



زمان آزمون : ۹۰ دقیقه

نام آموزشگاه : سمپاد پسران بهشهر

تاریخ برگزاری ۱۴۰۱/۰۳/۰۱

نام و نام خانوادگی :

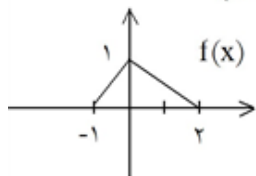
پایه تحصیلی : دهم تجربی

نام دبیر : محمدرضا حکمتی

عنوان آزمون : آزمون نیم سال دوم ریاضی ۱

| ردیف | بارم | پایه تحصیلی                                                                                                                      |
|------|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ۱    | ۱    | یا حسین                                                                                                                          |
| ۲    | ۰.۵  | در یک دنباله حسابی افزایشی مجموع سه جمله اول برابر ۲۱ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۹۱ است. این دنباله چند جمله سه رقمی دارد؟           |
| ۳    | ۱    | اگر $\sqrt{x+2}$ ، $3$ ، $\sqrt{x-2}$ به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار $x$ را به دست آورید.                  |
| ۴    | ۱    | درستی تساوی مقابل را ثابت کنید.<br>$\frac{\cos^4 \theta - \sin^4 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = \cos \theta + \sin \theta$ |
| ۵    | ۱.۵  | با توجه به شکل زیر، معادله‌ی خط $L$ را به دست آورید.                                                                             |
| ۶    | ۱    | اگر $2x + \frac{5}{x} = 10$ باشد، $4x^2 + \frac{25}{x^2}$ را به دست آورید. ( $x \neq 0$ )                                        |
|      | ۱    | به ازای چه مقادیری از $m$ ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور $x$ ‌هاست؟                                                |



|        |                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |     |               |           |     |     |           |        |     |               |     |               |     |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|---------------|-----------|-----|-----|-----------|--------|-----|---------------|-----|---------------|-----|
| ۷      | اگر جواب تعیین علامت $p(x) = \frac{(x-3)(ax^2+bx+10)}{2x+c}$ به صورت زیر باشد $a, b, c$ را حساب کنید.                                                                                  | <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>-2</math></td><td><math>3</math></td><td><math>5</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>p(x)</math></td><td><math>+</math></td><td><math>\frac{0}{0}</math></td><td><math>-</math></td><td><math>\frac{0}{0}</math></td><td><math>-</math></td></tr></table> | $x$ | $-\infty$     | $-2$      | $3$ | $5$ | $+\infty$ | $p(x)$ | $+$ | $\frac{0}{0}$ | $-$ | $\frac{0}{0}$ | $-$ |
| $x$    | $-\infty$                                                                                                                                                                              | $-2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $3$ | $5$           | $+\infty$ |     |     |           |        |     |               |     |               |     |
| $p(x)$ | $+$                                                                                                                                                                                    | $\frac{0}{0}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $-$ | $\frac{0}{0}$ | $-$       |     |     |           |        |     |               |     |               |     |
| ۸      | اگر $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ و $ x  \geq 2$ مطلوبست محاسبه‌ی $f(x)$ .                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |     |               |           |     |     |           |        |     |               |     |               |     |
| ۹      | اگر $f$ یک تابع خطی باشد به طوری که $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x^2 - 2x + 2}{x}$ مقدار $f(5)$ را حساب کنید.                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |     |               |           |     |     |           |        |     |               |     |               |     |
| ۱۰     | اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، $g(x) = f(x-1) + 1$ را رسم کنید. (به کمک انتقال)                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |               |           |     |     |           |        |     |               |     |               |     |
| ۱۱     | با حروف کلمه ARRANGE چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |     |               |           |     |     |           |        |     |               |     |               |     |
| ۱۲     | مقدار $n$ را حساب کنید.<br>الف) $2P(n-2, 1) = C(n, 3)$<br>ب) $P(n, 2) + C(15, C(6, 2)) = C(7, 2)$                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |     |               |           |     |     |           |        |     |               |     |               |     |
| ۱۳     | با ارقام ۰ و ۱ و ۵ و ۷ و ۸ و بدون تکرار ارقام:<br>الف) چند عدد سه رقمی فرد می‌توان نوشت؟<br>ب) چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۷۰۰ می‌توان نوشت؟<br>ج) چند عدد سه رقمی مضرب ۵ می‌توان نوشت؟ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |     |               |           |     |     |           |        |     |               |     |               |     |



