



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، یادآوری مفاهیم پایه - ۱۳۹۶۰۱۱۸

۸۱- مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R} : \frac{|x|}{[x] + [-x]} > -1\}$ یک همسایگی متقارن ... () ، علامت جزء صحیح است.

- (۱) به مرکز صفر و به شعاع ۱ است. (۲) محذوف به مرکز صفر و به شعاع ۱ است.
(۳) به مرکز -۱ و به شعاع ۱ است. (۴) محذوف به مرکز -۱ و به شعاع ۱ است.

شما پاسخ نداده اید

۸۲- اگر $\frac{a}{16} + \frac{a}{16^2} + \dots = 0/13$ باشد، آن گاه a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳
(۳) ۴ (۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{(1+2^x)^2}{2^x}$ کدام بازه است؟

- (۱) $(2, +\infty)$ (۲) $[2, 4]$
(۳) $(0, +\infty)$ (۴) $[4, +\infty)$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، دنباله - ۱۳۹۶۰۱۱۸

۸۳- اگر به ازای $n > 31$ تمام جملات دنباله‌ی $\left\{ \frac{2n^2 - 38}{n^2 - 24} \right\}$ در بازه‌ی (a, b) قرار گیرند، کم‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۰/۰۰۲ (۲) ۰/۰۲
(۳) ۰/۰۰۱ (۴) ۰/۰۱

شما پاسخ نداده اید

$$84- \text{اگر دنباله‌ی } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \tan^{-1}(-n) & ; n = 2k \\ \frac{(a-1)n^2 + bn + 3}{2n+5} & ; n = 2k+1 \end{cases} \text{ همگرا باشد، مقدار } a+b \text{ کدام است؟ } (k \in \mathbb{Z})$$

(۱) صفر (۲) -۲

(۳) -۱ (۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

$$85- \text{دنباله‌ی } a_n = n^2 + 2n - n\sqrt{n^2 + 4n} \text{ به کدام عدد همگرا است؟}$$

(۱) صفر (۲) ۲

(۳) ۱ (۴) -۱

شما پاسخ نداده اید

$$86- \text{اگر } a_n = \frac{k + \cos(n\pi)}{3} \text{ باشد، به ازای چند عدد صحیح } k \text{ دنباله‌ی } \{(a_n)^n\} \text{ کراندار است؟}$$

(۱) ۳ (۲) ۵

(۳) ۷ (۴) ۹

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، حد ، حد و پیوستگی - ۱۳۹۶۰۱۱۸

$$87- \text{کدام جفت از دنباله‌های زیر برای اثبات عدم وجود حد تابع } f(x) = \begin{cases} x + [x] & ; x \in \mathbb{Q} \\ x - [x] & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \text{ وقتی } x \rightarrow 0 \text{ مناسب نیست؟ } ([] \text{، نماد}$$

جز صحیح است.)

$$(۱) \left\{ -\frac{e}{n} \right\}, \left\{ -\frac{1}{n} \right\} \quad (۲) \left\{ -\frac{e}{n} \right\}, \left\{ \frac{2}{n} \right\}$$

$$(۳) \left\{ \frac{\pi}{n} \right\}, \left\{ \frac{1}{n} \right\} \quad (۴) \left\{ \frac{\pi}{n} \right\}, \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{n} \right\}$$

شما پاسخ نداده اید

$$88- \text{اگر } f(x) = \begin{cases} x^2 - x & ; x \geq 0 \\ x^2 + x & ; x < 0 \end{cases} \text{ باشد، حاصل } \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{sgn}(f(x^3 - x)) \text{ کدام است؟}$$

(۱) صفر (۲) -۱

(۳) ۱ (۴) وجود ندارد.

شما پاسخ نداده اید

۸۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\lambda + \lambda \sin x \sin^3 x \sin \Delta x}{(2x - \pi)^2}$ کدام است؟

۳۲ (۱)

۶۴ (۲)

۷۰ (۴)

۳۵ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۹۰- اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{-4x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{ax^2-2b}$ کدام است؟

$\frac{\pi}{16}$ (۱)

$-\frac{\pi}{8}$ (۳)

$-\frac{\pi}{16}$ (۲)

$-\frac{\pi}{8}$ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۱- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-a}{x-1} - \frac{x+b}{x+1} \right) = 3$ باشد، آن گاه حاصل b کدام است؟

۲ (۱)

۵ (۳)

-۲ (۲)

-۵ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۲- حاصل $A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\pi x \tan \frac{\pi}{2(x+1)} \right)$ کدام است؟

۲ (۱)

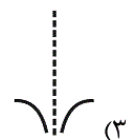
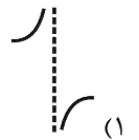
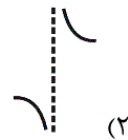
-۱ (۳)

-۲ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$ در اطراف مجانب قائم خود در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟



شما پاسخ نداده اید

۹۸- فاصله‌ی خطوط مجانب افقی تابع $f(x) = \log_3 \left(\frac{9^{x+1} + 1}{9^x + 27} \right)$ از یکدیگر چه قدر است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۹۹- مجانب‌های مایل دو منحنی $f(x) = ax(3e^{-x} + 2)$ و $g(x) = \frac{x}{\pi} \tan^{-1}(1 - x^2)$ با هم موازی‌اند، a کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
 (۲) $\frac{1}{4}$
 (۳) $-\frac{1}{4}$
 (۴) $-\frac{3}{4}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال، پیوستگی، حد و پیوستگی - ۱۳۹۶۰۱۱۸

۹۳- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & , x \neq 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته باشد، $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۹۴- تابع $f(x) = \cos^{-1} x + \sqrt{-x}$ مفروض است. اگر تابع f^{-1} روی بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته و نزولی اکید باشد، بیشترین مقدار $b - a$

کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2} + 2$
 (۲) $\pi + 1$
 (۳) $\frac{\pi}{2} - 1$
 (۴) $\frac{\pi}{2} + 1$

شما پاسخ نداده اید

۹۵- توابع $f(x) = 2x^3$ و $g(x) = 3x^2 - 1$ در کدام بازه‌ی زیر همدیگر را قطع می‌کنند؟

- (۱) $(-2, -1)$
 (۲) $(-\frac{1}{3}, 0)$
 (۳) $(0, \frac{1}{3})$
 (۴) $(-1, 0)$

شما پاسخ نداده اید

۹۶- تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 & ; x^3 \geq 3x - 1 \\ 3x - 1 & ; x^3 < 3x - 1 \end{cases}$ ، چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۰۱- اگر بردار $a(3, m, n)$ با محورهای ox ، oy و oz به ترتیب زوایای $\cos^{-1} \frac{\sqrt{6}}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ و $\cos^{-1} \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}} \right)$ بسازد، حاصل $m + n$ چه قدر است؟

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| $\sqrt{3}$ (۱) | $-\sqrt{3}$ (۲) |
| $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- اگر $|a| = \sqrt{3}$ ، $|b| = 2$ و $(a - b) \times (a + b) = (4, 4, -2)$ باشد، آنگاه زاویه‌ی حاده‌ی بین دو بردار a و b ، چند درجه است؟

- | | |
|----------|----------|
| 30 (۱) | 45 (۲) |
| 60 (۳) | 75 (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- خط L از دو نقطه‌ی $A = (2, 2, -3)$ و $B = (3, 4, -2)$ می‌گذرد. مساحت مثلثی که رأس‌های آن مبدأ مختصات و نقاط برخورد خط

L با صفحه‌های yz و xz هستند، کدام است؟

- | | |
|-----------|-----------|
| $2/5$ (۱) | $3/5$ (۲) |
| 5 (۳) | 7 (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- کدام یک از نقاط زیر روی خط $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{3} = z+2$ ، به فاصله‌ی ۲ واحد از صفحه‌ی $P: 2x + y - 2z + 2 = 0$ قرار دارد؟

- | | |
|--------------------|--------------------|
| $(-1, -3, -2)$ (۱) | $(-3, -6, -3)$ (۲) |
| $(3, 3, 0)$ (۳) | $(1, 0, -1)$ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- صفحه‌ای که از نقطه‌ی $A(0, 1, 2)$ می‌گذرد و موازی خطوط $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{-1}$ و $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-1}$ است، محور z را با

کدام ارتفاع قطع می‌کند؟

- | | |
|------------|------------|
| $2/6$ (۱) | $-1/6$ (۲) |
| $-1/3$ (۳) | $1/6$ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- اگر از نقطه‌ی $M(-1, 3)$ بتوانیم دو خط مماس بر دایره‌ی $x^2 + y^2 + 6x - 4y + m = 0$ رسم کنیم، مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت باید باشد؟

(۱) $8 < m < 13$

(۲) $m > 8$

(۳) $6 < m < 12$

(۴) $m > 6$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- مرکز دایره‌ی مماس بر خطوط $x = -3$ و $x = 7$ ، بر خط $2y + 3x + 1 = 0$ واقع است. به ازای کدام مقدار b ، خط $x + 2y + b = 0$ قائم بر دایره است؟

(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) ۵

(۴) -۵

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- کانون‌ها و رأس‌های ناکانونی بیضی به معادله‌ی $3x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 5$ ، رأس‌های یک چهارضلعی هستند. مساحت این چهارضلعی کدام است؟

(۱) ۸

(۲) $8\sqrt{3}$

(۳) ۱۶

(۴) $16\sqrt{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- نقاط F و F' ، کانون‌های یک بیضی و M نقطه‌ای روی آن بیضی است. اگر $|MF| = 3 + \sqrt{3}$ ، $|MF'| = 3 - \sqrt{3}$ و MF بر MF' عمود باشد، خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(۲) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- رأس یک سهمی، مبدأ مختصات و محور تقارن آن، محور x ها است. اگر این سهمی از نقطه‌ی $A = (-9, -6)$ بگذرد، آنگاه طول کانون آن کدام است؟

(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) ۲

(۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- گراف G از مرتبه‌ی ۷ همبند بوده و با حذف یک یال ناهمبند می‌شود. بیشترین اندازه برای G کدام است؟

۱۸ (۱)

۱۷ (۲)

۱۵ (۳)

۱۶ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- در یک گراف همبند بدون دور از مرتبه‌ی ۱۵، دقیقاً دو رأس درجه‌ی ۴ و سه رأس درجه‌ی ۳ وجود داشته و مابقی رؤس درجه‌ی ۱ و ۲ هستند. این گراف چند رأس درجه‌ی ۲ دارد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- ماتریس مجاورت یک گراف 2 -منتظم دارای ۵ درایه‌ی صفر است. تعداد یک‌ها در ماتریس مجاورت این گراف کدام است؟

۳۱ (۱)

۲۰ (۲)

۹ (۳)

۱۱ (۴)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، کلیات و تقسیم‌پذیری ، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۶۰۱۱۸

۱۱۴- در یک عمل تقسیم، مقسوم ۸ برابر باقیمانده است و باقیمانده حداکثر مقدار خود را دارا می‌باشد. مقسوم کدام است؟

۴۶ (۱)

۴۸ (۲)

۵۲ (۳)

۵۶ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- روی منحنی $2xy - y - 3x + 3 = 0$ ، چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

۴ (۱)

۲ (۲)

۱ (۳)

صفر (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- نمایش عددی در مبنای ۲ به صورت $(100110110)_2$ است. حاصل جمع رقم‌های این عدد در مبنای ۸ کدام است؟

۱۲ (۱)

۱۵ (۲)

۱۶ (۳)

