



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

ریاضی ، ریاضی پیش‌دانشگاهی ، - ۱۳۹۵۰۶۱۲

۱۰۱- تمام حرف‌های کلمه‌ی "KANOON" را کنار هم می‌چینیم. با چه احتمالی هر دو حرف O کنار هم قرار می‌گیرند؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- یک تاس به‌گونه‌ای طراحی شده که ۲ وجه آن آبی و ۴ وجه آن قرمز است. اگر این تاس را ۴ بار پرتاب کنیم، احتمال آن که حداقل یک بار وجه آبی رو شود، کدام است؟

- (۱) $\frac{65}{81}$ (۲) $\frac{16}{81}$ (۳) $\frac{48}{81}$ (۴) $\frac{11}{27}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- از میان ۳ داوطلب گروه انسانی، ۲ داوطلب گروه تجربی و ۳ داوطلب گروه ریاضی، ۲ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که هر دو از یک گروه باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{7}{45}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- بیش‌ترین مقدار تابع درجه‌ی دوم با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + 4x + 5$ برابر ۹ است. معادله‌ی محور تقارن این تابع کدام است؟

- (۱) $x = 1$ (۲) $x = 2$ (۳) $x = 3$ (۴) $x = 4$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- در صورتی که منحنی تابع $y = 2x^2 + ax + a - \frac{3}{2}$ ، محور x ها را در طرفین محور y ها قطع کند، آنگاه حدود تغییرات a چگونه است؟

- (۱) $a > 6$ یا $a < 2$ (۲) $2 < a < 6$
(۳) $a < \frac{3}{2}$ (۴) $a > \frac{3}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 = 3(x+1)$ باشند، آنگاه $\frac{x_1}{x_2}$ و $\frac{x_2}{x_1}$ ریشه‌های کدام یک از معادله‌های

زیر هستند؟

$$x^2 + 5x + 1 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 5x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 5x - 1 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $15 + \frac{x}{y} < x + 2|x|$ ، بازه‌ی (a, b) است. مقدار $a + b$ کدام است؟

$$-4 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$-6 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- یکی از ریشه‌های معادله‌ی $|x+2| + |x+4| = a$ عدد یک است. ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

$$-8 \quad (4)$$

$$-7 \quad (3)$$

$$8 \quad (2)$$

$$7 \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- حاصل $[5x] + [3x]$ به ازای $x = -\sqrt{2}$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

$$-15 \quad (4)$$

$$-14 \quad (3)$$

$$-13 \quad (2)$$

$$-12 \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- اگر $[-x] = -4$ ، آنگاه $[3x+5]$ چند مقدار می‌تواند بپذیرد؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه و هندسه ، - ۱۳۹۵۰۶۱۲

۱۲۱- اگر $\tan 37^\circ = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin(-127^\circ) + \sin(143^\circ)}{\cos(-217^\circ) + \sin(-37^\circ)}$ کدام است؟

$$-1 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- اگر $\cos x = \frac{-3}{7}$ و انتهای کمان x در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، حاصل $\tan(\frac{5\pi}{2} + x)$ کدام است؟

$$\frac{3}{2\sqrt{10}} \quad (4)$$

$$\frac{-3}{2\sqrt{10}} \quad (3)$$

$$\frac{-2\sqrt{10}}{7} \quad (2)$$

$$\frac{2\sqrt{10}}{7} \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- افراد A و B که با فاصله $۶۰۰\sqrt{3}$ از یکدیگر قرار دارند، یک هواپیما را با

زوایای ۶۰° ، ۳۰° می بینند. هواپیمای در چه ارتفاعی از زمین در حال پرواز است؟



(۲) $۱۰۰\sqrt{3}$

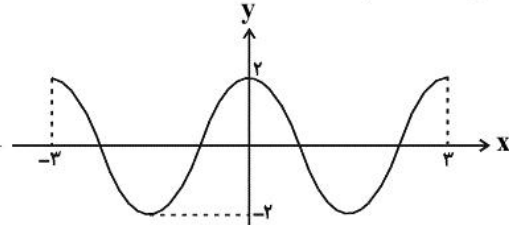
(۱) $۳۰۰\sqrt{3}$

(۴) ۶۰۰

(۳) ۹۰۰

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- اگر نمودار زیر قسمتی از تابع $f(x) = a \sin(\pi(\frac{1}{4} - bx))$ باشد، حاصل ab کدام است؟ ($b < 0$)



(۲) $\frac{4}{3}$

(۱) $-\frac{4}{3}$

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $-\frac{2}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- در مثلثی با اضلاع $\sqrt{11}$ و ۳ و ۲، اندازهی سینوس بزرگ ترین زاویه کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{7}}{6}$

(۳) $\frac{\sqrt{35}}{6}$

(۲) $\frac{\sqrt{5}}{6}$

(۱) $\frac{5}{6}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- اگر برای مقادیر x در بازه $[-a, a]$ داشته باشیم $\cos x = \frac{1-2m}{1+m}$ و حدود m برابر $[\frac{1}{5}, 0]$ باشد، آن گاه a کدام است؟

(۴) $\frac{\pi}{3}$

(۳) $\frac{\pi}{4}$

(۲) $\frac{\pi}{6}$

(۱) $\frac{\pi}{12}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- نقطه‌ی A محل برخورد نیمساز ربع اول با دایره‌ی مثلثاتی است. اگر نقطه‌ی A را به اندازه‌ی ۲۷° حول مبدأ دوران بدهیم، طول نقطه‌ی جدید کدام خواهد بود؟

(۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

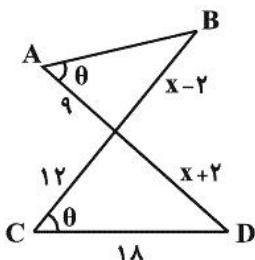
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- با توجه به شکل زیر، محیط مثلث کوچک تر کدام است؟



(۱) ۳۴

(۲) $36/5$

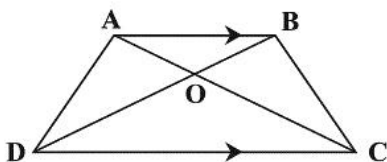
(۳) $33/5$

(۴) $34/5$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- قطرهای دوزنقه‌ی شکل زیر رسم شده‌اند و مساحت مثلث‌های OAB و OBC به ترتیب برابر ۳ و ۴ هستند.

