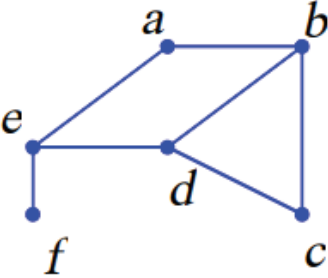


نام و نام خانوادگی:	نام پدر:	نام آموزشگاه: مختومقلی فراغی	تعداد صفحات آزمون: ۳ صفحه
سوالات امتحان درس: ریاضیات گسسته	نوبت اول ۱۴۰۳-۱۴۰۴	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳ / ۱۰ / ۰۸	مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه
دانش آموزان پایه: دوازدهم ریاضی فیزیک	شعبه کلاس:	ساعت شروع آزمون: ۱۰ صبح	نام دبیر: مسعود چوگان

توجه: استفاده از ماشین حساب ساده بلا مانع است.

ردیف	متن سوال	بارم										
۱	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر $a \equiv m$ و $n \mid m$ آنگاه $a \equiv b$.</p> <p>ب) ۸۶ عضوی از $[۲]_۴$ است.</p> <p>پ) از این که $a \mid b+c$، همواره می توان نتیجه گرفت که $a \mid c$ یا $a \mid b$.</p> <p>ت) گرافی وجود دارد که درجه رئوس آن ۲، ۲، ۳، ۴، ۵ است.</p>	<p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p>										
۲	<p>جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) P_n گرافی است که تنها از یک مسیر تشکیل شده است. (n راسی - کامل)</p> <p>ب) حاصل $[(a^4, b^3), (b^5, b^{11})]$ برابر با است. $(b^{11} - a^{11})$</p> <p>پ) $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:</p> <p>..... $\forall m > 0, 2) a \mid b, b \mid c$ ۱)</p> <p>ت) در گراف کامل از مرتبه ۴ تعداد دور به طول ۳ برابر است.</p>	۱										
۳	<p>برای اثبات یا رد احکام زیر از کدام روش اثبات استفاده می شود؟ (احکام ستون سمت راست را به روش ستون سمت چپ وصل کنید.</p> <table border="1"> <tr> <td>الف) میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر است.</td> <td>اثبات بازگشتی</td> </tr> <tr> <td>ب) برای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.</td> <td>برهان خلف</td> </tr> <tr> <td></td> <td>در نظر گرفتن همه حالتها</td> </tr> <tr> <td></td> <td>اثبات مستقیم</td> </tr> <tr> <td></td> <td>مثال نقض</td> </tr> </table>	الف) میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر است.	اثبات بازگشتی	ب) برای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.	برهان خلف		در نظر گرفتن همه حالتها		اثبات مستقیم		مثال نقض	۱
الف) میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر است.	اثبات بازگشتی											
ب) برای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.	برهان خلف											
	در نظر گرفتن همه حالتها											
	اثبات مستقیم											
	مثال نقض											
۴	<p>به سوالات زیر پاسخ کوتاه دهید.</p> <p>الف) گرافی را که درجه تمام رئوس آن باهم مساوی باشند، چه می نامیم؟</p> <p>ب) گرافی نام ببرید که بین هر دو راس آن حداقل یک مسیر وجود دارد.</p>	<p>۰/۵</p> <p>۰/۵</p>										
۵	<p>الف) اگر اول آبان در یک سال روز جمعه باشد، هفتم اسفند چند شنبه است؟</p> <p>ب) عدد a چقدر باشد تا عدد $9a^7$ بر ۹ بخش پذیر شود.</p>	<p>۰/۷۵</p> <p>۱</p>										

۱/۲۵	۶	فرض کنید $x \neq 0$ عددی گویا و y عددی گنگ باشد. ثابت کنید xy عددی گنگ است.
۱	۷	الف) گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: (برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$) ب) ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد فرد متوالی به علاوه یک، مربع کامل است.
۱/۵	۸	هر یک از موارد زیر را در حالت کلی ثابت کنید. الف) اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ، ثابت کنید: $m \leq n, a \mid b \Rightarrow a^m \mid b^n$ ب) $a \equiv_m b \Rightarrow ac \equiv_m bc$
۰/۷۵	۹	الف) عدد صحیح n را طوری پیدا کنید که $3n+7 \mid 2n-1$. ب) باقی‌مانده تقسیم $19 + 38^{36}$ را بر ۴ بدست آورید. پ) رقم یکان عدد $7 + 2^{11}$ را بدست آورید.
۰/۵	۱۰	معادله سیاله $4x + 3y = 19$ را در نظر بگیرید. الف) نشان دهید این معادله سیاله دارای جواب است. ب) جواب عمومی معادله سیاله داده شده را بیابید.