۱۸ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- به ازای چند عدد صحیح n ، رابطه‌های $n \mid 24$ و $4800 \mid n$ برقرار است؟

۱۵ (۱)

۱۲ (۲)

۳۰ (۳)

۲۴ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- از حاصل ضرب $1! \times 2! \times 3! \times \dots \times 15! \times 16!$ کدام عامل را حذف کنیم، تا حاصل مربع کامل شود؟

۱۳! (۱)

۱۶! (۲)

۸! (۳)

۷! (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $(a, b) + b = [a, b]$ ، کدام رابطه صحیح است؟

$a = 2b$ (۱)

$b = 2a$ (۲)

$a = 3b$ (۳)

$b = 3a$ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- اگر $a \mid b^2$ و $a^2 \mid c$ ، آن‌گاه حاصل $[a^2b, ab^2c]$ کدام است؟ ($a, b, c \in \mathbb{N}$)

b^2c (۱)

abc (۲)

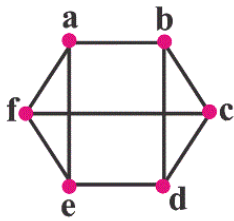
a^2b (۳)

ab^2c (۴)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته - گواه ، گراف‌ها و کاربردهای آن ، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۶۰۱۱۸

۱۲۱- در گراف ۳- منتظم مقابل، چند دور با طول ۵ وجود دارد؟



۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- با شش بازه‌ی $(۰,۹)$ ، $(۳,۸)$ ، $(۳,۴)$ ، $(۲,۵)$ ، $(۱,۴)$ ، $(۰,۲)$ از اعداد حقیقی یک گراف بازه‌ها می‌سازیم. در گراف حاصل چند مسیر

مختلف از رأس متناظر $(۰,۲)$ به رأس متناظر $(۳,۴)$ موجود است؟

۲ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- اگر A ماتریس مجاورت یک درخت و حاصلضرب درایه‌های قطری ماتریس A^2 برابر ۲۴ و ماکسیمم درجه‌ی آن ۴ باشد، تعداد یال‌های

این درخت کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، ریاضیات گسسته - گواه، کلیات و تقسیم‌پذیری، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۶۰۱۱۸

۱۲۴- در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی b ، خارج‌قسمت، مجذور باقیمانده است. چند عدد b می‌توان یافت؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- هفت برابر عدد شش رقمی $abcabc$ مربع کامل است. بیش‌ترین مقدار مجموع ارقام عدد abc ، کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۴ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- نمایش عددی در مبنای ۳ به صورت (۲۰۱۱۲۱) است. در نمایش این عدد در مبنای ۴، چند مرتبه رقم صفر تکرار شده است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

(۱) فاقد صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- چند عدد سه رقمی مربع کامل و مضرب ۵ وجود دارد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- عدد $(۷۵)!$ ، مختوم به چند صفر است؟

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n ، دو عدد به صورت‌های $۵n - ۲$ و $۷n + ۳$ ، نسبت به هم غیر اولند؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- دو عدد $A = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2$ و $B = 2^5 \times 3^2 \times 5^{\alpha} \times 11$ دارای ۲۳ مقسوم علیه مشترک مثبت و غیر یک می‌باشند، تعداد تمام

مقسوم‌علیه‌های مثبت کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها کدام است؟

۷۲۰ (۴)

۵۴۰ (۳)

۴۸۰ (۲)

۳۶۰ (۱)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، یادآوری مفاهیم پایه - ۱۳۹۶۰۱۱۸

(ممد رضا شوکتی بیرق)

-۸۱

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} \frac{|x|}{[x] + [-x]} > -1 \Rightarrow \frac{|x|}{-1} > -1 \Rightarrow |x| < 1$$

$$\xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} 0 < |x| < 1$$

مجموعه‌ی جواب فوق یک همسایگی محذوف متقارن به مرکز صفر و شعاع یک است.

(مسابقه - ۱۳۰: صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۴ و دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه:

صفحه‌های ۱۲ تا ۱۵)

۴

۳

۲

۱

(ایمان نشتین)

-۸۲

$$\begin{cases} \frac{a}{16} + \frac{a}{16^2} + \dots = \frac{\frac{a}{16}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\frac{a}{16}}{\frac{15}{16}} = \frac{a}{15} \\ \cdot / 13 = \frac{13-1}{90} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{15} = \frac{2}{15} \Rightarrow a = 2$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۷ تا ۹)

۴

۳

۲

۱

(مرضیه کوردوزی)

$$f(x) = \frac{(1+2^x)^2}{2^x} = \frac{1+(2^x)^2+2^{x+1}}{2^x} = \frac{1}{2^x} + 2^x + 2$$

طبق رابطه‌ی $a + \frac{1}{a} \geq 2$ اگر $a > 0$ و با توجه به اینکه $2^x > 0$ داریم:

$$2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2 \xrightarrow{+2} 2^x + \frac{1}{2^x} + 2 \geq 4 \Rightarrow f(x) \geq 4$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال، دنباله - ۱۳۹۶۰۱۱۸

-۸۳

(عیب شفیع)

$$a_n = \frac{2n^2 - 38}{n^2 - 24} = \frac{2n^2 - 48 + 10}{n^2 - 24} = 2 + \frac{10}{n^2 - 24} \quad \text{راه حل اول:}$$

$$n > 31 \Rightarrow n \geq 32 \Rightarrow n^2 \geq 1024 \Rightarrow n^2 - 24 \geq 1000$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n^2 - 24} \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow 0 < \frac{10}{n^2 - 24} \leq \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow 2 < 2 + \frac{10}{n^2 - 24} \leq 2/0.1$$

$$\Rightarrow 2 < a_n \leq 2/0.1 \Rightarrow b - a = \frac{1}{100}$$

راه حل دوم: به ازای $n > 31$ دنباله‌ی $2 + \frac{10}{n^2 - 24}$ نزولی می‌شود، پس

محدوده‌ی دقیق a_n به صورت $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n < a_n \leq a_{32}$ می‌باشد.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2 \Rightarrow a_{32} = 2 + \frac{10}{1024 - 24} = 2/0.1$$

$$\Rightarrow 2 < a_n \leq 2/0.1 \Rightarrow b - a = \frac{1}{100}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عیب شفیع)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \tan^{-1}(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \tan^{-1}(-\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