نسبت فواصل نقطه‌ی O از دو قاعده چه قدر است؟



(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{4}{3}$

(۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(۳) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- در مستطیل ABCD می دانیم $BC=4$ و $AB=8$ ؛ از رأس A عمودی بر قطر BD رسم می کنیم. این عمود قطر BD را در N و ضلع CD را در M قطع می کند. طول DM کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی ۳ و آمار و مدل سازی ، - ۱۳۹۵۰۶۱۲

۹۱- اگر میانگین محیط و میانگین مساحت چند مربع به ترتیب ۱۲ و ۲۵ باشد، آن گاه انحراف معیار اضلاع این مربع ها کدام است؟

- ۱۳ (۱) ۹ (۲) ۴ (۳) ۲۲ (۴)

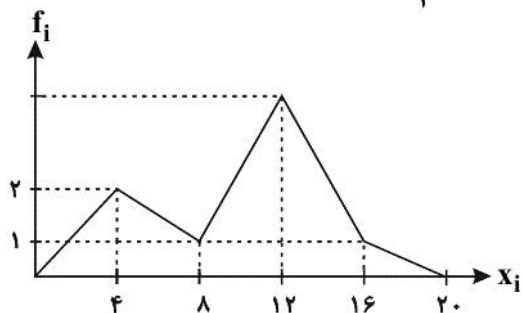
شما پاسخ نداده اید

۹۲- اگر میانگین و ضریب تغییرات داده های $1 + \frac{x_1}{2}, 1 + \frac{x_2}{2}, \dots, 1 + \frac{x_n}{2}$ به ترتیب برابر ۳ و $\frac{4}{3}$ باشد، آن گاه واریانس داده های $1 - \frac{x_1}{4}, 1 - \frac{x_2}{4}, \dots, 1 - \frac{x_n}{4}$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۳- با توجه به نمودار چندبر فراوانی زیر، اگر فراوانی نسبی دسته ی سوم، $\frac{1}{4}$ باشد، ضریب تغییرات داده ها کدام است؟



- ۰/۴ (۱)
۰/۵ (۲)
۰/۲۵ (۳)
۰/۳۵ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۴- حجم آب یک استخر در حال تخلیه بر حسب لیتر به وسیله ی رابطه ی $V = 120(2500 - 50t + t^2)$ به زمان t بر حسب دقیقه بستگی دارد. آهنگ متوسط تغییر حجم آب این استخر در ۸ دقیقه اول کدام است؟

- ۵۰۰۰ (۱) -۵۰۴۰ (۲) -۵۴۰۰ (۳) -۴۰۵۰ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۵- در تابع $f(x) = |(x-1)(x-3)|$ اختلاف آهنگ متوسط تغییر تابع در فاصله ی [۲, ۴] با آهنگ آنی در $x = 2/5$ چه قدر است؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۶- اندازه ی مساحت مربعی را که طول ضلع آن x است برابر با y می گیریم. آهنگ تغییر y نسبت به x در $x_0 = 5$ وقتی نمو h به صفر میل می کند، کدام است؟

- ۰ (۱) ۵ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۹۷- چند نقطه روی نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ وجود دارد به طوری که مماس‌های مرسوم در این نقاط بر خط D به

معادله‌ی $4x - 5y + 1 = 0$ عمود باشد؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۹۸- مشتق تابع $f(x) = \left(\frac{x}{2x-1}\right)(x^2 - \frac{x}{2})$ در $x=1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) ۱
(۴) -۱

شما پاسخ نداده اید

۹۹- اگر $f(x) = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x-3}}$ و $g(x) = \frac{3x}{x+1}$ باشد، آن‌گاه حاصل $f'(x)g'(x) + g''(x)f(x)$ به‌زای $x=4$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $-\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) $-\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- اگر $f(x) = \frac{(x^2 - 4)\tan^2 \frac{\pi}{x^2}}{1 - \cos \frac{2\pi}{3x}}$ باشد، حاصل $f'(-2)$ کدام است؟

- (۱) -۴
(۲) ۴
(۳) ۸
(۴) -۸

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پیش‌دانشگاهی- گواه ، - ۱۳۹۵۰۶۱۲

۱۱۱- در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی‌درپی بدون جای‌گذاری خارج

می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟

- (۱) $\frac{1}{11}$
(۲) $\frac{1}{15}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) $\frac{1}{25}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- ظرف A دارای ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره‌ی سفید و

۳ مهره‌ی سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، دو

مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟

- (۱) $\frac{25}{63}$
(۲) $\frac{26}{63}$
(۳) $\frac{10}{21}$
(۴) $\frac{11}{21}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال، حداکثر در سه پرتاب این نتیجه حاصل می‌شود؟

- (۱) $\frac{27}{64}$ (۲) $\frac{37}{64}$ (۳) $\frac{19}{32}$ (۴) $\frac{39}{64}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- در معادله‌ی $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ است؟

- (۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ (۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$
 (۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات، مماس است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ و -۱۲ (۳) -۴ و ۱۲ (۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- اگر رابطه‌ی $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$ به رابطه‌ی تساوی تبدیل شود الزاماً سه عدد غیر صفر x و y و z چگونه‌اند؟

- (۱) مساوی هم (۲) هم علامت (۳) مثبت (۴) منفی

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^2 - 2x < |x - 2|$ ، به صورت کدام بازه است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $(1, 2)$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$ کدام است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x - [x]$ ؛ $x \in [-2, 3)$ از n پاره‌خط مساوی به‌اندازه‌ی L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n, L) کدام است؟

- (۱) $(4, 1)$ (۲) $(4, \sqrt{2})$ (۳) $(5, 1)$ (۴) $(5, \sqrt{2})$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۱- نقطه‌ی $A(0,1)$ ، روی دایره‌ی مثلثاتی به اندازه‌ی $\frac{13\pi}{4}$ رادیان در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران

می‌کند تا به نقطه‌ی A' برسد. مجموع طول و عرض نقطه‌ی A' کدام است؟

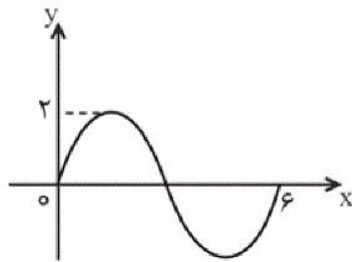
- (۱) صفر (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = 0/28$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{16}{9}$ (۲) $-\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{9}{16}$ (۴) $\frac{16}{9}$

شما پاسخ نداده اید



۱۳۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ ، کدام است؟

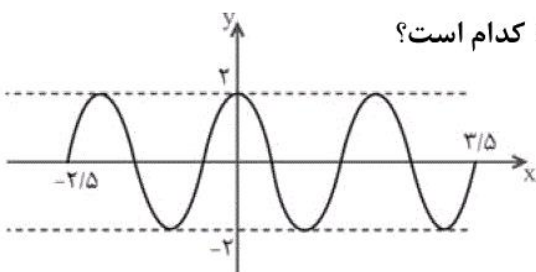
- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b = 8$ و $c = 5$ باشد، اندازه‌ی ضلع متوسط a کدام است؟

