Rightarrow x = \frac{۶۰ - ۵h}{۳}$$

$$\xrightarrow{(*)} S = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۶۰ - ۵h}{۳} + ۲۰\right)h = \frac{۱}{۶}(۱۲۰h - ۵h^۲)$$

در مرحله‌ی (۳) از رابطه‌ی به دست آمده نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$(۳)\quad S'_t = \frac{۱}{۶}(۱۲۰h'_t - ۱۰hh'_t) = \frac{۱}{۶}(۱۲۰ - ۱۰h)h'_t$$

$$\Rightarrow S'_t = \frac{۱}{۶}(۱۲۰ - ۹۰) \times ۰/۲ = ۱$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

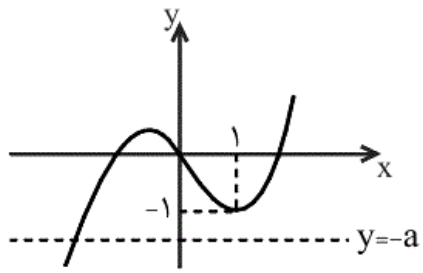
۱ ۲ ۳✓ ۴

با تشکیل جدول تغییرات خواهیم داشت:

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$\frac{5}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

با توجه به نمودار، تابع زمانی می‌تواند فقط یک ریشه‌ی ساده‌ی منفی داشته باشد که خط $y=-a$ کمتر از -1 باشد، یعنی:

$$y=-a<-1 \Rightarrow a>1$$



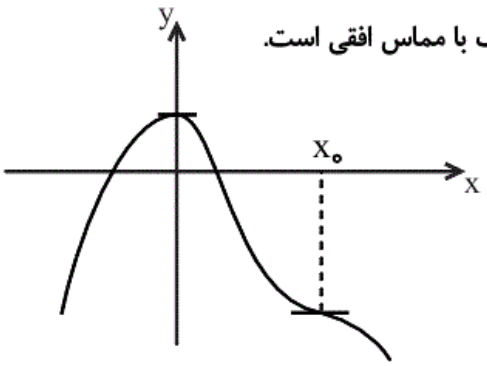
(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ✓۲ ۳ ۴

۹۴- (سراسری ریاضی - ۹۴)

مطابق شکل زیر، تابع در نقطه‌ای به طول صفر دارای ماکزیمم نسبی یا مماس افقی است.

همچنین در نقطه‌ای به طول x_0 دارای عطف با مماس افقی است.



پس معادله‌ی $f'(x)=0$ یک ریشه‌ی ساده‌ی $x=0$ و یک ریشه‌ی مضاعف $x=x_0$ را دارد، زیرا f' در این نقطه صفر می‌شود ولی تغییر علامت نمی‌دهد.

بنابراین:

$$f'(x)=-4x^3+24x^2+2ax$$

$$f'(x)=x(-4x^2+24x+2a)$$

برای آنکه f' ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، باید عبارت داخل پرانتز مربع کامل شود، یعنی Δ ی آن صفر گردد.

$$\Delta=24^2+32a=0 \Rightarrow a=\frac{-576}{32}=-18$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

---

۱ ✓۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۵- (سراسری ریاضی - ۸۷)

مخرج مشترک می‌گیریم و ضابطه را به شکل تابع هموگرافیک تبدیل می‌کنیم:

$$y=\frac{(2a+1)x^2+(2b-a)x-b}{2x-1}$$

برای این‌که تابع فوق یک تابع هموگرافیک باشد باید ضریب x^2 برابر صفر گردد.

$$2a+1=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

هم‌چنین تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس نقطه‌ی $(0,1)$ در معادله‌ی آن صدق می‌کند.

$$1=\frac{(2b+\frac{1}{2})\times 0-b}{2\times 0-1} \Rightarrow 1=b \rightarrow a+b=\frac{1}{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۶- (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۹)

اولاً تابع مجانب قائم $x=0$ را دارد، لذا $x=0$ ریشه‌ی مخرج است و از آنجا $b=0$ خواهد بود، بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{x^2+ax-3}{x^3}$$

از طرفی با توجه به نمودار، تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است، پس تابعی فرد است، مخرج کسر تابعی فرد است، باید صورت تابعی زوج باشد و این زمانی ممکن است که ضریب x، یعنی $a=0$ باشد، لذا: $(a,b)=(0,0)$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۷ (سراسری ریاضی - ۷۷)

راه حل اول: خط $y = x$ مجانب مایل تابع است، پس با تقسیم صورت بر مخرج، خواهیم داشت:

$$y = ax + b - \frac{ax + b}{x^۲ + ۱} \Rightarrow \begin{cases} y = ax + b \\ y = x \end{cases}$$

پس $a = ۱$ و $b = ۰$.