۱	<p>۱۱ اگر G گرافی از مرتبه ۸ و اندازه ۱۱ باشد بطوری که درجه هر راس آن ۲ یا ۳ می باشد. این گراف چند راس از درجه ۳ دارد؟</p>	۱۱
۱/۲۵	<p>۱۲ شکل مقابل نمودار گراف G می باشد. الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید. ب) مجموعه $N_G(b)$ را بنویسید. پ) مجموع درجه های راس های گراف \bar{G} را مشخص کنید.</p> 	۱۲
۱	<p>۱۳ ثابت کنید در هر گراف ساده: اگر $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه راس های گراف و q اندازه گراف باشد داریم: $\sum_{i=1}^p \text{deg}(v_i) = 2q$</p>	۱۳
۱	<p>۱۴ علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد در یک شبکه اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشند یا نباشند. چند حالت مختلف می تواند باشد؟</p>	۱۴
۲۰	<p>شادموفق و سربلند باشید.</p>	جمع کل

راهنمای تصحیح آزمون		رشته: ریاضی فیزیک	نام آموزشگاه: مختومقلی فراغی	تعداد صفحات: ۲ صفحه														
سوالات امتحان درس: ریاضیات گسسته		نوبت اول دی ماه ۱۴۰۳	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۰/۰۸	مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه														
دانش آموزان پایه: دوازدهم		دوره دوم متوسطه	ساعت شروع آزمون: ۸ صبح	نام دبیر: مسعود چوگان														
پاسخنامه امتحانی																		
ردیف	متن سوال	بارم																
۱	الف) درست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) پ) نادرست (۰/۲۵) ت) نادرست (۰/۲۵)	۱																
۲	الف) n راسی (۰/۲۵) ب) b^{11} (۰/۲۵) پ) $c \leq m$ (۰/۲۵) ت) ۴ (۰/۲۵)	۱																
۳	الف) اثبات بازگشتی (۰/۵) ب) مثال نقض (۰/۵)	۱																
۴	الف) گراف منتظم (۰/۵) ب) گراف همبند (۰/۵)	۱																
۵	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>جمعه</th> <th>شنبه</th> <th>یکشنبه</th> <th>دوشنبه</th> <th>سه‌شنبه</th> <th>چهارشنبه</th> <th>پنج‌شنبه</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> <td>۵</td> <td>۶</td> </tr> </tbody> </table> <p>۷ اسفند جمعه است. (۰/۲۵) رسم جدول (۰/۲۵) $30 - 1 = 29 + 30 + 30 + 30 + 7 = 126 \equiv 7 \pmod{7}$ (۰/۲۵) ب) $713a9 \equiv 7 + 1 + 3 + a + 9 \pmod{9} \equiv 20 + a \pmod{9} \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow a = 7$ (۰/۲۵)</p>	جمعه	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۰/۷۵		
جمعه	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه												
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶												
۶	به برهان خلف فرض می‌کنیم xy گویا باشد. آنگاه چون $x \neq 0$ عدد گویای $\frac{1}{x}$ وجود دارد. (۰/۲۵) با توجه به این که حاصل ضرب دو عدد گویا، عددی گویاست، (۰/۲۵) پس حاصل $xy = \frac{1}{x}$ عددی گویا است (۰/۲۵) که تناقض است. (۰/۲۵) پس xy عددی گنگ است. (۰/۲۵)	۱/۲۵																
۷	الف) $2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + y^2) + (y^2 - 2y + y^2) \geq 0$ (۰/۵) $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0, (y-1)^2 \geq 0, (x-y)^2 \geq 0$ (۰/۲۵) ب) اثبات به روش مستقیم است: $(2k+1)(2k+3) + 1$ (۰/۲۵) $= 4k^2 + 8k + 4$ (۰/۲۵) $= 4(k^2 + 2k + 1)$ (۰/۲۵) $= 4(k+1)^2$ (۰/۲۵) بنابراین می‌توان حکم را نتیجه گرفت. (۰/۲۵)	۱/۲۵	۱/۲۵															
۸	الف) $a \mid b \Rightarrow a^m \mid b^m$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a^m \mid b^m \times b^{n-m}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a^m \mid b^n$ (۰/۲۵)	۱/۷۵																
			ب)															