- (۱) $\sqrt{39}$ (۲) $\sqrt{41}$ (۳) $3\sqrt{5}$ (۴) $5\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید



۱۳۵- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi(\frac{1}{5} + bx)$ است. $a.b$ ، کدام است؟

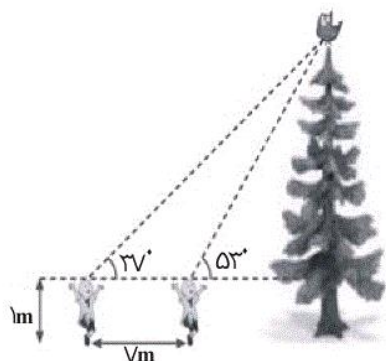
- (۱) ۲ (۲) $2/5$ (۳) ۳ (۴) $3/5$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- کودکی با قد یک متر، به پرنده‌ای که بالای یک درخت است نگاه می‌کند، در این حالت زاویه‌ی دید او با

افق 53° است. اگر او ۷ متر به عقب برود، زاویه‌ی دید او 37° می‌شود. ارتفاع درخت چند متر است؟ (فرض کنید:

$$(\sin 37^\circ \approx 0/60 \text{ و } \sin 16^\circ \approx 0/28)$$



- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- در متوازی‌الاضلاعی اندازه‌ی دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویه‌ی بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

- ۱۸ (۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- در دوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۶ و ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. فاصله‌ی M از قاعده‌ی بزرگ‌تر، چه قدر است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

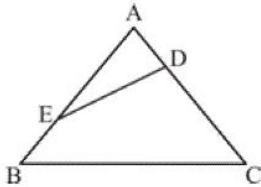
شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- مثلثی به اضلاع ۳، a و b با مثلثی به طول اضلاع ۳، ۴ و ۵ متشابه است. دو مثلث قابل انطباق نیستند. بیش‌ترین محیط از مثلث اول کدام است؟

- ۷/۲ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۳/۵ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- در چهارضلعی BCDE، زاویه‌های روبرو مکمل هم‌اند. اگر $BC = 20$ و $DE = 12$ ، آنگاه مساحت چهارضلعی چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



- ۰/۵۶ (۱) ۰/۶۴ (۲)
۰/۷۲ (۳) ۰/۸۰ (۴)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پیش‌دانشگاهی ، - ۱۳۹۵۰۶۱۲

۱۰۱-

(مسئله هاپیلو)

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء که n_1 تای آن‌ها از نوع ۱، n_2 تای آن‌ها از نوع ۲، ... و n_k تای آن‌ها از نوع k هستند (بدیهی است که باید:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} \quad (n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$$

ابتدا دو حرف O را در کنار هم، یک شیء در نظر می‌گیریم که در این صورت، پنج شیء خواهیم داشت که دو تای آن‌ها یکسانند (دو حرف N)، پس اگر پیشامد

$$n(A) = \frac{5!}{2!}$$

مطلوب را A بنامیم، با توجه به نکته‌ی بالا، داریم:

از طرفی اگر هیچ شرطی اعمال نشود، شش حرف کلمه‌ی "KANOON" که دو حرف N و دو حرف O در آن یکسانند، با توجه به نکته‌ی بالا، به تعداد حالت‌های

$$n(S) = \frac{6!}{2!2!}$$

مقابل جایگشت دارند:

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5!2!}{6!} = \frac{5!2!}{5! \times 6} = \frac{2!}{6} = \frac{1}{3}$$

(امتمال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۰۲-

(بهرام طالبی)

در این آزمایش تصادفی، پیشامد آن که «حداقل یک بار وجه آبی رو شود» با پیشامد آن که «هر چهار بار وجه قرمز رو شود» متمم است، پس ابتدا احتمال آن که هر چهار بار، وجه قرمز رو شود را می‌یابیم:

احتمال رو شدن وجه قرمز در هر پرتاب، برابر است با $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ ، پس اگر X برابر با تعداد دفعات رو شدن وجه قرمز در ۴ بار پرتاب این تاس باشد، با استفاده از

$$P(X=4) = \binom{4}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^0 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

دستور توزیع دوجمله‌ای، داریم:

$$1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$$

پس احتمال آن که حداقل یک بار وجه آبی رو شود، برابر است با:

(امتمال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲ تا ۴ و ۱۵ تا ۱۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۰۳-

(بهرام طالبی)

$$P = \frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3+1+3}{28} = \frac{1}{4}$$

(امتمال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۰۴

(بهره‌مندی)

می‌دانیم که بیش‌ترین مقدار تابع درجه‌ی دومی که در آن ضریب x^2 عددی منفی است، برابر عرض رأس آن است. پس اگر رأس منحنی تابع f را S بنامیم، داریم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2a} = \frac{-2}{a}$$

$$\Rightarrow y_S = f\left(-\frac{2}{a}\right) = a\left(-\frac{2}{a}\right)^2 + 4\left(-\frac{2}{a}\right) + 5 = \frac{-4}{a} + 5 \quad (*)$$

از طرفی طبق فرض مسأله، بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۹ است، یعنی:

$$y_S = 9 \xrightarrow{(*)} \frac{-4}{a} + 5 = 9 \Rightarrow a = -1$$

پس خط به معادله‌ی $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(-1)} = 2$ محور تقارن این تابع درجه‌ی دوم است.

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۰ تا ۲۵)

۴

۳

۲✓

۱

-۱۰۵

(میثم همزه‌لویی)

باید معادله‌ی $2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های متفاوت باشد

تا نمودار تابع $y = 2x^2 + ax + a - \frac{3}{2}$ محور x ها را در طرفین محور y ها قطع کند. برای

آنکه معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های

متفاوت باشد، لازم و کافی است که $\frac{c}{a} < 0$ باشد، پس: $\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow a - \frac{3}{2} < 0 \Rightarrow a < \frac{3}{2}$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۰ تا ۲۶)

۴

۳✓

۲

۱

-۱۰۶

(بهره‌مندی)

$$x^2 = 3(x+1) \Rightarrow x^2 - 3x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3 \end{cases}$$

$$S' = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{9 + 6}{-3} = -5$$

$$P' = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 1$$

معادله‌ی مورد نظر: $x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 1 = 0$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

۴

۳

۲✓

۱

-107

(مهرزاد ملونری)

اگر $x \geq 0$ ، آن گاه نامعادله به صورت زیر در می آید:

$$x + 2x < 15 + \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{5x}{2} < 15 \Rightarrow x < 6 \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x < 6 \quad (*)$$

اگر $x < 0$ ، آن گاه نامعادله به صورت زیر در می آید:

$$x - 2x < 15 + \frac{x}{2} \Rightarrow -15 < \frac{3x}{2} \Rightarrow -10 < x \xrightarrow{x < 0} -10 < x < 0 \quad (**)$$