بنابراین ضابطه‌ی دوم نیز باید همگرا به صفر باشد.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a-1)n^2 + bn + 3}{2n + 5} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 1$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

 ۴ ✓ ۳ ۲ ۱

(مهمرمصطفی ابراهیمی)

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a_n &= n(n+2 - \sqrt{n^2+4n}) \times \frac{(n+2) + \sqrt{n^2+4n}}{(n+2) + \sqrt{n^2+4n}} \\ &= \frac{n((n+2)^2 - (n^2+4n))}{(n+2) + \sqrt{n^2+4n}} = \frac{n(n^2+4n+4 - n^2 - 4n)}{n+2 + \sqrt{n^2+4n}} \\ &= \frac{4n}{n+2 + \sqrt{n^2+4n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n+n} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

 ۴ ۳ ۲ ✓ ۱

اگر n زوج باشد، $a_n = \frac{k+1}{3}$ می‌شود و می‌خواهیم دنباله‌ی $\left\{\left(\frac{k+1}{3}\right)^n\right\}$

کراندار باشد. پس باید $1 \leq \frac{k+1}{3} \leq 1$ و در نتیجه $-4 \leq k \leq 2$.

اگر n فرد باشد، $a_n = \frac{k-1}{3}$ می‌شود و می‌خواهیم دنباله‌ی $\left\{\left(\frac{k-1}{3}\right)^n\right\}$

کراندار باشد. پس باید $1 \leq \frac{k-1}{3} \leq 1$ و در نتیجه $-2 \leq k \leq 4$.

پس به ازای $-2 \leq k \leq 2$ دنباله‌ی $\{(a_n)^n\}$ کراندار خواهد بود. یعنی k

می‌تواند ۵ مقدار صحیح ± 2 ، ± 1 و ۰ را داشته باشد.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال، حد، حد و پیوستگی - ۱۳۹۶۰۱۱۸

با بررسی گزینه‌ها مشخص است که هر جفت از دنباله‌ها خود همگرا به صفر

هستند. بنابراین در هر یک از جفت دنباله‌ها اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = L_1$ و

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = L_2$ و $(L_1 \neq L_2)$ باشد، آنگاه اثبات می‌شود f در صفر

حد نخواهد داشت. در گزینه‌ی «۳» داریم:

$$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \left[\frac{1}{n}\right] = 0$$

$$b_n = \frac{\pi}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} - \left[\frac{\pi}{n}\right] = 0 - [0^+] = 0$$

بنابراین گزینه‌ی «۳» برای اثبات عدم وجود حد مناسب نیست.

(دیفرانسیل - ۵ و پیوستگی: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کظم ابلالی)

$$\begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline x^3 - x & - & + & - \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline x^2 - x & + & - \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline x^2 + x & + & - \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{sgn}(f(x^3 - x)) = \operatorname{sgn}(f(0^+)) = \operatorname{sgn}(0^-) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{sgn}(f(x^3 - x)) = \operatorname{sgn}(f(0^-)) = \operatorname{sgn}(0^-) = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{sgn}(f(x^3 - x)) = -1$$

(دیفرانسیل - ۵ و پیوستگی: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

اگر فرض کنیم $t = x - \frac{\pi}{2}$ ، خواهیم داشت $t \rightarrow 0$ و $x = \frac{\pi}{2} + t$ و در

نتیجه:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\lambda + \lambda \sin x \sin 3x \sin \Delta x}{(2x - \pi)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda + \lambda \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3t\right) \sin\left(\frac{\Delta\pi}{2} + \Delta t\right)}{\left(2\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \pi\right)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda - \lambda \cos t \cos 3t \cos \Delta t}{4t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda - \lambda\left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)\left(1 - \frac{9}{2}t^2\right)\left(1 - \frac{25}{2}t^2\right)}{4t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{14 \cdot t^2 - 518t^4 + 225t^6}{4t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{14 \cdot t^2}{4t^2} = 3.5 \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۶۹ تا ۸۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{-4(x+1)^2} = -\infty \Rightarrow -4x^2 + ax + b \equiv -4(x+1)^2$$

$$\Rightarrow -4x^2 + ax + b \equiv -4x^2 - 8x - 4 \xrightarrow{\text{مقادیر نظیر به نظیر}} \begin{cases} a = -8 \\ b = -4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{ax^2 - 2b} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{-8x^2 + 8} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\tan(\pi - \pi x)}{-8(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{1}{8} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\tan(-\pi(x-1))}{x-1} \right) \left(\frac{1}{x+1} \right) = -\frac{\pi}{8} \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi}{16}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۶۹ تا ۱۶۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(هدای پلاور)

-۹۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-a}{x-1} - \frac{x+b}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (1-a)x - a - x^2 + (1-b)x + b}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2-a-b)x + (b-a)}{(x-1)(x+1)} = 3$$

چون مخرج به ازای $x=1$ صفر می‌شود، صورت نیز باید به ازای $x=1$ صفر

$$2-a-b+b-a=0 \Rightarrow a=1$$

شود:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-b)x + (b-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-b)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1-b}{2} = 3$$

$$\Rightarrow b = -5$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۶۹ تا ۱۶۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\pi x \tan \frac{\pi}{2(x+1)}) = 0 \times \infty \text{ مبهم}$$

چون با ابهام $0 \times \infty$ مواجه هستیم لازم است عامل بی نهایت شونده را معکوس کرده و آن را در مخرج بنویسیم.