| ۱۴     | با استفاده از نقاط موجود در شکل مقابل به چند طریق می‌توان یک مثلث ساخت؟                                                                                                                | ۱       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |            |               |               |         |            |               |               |     |  |  |     |  |  |     |     |     |  |  |  |     |  |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---------------|---------------|---------|------------|---------------|---------------|-----|--|--|-----|--|--|-----|-----|-----|--|--|--|-----|--|
| ۱۵     | خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آن‌که حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.                                                | ۱       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |            |               |               |         |            |               |               |     |  |  |     |  |  |     |     |     |  |  |  |     |  |
| ۱۶     | جدول زیر را کامل کنید.                                                                                                                                                                 | ۱.۷۵    | <table><tr><th><math>P(A)</math></th><th><math>P(B)</math></th><th><math>P(A')</math></th><th><math>P(B')</math></th><th><math>P(A - B)</math></th><th><math>P(A \cap B)</math></th><th><math>P(A \cup B)</math></th></tr><tr><td>۰/۶</td><td></td><td></td><td>۰/۵</td><td></td><td></td><td>۰/۸</td></tr><tr><td>۰/۶</td><td>۰/۷</td><td></td><td></td><td></td><td>۰/۵</td><td></td></tr></table> | $P(A)$     | $P(B)$        | $P(A')$       | $P(B')$ | $P(A - B)$ | $P(A \cap B)$ | $P(A \cup B)$ | ۰/۶ |  |  | ۰/۵ |  |  | ۰/۸ | ۰/۶ | ۰/۷ |  |  |  | ۰/۵ |  |
| $P(A)$ | $P(B)$                                                                                                                                                                                 | $P(A')$ | $P(B')$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | $P(A - B)$ | $P(A \cap B)$ | $P(A \cup B)$ |         |            |               |               |     |  |  |     |  |  |     |     |     |  |  |  |     |  |
| ۰/۶    |                                                                                                                                                                                        |         | ۰/۵                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |            |               | ۰/۸           |         |            |               |               |     |  |  |     |  |  |     |     |     |  |  |  |     |  |
| ۰/۶    | ۰/۷                                                                                                                                                                                    |         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |            | ۰/۵           |               |         |            |               |               |     |  |  |     |  |  |     |     |     |  |  |  |     |  |
| ۱۷     | می‌خواهیم از بین ۷ سیب قرمز و ۵ سیب زرد ۲ سیب انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چه قدر احتمال دارد:<br>(الف) هر دو سیب هم‌رنگ باشند؟<br>(ب) یک سیب زرد و یک سیب قرمز باشد؟ | ۱       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |            |               |               |         |            |               |               |     |  |  |     |  |  |     |     |     |  |  |  |     |  |
| ۱۸     | کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است؟<br>(الف) اندازه‌ی جامعه کم‌تر از اندازه‌ی نمونه است.<br>(ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند.<br>(پ) نمونه‌ی زیر مجموعه‌ای از جامعه است.       | ۰.۷۵    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |            |               |               |         |            |               |               |     |  |  |     |  |  |     |     |     |  |  |  |     |  |
| ۱۹     | نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید.<br>(الف) رنگ لباس<br>(ب) وزن افراد                                                                                                                      | ۰.۵     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |            |               |               |         |            |               |               |     |  |  |     |  |  |     |     |     |  |  |  |     |  |

شهر خالیست ز عشاق بود کز طرفی مردی از خویش برون آید و کاری بکند

پیروز باشید و سر بلند-رضا حکمتی



۱

$$b - d, b, b + d$$

برای حل این سؤال جمله وسط را  $b$  در نظر می‌گیریم.

$$b - d + b + b + d = 21 \Rightarrow 3b = 21 \Rightarrow b = 7$$

مجموع این سه جمله:

ضرب این سه جمله:

$$(b - d)b(b + d) = 91 \xrightarrow{b=7} (7 - d)7(7 + d) = 91 \xrightarrow{\div 7} 49 - d^2 = 13$$

$$\Rightarrow d^2 = 36 \Rightarrow d = \pm 6$$

چون دنباله افزایشی است  $d = 6$  در نظر می‌گیریم.

$$\frac{b=7}{d=6} \rightarrow 1, 7, 13, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 6 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 1 + (n-1)(6)$$

$$\Rightarrow a_n = 6n - 5$$

برای یافتن جملات سه رقمی، جمله عمومی این دنباله را بین ۹۹ و ۱۰۰۰ قرار می‌دهیم.

$$99 < 6n - 5 < 1000 \xrightarrow{+5} 104 < 6n < 1005 \xrightarrow{\div 6} 17\frac{2}{3} < n < 167\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow 18 \leq n \leq 167 \Rightarrow \text{تعداد جملات} = 167 - 18 + 1 = 150$$

بنابراین ۱۵۰ جمله این دنباله سه رقمی است.