از اجتماع نامعادله‌های (*) و (**)، مجموعه‌ی جواب نامعادله بدست می آید:

$$(0 \leq x < 6) \cup (-10 < x < 0) = (-10 < x < 6) \Rightarrow x \in (-10, 6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow a + b = -4$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۴

۳

۲

۱

-108

(آرش رفیعی)

چون $x = 1$ یکی از ریشه‌های معادله است، پس در معادله صدق می کند:

$$|1+2| + |1+4| = a \Rightarrow a = 8 \Rightarrow |x+2| + |x+4| = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -4 \Rightarrow -(x+2) - (x+4) = 8 \Rightarrow -2x = 14 \Rightarrow x = -7 \\ -4 \leq x \leq -2 \Rightarrow -(x+2) + (x+4) = 8 \Rightarrow 2 = 8 \text{ (غ ق ق)} \\ x > -2 \Rightarrow (x+2) + (x+4) = 8 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۴

۳

۲

۱

-109

(سروش موثینی)

$$x = -\sqrt{2} \Rightarrow [-5\sqrt{2}] + [-3\sqrt{2}] = [-\sqrt{50}] + [-\sqrt{18}] = -8 - 5 = -13$$

$$\begin{cases} 49 < 50 < 64 \Rightarrow 7 < \sqrt{50} < 8 \\ 16 < 18 < 25 \Rightarrow 4 < \sqrt{18} < 5 \end{cases}$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

۴

۳

۲

۱

-110

(هسین اسقینی)

$$[-x] = -4 \Rightarrow -4 \leq -x < -3 \Rightarrow 3 < x \leq 4$$

$$\Rightarrow 9 < 3x \leq 12 \Rightarrow 14 < 3x + 5 \leq 17 \Rightarrow [3x + 5] = 14 \text{ یا } 15 \text{ یا } 16 \text{ یا } 17$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

۴

۳

۲

۱

$$\sin(-37^\circ) = -\sin(37^\circ)$$

$$\frac{-\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{-\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} \xrightarrow[\text{بر } \cos 37^\circ]{\text{تقسیم صورت و مخرج}} \frac{-1 + \tan 37^\circ}{-1 - \tan 37^\circ}$$

$$= \frac{-1 + \frac{3}{5}}{-1 - \frac{3}{5}} = \frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{8}{5}} = \frac{1}{4}$$

حالا داریم:

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(ممید علیزاده)

-۱۲۲

$$\cos x = \frac{-3}{5}, x \in \text{دوم ناحیه}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x = ?$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\frac{9}{25}}$$

$$\Rightarrow \tan^2 x = \frac{16}{9} \xrightarrow{\frac{\pi}{2} < x < \pi} \tan x = -\frac{4}{3} \Rightarrow -\cot x = \frac{3}{4}$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۴)

۴ ✓

۳

۲

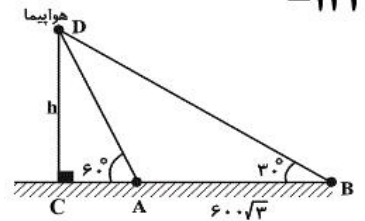
۱

(رسول مفسنی منش)

-۱۲۳

$$\Delta ADC: \tan 60^\circ = \frac{h}{AC} \Rightarrow AC = \frac{h}{\tan 60^\circ} = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta CDB: \tan 30^\circ = \frac{h}{BC} \Rightarrow BC = \frac{h}{\tan 30^\circ} = \frac{h}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}h}{1}$$



حالا می‌دانیم که $BC - AC = AB = 60\sqrt{3}$ پس داریم:

$$\frac{\sqrt{3}h}{1} - \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}h}{\sqrt{3}} = 60\sqrt{3} \Rightarrow h = 900$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(رسول مفسنی منش)

-۱۲۴

اولاً که $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi b x\right)$ همان $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi b x\right)$ یعنی $\cos(\pi b x)$ است، پس تابع

$$f(0) = 2 \Rightarrow a = 2$$

به صورت $f(x) = a \cos(\pi b x)$ است. حالا داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|\pi b|} = \frac{2}{|b|} = 3 \Rightarrow b = \pm \frac{2}{3} \xrightarrow{b < 0} b = -\frac{2}{3}$$

پس $ab = -\frac{4}{3}$ است. (مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۷ و ۱۴۲ تا ۱۵۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سروش موئینی)

بزرگ‌ترین ضلع $\sqrt{11}$ است و زاویه‌ی روبه‌روی آن بیش‌ترین زاویه است.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \Rightarrow (\sqrt{11})^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \cos \hat{A}$$

$$11 = 13 - 12 \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{6} \Rightarrow \sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A} = 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{35}{36}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۷)

۴

۳✓

۲

۱

لذا $\frac{1}{2} \leq \frac{1-2m}{1+m} \leq 1$ یعنی $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$. دقت کنید که در بازه‌ی $[-a, a]$ مقدار

$$\cos(a) = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi}{3}$$

$\cos 0 = 1$ خودبه‌خود اتخاذ می‌شود. لذا باید:

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۴)

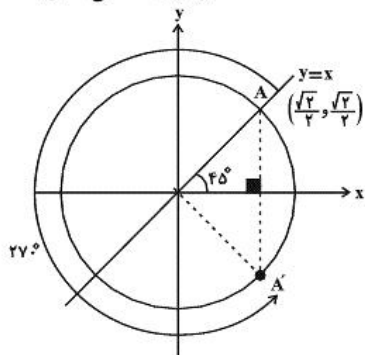
۴✓

۳

۲

۱

(رسول مفسنی‌منش)



محل برخورد نیمساز ربع اول با دایره‌ی مثلثاتی را می‌یابیم:

$$x^2 + y^2 = 1 \xrightarrow{x=y} x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

اگر از زاویه‌ی 45° به‌اندازه‌ی 27° جلو برویم، به

زاویه‌ی 315° یا همان -45° می‌رسیم. پس A' دقیقاً قرینه‌ی A نسبت به محور x هاست و طول

نقطه‌ی جدید برابر است با: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۳۴)

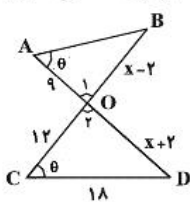
۴

۳✓

۲

۱

(رسول مفسنی‌منش)



$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \triangle AOB \sim \triangle COD$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{x+2} = \frac{9}{12} = \frac{AB}{18}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{x+2} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4x-8 = 3x+6 \Rightarrow x=14 \Rightarrow OB=12 \\ \frac{AB}{18} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = \frac{27}{2} = 13.5 \end{cases}$$

پس محیط مثلث کوچک‌تر برابر است با: $9 + 12 + 13.5 = 34.5$

(تشابه) (هندسه ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۷ و ۹۴ تا ۹۷)

۴✓

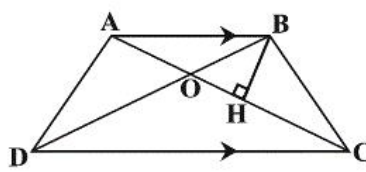
۳

۲

۱

(سروش موئینی)

دو مثلث OAB و OCD متشابه‌اند و برای یافتن نسبت فواصل نقطه‌ی A از دو قاعده‌ی AB و CD ، کفایت نسبت تشابه دو مثلث مذکور را به دست آوریم (نسبت ارتفاع‌ها برابر نسبت تشابه است). دو مثلث OAB و OBC در ارتفاع BH مشترکند، پس:



$$\frac{SOBC}{SOAB} = \frac{OC}{OA} = \frac{4}{3} \quad (\text{نسبت تشابه مورد نظر})$$

پس نسبت فواصل O از دو قاعده برابر $\frac{4}{3}$ است.