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x}{\tan \frac{\pi}{2(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x}{\cot \frac{\pi}{2(x+1)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(x+1)}\right)}$$

کمان \tan در مخرج را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{x+1}\right)$$

از طرفی چون وقتی $x \rightarrow 0$ ، $\frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{x+1}\right) \rightarrow 0$ پس می توان به جای \tan ،

کمان آن را قرار داد:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x}{\frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{x+1}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\pi x}{\pi x \left(\frac{1}{x+1}\right)} = 2$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه های ۶۹ تا ۸۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

شیب مجانب مایل از رابطه‌ی $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x}$ به دست می‌آید.

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax(2e^{-x} + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a(2e^{-x} + 2)$$

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty \Rightarrow m_1 = a(0 + 2) = 2a \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow m'_1 = +\infty \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x}{\pi} \tan^{-1}(1-x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(1-x^2)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow 2a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

(دیفرانسیل - مجانب: صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، پیوستگی ، حد و پیوستگی - ۱۳۹۶۰۱۱۸

(ممد، رضا شوکتی بیرق)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$$

باید داشته باشیم:

$$\text{برای این که حد } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx}{x^2 - 1} \text{ موجود باشد، باید } x = 1$$

ریشه‌ی صورت باشد. زیرا در غیر این صورت حاصل حد فوق، بی‌نهایت خواهد بود.

$$a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

پس باید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - ax}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax}{x+1} = \frac{a}{2} = 1$$

$$\Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a - b = 4$$

(دیفرانسیل - سر و پیوستگی: صفحه‌های ۸۷ تا ۱۰۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

(فریدون ساعتی)

$$\cos^{-1} x : D_1 = [-1, 1] \Rightarrow D_f = D_1 \cap D_\gamma = [-1, 0]$$

$$\sqrt{-x} : D_\gamma = (-\infty, 0]$$

$$f(x) = \cos^{-1} x + \sqrt{-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{2\sqrt{-x}} < 0$$

یعنی f در بازه‌ی $[-1, 0]$ پیوسته و نزولی اکید است، پس f^{-1} در بازه‌ییعنی $[f(0), f(-1)]$ پیوسته و نزولی اکید است.

$$\max(b - a) = \pi + 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 1$$

(دیفرانسیل - سر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow h(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

اگر تابع f در بازه‌ی (a, b) پیوسته باشد و داشته باشیم $f(a).f(b) < 0$.

آن‌گاه این تابع در بازه‌ی (a, b) حداقل یک ریشه دارد.

تابع $h(x)$ یک تابع درجه سه پیوسته است.

$$\left. \begin{array}{l} h(-1) = -2 - 3 + 1 < 0 \\ h(0) = 0 + 0 + 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(-1).h(0) < 0$$

طبق قضیه‌ی بولتزانو تابع $h(x)$ حتماً در بازه‌ی $(-1, 0)$ دارای ریشه است.

(دیفرانسیل - ۵۵ و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

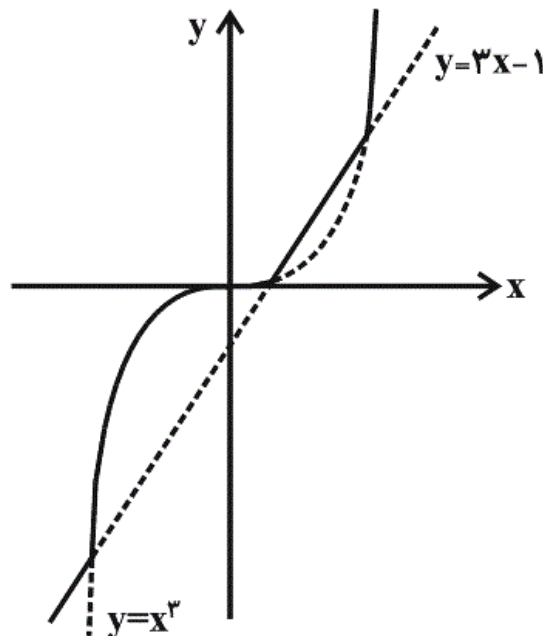
(کلیف ایملی)

-۹۶

به کمک نمودار توابع $y = x^3$ و $y = 3x - 1$ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار واضح است که تابع در تمام \mathbb{R} پیوسته است و نقطه‌ی

ناپیوستگی ندارد.



(دیفرانسیل - ۵۵ و پیوستگی: صفحه‌های ۸۷ تا ۱۰۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا پورحسینی)

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|a|} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{3}{|a|} \Rightarrow |a| = 2\sqrt{6}$$

$$\cos \beta = \frac{a_2}{|a|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{m}{2\sqrt{6}} \Rightarrow m = 2\sqrt{3}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{|a|} \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{n}{2\sqrt{6}} \Rightarrow n = -\sqrt{3}$$

$$m + n = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

(هندسه تحلیلی - بردار: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

(معمداً ابراهیم کیتی زاده)

-۱۰۲

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{b} = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\Rightarrow 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (4, 4, -2) \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2, 2, -1)$$

$$\Rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |(2, 2, -1)|$$

اگر α زاویه‌ی بین دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} باشد، آنگاه:

$$|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha = \sqrt{4 + 4 + 1} \Rightarrow \sqrt{3} \times 2 \sin \alpha = 3$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

(هندسه‌ی تحلیلی - بردار: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، خط و صفحه - ۱۳۹۶۰۱۱۸

خط L موازی بردار $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 0)$ است، پس معادله‌اش به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2}, z = -3$$

اگر $x = 0$ ، آنگاه $C = (0, -2, -3)$ نقطه‌ی برخورد L با صفحه‌ی yz است و

اگر $y = 0$ ، آنگاه $D = (1, 0, -3)$ نقطه‌ی برخورد L با صفحه‌ی xz است، حال

مساحت مثلثی با دو ضلع $\overrightarrow{OC} = (0, -2, -3)$ و $\overrightarrow{OD} = (1, 0, -3)$ را به دست