	$a \equiv^m b \Rightarrow m \mid a-b \quad (0/25) \Rightarrow m \mid c \times (a-b) \quad (0/5) \Rightarrow m \mid ac-bc \quad (0/25)$	
۹	<p>(الف)</p> $\begin{cases} 2n-1 \mid 3n+7 \rightarrow 2n-1 \mid 6n+14 \\ 2n-1 \mid 2n-1 \rightarrow 2n-1 \mid 6n-3 \end{cases} \quad (0/5) \rightarrow 2n-1 \mid 17 \quad (0/25)$ $\Rightarrow 2n-1 = \pm 17 \rightarrow \begin{cases} n = 9 \\ n = -8 \end{cases} \quad (0/25)$ <p>(ب)</p> $1000 \equiv^7 -1 \quad (0/25) \rightarrow (1000)^{25} \times 9 + 11 \quad (0/25) \rightarrow (1000)^{25} \times 9 + 11 \equiv^7 2 \quad (0/25) \rightarrow r = 2 \quad (0/25)$ <p>(پ)</p> $2^5 \equiv^1 2 \rightarrow (2^5)^2 \equiv^1 (2)^2 \quad (0/25) \rightarrow 2^{10} \equiv^1 4 \rightarrow 2^{10} \times 2 \equiv^1 4 \times 2 \quad (0/25) \rightarrow 2^{11} \equiv^1 8$ $\rightarrow 2^{11} + 7 \equiv^1 8 + 7 \quad (0/25) \rightarrow 2^{11} + 7 \equiv^1 15 \rightarrow 2^{11} + 7 \equiv^1 5 \quad (0/25)$ <p>لذا رقم یکان برابر ۵ است.</p>	
۱۰	<p>(الف)</p> <p>معادله دارای جواب است. $(0/5) \rightarrow 1 \mid 19 \rightarrow (4,3) = 1$</p> <p>(ب)</p> $4x + 3y = 19 \rightarrow 4x \equiv^3 19 \quad (0/25), 19 \equiv^3 1 \rightarrow 4x \equiv^3 1 \rightarrow 4x \equiv^3 1 + 3 \rightarrow 4x \equiv^3 4 \quad (0/25)$ $\rightarrow x \equiv^3 1 \rightarrow x = 3k + 1 \quad k \in \mathbb{Z} \quad (0/25)$ $4x + 3y = 19 \rightarrow 4(3k + 1) + 3y = 19 \rightarrow 3y = -12k + 15 \rightarrow y = -4k + 5 \quad (0/25)$	
۱۱	<p>فرض کنیم x تعداد راس‌های از درجه ۲ و y تعداد راس‌های از درجه ۳ باشد. در این صورت:</p> $2x + 3y = 22 \quad (0/25), x + y = 8 \quad (0/25) \rightarrow x = 2 \quad (0/25), y = 6 \quad (0/25)$	
۱۲	<p>(الف) $p = 6$ و $q = 7 \quad (0/5)$</p> <p>(ب) $N_G(b) = \{a, b, c\} \quad (0/25)$</p> <p>(پ) تعداد یال‌های گراف G + تعداد یال‌های گراف $\bar{G} = \frac{p(p-1)}{2} \quad (0/5)$</p>	
۱۳	<p>هر راس دلخواه را در نظر بگیریم که توسط یالی به هم متصل شده‌اند، $(0/25)$ چون این یال برای هر دو راس مزبور درجه محسوب می‌شوند، $(0/25)$ پس در نتیجه حکم برقرار است $(0/25)$ و داریم: $(0/25)$</p> $\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q$	
۱۴	<p>$2^{20} \quad (0/5)$ نوشتن علت $(0/5)$</p>	
۲۰	جمع کل	