(تشابه) (هنرسه ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۷ و ۹۴ تا ۹۷)

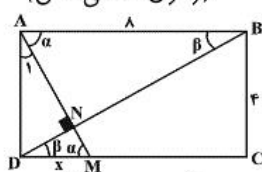
۴

۳

۲

۱ ✓

(رسول مفسنی‌منش)



با توجه به نام‌گذاری زوایا در شکل، چون $\hat{A}_1 + \alpha = 90^\circ$ و $\alpha + \beta = 90^\circ$ پس $\hat{A}_1 = \beta$ است. در نتیجه داریم:

$$\triangle ADM \sim \triangle ADB \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DM}{AD} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{DM}{4} \Rightarrow DM = 2$$

(تشابه) (هنرسه ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۷ و ۹۴ تا ۹۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

ریاضی، ریاضی ۳ و آمار و مدل‌سازی، - ۱۳۹۵۰۶۱۲

(میلاد منصوری)

فرض کنید اضلاع مربع‌ها x_1, x_2, \dots, x_n با میانگین \bar{x} باشند. در این صورت محیط‌ها $4x_1, 4x_2, \dots, 4x_n$ با میانگین $4\bar{x} = 12$ هستند. لذا $\bar{x} = 3$ است. به نحو

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} = 25 \quad \text{مشابه مساحت‌ها برابر } x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2 \text{ هستند و:}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2 = 25 - 9 = 16$$

پس:

$$\sigma_x = \sqrt{16} = 4$$

و در نتیجه:

(شاقص‌های پرآکنگرگی) (آمار و مدل‌سازی، صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

(میلار منصوری)

$$CV\left(\frac{X}{2} + 1\right) = \frac{\frac{\sigma_X}{2} + 1}{\left(\frac{X}{2} + 1\right)} = \frac{\frac{1}{2}\sigma_X}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \sigma_X = 8$$

$$\sigma_X^2 = 8^2 = 64$$

پس:

$$\sigma_{\frac{X}{4} - 1}^2 = \frac{1}{16}\sigma_X^2 = \frac{1}{16} \times 64 = 4$$

یعنی:

(شافص‌های پرآکندرگی) (آمار و مدل‌سازی، صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۵۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

(رسول مفسنی‌منش)

اگر فراوانی دسته‌ی سوم را X بگیریم، در واقع $\frac{X}{X+4} = \frac{1}{2}$ شده است پس $X = 4$ است.

| | | | | |
|-------|---|---|----|----|
| x_i | ۴ | ۸ | ۱۲ | ۱۶ |
| f_i | ۲ | ۱ | ۴ | ۱ |

جدول فراوانی این‌گونه است:

حالا میانگین و انحراف معیار را بیابیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2 \times 4 + 1 \times 8 + 4 \times 12 + 1 \times 16}{8} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{2 \times (4 - 10)^2 + \dots + 1 \times (16 - 10)^2}{8} = 16 \Rightarrow \sigma = 4$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4}{10} = 0.4$$

پس ضریب تغییرات برابر است با:

(شافص‌های پرآکندرگی) (آمار و مدل‌سازی، صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۵۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(فرهاد حامی)

برای محاسبه‌ی آهنگ متوسط تغییر حجم نسبت به زمان در بازه‌ی $[t_1, t_2]$ از

رابطه‌ی $\frac{V(t_2) - V(t_1)}{t_2 - t_1}$ به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(8) - V(0)}{8 - 0}$$

$$= \frac{120(25000 - 4000 + 64) - 120(25000 - 0 + 0)}{8} = \frac{120(-336)}{8} = -5040$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌ی ۱۳۰ - تمرین ۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سروش موئینی)

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

ضابطه تابع در فاصله $[1, 3]$ به صورت $-(x-1)(x-3)$ است:

$$f(x) = -(x^2 - 4x + 3) \Rightarrow f'(x) = -(2x - 4)$$

$$\Rightarrow f'(2/\Delta) = -(2 \times (2/\Delta) - 4) = -1$$

$$1 - (-1) = 2$$

پس اختلاف آن‌ها می‌شود:

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۳۰ و ۱۳۶ تا ۱۳۸)

۴

۳

۲

۱

(فرهاد فامی)

اگر ضلع مربع x باشد آنگاه مساحت $y = x^2$ است و آهنگ تغییرات y نسبت به x

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\Delta + h) - f(\Delta)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta + h)^2 - (\Delta)^2}{h}$$

به صورت زیر خواهد بود:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\Delta + h^2 + 1 \cdot h - 2\Delta}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 1) = 1$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۸ - مثال ۱)

۴

۳

۲

۱

(مهمرضا میرعلیایی)

اگر فرض کنیم چنین نقطه‌ای وجود دارد می‌بایست شیب خط مماس بر منحنی در این نقاط قرنیه و معکوس شیب خط D باشد، هم‌چنین می‌دانیم که شیب خط مماس بر منحنی

$$f'(x) = \frac{-1}{m_D}$$

در $x = x_0$ برابر مشتق تابع در این نقطه است، لذا داریم:

$$\begin{cases} D: 4x - \Delta y + 1 = 0 \Rightarrow m_D = \frac{4}{\Delta} \\ f(x) = \frac{x+1}{x-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\Delta}{(x-4)^2} \Rightarrow \frac{-\Delta}{(x-4)^2} = \frac{-\Delta}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = 4 \Rightarrow x-4 = \pm 2 \Rightarrow x = 4 \pm 2 \Rightarrow x = 6, 2$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۳۸)

بنابراین دو نقطه وجود دارد.