می‌آوریم. داریم: $\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OD} = (0, -2, -3) \times (1, 0, -3) = (6, -3, 2)$

$$|\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OD}| = \sqrt{49} = 7$$

مساحت مثلث برابر است با: $\Rightarrow S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OD}| = \frac{7}{2} = 3.5$

(هندسه‌ی تحلیلی - بردار: صفحه‌های ۲۵ و ۳۰ و

فقط و صفحه: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهم‌دراهم کیتی زاده)

-۱۰۴

فرض کنید A نقطه‌ای پارامتری روی d باشد، داریم:

$$A = (2t - 1, 3t - 3, t - 2)$$

اگر فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P ، برابر h باشد، آنگاه:

$$h = \frac{|4t - 2 + 3t - 3 - 2t + 4 + 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 2$$

$$\Rightarrow 5t + 1 = \pm 6 \Rightarrow t = 1, t = -\frac{7}{5}$$

$$t = 1 \Rightarrow A = (1, 0, -1)$$

(هندسه تحلیلی - فقط و صفحه: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷ و ۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\text{دو خط } d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{-1} \text{ و } d_2 : \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=2+t \end{cases} \text{ موازی نیستند}$$

راستای عمود بر این دو خط را به دست می آوریم.

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}_{d_1} \times \mathbf{u}_{d_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -3, -5)$$

صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $A(0, 1, 2)$ و عمود بر این راستا با خط‌های d_1 و d_2 موازی

است پس \mathbf{n} بردار نرمال صفحه است و معادله‌ی صفحه به شرح زیر به دست می آید:

$$-(x-0) - 3(y-1) - 5(z-2) = 0 \Rightarrow x + 3y + 5z - 13 = 0$$

با قرار دادن $x = y = 0$ نقطه‌ی تلاقی با محور Z ها به دست می آید:

$$z = \frac{13}{5} = 2.6$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، مقاطع مخروطی - ۱۳۹۶۰۱۱۸

اگر از نقطه‌ی M بتوان دو مماس بر دایره رسم کرد، آن‌گاه نقطه‌ی M باید خارج دایره باشد. اگر $C(x,y) = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله‌ی دایره باشد، آن‌گاه شرط آن که M خارج دایره باشد آن است که:

$$C(M) > 0 \Rightarrow (-1)^2 + 3^2 + 6(-1) - 4(3) + m > 0$$

$$\Rightarrow m - 8 > 0 \Rightarrow m > 8$$

از طرفی شرط آن که معادله‌ی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله‌ی یک دایره باشد، آن است که:

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \Rightarrow 36 + 16 - 4m > 0 \Rightarrow 4m < 52 \Rightarrow m < 13$$

بنابراین با توجه به اشتراک جواب‌ها داریم:

$$8 < m < 13$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا عباسی اصل)

- ۱۰۷

چون دایره بر دو خط $x = -3$ و $x = 7$ مماس است، پس مرکز دایره دقیقاً در وسط این دو خط، یعنی روی خط $x = 2$ قرار دارد.

$$2y + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{x=2} 2y + 6 + 1 = 0 \Rightarrow 2y = -7 \Rightarrow y = -\frac{7}{2}$$

می‌دانیم هر خط قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد، پس داریم:

$$2 + 2\left(-\frac{7}{2}\right) + b = 0 \Rightarrow b = 5$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$c^2 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow c = 2$$

چهارضلعی ای که رأس‌های آن، کانون‌ها و رأس‌های ناکانونی یک بیضی باشند،

یک لوزی است که قطرهای آن به طول $2b$ و $2c$ هستند. پس داریم:

$$S = \frac{1}{2}(2b)(2c) = 2bc = 2 \times 2\sqrt{3} \times 2 = 8\sqrt{3}$$

(هندسه‌ی تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۴

۳

۲

۱

(امیرحسین ابومصوب)

- ۱۰۹

چون MF بر MF' عمود است، پس مثلث MFF' در رأس M ،

قائم‌الزاویه است و داریم:

$$|FF'|^2 = |MF|^2 + |MF'|^2 = (3 + \sqrt{3})^2 + (3 - \sqrt{3})^2$$

$$9 + 3 + 6\sqrt{3} + 9 + 3 - 6\sqrt{3} \Rightarrow FF'^2 = 24$$

$$\Rightarrow |FF'| = 2c = 2\sqrt{6} \Rightarrow c = \sqrt{6}$$

$$2a = |MF| + |MF'| = 3 + \sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\text{خروج از مرکز})$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۴

۳

۲

۱

(مسئله ریاضی)

با توجه به این که محور تقارن سهمی، محور x ها می‌باشد، پس سهمی افقی است و چون رأس سهمی، مبدأ مختصات است، پس معادله‌ی آن به صورت $y^2 = 4ax$ می‌باشد. با جایگذاری نقطه‌ی A در سهمی داریم:

$$36 = 4a(-9) \Rightarrow a = -1$$

بنابراین مختصات کانون سهمی به صورت $F = (-1, 0)$ می‌باشد، یعنی طول

کانون برابر (-1) است.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

ریاضی، ریاضیات گسسته، گراف‌ها و کاربردهای آن، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۶۰۱۱۸

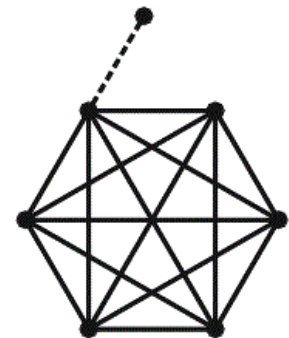
(سیرممسن فاطمی)

بیشترین اندازه‌ی گراف ناهمبند مرتبه‌ی p در حالتی است که یک رأس، منفرد بوده و $(p-1)$ رأس دیگر، گراف کامل تشکیل دهند. یعنی

$$q = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$$

گراف G یک یال بیشتر دارد. پس:

$$\begin{aligned} q_{\max} &= \frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1 \\ &= \frac{(7-1)(7-2)}{2} + 1 = 15 + 1 = 16 \end{aligned}$$



(ریاضیات گسسته - نظریه‌ی گراف: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

هر گراف همبند بدون دور، یک درخت است. در هر درخت، رابطه‌ی

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2(p-1)$$

برقرار است، پس اگر تعداد رأس‌های درجه‌ی ۲ و

درجه‌ی ۱ را به ترتیب با x و y نشان دهیم، داریم:

$$2 \times 4 + 3 \times 3 + 2x + y = 2(2 + 3 + x + y - 1)$$

$$\Rightarrow 17 + 2x + y = 8 + 2x + 2y \Rightarrow y = 9$$

$$p = 15 \Rightarrow 2 + 3 + x + 9 = 15 \Rightarrow x = 1$$

(ریاضیات گسسته - نظریه گراف: صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سیدامیر ستوره)

چون گراف r -منتظم است داریم: $rp = 2q$. از طرفی تعداد صفرهای

ماتریس مجاورت یک گراف برابر با $p^2 - 2q$ است. بنابراین $p^2 - rp = 5$

و لذا $p(p-r) = 5$ که نتیجه می‌دهد $p = 5$ و $r = 4$ ، پس $2q = 20$.

بنابراین تعداد یک‌های ماتریس مجاورت برابر ۲۰ است.

(ریاضیات گسسته - نظریه گراف: صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، ریاضیات گسسته، کلیات و تقسیم‌پذیری، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۶۰۱۱۸

(سید عادل رضا مرتضوی)

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

حداکثر مقدار r برابر با $b-1$ می‌باشد. پس:

$$\left. \begin{array}{l} a = 8r \\ r_{\max} = b-1 \end{array} \right\} \Rightarrow 8(b-1) = bq + b-1 \Rightarrow 8b-8 = bq+b-1$$

$$\Rightarrow 7b - bq = 7 \Rightarrow b(7-q) = 7 = 7 \times 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=7 \Rightarrow r=6 \\ 7-q=1 \Rightarrow q=6 \end{cases} \Rightarrow a = 8r = 8 \times 6 = 48$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۰ و ۳۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$2xy - y - 3x + 3 = 0 \Rightarrow y(2x - 1) = 3x - 3 \Rightarrow y = \frac{3x - 3}{2x - 1}$$

برای این که مختصات نقطه، اعدادی طبیعی باشند، لازم است داشته باشیم:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 1 \mid 3x - 3 \xrightarrow{\times 2} 2x - 1 \mid 6x - 6 \\ 2x - 1 \mid 2x - 1 \xrightarrow{\times 3} 2x - 1 \mid 6x - 3 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 \mid 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2 \\ 2x - 1 = -3 \Rightarrow x = -1 \times \\ 2x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \times \\ 2x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

با قرار دادن $x = 1$ ، $y = 0$ به دست می‌آید که غیر قابل قبول است.

با قرار دادن $x = 2$ ، $y = \frac{3}{3} = 1$ به دست می‌آید. پس تنها یک جواب دارد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ممد رضا دلورنژاد)

-۱۱۶

$$(10110110)_2 = (0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2) +$$

$$(0 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^5) + (0 \times 2^6 + 0 \times 2^7 + 1 \times 2^8)$$

$$= 6 + 2^3(0 + 1 \times 2 + 1 \times 2^2) + 2^6(0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2)$$

$$= 6 + 6(8) + 4(8)^2 = (466)_8$$

$$= 4 + 6 + 6 = 16$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا پورعسینی)

$$24 | n \Rightarrow n = 24q ; q \in Z$$

$$n | 4800 \Rightarrow 24q | 4800 \Rightarrow q | 200$$

یعنی q مقسوم‌علیه‌های 200 است. پس با تجزیه‌ی 200 ، تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح آن را تعیین می‌کنیم:

$$200 = 2^3 \times 5^2$$

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح} = 2(3+1)(2+1) = 24$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(میلاد منصوری)

-۱۱۸

دقت کنید که:

$$(n+1)!n! = (n+1)n!n! = (n+1)(n!)^2$$

لذا می‌توان نوشت:

$$(1! \times 2!) \times (3! \times 4!) \times \dots \times (15! \times 16!)$$

$$= 2(1!)^2 \times 4(3!)^2 \times \dots \times 16(15!)^2$$

$$= (2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 16) \times (1! \times 3! \times \dots \times 15!)^2$$

$$= 2^8 (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 8) \times (1! \times 3! \times \dots \times 15!)^2$$

$$= 2^8 \times (1! \times 3! \times \dots \times 15!)^2 \times 8!$$

چون دو عدد 2^8 و $(1! \times 3! \times \dots \times 15!)^2$ مربع کامل هستند، کافی است فقط $8!$ از حاصل ضرب حذف شود.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰ و ۴۴ و ۴۵)

 ۴ ۳ ۲ ۱

فرض می‌کنیم $(a, b) = d$ ، در این صورت داریم:

$$\frac{a}{d} = a' \Rightarrow a = a'd$$

$$\frac{b}{d} = b' \Rightarrow b = b'd$$

$$(a', b') = 1$$

$$[a, b] = \frac{a \cdot b}{(a, b)} = \frac{a'b'd^2}{d} = a'b'd$$

$$d + b'd = a'b'd \xrightarrow{\div d} 1 = a'b' - b' \Rightarrow 1 = b'(a' - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b' = 1 \\ a' - 1 = 1 \Rightarrow a' = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a' = 2b' \Rightarrow a = 2b$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳ و ۴۵ تا ۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سیدوید زوالفقاری)