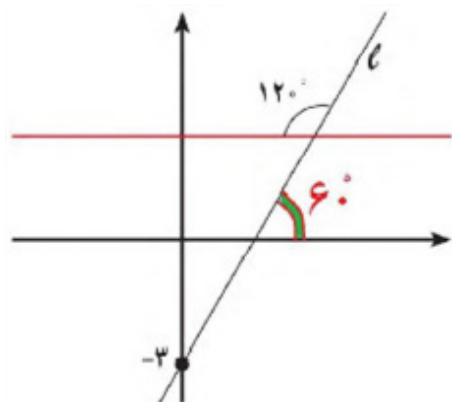
۲

$$b^2 = ac \Rightarrow 3^2 = x - 4 \Rightarrow x = 13 \quad (\text{ص ۸۳})$$

۳

$$\frac{\cos^4 \theta - \sin^4 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = \frac{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{\cos \theta - \sin \theta}$$

$$= \frac{(\cancel{\cos \theta} - \cancel{\sin \theta})(\cos \theta + \sin \theta)}{(\cancel{\cos \theta} - \cancel{\sin \theta})} = \cos \theta + \sin \theta$$



$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, (0, -3) \Rightarrow y - (-3) = \sqrt{3}(x - 0) \\ \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 3$$

روش اول: ۵

به توان ۳ می رسانیم

$$2x + \frac{5}{x} = 10 \xrightarrow{\text{به توان ۳ می رسانیم}} \left(2x + \frac{5}{x}\right)^3 = 1000 \Rightarrow 4x^3 + 20 + \frac{25}{x^3} = 1000 \\ \Rightarrow 4x^3 + \frac{25}{x^3} = 980$$

روش دوم: استفاده از اتحادهای کمکی:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) \\ 4x^3 + \frac{25}{x^3} = \left(2x + \frac{5}{x}\right)^3 - 3\left(2x\right)\left(\frac{5}{x}\right) = (10)^3 - 3(10) = 1000 - 30 = 970$$

۶ از فرض سوال نتیجه می شود که باید عبارت همواره منفی باشد پس باید دلتا منفی و a منفی باشند.

$$\Delta < 0 \Rightarrow m^2 + 4m < 0$$

|            |    |   |
|------------|----|---|
|            | -4 | 0 |
| $m^2 + 4m$ | +  | - |

$$\Rightarrow -4 < m < 0$$

$m < 0$ : از طرفی a منفی باشد

۷ با توجه به این که علامت دو طرف ریشه  $x = 5$  تغییر کرده بنابراین  $ax^2 + bx + 10$  باید درجه اول باشد و  $x = -2$  ریشه مخرج است.

$$\begin{aligned} a = 0 \xrightarrow{\quad} bx + 10 = 0 \xrightarrow{x=5} 5b + 10 = 0 \Rightarrow b = -2 \xrightarrow{\quad} x = -2 \text{ ریشه مخرج است} \\ 2(-2) + c = 0 \Rightarrow c = 4 \end{aligned}$$

نکته: اگر علامت  $p(x)$  برای  $x > 5$  مثبت نوشته بود در این حالت جواب نداشت.

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2 - 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