۴

۳

۲

۱

(میثم عمزهلویی)

$$f'(x) = \left(\frac{x}{2x-1}\right)' \left(x^2 - \frac{x}{2}\right) + \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)' \left(\frac{x}{2x-1}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1(2x-1) - 2x}{(2x-1)^2}\right) \left(x^2 - \frac{x}{2}\right) + \left(2x - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{2x-1}\right)$$

$$\Rightarrow f'(1) = \left(\frac{-1}{1}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(2 - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۸)

۴

۳

۲

۱

(معرفی ملارمفانی)

اگر $f(x)$ ، $g(x)$ و $g'(x)$ توابعی مشتق پذیر باشند و $y = f(x)g'(x)$ ، آن گاه داریم:

$$y' = f'(x)g'(x) + g''(x)f(x)$$

بنابراین خواسته‌ی سؤال مشتق تابع $f(x)g'(x)$ می‌باشد، بنابراین:

$$g(x) = \frac{3x}{x+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{3(x+1) - 3x}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$f(x).g'(x) = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x-3}} \times \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{3}{\sqrt{x-3}}$$

$$\Rightarrow (f(x).g'(x))' = \frac{0 \times \sqrt{x-3} - \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \times 3}{(\sqrt{x-3})^2} = \frac{-\frac{3}{2\sqrt{x-3}}}{(\sqrt{x-3})^2}$$

$$\Rightarrow (f(4).g'(4))' = \frac{-\frac{3}{2}}{1^2} = -\frac{3}{2}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۳۸)

۴

۳

۲✓

۱

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2) \tan^2 \frac{\pi}{3x}}{x^2} = \frac{-4 \times 1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-4}{\frac{1}{2}} = -8$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۳)

۴✓

۳

۲

۱

ریاضی، ریاضی پیش‌دانشگاهی- گواه، - ۱۳۹۵۰۶۱۲

(سراسری تهرپی-۹۲)

اگر هیچ شرطی اعمال نشود، برای خارج کردن مهره‌ی اول، پنج حالت، مهره‌ی دوم، چهار حالت، مهره‌ی سوم، سه حالت، مهره‌ی چهارم، دو حالت و برای خارج کردن مهره‌ی پنجم یک حالت وجود دارد، پس با توجه به اصل ضرب، فضای نمونه‌ی در این سؤال $n(S) = 5!$ عضو دارد.

برای آنکه دو مهره با شماره‌ی فرد بطور متوالی خارج نشوند، باید مهره‌ها بصورت یک در میان فرد و زوج خارج شوند، توجه کنید که مهره‌ی اول نمی‌تواند زوج باشد، زیرا در اینصورت قطعاً دو مهره‌ی آخر فرد خواهند بود، بنابراین مهره‌ی اول باید فرد باشد و برای آن سه حالت وجود دارد، مهره‌ی دوم باید زوج باشد و برای آن دو حالت وجود دارد، مهره‌ی سوم باید فرد باشد و برای آن دو حالت (یکی از فردها در انتخاب اول خارج شده است) و در نتیجه برای مهره‌های چهارم و پنجم فقط یک حالت مطلوب امکان‌پذیر است؛ پس اگر پیشامد مطلوب را A بنامیم، طبق اصل ضرب $n(A) = 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1$.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1}{5!} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10} = 0.1$$

(امتثال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳

۲

۱✓

دقت کنید که چون می‌خواهیم احتمال آن را بیابیم که ۲ مهره از ۴ مهره‌ی انتخابی سفید باشد بنابراین باید ۲ مهره‌ی دیگر سیاه باشند و چون سه ظرف داریم، احتمال انتخاب هر یک از ۳ ظرف $\frac{1}{3}$ است. احتمال آنکه از هر ظرف ۲ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی سفید خارج شود را پیدا می‌کنیم.

| | |
|----------------------------|--|
| انتخاب ظرف A $\frac{1}{3}$ | $\frac{\binom{4}{2} \binom{5}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{6 \times 10}{126}$ |
| انتخاب ظرف B $\frac{1}{3}$ | $\frac{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{15 \times 3}{126}$ |
| انتخاب ظرف C $\frac{1}{3}$ | $\frac{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{15 \times 3}{126}$ |

$$\Rightarrow P(E) = \frac{1}{3} \left(\frac{60}{126} + \frac{45}{126} + \frac{45}{126} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{150}{126} = \frac{50}{126} = \frac{25}{63}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

توجه کنید:

(احتمال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۳ و ۱۱ تا ۱۴)

۴

۳

۲

۱

هر دو زوج
↑

$$P_2 = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\right)}_{\text{پرتاب اول}} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)}_{\text{پرتاب دوم}} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

هر دو زوج هر دو زوج هر دو زوج
↑ ↑ ↑

$$P_3 = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\right)}_{\text{پرتاب اول}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\right)}_{\text{پرتاب دوم}} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)}_{\text{پرتاب سوم}} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$$

چون سه حالت بالا ناسازگارند، پس:

$$\Rightarrow P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{16}{64} + \frac{12}{64} + \frac{9}{64} = \frac{16+12+9}{64} = \frac{37}{64}$$

(احتمال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲ تا ۷)

۴

۳

۲

۱

(سراسری ریاضی قارج از کشور - ۹۱)

ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم. از آنجا که یک ریشه از نصف ریشه‌ی

$$\alpha = \frac{\beta}{2} + 5 \quad (*)$$

دیگر ۵ واحد بیشتر است، داریم:

$$\alpha + \beta = 8 \quad (**)$$

از طرفی با توجه به معادله، مجموع ریشه‌ها برابر ۸ است، یعنی:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\beta}{2} + 5 \\ \alpha + \beta = 8 \end{cases} \Rightarrow \frac{\beta}{2} + 5 + \beta = 8 \Rightarrow \frac{3\beta}{2} = 3 \Rightarrow \beta = 2$$

از (*) و (**) داریم:

چون β ریشه‌ی معادله است، پس در آن صدق می‌کند، بنابراین:

$$\beta = 2 : (2)^2 - 8(2) + m = 0 \Rightarrow m = 12$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

۴

۳

۲✓

۱

(سراسری ریاضی - ۹۲)

با توجه به اینکه α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 4 = 0$ است داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -2 \quad (*)$$

چون ریشه‌های معادله‌ی مطلوب $\frac{1}{\alpha} + 1$ و $\frac{1}{\beta} + 1$ هستند، خواهیم داشت:

$$S = \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 \stackrel{(*)}{=} \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1 \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{-2} + \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 1 = -\frac{1}{4}$$

پس با توجه به رابطه‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ معادله‌ی مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times(4)} 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

۴

۳✓

۲

۱

$$\Rightarrow (m - 12)(m + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ m = -4 \end{cases}$$

به ازای مقادیر به دست آمده برای m ، ریشه‌ی معادله‌ی تلاقی که طول نقطه‌ی تماس نمودار دو تابع است را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} m = 12 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow 2(x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ m = -4 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow 2(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

به ازای $m = 12$ ، طول نقطه‌ی تلاقی $x = -3$ خواهد بود که در ناحیه‌ی اول قرار ندارد، با توجه به اینکه در صورت سؤال تأکید شده است نمودار تابع بر نیمساز ناحیه‌ی اول مماس است، فقط مقدار $m = -4$ را می‌پذیریم.

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

۴

۳

۲

۱✓

-117

(سراسری تهرپی - ۸۶)

با عددگذاری به گزینه‌ی درست پی می‌بریم، یک بار هر سه عدد x ، y و z را مثبت و بار دیگر منفی و سپس مختلف‌العلامت انتخاب می‌کنیم. بدین ترتیب گزینه‌ی ۲ صحیح است.
(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۴

۳

۲✓

۱

-118

(سراسری تهرپی قارج از کشور - ۹۲)

به ازای ریشه‌ی داخل قدر مطلق، ضابطه‌بندی می‌کنیم:

$$\text{غقق } x \geq 2: x^2 - 2x < x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow 1 < x < 2$$

$$(2) x < 2: x^2 - 2x < 2 - x \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله، بازه‌ی $(-1, 2)$ است.

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۴

۳

۲✓

۱

-119

(سراسری تهرپی - ۹۱)

راه حل اول: به ازای هر عدد طبیعی n ، داریم:

$$4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2 \Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2$$

$$\Rightarrow 2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n-1$$

از طرفی به ازای هر عدد طبیعی n که $n > 2$ است، داریم:

$$n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1 \Rightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2$$

$$\Rightarrow n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n-2$$

پس برای هر عدد طبیعی n که $n > 2$ ، می‌توان نوشت:

$$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = (2n-1) - 2(n-2) = 3$$

راه حل دوم: حاصل عبارت را به ازای یک عدد طبیعی بزرگتر از ۲ محاسبه کنید: $n = 3$

$$\Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5 - 2 \times 1 = 3$$

$$\text{توجه: } \begin{cases} 25 < 28 < 36 \Rightarrow 5 < \sqrt{28} < 6 \Rightarrow [\sqrt{28}] = 5 \\ 1 < 3 < 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow [\sqrt{3}] = 1 \end{cases}$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

۴

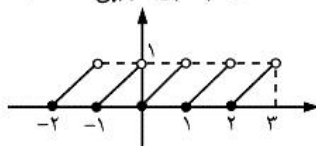
۳✓

۲

۱

-120

(سراسری تهرپی - ۸۳)



(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

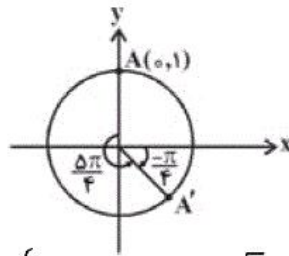
۴✓

۳

۲

۱

نمودار تابع را در فاصله‌ی $(-2, 3)$ رسم می‌کنیم، در این بازه تابع از پنج پاره‌خط به اندازه‌ی $\sqrt{2}$ تشکیل شده است.



با دوران به اندازه 2π ، نقطه‌ی A به موقعیت اولیه‌ی خود باز می‌گردد، پس کافیست نقطه‌ی A را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه‌ی $\frac{\Delta\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$ دوران دهیم تا نقطه‌ی A' به دست آید. مطابق شکل داریم:

$$\begin{cases} x_{A'} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_{A'} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow x_{A'} + y_{A'} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۳۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سراسری تهرینی - ۹۴)

-۱۳۲

$$\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 225^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\cos(270^\circ + 15^\circ) - \sin(270^\circ - 15^\circ)}{\sin(180^\circ - 15^\circ) - \sin(90^\circ + 15^\circ)} = \frac{\sin 15^\circ - (-\cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

با تقسیم صورت و مخرج بر $\cos 15^\circ$ خواهیم داشت:

$$= \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{\frac{28}{100} + 1}{\frac{28}{100} - 1} = \frac{-128}{72} = \frac{-16}{9}$$

توجه: $\sin(540^\circ - 15^\circ) = \sin(360^\circ + 180^\circ - 15^\circ) = \sin(180^\circ - 15^\circ)$
(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سراسری تهرینی قارج از کشور - ۹۳)

-۱۳۳

دوره‌ی تناوب تابع به معادله‌ی $y = A \sin(Bx + D) + E$ برابر است با $\frac{2\pi}{|B|}$ ، پس:

$$y = a \sin(b\pi x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \quad (*)$$

همچنین با توجه به نمودار $T = 6$ است، پس:

با فرض $b = \frac{1}{3}$ و اگر A عددی مثبت باشد، آنگاه بیشترین مقدار تابع به معادله‌ی $y = A \sin(Bx + D) + E$ ، برابر با $A + E$ است، پس:

$$y = a \sin(b\pi x) \Rightarrow \text{Max}(y) = a \quad (**)$$

همچنین با توجه به نمودار $\text{Max}(y) = 2$ ، پس:

$$\xrightarrow{(**)} a = 2 \quad (2) \quad \text{بنابراین: } (1), (2) \Rightarrow a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

توجه: مقادیر a و b می‌توانند هر دو منفی باشند و جواب $a + b = -\frac{7}{3}$ نیز قابل قبول است که در گزینه‌ها وجود ندارد.
(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۵۲)

۴

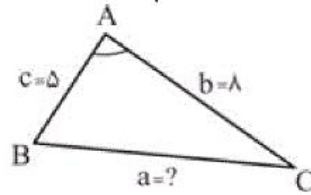
۳ ✓

۲

۱

با توجه به شکل، خواهیم داشت:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A$$



$$16 = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \sin A$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$$

با استفاده از دستور $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ ، خواهیم داشت:

$$\cos A = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

حال با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها، a را می‌یابیم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = 8^2 + 5^2 - 2(8)(5)\left(\frac{3}{5}\right) = 41 \Rightarrow a = \sqrt{41}$$

(مثلثات) (ریاضی، ۲، صفحه‌های ۱۳۲، ۱۵۴ و ۱۵۵)

۴

۳

۲✓

۱

تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a \cos b\pi x$$

$$|a| = 2$$

ماکزیمم تابع برابر ۲ است بنابراین:

$$y(0) = a \times \cos 0 = a \Rightarrow a = 2$$

اما $y(0) = 2$ پس:از طرفی نمودار تابع در بازه‌ی $[-2/5, 3/5]$ سه بار تکرار شده، در نتیجه:

$$3T = 3/5 - (-2/5) = 6 \Rightarrow T = 2$$

با توجه به رابطه‌ی دوره‌ی تناوب توابع کسینوسی خواهیم داشت:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

که هر دو مقدار قابل قبول است. با توجه به گزینه‌ها $a \cdot b = 2$ است.

(مثلثات) (ریاضی، ۲، صفحه‌ی ۱۳۹ تا ۱۵۲)

۴

۳

۲

۱✓

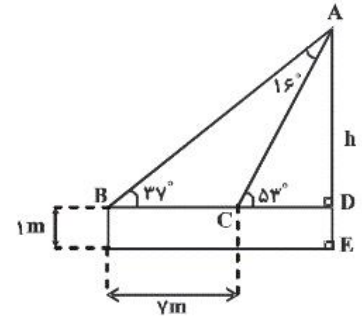
(سؤال ۳۱۰ کتاب آبی)

$$\hat{A}CD = \hat{A}BC + \hat{B}AC$$

$$\Rightarrow 53^\circ = 37^\circ + \hat{B}AC \Rightarrow \hat{B}AC = 16^\circ$$

$$\Delta ACD: \sin 53^\circ = \frac{AD}{AC}$$

$$\Rightarrow 0.8 = \frac{h}{AC} \Rightarrow AC = \frac{h}{0.8}$$



توجه کنید که $37^\circ + 53^\circ = 90^\circ$ ، پس:

$$\sin 53^\circ = \cos 37^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 37^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{6}{10}\right)^2} = 0.8$$

$$\Delta ABC: \frac{BC}{\sin 16^\circ} = \frac{AC}{\sin 37^\circ} \Rightarrow \frac{7}{0.28} = \frac{\frac{h}{0.8}}{0.6} \Rightarrow h = \frac{7 \times 0.6 \times 0.8}{0.28} = 12$$

$$\text{ارتفاع درخت} = AE = h + DE = 12 + 1 = 13$$

(مثال ۲، (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۸)

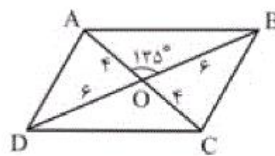
۴

۳

۲ ✓

۱

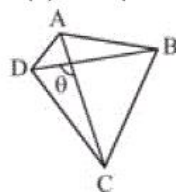
(سراسری تهرانی - ۹۲)



راه حل اول: می‌دانیم که در هر متوازی‌الاضلاع قطرهای همدیگر را نصف می‌کنند، پس با رسم دو قطر هر متوازی‌الاضلاع، چهار مثلث با مساحت‌های یکسان بدست

می‌آید، بنابراین با توجه به شکل مقابل، می‌توان نوشت: $S(ABCD) = 4S(\triangle AOB)$ (*)
از طرفی می‌دانیم که مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصلضرب طول دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع، پس:

$$(*) \Rightarrow S(ABCD) = 4 \left(\frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin(\hat{AOB}) \right) = 4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2}$$



راه حل دوم: می‌توان ثابت کرد که در حالت کلی مساحت هر چهارضلعی محدب برابر است با نصف حاصلضرب طول دو قطر آن، ضربدر سینوس زاویه‌ی بین آن دو قطر.

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \theta$$

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2}$$

یعنی در این سؤال داریم:

(مثال ۲، (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

اگر MH ، AB را در H' قطع کند، آن گاه طول $H'H$ برابر طول ارتفاع دوزنقه است، یعنی $H'H = 2$.

$$\text{از طرفی: } \begin{cases} \widehat{C\hat{M}D} : \text{مشترک} \\ AB \parallel CD \xrightarrow{\text{مورب } AD} \hat{A}_1 = \hat{D} \end{cases} \xrightarrow{\text{تساوی زاویه‌ها}} \triangle MAB \sim \triangle MDC$$

در دو مثلث متشابه MAB و MDC ، MH' و MH ، ارتفاع‌های نظیر هستند، پس نسبت آن‌ها با نسبت تشابه برابر است، بنابراین داریم:

$$\frac{MH'}{MH} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{MH - H'H}{MH} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{MH - 2}{MH} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3(MH - 2) = 2MH \Rightarrow MH = 6$$

(تشابه) (هندسه ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۲)

۴ ۳ ۲ ۱

-۱۳۹

(سراسری تهرنی - ۹۰)

در دو مثلث متشابه، اضلاع دو به دو متناسبند. با توجه به اینکه دو مثلث قابل انطباق نیستند، ضلع با اندازه‌ی ۳ در مثلث اولی با ضلع به اندازه‌ی ۳ در مثلث دوم متناسب نیست، در نتیجه دو حالت داریم:

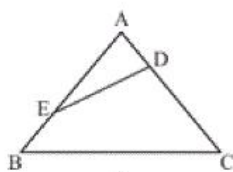
$$\begin{cases} \frac{3}{4} = \frac{a}{3} = \frac{b}{5} \Rightarrow a = \frac{9}{4}, b = \frac{15}{4} \Rightarrow \text{محیط} = 3 + \frac{9}{4} + \frac{15}{4} = 9 \\ \frac{3}{5} = \frac{a}{3} = \frac{b}{4} \Rightarrow a = \frac{9}{5}, b = \frac{12}{5} \Rightarrow \text{محیط} = 3 + \frac{9}{5} + \frac{12}{5} = \frac{36}{5} \end{cases}$$

بنابراین بیشترین محیط برابر ۹ است. (دقت کنید که در هر حالت، جای a و b می‌تواند عوض شود که تأثیری در محیط مثلث ندارد.)

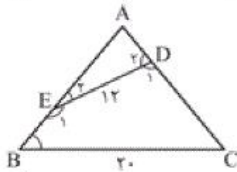
(تشابه) (هندسه ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۲)

۴ ۳ ۲ ۱

(سراسری تهرمی فارغ از کشور - ۸۷)



طبق فرض:
$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{D}_1 = 180^\circ \\ \hat{C} + \hat{E}_1 = 180^\circ \end{cases}$$



طبق شکل:
$$\begin{cases} \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ \\ \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 180^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{D}_1 = 180^\circ \\ \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_2$$

$$\begin{cases} \hat{C} + \hat{E}_1 = 180^\circ \\ \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{C} = \hat{E}_2$$

چون $\hat{B} = \hat{D}_2$ و $\hat{C} = \hat{E}_2$ ، پس دو مثلث ABC و ADE، طبق حالت تساوی

زاویه‌ها با هم متشابهند و داریم: $k = \frac{DE}{BC} = \frac{12}{25} = \frac{3}{5}$ (نسبت تشابه)

$$\frac{\frac{\Delta}{S(ADE)}}{\frac{\Delta}{S(ABC)}} = k^2 \Rightarrow \frac{\frac{\Delta}{S(ADE)}}{\frac{\Delta}{S(ABC)}} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{S(ABC) - S(ADE)}{\frac{\Delta}{S(ABC)}} = \frac{25 - 9}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{S(BCDE)}{\frac{\Delta}{S(ABC)}} = \frac{16}{25} = \frac{64}{100} = 0.64$$

(تشابه) هندسه ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۲)

۴

۳

۲

۱

www.kanoon.ir