- ۱۲۰

$$t = [a^2b, ab^2c] = ab \underbrace{[a, bc]}_z = abz$$

$$\left. \begin{array}{l} z = [a, bc] \\ a^2 | c \rightarrow a | c \rightarrow a | bc \end{array} \right\} \Rightarrow z = bc$$

$$\Rightarrow t = [a^2b, ab^2c] = ab^2c$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۵ و ۴۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی ، ریاضیات گسسته - گواه ، گراف‌ها و کاربردهای آن ، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۶۰۱۱۸

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۱۹)

- ۱۲۱

دوره‌های مطلوب عبارت‌اند از:

dcfabd .bcfedb .efcbae .afcdea .afedba .abcdea

(ریاضیات گسسته - نظریه گراف: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

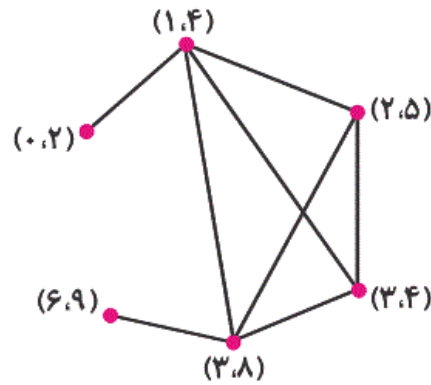
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

گراف متناظر را رسم می‌کنیم.



کافی است مسیرهای موجود از رأس متناظر با $(1,4)$ به رأس متناظر با $(3,4)$ را بیابیم که شامل یک مسیر به طول ۱، دو مسیر به طول ۲ و دو مسیر به طول ۳ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته - نظریه گراف؛ صفحه‌های ۸ و ۱۳)

 ۴ ۳ ۲ ۱

$$24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \dots \times 1$$

$$\text{تعداد رئوس درجه‌ی ۱} = 2 + 1 \times (4 - 2) + 1 \times (3 - 2) = 5$$

یعنی دنباله‌ی درجات رئوس گراف عبارت‌اند از: ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۲، ۳، ۴ که $p = 8$ و $q = 7$ است.

(ریاضیات گسسته - نظریه گراف؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

ریاضی، ریاضیات گسسته - گواه، کلیات و تقسیم‌پذیری، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۶۰۱۱۸

$$\left. \begin{aligned} 165 &= bq + r \xrightarrow{q=r^2} 165 = r(br+1) \quad (*) \\ 0 \leq r < b &\Rightarrow br > r^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow 165 > r(r^2) = r^3 \Rightarrow r < \sqrt[3]{165} \Rightarrow r \leq 5 \quad (**)$$

با توجه به روابط (*) و (**) و این که $165 = 3 \times 5 \times 11$ ، داریم:

$$r = 5 \xrightarrow{*} 33 = 5b + 1 \Rightarrow 5b = 32$$

$$\Rightarrow b = \frac{32}{5} \notin \mathbb{N} \quad (\text{غ ق ق})$$

$$r = 3 \xrightarrow{*} 55 = 3b + 1 \Rightarrow 3b = 54$$

$$\Rightarrow b = 18 > r = 3 \quad (\text{ق ق})$$

$$r = 1 \xrightarrow{*} 165 = b + 1 \Rightarrow b = 164 > r = 1 \quad (\text{ق ق})$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\overline{7abcabc} = 7 \times (\overline{abc} + 1000 \cdot \overline{abc}) = 7 \times 1001 \overline{abc}$$

$$= 7^2 \times 11 \times 13 \overline{abc} = \text{مربع کامل}$$

$$\Rightarrow \overline{abc} = 11 \times 13 \times k^2 = 143k^2$$

چون \overline{abc} سه رقمی است فقط $k = 1$ و $k = 2$ قابل قبولند و حداکثر مجموع

ارقام در حالت $k = 2$ به دست می‌آید.

$$k = 2 \Rightarrow \overline{abc} = 572 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 14$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تعداد صفرهای سمت راست عدد $75!$ برابر است با تعداد عوامل 5 در تجزیه‌ی $75!$ به عوامل اول.

$$\begin{array}{r} 75 \\ -75 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ 15 \\ -15 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ 5 \\ 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$18 = 3 + 15$ عامل 5 در تجزیه‌ی $75!$ وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سراسری ریاضی - ۹۳)

- ۱۲۹

اگر $d = (7n + 3, 5n - 2)$ آن‌گاه:

$$\begin{aligned} d \mid 5n - 2 &\xrightarrow{\times (-7)} d \mid -35n + 14 \\ d \mid 7n + 3 &\xrightarrow{\times 5} d \mid 35n + 15 \end{aligned} \Rightarrow d \mid 29$$

بنابراین $5n - 2$ مضرب 29 می‌باشد.

$$5n - 2 = 29k \Rightarrow 5n = 29k + 2 = 29(k - 2) + 58 + 2$$

$$\Rightarrow 5n = 29k' + 60$$

با توجه به آن که $5n$ و 60 ، هر دو مضرب 5 هستند، پس $29k'$ و در نتیجه

k' ، مضرب 5 است و داریم:

$$5n = 29(5q) + 60 \Rightarrow n = 29q + 12$$

یعنی $n = 29q + 12$ که به ازای $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ عدد 2 رقمی تولید می‌کند.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تعداد مقسوم‌علیه‌های ب.م.م دو عدد $24 = 2^3 + 1$ می‌باشد.

$$d = (A, B) = 2^3 \times 3^2 \times 5^x$$

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت} = (3+1)(2+1)(x+1) = 24$$

$$\Rightarrow 12x + 12 = 24 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$D = [A, B] = 2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 11$$

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت} = (5+1)(4+1)(2+1)(2+1)(1+1) = 540$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

www.kanoon.ir