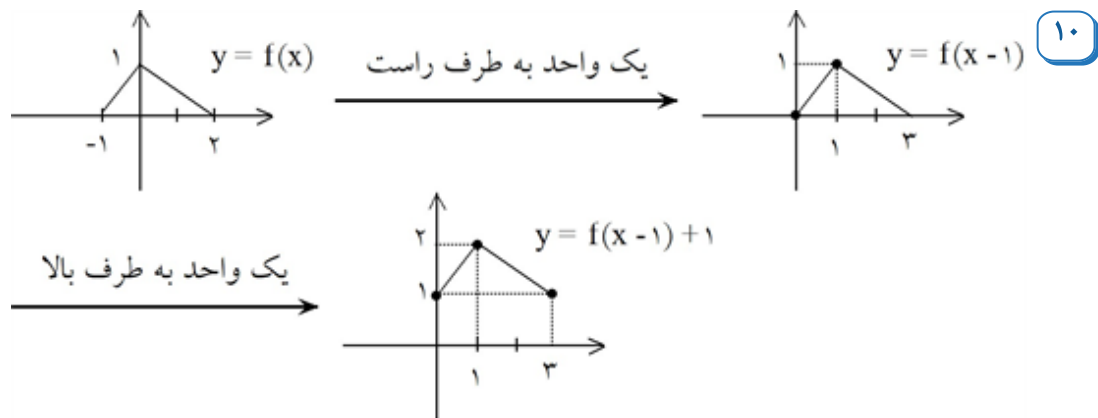


۹ چون  $f$  یک تابع خطی است بنابراین:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = a\left(\frac{1}{x}\right) + b$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = ax + b + \frac{a}{x} + b = \frac{ax^2 + 2bx + a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + 2}{x} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2b = -2 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x - 1 \Rightarrow f(5) = 2(5) - 1 = 9$$



۱۱

$$\text{تعداد کل} = \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{2! \times 2!} + \frac{6!}{2! \times 2!} + \frac{6!}{2! \times 2!} = 1260$$

$\downarrow$  حذف یک A     $\downarrow$  حذف یک R     $\downarrow$  حذف حرف N     $\downarrow$  حذف حرف G     $\downarrow$  حذف حرف E

۱۲ الف)  $2P(n-2, 1) = C(n, 3) \Rightarrow 2 \times \frac{(n-2)!}{(n-2-1)!} = \frac{n!}{(n-3)!3!}$

$$\Rightarrow \frac{2 \times (n-2)!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-3)! \times 6} \Rightarrow 2 = \frac{n(n-1)}{6} \Rightarrow n(n-1) = 12 \Rightarrow n = 4$$

ب)  $P(n, 2) + C(15, 15) = C(7, 2) \Rightarrow n(n-1) + 1 = 21 \Rightarrow n(n-1) = 20 \Rightarrow n = 5$

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$2 \times 4 \times 3 = 24$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{یکان صفر: } 4 \times 3 \times 1 = 12 \\ \text{یکان پنج: } 3 \times 3 \times 1 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow 12 + 9 = 21$$

۱۳ الف)

ب)

ج)

۱۴

$$\binom{4}{2} \binom{7}{1} + \binom{4}{1} \binom{7}{2} + \binom{7}{3} = 161$$

۱۵  $S = \{ppp, ppd, pdp, dpp, dpd, ddp, ddd\}$  فضای نمونه ای

$E = \{ppd, pdp, dpp, pdd, dpd, ddp, ddd\}$  پیشامد



$$P(A) = ۰/۶, P(B') = ۰/۵, P(A \cup B) = ۰/۸$$

$$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - ۰/۶ = ۰/۴$$

$$P(B) = ۱ - P(B') = ۱ - ۰/۵ = ۰/۵$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = ۰/۶ + ۰/۵ - ۰/۸ = ۰/۳$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = ۰/۶ - ۰/۳ = ۰/۳$$

قسمت دوم

$$P(A) = ۰/۶, P(B) = ۰/۷, P(A \cap B) = ۰/۵$$

$$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - ۰/۶ = ۰/۴$$

$$P(B') = ۱ - P(B) = ۱ - ۰/۷ = ۰/۳$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = ۰/۶ - ۰/۵ = ۰/۱$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۶ + ۰/۷ - ۰/۵ = ۰/۸$$

| P(A) | P(B) | P(A') | P(B') | P(A - B) | P(A ∩ B) | P(A ∪ B) |
|------|------|-------|-------|----------|----------|----------|
| ۰/۶  | ۰/۵  | ۰/۴   | ۰/۵   | ۰/۳      | ۰/۳      | ۰/۸      |
| ۰/۶  | ۰/۷  | ۰/۴   | ۰/۳   | ۰/۱      | ۰/۵      | ۰/۸      |

الف ۱۷

$$P(A) = \frac{\binom{۷}{۲} + \binom{۵}{۲}}{\binom{۱۲}{۲}} = \frac{۲۱ + ۱۰}{۶۶} = \frac{۳۱}{۶۶}$$

ب

$$P(B) = \frac{\binom{۷}{۱} \times \binom{۵}{۱}}{\binom{۱۲}{۲}} = \frac{۳۵}{۶۶}$$

پ درست

ب نادرست

الف نادرست ۱۸

ب کمی پیوسته

الف کیفی اسمی ۱۹