راه حل دوم: ضریب زاویه‌ی مجانب مایل با توجه به شکل برابر ۱ است، پس:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^۳ + bx^۲}{x^۳ + x} = a = ۱$$

از طرفی نقطه به طول $x = ۰$، طول نقطه‌ی عطف است، پس صورت کسر باید شامل عامل x از درجه فرد باشد، پس $b = ۰$.

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۹۸ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۰)

با توجه به شکل وقتی $x \to +\infty$، تابع دارای خط مجانب افقی به معادله‌ی $y = ۲$ است، با استفاده از هم‌ارزی رادیکالی، خواهیم داشت:

$$\lim_{x \to +\infty} (ax + \sqrt{x^۲ + bx + ۵}) = \lim_{x \to +\infty} \left(ax + \left| x + \frac{b}{۲} \right| \right)$$

وقتی $x \to +\infty$، علامت عبارت داخل قدر مطلق مثبت است، بنابراین:

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (ax + x + \frac{b}{۲}) = \lim_{x \to +\infty} \left((a + ۱)x + \frac{b}{۲} \right) = ۲$$

برای این‌که، حد برابر عدد متناهی ۲ شود، باید ضریب x، صفر باشد:

$$\Rightarrow \begin{cases} a + ۱ = ۰ \Rightarrow a = -۱ \\ \frac{b}{۲} = ۲ \Rightarrow b = ۴ \end{cases}$$

بنابراین $(a, b) = (-۱, ۴)$.

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

با توجه به گزینه‌ها می‌توانیم $U(x)$ را در تابع $y=\sin^{-1}(U(x))$ قرار داده و با شکل داده شده مقایسه کنیم. ویژگی‌های معلوم در این شکل آن است که $f(۳)>۰$، $f(-۱)<۰$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=۰$ و $D_f=(-\infty,-۱]\cup[۳,+\infty)$ می‌باشد.

بررسی گزینه‌ی (۱):

$$y=\sin^{-۱}\left(\frac{۲}{x-۱}\right)\Rightarrow\begin{cases}y(۳)=\sin^{-۱}(۱)=\frac{\pi}{۲}>۰\\ y(-۱)=\sin^{-۱}(-۱)=-\frac{\pi}{۲}<۰\end{cases}$$

دامنه: $\left|\frac{۲}{x-۱}\right|\le ۱\Rightarrow |x-۱|\ge ۲\Rightarrow x-۱\ge ۲$ یا $x-۱\le -۲$

$\Rightarrow x\ge ۳$ یا $x\le -۱$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

بررسی گزینه‌ی (۲):

$$y=\sin^{-۱}\left(\frac{۲}{۱-x}\right)\Rightarrow y(۳)=\sin^{-۱}(-۱)=-\frac{\pi}{۲}\neq ۰$$ غ‌ق‌ق

بررسی گزینه‌ی (۳):

$$y=\sin^{-۱}\left(\frac{۱}{x-۲}\right)\Rightarrow\begin{cases}y(۳)>۰\\ y(-۱)<۰\end{cases}$$

دامنه: $\left|\frac{۱}{x-۲}\right|\le ۱\Rightarrow |x-۲|\ge ۱\Rightarrow x-۲\ge ۱$ یا $x-۲\le -۱$

$\Rightarrow x\ge ۳$ یا $x\le ۱$ غ‌ق‌ق

بررسی گزینه‌ی (۴):

$$y=\sin^{-۱}\left(\frac{۱}{۲-x}\right)\Rightarrow y(۳)=\sin^{-۱}(-۱)=-\frac{\pi}{۲}\neq ۰$$ غ‌ق‌ق

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

محل تلاقی منحنی با مجانب افقی روی محور y ها قرار دارد، پس نقطـه‌ی $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ در منحنی صدق می‌کند:

$$\frac{1}{2} = \frac{0+0+b}{0+0+1} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{x^2 + ax + \frac{1}{2}}{2x^2 + x + 1}$$

از طرفی نمودار در نقطه‌ای به طول مثبت، بر محور x ها مماس است، لذا معادله‌ی تلاقی آن با محور x ها، ریشه‌ی مضاعف مثبت خواهد داشت، بنابراین $y = 0$ (صورت کسر) ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد:

$$x^2 + ax + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = a^2 - 2 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2} \\ \text{ریشه‌ی مضاعف } x = -\frac{a}{2} > 0 \Rightarrow a < 0 \end{cases}$$

بنابراین $a = -\sqrt{2}$ است.

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir