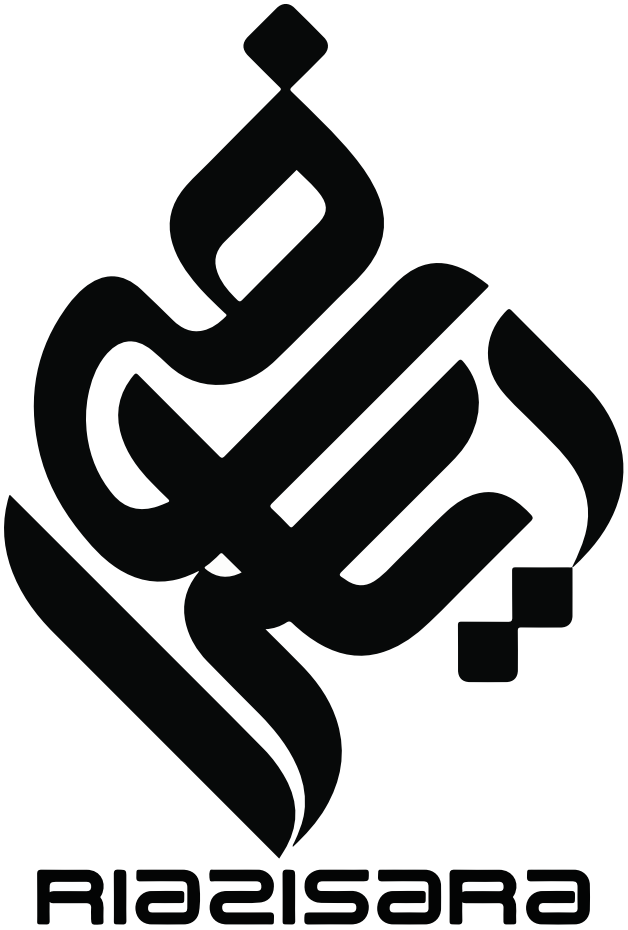


سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)
https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)
https://www.instagram.com/riazisara.ir

يا لطيف

سر شناسه : بایمانی، فرزانه، ۱۳۵۵ -
عنوان و پدید آور : آزمون نهایی (ریاضی۳ و حسابان۲ رشته‌های تجربی و ریاضی) / فرزانه بایمانی
مشخصات نشر : اهواز: کتاب هرمز،۱۳۹۸
مشخصات ظاهری : ۱۹٤ص
شابک : ٤-۰۲-٦۹۷۲-٦۲۲-۹۷۸
ISBN : 4-02-6972-622-978
وضعیت فهرست نویسی : فیپای مختصر
شماره کتابخانه ملی : ۵۸۵۸۰۱۰

شماره نشر ۱۲۷

آزمون نهایی

ریاضی۳ و حسابان۲ رشته‌های تجربی و ریاضی

فرزانه بایمانی

ناشر: کتاب‌هرمز

طراحی‌جلدوصفحه‌آرایی: علیرضا ایمانی‌فر

چاپ اول: ۱۳۹۸

شمارگان:۱۰۰۰ جلد

شابک: ٤-۰۲-٦۹۷۲-٦۲۲-۹۷۸

ISBN : ۹۷۸-٦۲۲-٦۹۷۲-۰۲-٤

قیمت: ٤۵۰۰۰ تومان

حق چاپ برای مولف محفوظ است.

آدرس نشر: اهواز، کمپلو، بین خیابان ارفع و ولی‌عصر، پاساژ عبدالخانی

تلفن تماس:۰۹۱٦۷۳۰٤۷۱۱

ایمیل جهت ارتباط:

sh.fm@۲۰۲٤gmail.com

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

آزمون نهایی

ریاضی (۳) - حسابان (۲) (علوم تجربی - ریاضی و فیزیک)

تألیف و گردآوری: فرزانه بایمانی

تقدیم به آنان که سپاسگذار نیکی ها و محبت ها هستند:

سپاسِ آنان چون جویبار آبی بر ریشهٔ خوبی ها روان است تا نمک نشناسی هر روز بیشتر از دیروز میان آدمیان قد علم نکند به طوری که خود انسان ها متوجه نشوند این گذر لحظه های عمر نیست که پیرشان می کند، درواقع این خود آدم ها هستند که همنوع خود را پیر می کنند شاید در یک لحظه: با یک کلام، با یک دروغ، با ... کارشان که راه افتاد مهم نیست از چه کسی و چطوری نردبانی ساختند برای آنچه که می خواستند نردبانی که حکم نمک نشناسی شان را به همراه دارد.

خیلی وقت است که جواب خوبی ها، خوبی نیست، همین که کارشان با تو راه افتاد دلیل یأس و ناامیدی‌ات می شوند بدون آنکه فکر کنند چقدر در گذشته کنارشان بودی و چطور مشکلاتشان را به دوش کشیدی! لازم باشد گره به زندگیت هم می زنند اما: ای سپاسگذار نیکی ها تو خوب باش و خوب بمان چرا که ذات و سرشت تو نمک نشناسی را بر نمی تابد و موعظه سعدی شاعر بزرگ کشورمان را به خاطر داشته باش که می فرمایند:

وفاداری کن و نعمت شناسی — که بدفرجامی آرد ناسپاسی
جزای مردمی جز مردمی نیست — هر آنکو حق نداند، آدمی نیست

و در بیتی دیگر از همین شعر می فرمایند:

ندانستند قدر فضل و رایت — وگرنه سر نهادندی به پایت
تو نیکی کن و در دجله انداز — که ایزد در بیابانت دهد باز

فهرست مطالب

پیشگفتار: ۸

فصل اول ۹

تابع :حسابان (۲) (ریاضی و فیزیک) ۱۰
درس اول: تبدیل نمودار تابع: ۱۱
پاسخ سوالات درس اول: تبدیل نمودار توابع: ۱۴
درس دوم: توابع یکنوا – بخش پذیری و تقسیم: ۱۸
پاسخ سوالات درس دوم: توابع یکنوا – بخش پذیری و تقسیم: ۲۱
تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۲۷
پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۳۱
خود را بیازمائید: ۳۹
تابع: ریاضی (۳) (علوم تجربی) ۴۰
درس اول: توابع چندجمله ای – توابع صعودی و نزولی: ۴۱
پاسخ درس اول: توابع چندجمله ای: ۴۲
درس دوم: ترکیب توابع: ۴۴
پاسخ سوالات درس دوم: ترکیب توابع: ۴۷
درس سوم: تابع وارون: ۵۳
پاسخ سوالات درس سوم: تابع وارون: ۵۴
تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۵۵
پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۵۷
خود را بیازمائید: ۶۲

فصل دوم ۶۳

مثلثات: (حسابان (۲) و ریاضیات (۳)) ۶۴
درس اول: تناوب و تانژانت: ۶۵
پاسخ سوالات درس اول: تناوب و تانژانت: ۶۶
درس دوم: معادلات مثلثاتی: ۶۷
پاسخ سوالات درس دوم:معادلات مثلثاتی: ۶۹
تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۷۶
پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۷۸
خود را بیازمائید: ۸۲

فصل سوم ۸۳

حد :(حسابان ۲ و ریاضیات ۳) ۸۴
درس اول: حد بی نهایت – حدهای نامتناهی: ۸۵
پاسخ درس اول: حد بینهایت – حدهای نامتناهی: ۸۸
تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۹۲
پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۹۳

خودرابیازمائید: ۹۵
درس دوم: حد در بینهایت: ۹۶
پاسخ درس دوم:حد در بی نهایت: ۹۸
تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۰۰
پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۰۱
خود را بیازمائید: ۱۰۲

فصل چهارم ۱۰۴

مشتق:(حسابان (۲) و ریاضی (۳)) ۱۰۵
درس اول:آشنایی با مفهوم مشتق: ۱۰۶
پاسخ درس اول:آشنایی با مفهوم مشتق ۱۰۷
تمریناتی بیشتر برای تلاش بیشتر: ۱۰۹
پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۱۰
خود را بیازمائید: ۱۱۱
درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی: ۱۱۲
پاسخ درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی: ۱۱۴
تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۱۷
پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۱۹
خود را بیازمائید: ۱۲۳
درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر: ۱۲۴
پاسخ درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر: ۱۲۵
تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۲۶
پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۲۷
خود را بیازمائید: ۱۲۸

فصل پنجم ۱۲۹

کاربردهای مشتق :حسابان (۲) (ریاضی فیزیک) ۱۳۰
درس اول: اکسترمم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی: ۱۳۱
پاسخ درس اول: اکسترمم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی: ۱۳۲
تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۳۵
پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۳۶
خود را بیازمائید: ۱۳۸
درس دوم: جهت تعقر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن: ۱۳۹
پاسخ درس دوم: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن: ۱۴۱
تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۴۴
پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۴۵
خود را بیازمائید: ۱۴۷
درس سوم: رسم نمودار تابع: ۱۴۸
پاسخ درس سوم: رسم نمودار تابع: ۱۴۹

تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۵۱
پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۵۲
خود را بیازمائید: ۱۵۴
کاربردهای مشتق :ریاضی (۳) (تجربی) ۱۵۵
درس اول: اکسترمم های تابع: ۱۵۶
پاسخ درس اول: اکسترمم های تابع: ۱۵۷
تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۶۰
پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۶۱
خود را بیازمائید: ۱۶۲
درس دوم: بهینه سازی: ۱۶۳
پاسخ درس دوم: بهینه سازی: ۱۶۵

فصل ششم ۱۶۷

هندسه :ریاضی (۳) (تجربی) ۱۶۸
درس اول:تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی: ۱۶۹
پاسخ درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی: ۱۷۰
تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۷۱
پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۷۳
خود را بیازمائید: ۱۷۶
درس دوم: دایره ۱۷۷
پاسخ درس دوم: دایره ۱۷۸
تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۸۰
پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر: ۱۸۱
خود را بیازمائید: ۱۸۳

فصل هفتم ۱۸۴

احتمال: ریاضی (۳) (تجربی) ۱۸۵
قانون احتمال کل: ۱۸۶
پاسخ قانون احتمال کل: ۱۸۷
خود را بیازمائید: ۱۸۸

منابع: ۱۸۹

پیشگفتار:

گاهی آنقدر نگران یادگیری و آمادگی برای امتحانات هستیم که فراموش می کنیم باید تلاش کنیم تا یاد بگیریم و مطمئناً ثمره تلاش هر چیزی به جز حسرت است.

انواع جزوه ها، کتاب ها، نمونه سؤالات زمانی مؤثر واقع می شود که تلاش هدف دار داشته باشیم وگرنه بدون تلاش و تمرین، داشتن انواع کتاب و جزوه مصداق ضرب المثل آب در هاون کوبیدن است.

درس ریاضی تمرین و تکرار می طلبد و این مهم با پشتکار و تلاش ما فقط میسر می شود و البته و صد البته باید باور داشته باشیم که می توانیم.

در این مجموعه سعی شده است سؤالات مربوط به هر درس فصل های مختلف در امتحانات نهایی گذشته گردآوری شود و بنا به اهمیت فصل در پایان هر فصل یا هر درس تمریناتی با عنوان تمریناتی برای تلاش بیشتر در سطح بالاتری نگاشته شده است همچنین آزمونی توسط نگارنده طراحی گردیده تا دانش آموزان عزیز روند تلاش و تمرین و تکرار را پیش گیرند و در امتحانات پیش رو موفق باشند.

ضمن آرزوی توفیق برای همهٔ دانش آموزان، خواهش می کنم در صورت مشاهده هر نوع اشکال تایپی یا خطای علمی، کوتاهی اینجانب را بخشیده و با آدرس: خوزستان- رامهرمز- خیابان شهید چراغزاده، جنب کلانتری ۱۱- دبیرستان فاطمه زهرا (س) یا شماره ۰۹۱۶۳۹۰۶۸۸۳ نظریات خویش را برای بهبود مسائل آموزشی در اختیار اینجانب قرار دهند.

سپاس از همراهی صمیمانه شما

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل اول

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

تابع :حسابان (۲) (ریاضی و فیزیک)

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

درس اول: تبدیل نمودار تابع:

۱) درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. (نظام قدیم – خرداد ۹۷)

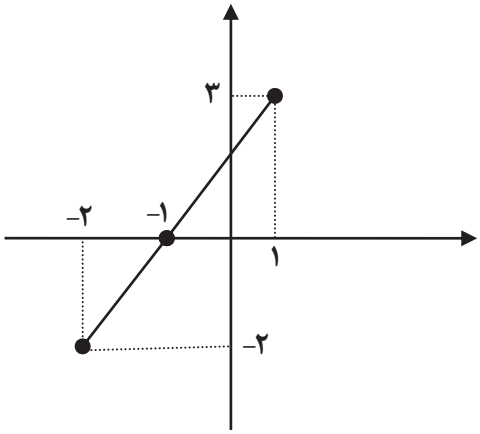
برای رسم نمودار تابع $g(x) = -f(x)$ از روی نمودار تابع f، کافی است نمودار f را نسبت به محور طول ها قرینه کرد.

۲) به سوالات زیر، کوتاه پاسخ دهید.

الف) نقطه (۱ و ۳-) روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد. در تابع $g(x) = -f(۲x)$ این نقطه به چه نقطه ای متناظر می شود؟ (نظام قدیم – شهریور ۹۶)

ب) نقطه (۳- و ۲) روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد. در تابع $g(x) = f(۲x)$ این نقطه با نقطه ..... متناظر می شود. (نظام قدیم – شهریور ۹۷)

۳) نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر داده شده است. (نظام قدیم – خرداد ۹۶)



الف) دامنه تابع $g(x) = f\left(\frac{x}{۲}\right)$ را تعیین کنید.

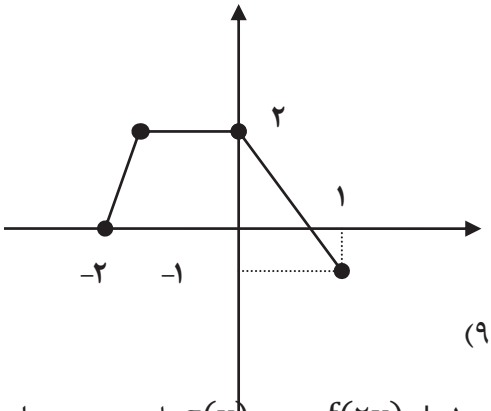
ب) نمودار $h(x) = f(-x) + ۱$ را رسم کنید.

۴) درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. (خرداد ۹۸ – نظام جدید)

الف) اگر $K > ۱$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها به دست می آید.

ب) نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = ۲f(x - ۱)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

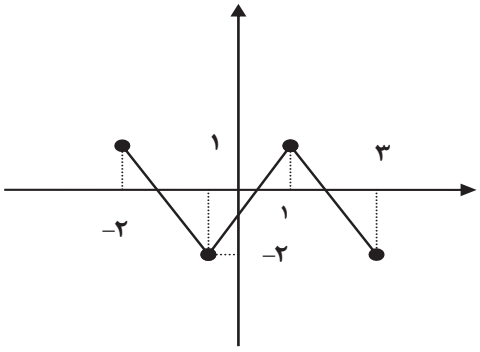


۵) گزینه مناسب را انتخاب کنید. (نظام قدیم – خرداد ۹۴)

تابع $y = f(x)$ با دامنه [۱ و ۲-] را در نظر بگیرید. دامنه $g(x) = -f(2x) + 1$ بازه ..... است.

الف) [۲ و ۴-] ب) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

۶) نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر است. با استفاده از انتقال، نمودار تابع $y = f\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$ را رسم



کنید. (نظام قدیم – شهریور ۹۴)

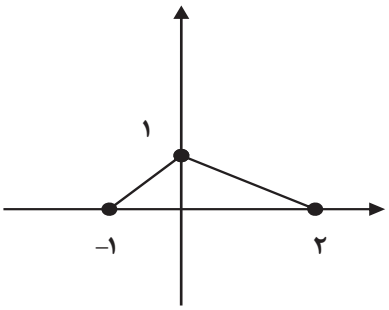
۷) ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم نموده، سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x) = -2f(x) - 1$ را رسم کنید. (نظام قدیم – خرداد ۹۲)

۸) درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. (نظام قدیم – دی ۹۵)

اگر دامنه تابع f برابر با [۳ و ۱-] باشد، دامنه تابع $g(x) = -3f(2x)$ بازه $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ است.

۹) نمودار تابع معین f در شکل زیر داده شده است. نمودار $f(-2x) + 1$ را رسم کنید.

(نظام قدیم – دی ۸۷)

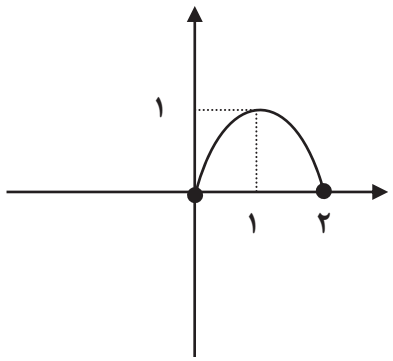


www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - ۳|$ را در بازه $[۴ \text{ و } ۲]$ رسم کنید سپس به کمک آن، نمودار تابع $f(-x)$ را رسم کنید. (نظام قدیم – دی ۹۱)

۱۱) نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر داده شده است. نمودار $y = f(-۲x)$ را رسم کنید.

(نظام قدیم – خرداد ۸۸)



۱۲) ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - ۱|$ را با دامنه $[۲ \text{ و } ۰]$ رسم کنید. سپس نمودار $y = f(x) + ۱$ را رسم کرده و برد آن را به دست آورید. (نظام قدیم – شهریور ۹۳)

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ سوالات درس اول: تبدیل نمودار توابع:

۱) درست، زیرا قرینه نسبت به محور طول ها، y ها را قرینه همدیگر خواهد کرد.

۲) الف) طبق $g(x) = -f(2x)$ در نقطه داده شده x را باید تقسیم بر ۲ کنیم و y را قرینه. بنابراین نقطه (۱ و ۳-) به نقطه $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ نظیر می شود.

توجه ۱: تغییرات درون پرانتز متعلق به x است، بنابراین ما باید ببینیم درون پرانتز چه تغییری باید اعمال کنیم تا x به دست آید، آنگاه همان تغییر را روی نقطه داده شده اعمال کنیم.

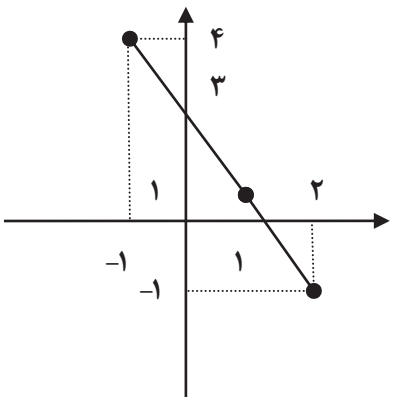
توجه ۲: تغییرات قبل از تابع داده شده و بعد از آن متعلق به y است که عیناً همان تغییر را روی نقطه مورد نظر اعمال می کنیم.

ب) طبق توجه های بالا به نقطه (۳-و ۱) نظیر می شود.

۳) طبق توجه ۱: درون پرانتز باید در ۲ ضرب شود، بنابراین:

الف) $D_f: [-2,1] \rightarrow D_g: [-4,2]$

ب) تغییرات به این صورت است: x در یک منفی ضرب و y ها با یک جمع می شوند، بنابراین این تغییرات را روی نقاط مشخص نمودار انجام می دهیم و به شکل زیر می رسیم:



$$(-2,-2) \xrightarrow{g} (2,-1)$$

$$(-1,0) \xrightarrow{g} (1,1)$$

$$(1,3) \xrightarrow{g} (-1,4)$$

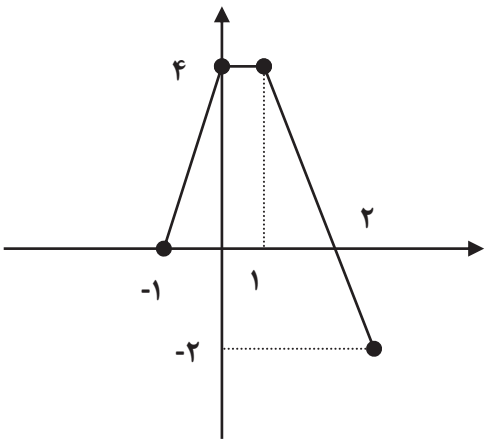
۴) الف) نادرست، چون $k > 1$ بزرگتر است ما برای به دست آوردن x های اصلی باید kx را به k تقسیم کنیم، یعنی x ها کوچکتر می شوند ولی y ها تغییر نمی کنند.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

ب) مشابه سوال ۳، بنابراین:

$$D_f: [-۲,۱] \xrightarrow{+۱} D_g: [-۱,۲]$$

$$R_f: [-۱ ,۲] \xrightarrow{\times ۲} D_g: [-۲,۴]$$



$$(-۲,۰) \xrightarrow{g} (-۱,۰)$$

$$(-۱,۲) \xrightarrow{g} (۰,۴)$$

$$(۰,۲) \xrightarrow{g} (۱,۴)$$

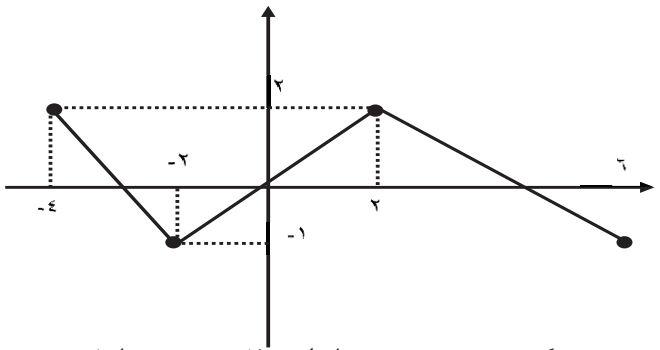
$$(۱,-۱) \xrightarrow{g} (۲,-۲)$$

توجه: x را با یک جمع و y ها را در ۲ ضرب کردیم.

۵) گزینه ب

$$D_f: [-۲,۱] \underset{\div ۲}{\xrightarrow{g}} D_g: \left[-۱,\frac{۱}{۲}\right]$$

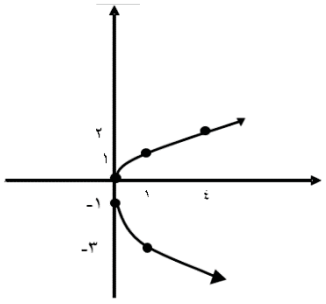
۶) کافی است x را دو برابر و y ها را یک واحد به بالا انتقال دهیم (با یک جمع کنیم).



۷) ابتدا نمودار $f(x)$ را با استفاده از جدول زیر رسم می کنیم، و سپس y ها را در ۲- ضرب و با ۱- جمع می کنیم.

X	۰	۱	۴
Y	۰	۱	۲

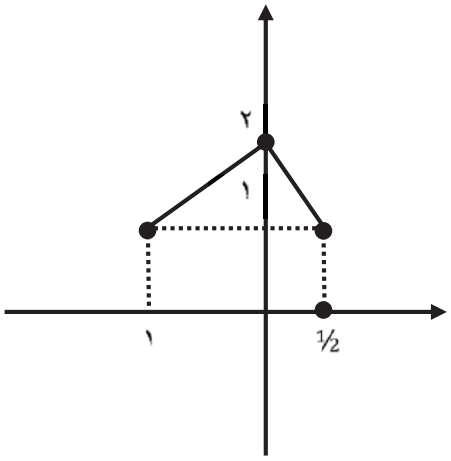
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا



۸) درست، زیرا طبق $g(x) = -3f(2x)$ باید x را به ۲ تقسیم کنیم تا دامنه g به دست آید.

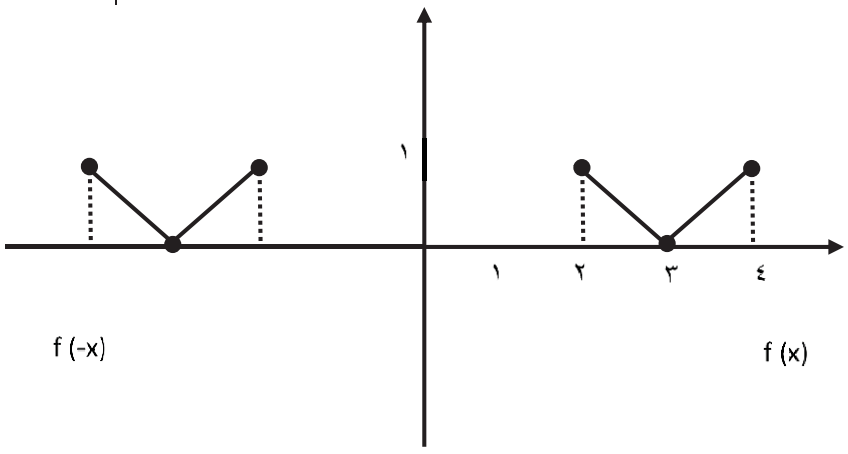
$$D_f = [-1,3] \xrightarrow{\div 2} D_g: \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

۹) باید در نقاط مشخص، x ها را به ۲- تقسیم کنیم و y ها را با ۱ جمع کنیم.



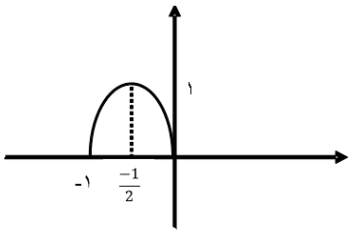
۱۰)

X	۲	۳	۴
Y	۱	۰	۱



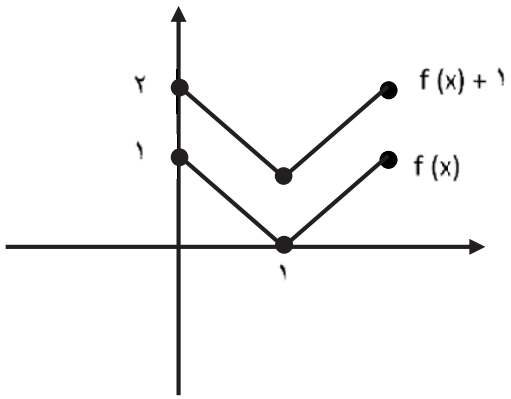
در $f(x)$ فقط x را قرینه می کنیم تا $f(-x)$ رسم شود.

۱۱) در نمودار $y = f(x)$، نقاط مشخص را در نظر گرفته و طول آنها را به ۲- تقسیم می کنیم. بنابراین:



۱۲)

X	۰	۱	۲
Y	۱	۰	۱



در نمودار $f(x)$، y ها را در نقاط مشخص با یک جمع کردیم. $R_{f(x)+۱} = [۱،۲]$

درس دوم: توابع یکنوا – بخش پذیری و تقسیم:

۱) درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید. (نظام قدیم – خرداد ۹۶)

الف) چندجمله ای $x^۲ + a^۲$ بر $x + a$ بخش پذیر است.

ب) تابع $f(x) = \sqrt{x}$ روی دامنه اش صعودی اکید است.

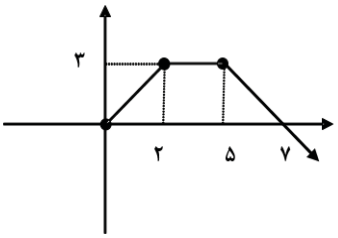
۲) الف) گزینه مناسب را انتخاب کنید. (نظام قدیم – خرداد ۹۴)

تابع $y = x^۲ - ۱$ در بازه $(-\infty , ۰)$ ..... است.

i) نزولی ii) صعودی

ب) باقیمانده تقسیم $P(x) = ۵x^۳ + ۲x^۲ - x + ۴$ بر $x + ۱$ برابر است با .....

۳) تابع زیر در بازه ..... صعودی اکید و در بازه ..... نزولی اکید و در بازه ..... ثابت است.



(نظام قدیم-خرداد۹۱)

۴) گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) تابع $y = x^۲ + ۱$ در بازه [۲ و ۰] تابعی: نزولی ☐ صعودی ☐ (شهریور ۹۷)

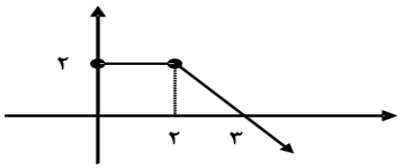
ب) تابع $f(x) = |x|$ در بازه $[۰, +\infty)$ تابعی: نزولی ☐ صعودی ☐ (شهریور ۹۶)

ج) تابع $y = ۲x^۲ + ۴x - ۱$ در بازه [۵ و ۲-] صعودی است. نادرست ☐ درست ☐ (دی ۹۷)

۵) الف) تابع $y = |x| + ۱$ در بازه ..... صعودی است. (نظام قدیم – دی ۹۴)

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

ب) با توجه به شکل، تابع در چه بازه هایی صعودی یا نزولی یا ثابت است؟



۶) اگر چندجمله ای $f(x) = x^۲ + ax - ۳$ بر $x + ۱$ بخش پذیر باشد، باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x-۲$ را به دست آورید. (نظام جدید – خرداد ۹۸)

۷) چندجمله ای $x^۶ - ۱$ را بر حسب عامل $x + ۱$ تجزیه کنید. (نظام جدید – خرداد ۹۸)

۸) اگر باقیمانده تقسیم چندجمله ای $P(x) = ۲x^۴ + mx + ۲$ بر $x + ۱$ برابر ۲ باشد، باقیمانده تقسیم آن بر $x - ۱$ را بیابید. (نظام قدیم – خرداد ۹۸)

۹) الف) معادله ..... دارای ریشه های ۱ و ۳ است. (نظام قدیم – خرداد ۹۷)

ب) مقدار m را چنان بیابید که چندجمله ای $P(x) = ۲x^۳ - mx + ۵$ بر $x + ۱$ بخش پذیر باشد.

۱۰) در چندجمله ای $P(x) = x^۳ + ax^۲ + x + b$ مقدار a و b را چنان بیابید که باقیمانده تقسیم آن بر $x - ۱$ برابر ۴ بوده و بر $x + ۲$ بخش پذیر باشد. (نظام قدیم – خرداد ۹۵)

۱۱) مقدار m را چنان بیابید که چندجمله ای $P(x) = ۲x^۳ - mx^۲ + ۲x + ۱$ بر $۲x + ۱$ بخش پذیر باشد. (نظام قدیم – خرداد ۹۳)

۱۲) $P(x)$ یک چندجمله ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است. $P(x)$ را به گونه ای تعیین کنید که در شرایط زیر صدق کند. (نظام قدیم – خرداد ۹۲)

$P(۱) = ۱$, $P(۲) = ۳$

۱۳) مقدار k را چنان بیابید که چندجمله ای $P(x) = ۲x^۳ - kx^۲ - x + ۳$ بر $x + ۱$ بخش پذیر باشد. (نظام قدیم – خرداد ۹۰)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴) مقدار k را طوری تعیین کنید که عبارت $8x^3 + 4x^2 - kx - 8$ بر $2x - 1$ بخش پذیر باشد. (نظام قدیم – خرداد ۸۸)

۱۵) باقیمانده تقسیم عبارت $P(x) = x^3 - 5x + 1$ بر $x - 2$ چیست؟ (نظام قدیم – شهریور ۹۷)

۱۶) گزینه صحیح را انتخاب کنید. (نظام قدیم – شهریور ۹۶ – شهریور ۹۴)

الف) باقیمانده تقسیم $4x^2 - 2x + 1$ بر $x + 1$ برابر است با: i) -۲ ii) ۷

ب) باقیمانده تقسیم $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2$ بر $2x + 1$ برابر است با: i) $\frac{7}{8}$ ii) $\frac{9}{8}$

۱۷) مقدار m را چنان بیابید که چندجمله ای $P(x) = 3x^3 - 2x + 2m$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد. (نظام قدیم – شهریور ۹۱)

۱۸) اگر باقیمانده تقسیم چندجمله ای $P(x)$ بر x مساوی ۲ و بر $x + 2$ مساوی ۱ باشد، باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + 2x$ را به دست آورید. (نظام قدیم – شهریور ۸۹)

۱۹) اگر باقیمانده تقسیم چندجمله ای $P(x) = 2x^4 + mx + 2$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، باقیمانده تقسیم آن بر $x - 1$ را بیابید. (نظام قدیم – دی ماه ۹۲)

۲۰) مقادیر m و n را چنان به دست آورید که چندجمله ای $x^2 + mx + n$ بر $(x - 2)$ و $(x + 1)$ بخش پذیر باشد. (نظام قدیم – دی ۸۹)

۲۱) هرگاه باقیمانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر $x + 3$ و $x - 2$ به ترتیب ۲ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 + x - 6$ را به دست آورید. (نظام قدیم – دی ۸۸)

۲۲) اگر باقیمانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر $x + 2$ و $x - 3$ به ترتیب ۱ و ۲ باشد، باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - x - 6$ را حساب کنید. (نظام قدیم – دی ۸۷)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ سوالات درس دوم: توابع یکنوا – بخش پذیری و تقسیم:

۱) الف) نادرست، زیرا $x + a = ۰ \rightarrow x = -a \xrightarrow{\text{جایگذاری}} (-a)^۲ + a^۲ = ۲a^۲ \neq ۰$

اگر $x^۲ + a^۲$ بر $x + a$ بخش پذیر بود، باید پس از جایگذاری به عدد صفر می رسیدیم.

ب) درست، زیرا $D_f: [۰, +\infty) \rightarrow x_۱ < x_۲ \rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$

۲) الف) نزولی، زیرا در بازه $(-\infty, ۰)$ داریم: $x_۱ < x_۲ \rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$

به عنوان مثال: $\underbrace{۱ - (-۱)^۲}_{۰} > \underbrace{۱ - (-۲)^۲}_{-۳} \rightarrow -۱ > -۲$

ب) برای به دست آوردن باقیمانده دو راه داریم:

راه اول:

$$x + ۱ = ۰ \rightarrow x = -۱ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} ۵(-۱)^۳ + ۲(-۱)^۲ - (-۱) + ۴ = -۵ + ۲ + ۱ + ۴ = ۲$$

راه دوم: این راه به روش هورنر معروف است که علاوه بر باقیمانده، خارج قسمت هم به دست می آید.

	$۵x^۳$	$۲x^۲$	$-x$	۴
$x+۱=۰ \rightarrow x=-۱$	۵	-۳	۲	۲

چون مقسوم از درجه ۳ و مقسوم علیه از درجه ۱، پس خارج قسمت از درجه ۲ می باشد و برابر است با:

$$Q(x) = ۵x^۲ - ۳x + ۲$$

آخرین عدد ردیف دوم جدول همان باقیمانده است: $R(x) = ۲$

توجه: در ردیف دوم، اولین عدد را همان اولین ضریب مقسوم در نظر می گیریم و سپس:

$۵(-۱) + ۲ = -۳$ $\qquad$ $-۳(-۱) + (-۱) = ۲$ $\qquad$ $۲(-۱) + ۴ = ۲$

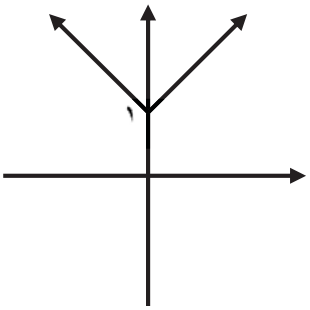
۳) $[۲ \text{ و } ۰]$ صعودی اکید - $(۵, +\infty)$ نزولی اکید و $[۵ \text{ و } ۲]$ ثابت

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴) الف) صعودی ب) صعودی ج) نادرست

در هر قسمت می توان از تعریف صعودی (نزولی) استفاده کرد یا آنکه در بازه داده شده نمودار را رسم کرد و از روی نمودار صعودی (نزولی) بودن آن را تشخیص داد.

۵) الف) در بازه $[۰, +\infty)$ به شکل توجه کنید.



ب) $[۰$ و $۲]$ ثابت و $[۲, +\infty)$ نزولی

۶) چون چندجمله ای $f(x)$ بر $x + ۱$ بخش پذیر است، پس باید $f(-۱) = ۰$

$$x + ۱ = ۰ \rightarrow x = -۱ \rightarrow f(-۱) = (-۱)^۲ + a(-۱) - ۳ = ۰ \rightarrow ۱ - a - ۳ = ۰ \rightarrow a = -۲$$

پس در تابع $f(x)$ به جای a قرار می دهیم ۲- و داریم: $f(x) = x^۲ - ۲x - ۳$

اکنون باقیمانده $f(x)$ بر x-۲ را می خواهیم، پس:

$$x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۲ \rightarrow f(۲) = ۲^۲ - ۲ \times ۲ - ۳ = ۴ - ۴ - ۳ = -۳$$

پس باقیمانده برابر ۳- می باشد.

۷) راه اول: بر اساس اتحاد صفحه ۲۰ کتاب درسی

$$(x^n - a^n) = (x + a)(x^{n-۱} - ax^{n-۲} + a^۲x^{n-۳} - \ldots + a^{n-۲}x - a^{n-۱})$$

که داریم:

$$(x^۶ - ۱) = (x + ۱)(x^۵ - x^۴ + x^۳ - x^۲ + x - ۱)$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

راه دوم: از طریق روش هورنر

	$X^۶$	$۰x^۵$	$۰x^۴$	$۰x^۳$	$۰x^۲$	$۰x$	-۱
$x + ۱ = ۰$ $x = -۱$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	۰

چون مقسوم از درجه ۶ و مقسوم علیه از درجه ۱ می باشد، پس خارج قسمت از درجه ۵ خواهد بود و عددهای ردیف دوم جدول به ترتیب ضرایب آن می باشند یعنی $Q(x) = x^۵ - x^۴ + x^۳ - x^۲ + x - ۱$ بنابراین:

$$x^۶ - ۱ = (x + ۱)(x^۵ - x^۴ + x^۳ - x^۲ + x - ۱)$$

۸)

$$P(-۱) = ۲ \rightarrow ۲ - m + ۲ = ۲ \rightarrow m = ۲ \rightarrow P(x) = ۲x^۴ + ۲x + ۲$$

$$x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \rightarrow P(۱) = ۲ + ۲ + ۲ = ۶ \rightarrow \text{باقیمانده} = ۶$$

۹) الف) $(x - ۱)(x - ۳) = x^۲ - ۴x + ۳$

ب)

$$x + ۱ = ۰ \rightarrow x = -۱ \rightarrow P(-۱) = ۰ \rightarrow ۲(-۱)^۳ - m(-۱) + ۵ = ۰ \rightarrow$$

$$-۲ + m + ۵ = ۰ \rightarrow m = -۳$$

۱۰)

$$x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \rightarrow P(۱) = ۴ \rightarrow ۱ + a + ۱ + b = ۴ \rightarrow a + b = ۲$$

$$x + ۲ = ۰ \rightarrow x = -۲ \rightarrow P(-۲) = ۰ \rightarrow (-۲)^۳ + a(-۲)^۲ + (-۲) + b = ۰ \rightarrow ۴a + b = ۱۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + b = ۲ \\ ۴a + b = ۱۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a - b = -۲ \\ ۴a + b = ۱۰ \end{cases} \rightarrow ۳a = ۸ \rightarrow a = \frac{۸}{۳}$$

$$a + b = ۲ \rightarrow \frac{۸}{۳} + b = ۲ \rightarrow b = ۲ - \frac{۸}{۳} = -\frac{۲}{۳}$$

۱۱)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$۲x + ۱ = ۰ \rightarrow ۲x = -۱ \rightarrow x = \frac{-۱}{۲} \rightarrow P\left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \rightarrow$

$P\left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۳} - m\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲} + ۲\left(-\frac{۱}{۲}\right) + ۱ = ۰$

$۲ \times -\frac{۱}{۸} - m \times \frac{۱}{۴} - ۱ + ۱ = ۰ \rightarrow -\frac{۱}{۴} - \frac{m}{۴} = ۰ \rightarrow -\frac{m}{۴} = +\frac{۱}{۴}$

$\rightarrow -۴m = +۴ \rightarrow m = -۱$

(۱۲

$P(x) = ax^{۲} + bx + c \xrightarrow{a=۱} P(x) = x^{۲} + bx + c$

$\begin{matrix} P(۱) = ۱ \rightarrow ۱ + b + c = ۱ \rightarrow b + c = ۰ \\ P(۲) = ۳ \rightarrow ۴ + ۲b + c = ۳ \rightarrow ۲b + c = -۱ \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} -b - c = ۰ \\ ۲b + c = -۱ \end{cases} \rightarrow b = -۱$

$b + c = ۰ \rightarrow$ -۱ $+ c = ۰ \rightarrow c = ۱ \rightarrow P(x) = x^{۲} - x + ۱$

(۱۳

$x + ۱ = ۰ \rightarrow x =$ -۱ $\rightarrow P($-۱$) = ۰ \rightarrow ۲($-۱$)^{۳} - k($-۱$)^{۲} - ($-۱$) + ۳ = ۰$

$\rightarrow$ -۲ $- k + ۱ + ۳ = ۰ \rightarrow$ -k $=$ -۲ $\rightarrow k = ۲$

(۱۴

$۲x - ۱ = ۰ \rightarrow ۲x = ۱ \rightarrow x = \frac{۱}{۲} \rightarrow f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰$

$\rightarrow ۸\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} + ۴\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} - k\left(\frac{۱}{۲}\right) - ۸ = ۰ \rightarrow ۸ \times \frac{۱}{۸} + ۴ \times \frac{۱}{۴} - k \times \frac{۱}{۲} - ۸ = ۰$

$\rightarrow ۱ + ۱ - \frac{k}{۲} - ۸ = ۰ \rightarrow -\frac{k}{۲} = \frac{۶}{۱} \rightarrow -k = ۱۲ \rightarrow k = -۱۲$

(۱۵

$x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۲ \rightarrow P(۲) = ۲^{۳} - ۵ \times ۲ + ۱ = ۸ - ۱۰ + ۱ =$ -۱

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۶) الف) ۷ زیرا: $x + ۱ = ۰ \rightarrow x = -۱ \rightarrow R(-۱) = ۴(-۱)^۲ - ۲(-۱) + ۱ = ۷$

ب) $\frac{۷}{۸}$ زیرا:

$$۲x + ۱ = ۰ \rightarrow ۲x = -۱ \rightarrow x = \frac{-۱}{۲} \rightarrow P\left(\frac{-۱}{۲}\right) = P\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۳ - ۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲ + ۲$$

$$\rightarrow P\left(\frac{-۱}{۲}\right) = -\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۱} + ۲ = -\frac{۱}{۸} + ۱ = \frac{۷}{۸}$$

۱۷)

$$x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۲ \rightarrow P(۲) = ۰ \rightarrow ۳(۲)^۳ - ۲(۲) + ۲m = ۰ \rightarrow ۲m = -۲۰ \rightarrow m = -۱۰$$

۱۸)

$$P(x) = (x^۲ + ۲x)\,Q(x) + ax + b$$

$$x = ۰ \rightarrow P(۰) = ۲ \rightarrow (۰ + ۰)\,Q(۰) + a \times ۰ + b = ۲ \rightarrow b = ۲$$

$$x + ۲ = ۰ \rightarrow x = -۲ \rightarrow P(-۲) = ۱ \rightarrow (۴ - ۴)\,Q(-۲) + a(-۲) + b = ۱$$

$$\rightarrow -۲a + b = ۱ \overset{b=۲}{\Longrightarrow} -۲a + ۲ = ۱ \rightarrow -۲a = ۱ - ۲ \rightarrow -۲a = -۱$$

$$\rightarrow a = \frac{۱}{۲} \rightarrow R(x) = ax + b = \frac{۱}{۲}x + ۲$$

۱۹)

$$x + ۱ = ۰ \rightarrow x = -۱ \rightarrow P(-۱) = ۲ \rightarrow$$

$$P(-۱) = ۲(-۱)^۴ + m(-۱) + ۲ = ۲ \rightarrow ۲ - m = ۰ \rightarrow m = ۲$$

$$\rightarrow P(x) = ۲x^۴ + ۲x + ۲$$

$$x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \rightarrow P(۱) = ۲ + ۲ + ۲ = ۶$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۲۰

$x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۲ \rightarrow ۲^۲ + ۲m + n = ۰ \rightarrow ۲m + n = -۴ \rightarrow$

$x + ۱ = ۰ \rightarrow x = -۱ \rightarrow (-۱)^۲ + m(-۱) + n = ۰ \rightarrow -m + n = -۱$

در منفی ضرب $\rightarrow \begin{cases} ۲m + n = -۴ \\ m - n = ۱ \end{cases} \rightarrow ۳m = -۳ \rightarrow m = -۱, m - n = ۱ \rightarrow -۱ - n = ۱ \rightarrow n = -۲$

(۲۱

$f(x) = (x^۲ + x - ۶) Q(x) + ax + b$

$f(x) = (x + ۳)(x - ۲) Q(x) + ax + b$

$x + ۳ = ۰ \rightarrow x = -۳ \rightarrow f(-۳) = ۲ \rightarrow (-۳ + ۳)(-۳-۲) Q(-۳) - ۳a + b = ۲ \rightarrow$

$-۳a + b = ۲ \qquad (۱)$

$x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۲ \rightarrow f(۲) = ۷ \rightarrow (۷ + ۳)(۲ - ۲) Q(۲) + ۲a + b = ۷ \rightarrow$

$۲a + b = ۷ \qquad (۲)$

$\begin{cases} -۳a + b = ۲ \\ ۲a + b = ۷ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} +۳a - b = -۲ \\ ۲a + b = ۷ \end{cases} \rightarrow ۵a = ۵ \rightarrow a = \frac{۵}{۵} = ۱$

$-۳a + b = ۲ \rightarrow -۳ + b = ۲ \rightarrow b = ۲ + ۳ = ۵ \rightarrow$

$R(x) = ax + b \rightarrow R(x) = ۱x + ۵$

(۲۲

$f(x) = (x^۲ - x - ۶) Q(x) + ax + b \rightarrow$

$f(x) = (x - ۳)(x + ۲) Q(x) + ax + b$

$x + ۲ = ۰ \rightarrow x = -۲ \rightarrow f(-۲) = ۱ \rightarrow -۲a + b = ۱$

$x - ۳ = ۰ \rightarrow x = ۳ \rightarrow f(۳) = ۲ \rightarrow ۳a + b = ۲$

$\rightarrow \begin{cases} -۲a + b = ۱ \\ ۳a + b = ۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲a - b = -۱ \\ ۳a + b = ۲ \end{cases} \rightarrow ۵a = ۱ \rightarrow a = \frac{۱}{۵}$

$\rightarrow -۲a + b = ۱ \rightarrow -\frac{۲}{۵} + b = ۱ \rightarrow b = ۱ + \frac{۲}{۵} = \frac{۷}{۵}$

$\rightarrow R(x) = ax + b = \frac{۱}{۵}x + \frac{۷}{۵}$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) تابع $f(x) = |x + ۲|$ در بازه ..... اکیداً نزولی است.

ب) اگر $f(x) = x^۲$ و $g(x) = - (x - ۱)^۲ - ۲$ آنگاه نمودار g را می توان با انتقال نمودار f یک واحد به سمت ..... سپس قرینه نسبت به محور ..... و ۲ واحد انتقال به ..... به دست آورد.

ج) اگر $k > ۱$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از ..... عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود و اگر $۰ < k < ۱$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از ..... افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

د) اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع ..... به دست می آید.

هـ) تابع $f(x) = - x^۲ + ۲x$ روی بازه $(-\infty, ۱]$ اکیداً ..... است.

و) اگر $g(x) = ۱ + ۲f(x + ۲)$ و $A(۱ , -۲)$ نقطه ای متعلق به f باشد، آنگاه مختصات نقطه متناظر با آن متعلق به تابع g برابر ..... خواهد شد.

۲) درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف) تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ در تمام دامنه خود یکنوا است.

ب) تابع ثابت در یک بازه، تابعی یکنوا است.

پ) اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، تابع $f + g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است.

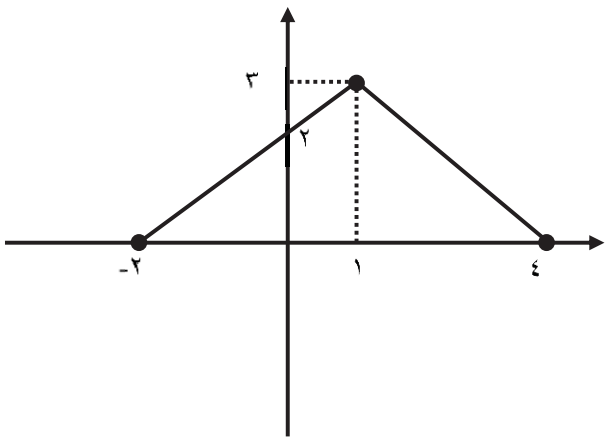
ت) اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، تابع $f - g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است.

ث) اگر تابعی در یک فاصله صعودی باشد، اکیداً صعودی نیز هست.

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۳) نمودار تابع f در شکل زیر داده شده است، مطلوب است نمودار، دامنه و برد تابع زیر:

$y = ۲f(-۲ - x) - ۳$



۴) به کمک رسم نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ نمودار $g(x) = \sqrt{۱ - x} + ۲$ را رسم کنید و بررسی کنید آیا $g(x)$ در تمام دامنه خود اکیداً یکنوا است؟

۵) نقطه (۲- و ۱) روی نمودار $y = f(x)$ است. نقطه متناظر آن در $y = ۲f\left(\frac{-۱}{۳}x\right) - ۲$ را محاسبه کنید.

۶) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) نمودار تابع $y = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x - ۲$ را می توان با ..... انتقال نمودار $y = x^۳$ به سمت ..... و ۳ واحد انتقال به ..... رسم نمود.

ب) در رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ اگر $۰ < k < ۱$ باشد، نمودار f در امتداد محور .....، ..... می شود.

۷) عبارت های زیر را بر حسب عامل خواسته شده تجزیه کنید.

الف) $x^۶ - ۱$ بر حسب عامل $x - ۱$.

ب) $x^۶ + ۶۴$ بر حسب عامل $x + ۲$.

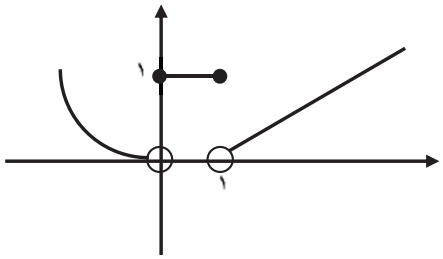
ج) $x^۵ - ۳۲$ بر حسب عامل $x - ۲$.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۸) اگر دامنه و برد تابع f به ترتیب (۳ و ۱-] و (۵ و ۲) باشد، دامنه و برد تابع $g(x) = ۳f(۲x - ۱) - ۲$ را محاسبه کنید.

۹) با استفاده از نمودار $f(x) = |x|$ نمودار $g(x) = f\left(\frac{x}{۳}\right) + ۱$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بنویسید.

۱۰) بازه هایی را که تابع زیر در آن صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است مشخص کنید.



۱۱) نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ & x \geq -۱ \\ ۳ & x < -۱ \end{cases}$ را رسم کنید. در چه فاصله ای این تابع صعودی و در چه فاصله ای نزولی است؟

۱۲) اگر تابع $f(x) = (x - a)^۲ + bx^۲ + ۷$ در دامنه اش هم صعودی و هم نزولی باشد، حاصل $۲a - b$ را محاسبه کنید.

۱۳) b و a را چنان بیابید که چندجمله ای $x^۳ + ax^۲ + ۲bx - ۳$ بر $x - ۳$ بخش پذیر بوده و باقیمانده تقسیم آن بر $x - ۱$ برابر ۴- باشد.

۱۴) اگر $P(x)$ بر $x - ۱$ بخش پذیر بوده و باقیمانده تقسیم آن بر $x + ۳$ برابر ۴ باشد، باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x^۲ + ۲x - ۳$ را به دست آورید.

۱۵) اگر دو چندجمله ای $f(x) = x^۲ + ۳x + ۲$ و $g(x) = ۲x^۳ - ۵x^۲ + ۴x + k$ در تقسیم بر $x - ۱$ هم باقیمانده باشند، مقدار k را بیابید.

۱۶) مقادیر a و b را چنان بیابید که چندجمله ای $f(x) = ۴x^۳ - ax^۲ + b$ بر $x^۲ + x - ۲$ بخش پذیر باشد.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۷) مقدار k را چنان بیابید که چندجمله ای $7x^2 - 4x + k - 5$ بر $x - 3$ بخش پذیر باشد.

۱۸) مقدار k را طوری پیدا کنید که چندجمله ای $P(x) = kx^2 + 3x - 2$ بر $kx - 3$ بخش پذیر باشد.

۱۹) معادله درجه دومی بنویسید که ضریب درجه ۲ آن برابر ۱ و بر $x - 1$ بخش پذیر بوده و باقیمانده تقسیم آن بر $x + 2$ برابر ۱ باشد.

۲۰) a و b را طوری به دست آورید که چندجمله ای $P(x) = ax^4 + bx^3 - 3x^2 + x + 2$ بر $x - 1$ بخش پذیر بوده و باقیمانده تقسیم آن بر $x + 1$ مساوی ۴- باشد.

۲۱) اگر عبارت $x^6 + ax^3 + bx^4 + 1$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر باشد، حاصل $a - 2b$ را محاسبه کنید.

۲۲) اگر باقیمانده تقسیم $2x^4 + mx + 2$ بر $x + 1$ مساوی ۲ باشد، باقیمانده آن بر $x - 1$ را محاسبه کنید.

۲۳) چندجمله ای $P(x) = 4x^3 - nx^2 + mx$ را در نظر بگیرید، مقادیر m و n را چنان بیابید که بر x^2+3x+2 بخش پذیر باشد.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) الف) $(-\infty, -۲]$ ب) راست – x ها – پایین

ج) انبساط – انبساط د) $y = f(-x)$

هـ) صعودی و) (۳- و ۱-)

۲) الف) نادرست ب) درست پ) درست

ت) نادرست ث) نادرست

۳)

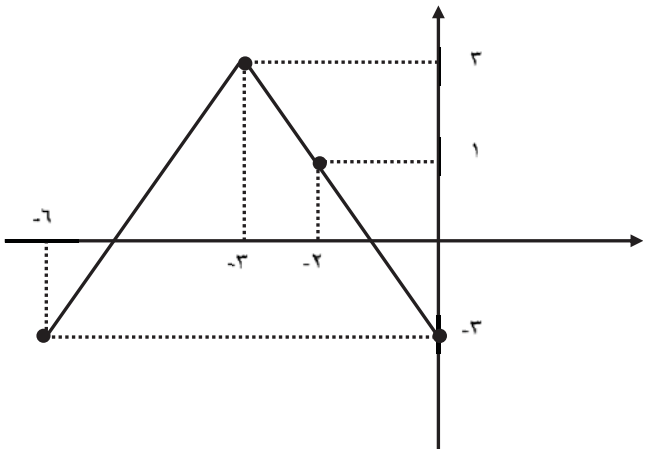
$$D_f: [-۲,۴] \rightarrow D_y = [-۶,۰]$$

توجه: تغییرات درون پرانتز مربوط به x است. درون پرانتز باید ۲+ و ۱ – × را انجام دهیم تا x به دست آید. همین تغییرات را روی دامنه انجام می دهیم.

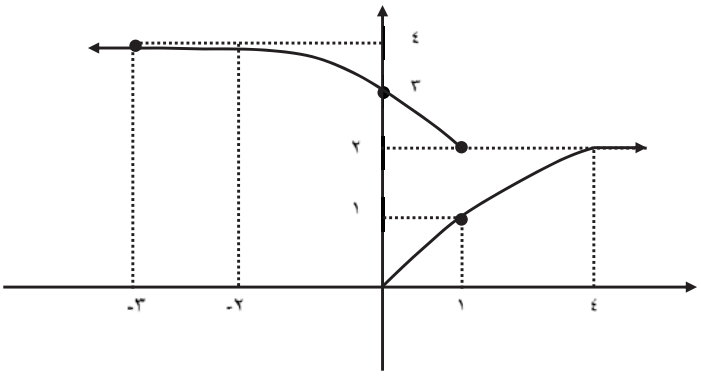
$$R_f: [۰,۳] \rightarrow R_y: [-۳,۳]$$

توجه: تغییرات قبل و بعد از f مربوط به y است پس ۲× و ۳- روی برد انجام می دهیم تا برد جدید به دست آید.

توجه: برای رسم $y = ۲f(-۲ - x) - ۳$ در نقاط مشخص شکل داده شده، تغییرات بالا را روی x و y انجام می دهیم تا به شکل زیر برسیم:



۴) بله اکیداً نزولی و یکنوا است.



۵) طبق $g(x) = f\left(-\frac{۱}{۳}x\right) - ۲$ باید x را در ۳- ضرب و y را با ۲- جمع کنیم، پس به نقطه (۴- و ۳-) می رسیم.

۶) الف) ۱ واحد – چپ – پایین

ب) y ها، منقبض

توجه: در قسمت الف داریم:

$y = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x - ۲ = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱ - ۳ \rightarrow$

$y = (x + ۱)^۳ - ۳$

۷) الف)

$x^۶ - ۱ = (x - ۱)(x^۵ + x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱)$

از فرمول $(x^n - a^n) = (x - a)(x^{n-۱} + ax^{n-۲} + \ldots + a^{n-۲}x + a^{n-۱})$ استفاده کردیم.

ب)

$x^۶ - ۶۴ = (x + ۲)(x^۵ - ۲x^۴ + ۴x^۳ - ۸x^۲ + ۱۶x - ۳۲)$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

این قسمت را از روش هورنر نیز حل می کنیم:

$x^۶ - ۶۴$	$X^۶$	$۰x^۵$	$۰x^۴$	$۰x^۳$	$۰x^۲$	$۰x$	-۶۴
$x + ۲ = ۰$ $x = -۲$	۱	-۲	۴	-۸	۱۶	-۳۲	۰

چون مقسوم از درجه ۶ و مقسوم علیه از درجه یک می باشد، پس خارج قسمت از درجه ۵ است، بنابراین:

$$x^۶ - ۶۴ = (x + ۲)\,(۱x^۵ - ۲x^۴ + ۴x^۳ - ۸x^۲ + ۱۶x^۱ - ۳۲)$$

توجه: ضریب $x^۶$ را نوشتیم، سپس:

$۱ \times -۲ + ۰ = -۲$ $\quad$ $-۲ \times -۲ + ۰ = ۴$ $\quad$ $۴ \times -۲ + ۰ = -۸$

$-۸ \times -۲ + ۰ = ۱۶$ $\quad$ $۱۶ \times -۲ + ۰ = -۳۲$ $\quad$ $-۳۲ \times -۲ - ۶۴ = ۰$

ج)

$$(X^۵ - ۳۲) = (x - ۲)(X^۴ + ۲x^۳ + ۴x^۲ + ۸x + ۱۶)$$

از فرمول قسمت الف استفاده کردیم البته می توان از روش هورنر هم حل کرد:

$x^۵ - ۳۲$	$X^۵$	$۰x^۴$	$۰x^۳$	$۰x^۲$	$۰x$	-۳۲
$x - ۲ = ۰$ $x = ۲$	۱	۲	۴	۸	۱۶	۰

چون مقسوم از درجه ۵ و مقسوم علیه از درجه ۱، پس خارج قسمت از درجه ۴ خواهد بود.

بنابراین:

$$x^۵ - ۳۲ = (x - ۲)\,(۱x^۴ + ۲x^۳ + ۴x^۲ + ۸x + ۱۶)$$

۸)

$$D_f: [-۱,۳) \rightarrow D_g: [۰,۲)$$

ابتدا x ها را با یک جمع و سپس به ۲ تقسیم کردیم (طبق معادله $g(x)$)

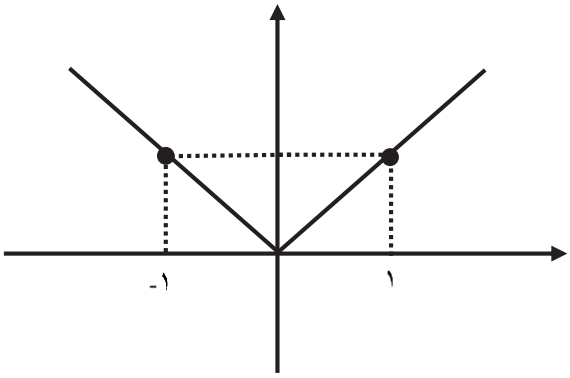
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

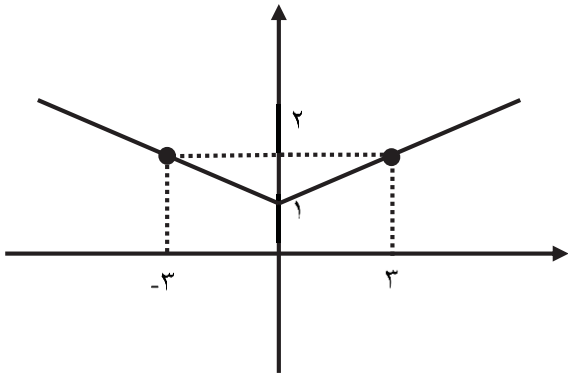
$R_f: (۲,۵) \rightarrow R_g: (۴,۱۳)$

ابتدا y ها را ۳ برابر و سپس با ۲- جمع کردیم (طبق معادله g(x))

۹) $f(x) = |x|$

x	−۱	۰	۱
y	۱	۰	۱





طبق تعریف g(x)، x ها را سه برابر و y ها را با یک جمع کردیم.

$D_g: (-\infty, +\infty)$

$R_g: [۱, +\infty)$

۱۰) صعودی اکید: $(۱, +\infty)$ و نزولی اکید: $(-\infty, ۰)$ و ثابت: [۰ و ۱]

۱۱)

$$f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ & x \geq -۱ \\ ۳ & x < ۱ \end{cases}$$

x	−۱	۰	۱
y	۲	۰	۲

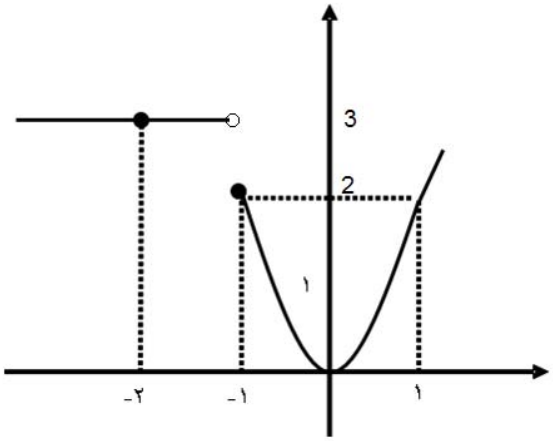
x	−۱	−۲
y	۳	۳

ثابت: $(-\infty, -۱)$

نزولی اکید: [۰ و ۱-]

صعودی اکید: $[۰, +\infty)$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



۱۲) تابع ثابت $f(x) = k$ در دامنه اش هم صعودی و هم نزولی است. بنابراین:

$f(x) = k \rightarrow (x - a)^۲ + bx^۲ + ۷ = k \rightarrow$

$x^۲ - ۲ax + a^۲ + bx^۲ + ۷ = k \rightarrow x^۲ (۱ + b) - ۲ax + a^۲ + ۷ = k \rightarrow$

$$\begin{cases} ۱ + b = ۰ \rightarrow b = -۱ \\ -۲a = ۰ \rightarrow a = ۰ \end{cases} \rightarrow ۲a - b = ۱$$

۱۳)

$x - ۳ = ۰ \rightarrow x = ۳ \rightarrow f(۳) = ۰ \rightarrow ۳^۳ + a \times ۳^۲ + ۲b \times ۳ - ۳ = ۰ \rightarrow$

$۲۷ + ۹a + ۶b - ۳ = ۰ \rightarrow ۹a + ۶b = -۲۴$

$x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \rightarrow f(۱) = -۴ \rightarrow ۱ + a + ۲b - ۳ = -۴ \rightarrow a + ۲b = -۲ \rightarrow$

$$\begin{cases} ۹a + ۶b = -۲۴ \\ a + ۲b = -۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۹a + ۶b = -۲۴ \\ -۳a - ۶b = ۶ \end{cases} \rightarrow ۶a = -۱۸ \rightarrow a = -۳$$

$$a + ۲b = -۲ \rightarrow -۳ + ۲b = -۲ \rightarrow ۲b = ۱ \rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

۱۴)

$P(x) = (x^۲ + ۲x - ۳)\, Q(x) + ax + b \rightarrow$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$P(x) = (x + ۳)(x - ۱) Q(x) + ax + b$

$x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \rightarrow P(۱) = ۰ \rightarrow ۰ + a \times ۱ + b = ۰ \rightarrow a + b = ۰$

$x + ۳ = ۰ \rightarrow x = -۳ \rightarrow P(-۳) = ۴ \rightarrow ۰ + a \times -۳ + b = ۴ \rightarrow$

$-۳a + b = ۴$

$$\rightarrow \begin{cases} a + b = ۰ \\ -۳a + b = ۴ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a - b \\ -۳a + b = ۴ \end{cases} \rightarrow -۴a = ۴ \rightarrow a = -۱$$

$a + b = ۰ \rightarrow -۱ + b = ۰ \rightarrow b = ۱ \rightarrow R(x) = ax + b = -x + ۱$

(۱۵

$x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \rightarrow f(۱) = ۱ + ۳ + ۲ = ۶$

$\rightarrow ۱ + k = ۶ \rightarrow k = ۵$

$g(۱) = ۲ - ۵ + ۴ + k = ۱ + k$

(۱۶

$f(x) = (x^۲ + x - ۲) Q(x) = (x + ۲)(x - ۱) Q(x)$

$x + ۲ = ۰ \rightarrow x = -۲ \rightarrow f(-۲) = ۰ \rightarrow ۴(-۲)^۳ - a(-۲)^۲ + b = ۰ \rightarrow$

$-۳۲ - ۴a + b = ۰ \rightarrow -۴a + b = ۳۲$

$x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \rightarrow f(۱) = ۰ \rightarrow ۴ - a + b = ۰ \rightarrow -a + b = -۴$

$$\begin{cases} -۴a + b = ۳۲ \\ -a + b = -۴ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -۴a + b = ۳۲ \\ a - b = ۴ \end{cases} \rightarrow -۳a = ۳۶ \rightarrow a = -۱۲$$

$-a + b = -۴ \rightarrow ۱۲ + b = -۴ \rightarrow b = -۱۶$

(۱۷

$x - ۳ = ۰ \rightarrow x = ۳ \rightarrow ۷(۳)^۲ - ۴(۳) + k - ۵ = ۰$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

$۶۳ - ۱۲ + k - ۵ = ۰ \rightarrow k = -۴۶$

(۱۸

$kx - ۳ = ۰ \rightarrow kx = ۳ \rightarrow x = \frac{۳}{k} \rightarrow P\left(\frac{۳}{k}\right) = ۰$

$\rightarrow k\left(\frac{۳}{k}\right)^{۲} + ۳\left(\frac{۳}{k}\right) - ۲ = ۰ \rightarrow \cancel{k} \times \frac{۹}{\cancel{k^{۲}}} + \frac{۹}{k} - ۲ = ۰$

$\rightarrow \frac{۱۸}{k} - ۲ = ۰ \rightarrow \frac{۱۸}{k} = ۲ \rightarrow ۲k = ۱۸ \rightarrow k = ۹$

(۱۹

$f(x) = ax^{۲} + bx + c \overset{a=۱}{\Longrightarrow} f(x) = x^{۲} + bx + c$

$x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \rightarrow f(۱) = ۰ \rightarrow ۱ + b + c = ۰ \rightarrow b + c = -۱$

$x + ۲ = ۰ \rightarrow x = -۲ \rightarrow f(-۲) = ۱ \rightarrow ۴ - ۲b + c = ۱ \rightarrow -۲b + c = -۳$

$\rightarrow \begin{cases} b + c = -۱ \\ -۲b + c = -۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -b - c = +۱ \\ -۲b + c = -۳ \end{cases} \rightarrow -۳b = -۲ \rightarrow b = \frac{-۲}{-۳}$

$b + c = -۱ \rightarrow \frac{۲}{۳} + c = -۱ \rightarrow c = -۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{-۵}{۳} \rightarrow f(x) = x^{۲} + \frac{۲}{۳}x - \frac{۵}{۳}$

(۲۰

$x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \rightarrow P(۱) = ۰ \rightarrow a + b - ۳ + ۱ + ۲ = ۰ \rightarrow a + b = ۰$

$x + ۱ = ۰ \rightarrow x = -۱ \rightarrow P(-۱) = -۴ \rightarrow a - b - ۳ - ۱ + ۲ = -۴ \rightarrow a - b = -۲$

$\rightarrow \begin{cases} a + b = ۰ \\ a - b = -۲ \end{cases} \rightarrow ۲a = -۲ \rightarrow a = -۱, a + b = ۰ \rightarrow -۱ + b = ۰ \rightarrow b = ۱$

(۲۱

$x^{۲} - ۱ = (x - ۱)(x + ۱) = ۰ \rightarrow \begin{matrix} x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \rightarrow f(۱) = ۰ \\ x + ۱ = ۰ \rightarrow x = -۱ \rightarrow f(-۱) = ۰ \end{matrix}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\rightarrow \begin{cases} ۱ + a + b + ۱ = ۰ \rightarrow a + b = -۲ \\ ۱ - a + b + ۱ = ۰ \rightarrow -a + b = -۲ \end{cases} \rightarrow ۲b = -۴ \rightarrow b = -۲$$

$$a + b = -۲ \rightarrow a - ۲ = -۲ \rightarrow a = ۰ \rightarrow a - ۲b = ۰ + ۴ = ۴$$

(۲۲

$$x + ۱ = ۰ \rightarrow x = -۱ \rightarrow f(-۱) = ۲ \rightarrow ۲ - m + ۲ = ۲ \rightarrow -m = -۲ \rightarrow$$

$$m = ۲ \rightarrow f(x) = ۲x^{۴} + ۲x + ۲$$

$$x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \rightarrow f(۱) = ۲ + ۲ + ۲ = ۶$$

(۲۳

$$x^{۲} + ۳x + ۲ = (x + ۲)(x + ۱) = ۰$$

$$x + ۲ = ۰ \rightarrow x = -۲ \rightarrow P(-۲) = ۰ \rightarrow -۳۲ - ۴n - ۲m = ۰ \rightarrow -۴n - ۲m = ۳۲$$

$$x + ۱ = ۰ \rightarrow x = -۱ \rightarrow P(-۱) = ۰ \rightarrow -۴ - n - m = ۰ \rightarrow -n - m = ۴$$

$$\rightarrow \begin{cases} -۴n - ۲m = ۳۲ \\ -n - m = ۴ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -۴n - ۲m = ۳۲ \\ ۲n + ۲m = -۸ \end{cases} \rightarrow -۲n = ۲۴ \rightarrow n = -۱۲$$

$$-n - m = ۴ \rightarrow ۱۲ - m = ۴ \rightarrow m = ۸$$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

خود را بیازمائید:

۱) نمودار $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ -1 & x < -1 \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید در چه فاصله هایی این تابع صعودی و در چه فاصله هایی نزولی است؟

۲) عبارت $x^5 - ۳۲$ را بر حسب عامل $x - ۲$ تجزیه کنید.

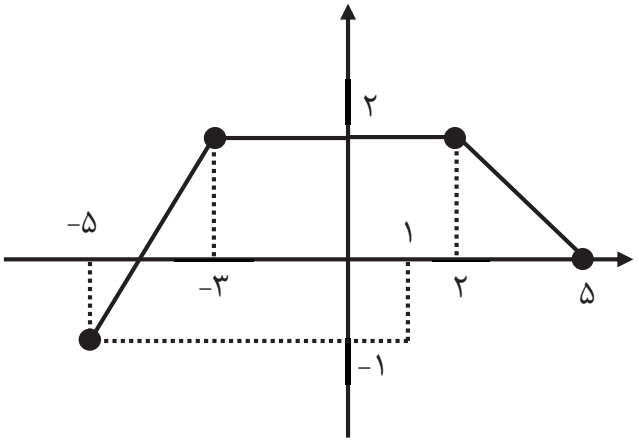
۳) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) تابع $f(x) = |x - ۲|$ در بازه ..... اکیداً نزولی است.

ب) اگر $g(x) = ۲ + ۳f\left(\frac{۱}{۲}x - ۱\right)$ و $A\ (۰\ ,\ ۱)$ نقطه ای متعلق به f باشد، آنگاه مختصات نقطه متناظر با آن در g برابر است با .....

ج) اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع ..... $= y$ به دست می آیند.

۴) هرگاه نمودار $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار $g(x) = ۱ - f\,(۲x + ۱)$ را رسم کنید.



۵) اگر باقیمانده تقسیم عبارت $P(x)$ بر $(x - ۱)$ و $(x - ۲)$ به ترتیب ۲- و ۳ باشد، باقیمانده تقسیم $P(x)$ را بر $x^2 - ۳x + ۲$ به دست آورید.

۶) مقدار k را چنان بیابید که چندجمله ای $۵x^2 - kx + ۴k + ۶$ بر X-۲ بخش پذیر باشد.

((موفق و سربلند باشید))

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تابع: ریاضی (۳) (علوم تجربی)

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

درس اول: توابع چندجمله ای – توابع صعودی و نزولی:

۱) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (نظام جدید – دی ۹۷)

تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود.

۲) در جای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید. (نظام جدید – خرداد ۹۸)

تابع $y = (x + ۱)^۳$ در دامنه تعریف خود ..... (صعودی – نزولی) است.

۳) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (هماهنگ استانی – خوزستان – مستمر اردیبهشت ۹۸)

هر تابع یک به یک اکیداً یکنوا است.

۴) درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. (هماهنگ استانی – مرکزی – مستمر اردیبهشت ۹۸)

تابعی وجود داردکه اکیدا یکنوا باشد ولی یک به یک نباشد

۵) نمودار تابعی را رسم کنید که در بازه $(-\infty, -۱]$ اکیداً صعودی، در بازه [۳ و ۱-] ثابت و در بازه $[۳, +\infty)$ اکیداً نزولی باشد. (هماهنگ استانی – گیلان – مستمر اردیبهشت ۹۸)

۶) صعودی یا نزولی بودن تابع $\begin{cases} f: R \to R \\ f(x) = x^۳ + ۱ \end{cases}$ را بررسی کنید. (از مدرسه تا دانشگاه حسابان چاپ ۸۶)

۷) تابع $f: R \to Z$ با ضابطه $f(x) = [x]$ مفروض است. در مورد صعودی (اکیداً) یا نزولی (اکیداً) بودن تابع بحث کنید. (از مدرسه تا دانشگاه حسابان چاپ ۸۶)

۸) تابع $\begin{cases} f: R \to R \\ f(x) = -۲x + ۱ \end{cases}$ صعودی (اکیداً) یا نزولی (اکیداً) است؟ چرا؟ (از مدرسه تا دانشگاه حسابان چاپ ۸۶)

۹) صعودی یا نزولی بودن تابع $g: R - \{۰\} \to R - \{۰\}$ با ضابطه $g(x) = \frac{۱}{x}$ را بررسی کنید. (از مدرسه تا دانشگاه – حسابان – چاپ ۸۶)

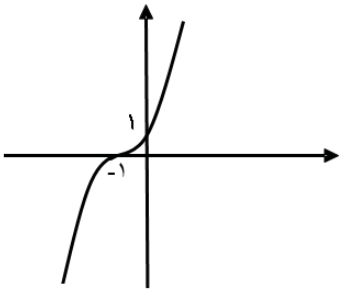
۱۰) صعودی یا نزولی بودن تابع $\begin{cases} f: R \to R \\ f(x) = x^۲ \end{cases}$ را بررسی کنید. (از مدرسه تا دانشگاه حسابان چاپ ۸۶)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ درس اول: توابع چندجمله ای:

۱) درست

۲) با توجه به شکل، صعودی است.

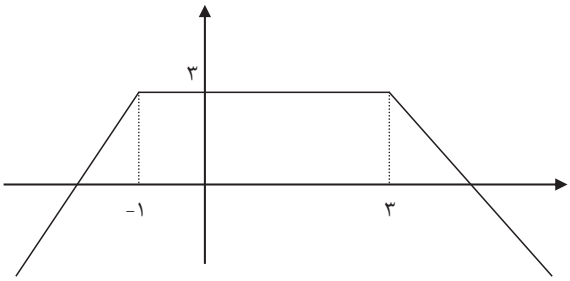


۳) نادرست مثل تابع $y = \frac{۱}{x}$ که یک به یک هست ولی در دامنه اش اکیداً یکنوا نیست.

۴) نادرست

۵) یک تابع به عنوان مثال به صورت زیر است:

(تابع های زیادی با این شرایط می توان رسم نمود)



۶) $x_۱ < x_۲ \rightarrow x^۳_۱ < x^۳_۲ \rightarrow x^۳_۱ + ۱ < x^۳_۲ + ۱ \rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$ یعنی f اکیداً صعودی است.

۷) $x_۱ < x_۲ \rightarrow [x_۱] \leq [x_۲] \rightarrow f(x_۱) \leq f(x_۲)$ بنابراین f صعودی است.

۸) $x_۱ < x_۲ \rightarrow -۲x_۱ > -۲x_۲ \rightarrow -۲x_۱ + ۱ > -۲x_۲ + ۱ \rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$ بنابراین f اکیداً نزولی می باشد.

۹) اگر $x_۱$ و $x_۲$ هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند:

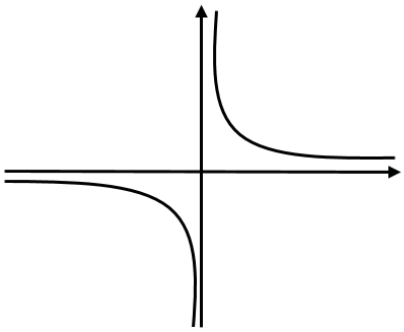
$$x_۱ < x_۲ \rightarrow \frac{۱}{x_۱} > \frac{۱}{x_۲} \rightarrow g(x_۱) > g(x_۲) \rightarrow$$

g اکیداً نزولی است ولی در حالت کلی نمی توان گفت g نزولی است.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

بنابراین g در هر یک از دو فاصله $(-\infty, ۰)$ یا$(۰ , +\infty)$ اکیداً نزولی می باشد.

به نمودار توجه کنید:



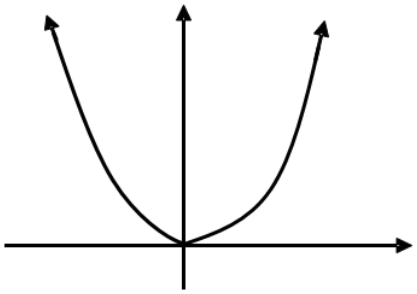
۱۰) اگر $x_۱$ و $x_۲$ هر دو مثبت باشند:

$x_۱ < x_۲ \rightarrow x^۲_۱ < x^۲_۲ \rightarrow f(x_۱) < f(x_۲) \rightarrow$ f اکیداً صعودی

و اگر $x_۱$ و $x_۲$ هر دو منفی باشند:

$x_۱ < x_۲ \xrightarrow[\text{منفی}]{\text{جهت عوض}} x^۲_۱ > x^۲_۲ \rightarrow f(x_۱) > f(x_۲) \rightarrow$ f اکیداً نزولی

بنابراین تابع f در بازه $(-\infty, ۰]$ نزولی اکید و در بازه $[۰, +\infty)$ صعودی اکید و در تمام دامنه خود، نه صعودی و نه نزولی می باشد. به نمودار توجه کنید:



www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

درس دوم: ترکیب توابع:

۱) دو تابع $f(x) = \sqrt{x-۴}$ و $g(x) = \frac{۱}{x^۲-۱}$ را در نظر بگیرید، دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید. (نظام جدید – خرداد ۹۸)

۲) در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. (نظام جدید – دی ۹۷)

تابع $h(x) = (۲x^۲ - ۵x + ۱)^۳$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x) = ۲x^۲ - ۵x + ۱$ و $g(x) = \ldots\ldots$ است.

۳) توابع $f(x) = \frac{x+۳}{۲x}$ و $g(x) = ۳x - ۱$ را در نظر بگیرید. دامنه fog را با استفاده از تعریف به دست آورید. (نظام جدید – دی ۹۷)

۴) توابع $f(x) = \frac{x}{x-۳}$ و $g(x) = ۲ - x$ داده شده اند. (نظام قدیم – خرداد ۹۷)

الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) ضابطه تابع fog را بنویسید.

۵) اگر $f(x) = x$ و $g(x) = \sqrt{x^۲ + ۳}$ باشد، حاصل $(gof)(x) - (fog)(x)$ را حساب کنید. (نظام قدیم – خرداد ۹۶)

۶) دو تابع $f(x) = \sqrt{۱ - x}$, $g(x) = \sqrt{x - ۱}$ را در نظر بگیرید. دامنه gof را با استفاده از تعریف به دست آورید. (نظام قدیم – خرداد ۹۵)

۷) توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$ داده شده اند. (نظام قدیم – خرداد ۹۴)

الف) دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) تابع gof را تشکیل دهید.

۸) توابع $f(x) = \frac{۳x}{x-۱}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ داده شده اند. (نظام قدیم – خرداد ۹۳)

الف) تابع fog را تشکیل دهید. ب) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۹) توابع f و g با ضابطه های $f(x) = ۲x - ۴$ و $g(x) = \sqrt{x - ۶}$ داده شده اند. (نظام قدیم – خرداد ۹۲)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

الف) ضابطه تابع gof

ب) دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۱۰) اگر $f(x)=\frac{x}{1+x}$ و $f\big(g(x)\big)=\frac{1}{x}$ ضابطه $g(x)$ را به دست آورید. (نظام قدیم – خرداد ۸۷)

۱۱) اگر $f(x)=2x^2-2$ و $f\big(g(x)\big)=2x^2+4x$ باشد، تابع $g(x)$ را محاسبه کنید. (نظام قدیم – شهریور ۸۹)

۱۲) اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=ax^2+bx+c$ باشند، a، b و c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $(fog)(x)=x^2-3x+4$ (نظام قدیم – شهریور ۸۸)

۱۳) اگر $f(x)=2x+1$ و $g(x)=3x+k$ مقدار k را طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $fog(x)=gof(x)$ (نظام قدیم – شهریور ۸۷)

۱۴) اگر $f(x)=4x-1$ و $g(x)=2x+k$ باشد، مقدار k را طوری بیابید که داشته باشیم: $(gof)(x)=8x+10$ (نظام قدیم – دی ۹۵)

۱۵) دو تابع $f(x)=\frac{x-1}{x}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ داده شده اند. (نظام قدیم – دی ۹۴)

الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف محاسبه کنید.

ب) ضابطه تابع fog را تشکیل دهید.

۱۶) دو تابع $f(x)=\sqrt{x+3}$ و $g(x)=4-x$ مفروض اند. (نظام قدیم – دی ۹۱)

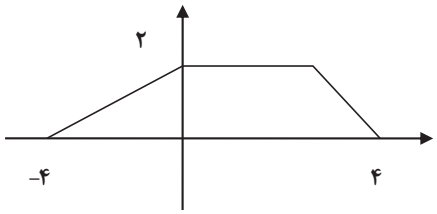
الف) ضابطه تابع مرکب fog را بنویسید. ب) دامنه تابع مرکب fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ج) مقدار $\frac{3g(0)-f(6)}{3}$ را محاسبه کنید.

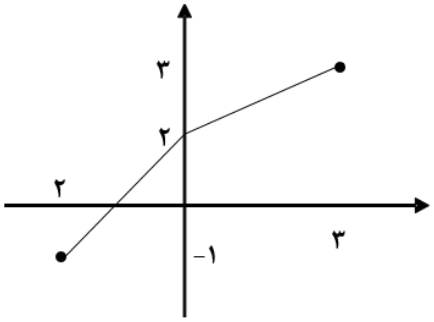
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۷) اگر $(fog)(x) = ۸x + ۱۲$ و $f(x) = ۲x + ۴$ باشند، تابع $g(x)$ را تعیین کنید. (نظام قدیم – دی ۹۰)

۱۸) با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ نمودار $y = \frac{۱}{۲}f(۴x)$ را رسم کنید. (نظام جدید – خرداد ۹۸)

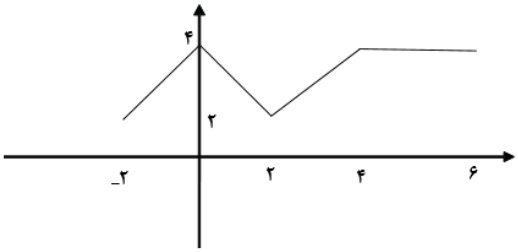


۱۹) با استفاده از نمودار تابع f، نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{۲}\right) - ۲$ را رسم کنید. (نظام جدید – دی ۹۷)



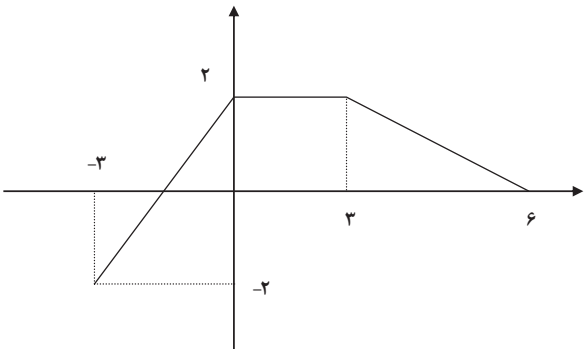
۲۰) با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر، نمودار تابع $y = -f(x + ۱) + ۲$ را رسم کنید.

(هماهنگ استانی – مستمر – ایلام – ۹۸)



۲۱) شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ است. تابع $g(x) = -f(۳x) + ۱$ را رسم کنید.

(مستمر منطقه ۱۹ تهران – ۹۸)



www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ سوالات درس دوم: ترکیب توابع:

۱)

$D_f: x-۴ \geq ۰ \rightarrow x \geq ۴ \quad , \quad D_g: x^۲-۱=۰ \rightarrow x^۲=۱ \rightarrow x \pm ۱ \rightarrow$

$D_g: R-\{\pm ۱\} \rightarrow D_{gof}: \{x \epsilon D_f | f(x) \epsilon D_g\} = \{x \geq ۴ | \sqrt{x-۴} \neq \pm ۱\}$

توجه : $\sqrt{x-۴} \neq \pm ۱ \rightarrow x-۴ \neq ۱ \rightarrow x \neq ۵ \rightarrow D_{gof}: [۴,۵) \cup (۵,+\infty)$

۲) باید ببینیم داخل پرانتز که همان $f(x)$ می باشد، تحت چه قانونی $h(x)$ را نتیجه می دهد، همانطور که مشاهده می کنیم به توان ۳ رسیدن f، تابع h را نتیجه می دهد. پس $g(x)=x^۳$

۳)

$D_f: ۲x=۰ \rightarrow x=۰ \rightarrow D_f: R-\{۰\}: D_g: R$

$D_{fog} = \{x \epsilon D_g | g(x) \epsilon D_f\} = \{x \epsilon R | ۳x-۱ \neq ۰\} = R - \left\{\frac{۱}{۳}\right\}$

توجه : $۳x-۱ \neq ۰ \rightarrow ۳x \neq ۱ \rightarrow x \neq \frac{۱}{۳}$

۴) الف)

$D_f: x-۳=۰ \rightarrow x=۳ \rightarrow D_f: R-\{۳\}, D_g: R$

$D_{fog} = \{x \epsilon D_g | g(x) \epsilon D_f\} = \{x \epsilon R | ۲-x \neq ۳\} = R-\{-۱\}$

توجه : $۲-x \neq ۳ \rightarrow -x \neq ۱ \rightarrow x \neq -۱$

ب) $(fog)(x) = f(g(x)) = f(۲-x) = \frac{۲-x}{۲-x-۳} = \frac{۲-x}{-x-۱}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵)

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x^۲ + ۳}\big) = \sqrt{x^۲ + ۳}$$

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x) = \sqrt{x^۲ + ۳} \rightarrow$$

$$gof(x) - fog(x) = \sqrt{x^۲ + ۳} - \sqrt{x^۲ + ۳} = ۰$$

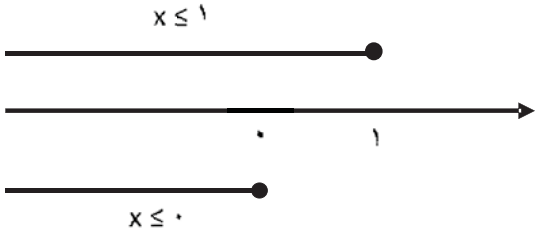
۶)

$$D_f: ۱ - x \geq ۰ \rightarrow -x \geq -۱ \rightarrow x \leq ۱ \quad D_g: x - ۱ \geq ۰ \rightarrow x \geq ۱$$

$$D_{gof}: \{x \epsilon D_f | f(x) \epsilon D_g\} = \{x \leq ۱ | \sqrt{۱ - x} \geq ۱\} = (-\infty, ۰]$$

توجه : $\sqrt{۱ - x} \geq ۱ \overset{\text{توان ۲}}{\Longrightarrow} ۱ - x \geq ۱ \rightarrow -x \geq ۰ \rightarrow x \leq ۰$

اشتراک دو نیم خط پاسخ است.



۷)

الف) $D_f: R \quad , \quad D_g: ۱ - x^۲ \geq ۰ \rightarrow -x^۲ \geq -۱ \rightarrow x^۲ \leq ۱ \overset{\text{جذر}}{\Rightarrow} |x| \leq ۱$

$$\rightarrow -۱ \leq x \leq ۱ \rightarrow D_g: [-۱,۱]$$

توجه: دامنه g را از راه تعیین علامت هم می توان تعیین نمود.

$$D_{gof}: \{x \epsilon D_f | f(x) \epsilon D_g\} = \left\{ x \epsilon R \middle| \underbrace{sinx \epsilon [-۱,۱]}_{\text{همیشه برقرار}} \right\} = R$$

ب) $gof(x) = g\big(f(x)\big) = g(sinx) = \sqrt{۱ - sin^۲x} = \sqrt{cos^۲x} = |cosx|$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

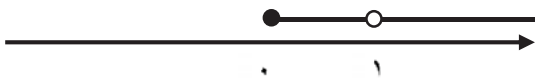
۸)

الف) $fog(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x}\big) = \frac{۳\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}$

ب) $D_f: x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \rightarrow D_f: R - \{۱\}\ ,\ D_g: x \geq ۰$

$D_{fog}: \big\{x \epsilon D_g \big| g(x) \epsilon D_f\big\} = \big\{x \geq ۰ \big| \sqrt{x} \epsilon R - \{۱\}\big\} = [۰,۱) \cup (۱,+\infty)$

توجه : $\sqrt{x} \neq ۱ \rightarrow x \neq ۱$



۹)

الف) $gof(x) = g\big(f(x)\big) = g(۲x - ۴) = \sqrt{۲x - ۴ - ۶} = \sqrt{۲x - ۱۰}$

ب) $D_f: R\ ,\ D_g: x - ۶ \geq ۰ \rightarrow x \geq ۶$

$D_{gof}: \big\{x \epsilon D_f \big| f(x) \epsilon D_g\big\} = \{x \epsilon R\ |۲x - ۴ \geq ۶\} = [۵,+\infty)$

توجه : $۲x - ۴ \geq ۶ \rightarrow ۲x \geq ۱۰ \rightarrow x \geq ۵$

۱۰)

$f\big(g(x)\big) = \frac{۱}{x}$

$$\rightarrow \frac{g(x)}{۱+g(x)} = \frac{۱}{x} \rightarrow xg(x) = ۱ + g(x) \rightarrow$$

$f\big(g(x)\big) = \frac{g(x)}{۱+g(x)}$

$xg(x) - g(x) = ۱ \rightarrow g(x)(x - ۱) = ۱ \rightarrow g(x) = \frac{۱}{x-۱}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۱

$$\begin{matrix} f\big(g(x)\big) = ۲x^۲ + ۴x \\ f\big(g(x)\big) = ۲g(x)^۲ - ۲ \end{matrix} \rightarrow ۲g(x)^۲ - ۲ = ۲x^۲ + ۴x \rightarrow ۲g(x)^۲ = ۲x^۲ + ۴x + ۲$$

$$\rightarrow g(x)^۲ = x^۲ + ۲x + ۱ \rightarrow g(x)^۲ = (x+۱)^۲ \overset{\text{جذر}}{\Rightarrow}$$

$$g(x) = |x + ۱|$$

(۱۲

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(ax^۲ + bx + c) = ax^۲ + bx + c + a$$

از طرفی : $(fog)(x) = x^۲ - ۳x + ۴$

$$\rightarrow ax^۲ + bx + c + a = x^۲ - ۳x + ۴ \rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = -۳ \\ c + a = ۴ \rightarrow c = ۳ \end{cases}$$

(۱۳

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(۳x + k) = ۲(۳x + k) + ۱ = ۶x + ۲k + ۱$$

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(۲x + ۱) = ۳(۲x + ۱) + k = ۶x + ۳ + k$$

$$\rightarrow ۶x + ۲k + ۱ = ۶x + ۳ + k \rightarrow k = ۲$$

(۱۴

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(۴x - ۱) = ۲(۴x - ۱) + k = ۸x - ۲ + k$$

$$\rightarrow ۸x - ۲ + k = ۸x + ۱۰ \rightarrow -۲ + k = ۱۰ \rightarrow k = ۱۲$$

(۱۵

الف) $D_f: x = ۰ \rightarrow D_f: R - \{۰\}, D_g: x - ۱ \geq ۰ \rightarrow x \geq ۱$

$$D_{fog} = \{x \epsilon D_g | g(x) \epsilon D_f\} = \left\{x \geq ۱ \middle| \sqrt{x-۱} \varepsilon R - \{۰\}\right\} = (۱, +\infty)$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

توجه : $\sqrt{x-۱} \neq ۰ \rightarrow x-۱ \neq ۰ \rightarrow x \neq ۱$

بنابراین در قسمت اول دامنه ($x \geq ۱$) علامت تساوی را بر می داریم.

ب) $(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x-۱}\big) = \frac{\sqrt{x-۱}-۱}{\sqrt{x-۱}}$

(۱۶

الف) $(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(۴-x) = \sqrt{۴-x+۳} = \sqrt{۷-x}$

ب) $D_f: x+۳ \geq ۰ \rightarrow x \geq -۳ \qquad D_g: R$

$D_{fog} = \{x \epsilon D_g | g(x) \epsilon D_f\} = \{x \epsilon R \,|\, ۴-x \geq -۳\} = (-\infty, ۷]$

توجه : $۴-x \geq -۳ \rightarrow -x \geq -۷ \rightarrow x \leq ۷ \cap x \epsilon R \rightarrow (-\infty, ۷]$

ج) $\frac{۳g(۰)-f(۶)}{۳} = \frac{۳\times۴-۳}{۳} = \frac{۹}{۳} = ۳$

(۱۷

$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = ۲g(x)+۴$

$$\rightarrow ۲g(x)+۴ = ۸x+۱۲ \rightarrow ۲g(x) = ۸x+۸ \rightarrow g(x) = ۴x+۴$$

۱۸) تذکر ۱: تغییرات درون پرانتز متعلق به x می باشد بنابراین برای یافتن نقاط نظیر، باید ببینیم درون پرانتز در صورت انجام چه عملیاتی، x به دست می آید سپس همان عملیات را روی طول نقاط مشخص در شکل انجام دهیم.

درون پرانتز : $۴x \overset{\div ۴}{\Rightarrow} x$

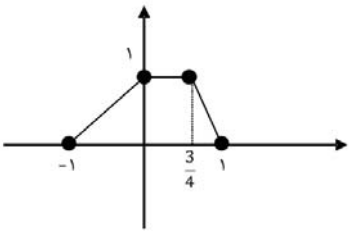
بنابراین طول نقاط مشخص در شکل باید به ۴ تقسیم شوند.

تذکر ۲: تغییرات قبل از $f(\dots)$ و بعد از آن متعلق به y می باشد بنابراین برای یافتن نقاط نظیر باید تغییرات را ملاحظه کرده و دقیقاً همان ها را روی نقاط مشخص در شکل انجام دهیم.

قبل از $f(\dots)$: $\frac{۱}{۲}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

بنابراین عرض نقاط مشخص را باید در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنیم.



۱۹) با توجه به تذکرهای سوال ۱۸:

$\frac{x}{۲} \xrightarrow{\times ۲} x$: درون پرانتز

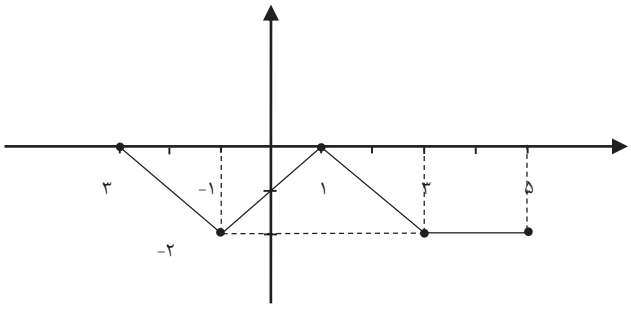
۲- : بعد از f(...)

بنابراین در نقاط مشخص باید xها را در ۲ ضرب و yها را ۲- کنیم

۲۰) $x + ۱ \xrightarrow{-۱} x$: درون پرانتز

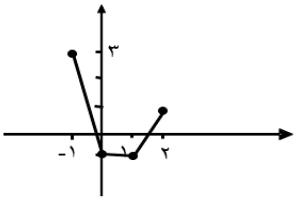
۲+ بعد از f و - : قبل از f

بنابراین در نقاط مشخص باید xها را منهای یک و yها را در یک منفی ضرب و با ۲ جمع کنیم.



۲۱) $۳X \xrightarrow{\div ۳} x$: درون پرانتز , ۱+ بعد از f و - : قبل از f

بنابراین درنقاط مشخص باید xها رابه ۳تقسیم کنیم وy هارادریک منفی ضرب وبا۱جمع کنیم



www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

درس سوم: تابع وارون:

۱) درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید. (نظام جدید – خرداد ۹۸)

دو تابع $f(x) = -\frac{۲x+۶}{۷}$, $g(x) = -\frac{۷}{۲}x - ۳$ وارون یکدیگرند. (درست، نادرست)

۲) اگر $f(x) = \frac{۱}{۸}x - ۳$ و $g(x) = x^۳$ باشد، مقدار $g^{-۱}of^{-۱}(۵)$ را به دست آورید. (نظام جدید – دی ۹۷)

۳) اگر ضابطه تابع f به صورت $f(x) = x^۲ - ۶x + ۷ \ , \ x \leq ۳$ باشد، ضابطه وارون تابع f را به دست آورید. (مستمر استانی – خوزستان – ۹۸)

۴) ضابطه وارون تابع $f(x) = ۳ - \sqrt{x + ۱}$ را به دست آورید. (مستمر استانی – گیلان ۹۸)

۵) اگر $f = \{(۵ \ , \ ۲) \ , \ (۸ \ , \ ۳) \ , \ (۱ \ , \ ۴) \ , \ (۳ \ , \ ۶)\}$ و $g(x) = \sqrt{۵x + ۹}$ دو تابع باشند، مقدار $(gof^{-۱})(۳)$ برابر ..... می شود. (مستمر استانی – همدان – ۹۸)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ سوالات درس سوم: تابع وارون:

۱) درست:

$$f(x)=-\frac{۲x+۶}{۷}\Rightarrow y=-\frac{۲x+۶}{۷}\Rightarrow ۷y=-۲x-۶\Rightarrow x=-\frac{۷}{۲}y-۳$$

$$\Rightarrow \mathrm{f}^{-۱}(\mathrm{x})=\frac{-۷}{۲}x-۳=g(x)$$

۲)

$$f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳\Rightarrow y=\frac{۱}{۸}x-۳\Rightarrow ۸y=x-۲۴\Rightarrow x=۸y+۲۴$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=۸x+۲۴\Rightarrow f^{-۱}\left(۵\right)=۸\times ۵+۲۴=۶۴$$

$$g(x)=x^{۳}\Rightarrow y=x^{۳}\Rightarrow x=\sqrt[۳]{y}\Rightarrow g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$$

$$\left(g^{-۱}\mathrm{of}^{-۱}\right)\left(۵\right)=\mathrm{g}^{-۱}\left(\mathrm{f}^{-۱}\left(۵\right)\right)=\mathrm{g}^{-۱}\left(۶۴\right)=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$$

۳)

$$f(x)=x^{۲}-۶x+۷\Rightarrow y=x^{۲}-۶x+۷$$

$$-۶\xrightarrow{\div ۲}-۳\xrightarrow{\text{به توان }۲}۹\qquad\Rightarrow \mathrm{y}=\underline{x^{۲}-۶x}+۷+\underline{۹}-۹\Rightarrow$$

$$y=\left(x-۳\right)^{۲}-۲\Rightarrow\left(x-۳\right)^{۲}=y+۲\Rightarrow x-۳=\pm\sqrt{y+۲}\overset{x<۳}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow x=-\sqrt{y+۲}+۳\Rightarrow f^{-۱}(x)=۳-\sqrt{X+۲}$$

۴)

$$y=۳-\sqrt{x+۱}\Rightarrow\sqrt{x+۱}=۳-y\overset{\text{توان }۲}{\Longrightarrow}x+۱=\left(۳-y\right)^{۲}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\left(۳-y\right)^{۲}-۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=\left(۳-x\right)^{۲}-۱$$

۵)

$$g\left(f^{-۱}\left(۳\right)\right)=g\left(۸\right)=\sqrt{۴۹}=۷$$

توجه: $f^{-۱}$: {(۳ و ۶) و (۱ و ۴) و (۸ و ۳) و (۵ و ۲)}

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن‌ها صعودی، نزولی یا ثابت است مشخص کنید.

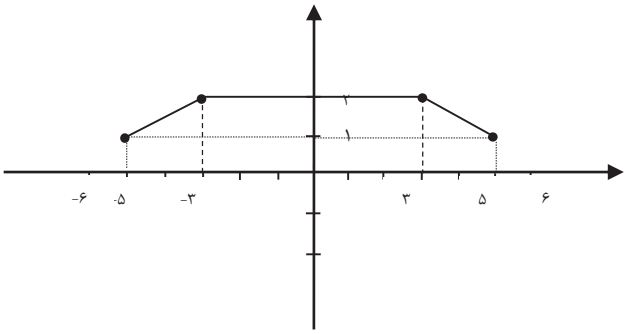
$$f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & x<-۴\\ ۳ & -۴\le x<۲\\ ۳x-۲ & x\ge ۲\end{cases}$$

۲) تابع $f(x)$ با دامنه‌ی [۵ و ۱-) را در نظر بگیرید دامنه تابع $y=-\frac{۱}{۳}f\left(x-۱\right)+۳$ را محاسبه کنید.

۳) تابع f(x) با برد (۴+ و ۲-] را در نظر بگیرید برد تابع $y=-\frac{۱}{۲}f\left(۲x\right)+۱$ برابر است با .....

۴) اگر تابع $f(x)=x^{۲}+۸x-۳$ در بازه (∞ +و k] اکیداً صعودی باشد حداکثر مقدار k را بیابید.

۵) اگر نمودار fبه صورت زیر باشد دامنه $g(x)=-f\left(۲x+۱\right)$ را محاسبه و نمودار آن را رسم کنید.



۶) نمودار تابعی را رسم کنید که در بازه‌ی [۲ و ∞-) اکیداً صعودی، در بازه [۵ و ۲] ثابت و در بازه‌ی (∞ + و ۵] اکیداً نزولی باشد.

۷) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) تابع نمایی $y=۲^{x}-۱$ نزولی است. ب) تابع نمایی $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}-۱$ نزولی است.

۸) اگر $(fog)(x)=۱-x$ و $g(x)=۲x+۱$ آنگاه $f(x)$ را محاسبه کنید.

۹) اگر $(fog)(x)=\frac{x+۲}{x-۳}$ و $g(x)=x-۱$ تابع$f(x)$ را بیابید.

۱۰) اگر $f(x)=\cos\sqrt{x+۱}$ و $(fog)(x)=\cos\sqrt{x^{۲}-۱}$ باشد، $g(x)$ را بیابید.

۱۱) هرگاه $f(x)=\frac{x-۱}{x+۲}$ تابع $g(x)$ را چنان بیابید که $(fog)(x)=-f(x)$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲) اگر $f(x)=x+\sqrt{x-1}$ و $g(x)=\begin{cases}x^2+3 & x\geq 0\\ \frac{-x}{3} & x<0\end{cases}$ مطلوبست $(fog)(5)$

۱۳) اگر $f(x)=3x-a$ و $fof(x)=bx-8$ مقادیر a و b را بیابید.

۱۴) اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ باشد دامنه gof را بیابید.

۱۵) هرگاه $f=\{(2,2),(3,4),(4,5)\}$ و $g=\{(3,4),(5,6),(2,0)\}$ باشند، fog را محاسبه کنید.

۱۶) $f=\{(0,2),(3,-\frac{1}{3}),(-2,4),(-1,0),(1,-2)\}$ و $g=\{(2,-3),(-1,0),(\frac{1}{3},3),(0,2)\}$

حاصل fog^{-1} را محاسبه کنید.

۱۷) هرگاه $f(x)=2-\sqrt{x}\ (x\geq 0)$ و $g(x)=2x^1+3$ باشد آنگاه مقدار $(g^{-1}of^{-1})(2)$ را محاسبه کنید.

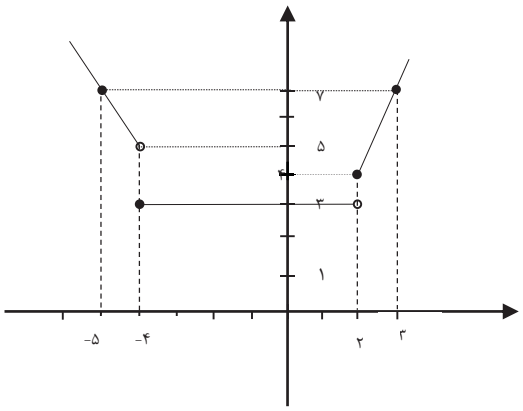
۱۸) هرگاه $f(x)=x+5$ و $g(x)=\sqrt{x-3}\ (x\geq 3)$ مقدار $(gof)^{-1}(3)$ را محاسبه کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱)

$$f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & x<-۴\\ ۳ & -۴\le x<۲\\ ۳x-۲ & x\ge ۲\end{cases}$$



x	-۴	-۵
y	۵	۷

x	-۴	۲
y	۳	۳

x	۲	۳
y	۴	۷

(∞ + و ۲]: صعودی (۲ و ۴-] : ثابت (۴- و ∞-]: نزولی

۲)

$D_f: \left(-۱, ۵\right] \Longrightarrow D_y: (۰,۶]$

بنابراین باید ابتدا و انتهای بازه را با یک جمع کرد. $x-۱ \overset{+۱}{\Rightarrow} x$: درون پرانتز

۳) ابتدا و انتهای بازه را باید در $\frac{۱}{۲}$- ضرب و با یک جمع کرد

$\frac{۱}{۲}$- : قبل از(...) f ۱ + :بعد از(...) f

$\Rightarrow R_{y=(-۱,۲]}$

$$\left[-۲,۴\right) \overset{x-\frac{۱}{۲}}{\Longrightarrow} \left(-۲, ۱\right] \overset{+۱}{\Rightarrow} (-۱,۲]$$

۴) $f(x)$ بنابراین تابع (ضریب $x^۲$) $a=۱>۰$ و چون $f(x)=x^۲+۸x-۳ \Longrightarrow$ راس سهمی $= \frac{-b}{۲a}=\frac{-۸}{۲}=-۴$

مینیمم دارد یعنی به صورت $\bigcup_{-۴}$ رسم می‌شود که در بازه‌ی [۴- و ∞-) اکیداً نزولی و در بازه‌ی (∞ + و ۴-] اکیداً صعودی است. بنابراین k=-۴

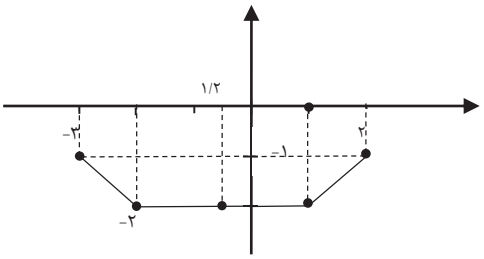
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵)

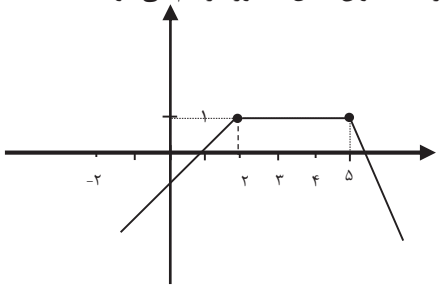
$$\text{درون پرانتز } ۲x+۱ \overset{-۱}{\Rightarrow} ۲x \overset{\div ۲}{\Rightarrow} x$$

بنابراین برای به دست آوردن دامنه ابتدا و انتهای بازه را ۱- و ۲÷ می‌کنیم. برای رسم هم همین کار را روی هر نقطه مشخص انجام می‌دهیم البته yها را هم قرینه می‌کنیم.

$$D_f: [-۵,۵] \Longrightarrow D_y: [-۳,۲]$$



۶) توابع زیادی می‌توان رسم کرد به عنوان مثال ۱ مورد رسم می‌شود.



۷) الف- نادرست در حالت کلی $y = a^x \pm b$ با شرط $a > ۱$ صعودی است..

ب- درست در حالت کلی $y = a^x \pm b$ با شرط $۰ < a < ۱$ نزولی است.

۸)

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(۲x+۱\right)$$

$$(\text{fog})(\text{x}) = ۱ - x \Rightarrow f\left(۲x+۱\right) = ۱ - x$$

در چنین شرایطی نیاز به تغییر متغیر داریم:

$$۲x+۱ = t \Rightarrow ۲x = t - ۱ \Rightarrow x = \frac{t-۱}{۲}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\Rightarrow f(t) = ۱ - \frac{t-۱}{۲} = \frac{۲-t+۱}{۲} \Rightarrow f(t) = \frac{۳-t}{۲} \Rightarrow f(x) = \frac{۳-x}{۲}$$

۹)

$$f\big(g(x)\big) = \frac{x+۲}{x-۳} \Rightarrow f\left(x-۱\right) = \frac{x+۲}{x-۳}$$

$$x-۱ = t \Rightarrow x = t+۱ \Rightarrow f(t) = \frac{t+۱+۲}{t+۱-۳} = \frac{t+۳}{t-۲} \Rightarrow f(\mathrm{x}) = \frac{x+۳}{\mathrm{x}-۲}$$

۱۰)

$$(\mathrm{fog})(\mathrm{x}) = f\big(g(x)\big) = \cos\sqrt{g(x)+۱} \Rightarrow \cos\sqrt{g(x)+۱} = \cos\sqrt{\mathrm{x}^{۲}-۱}$$

$$\Rightarrow \mathrm{g}(x)+۱ = x^{۲}-۱ \Rightarrow g(x) = x^{۲}-۲$$

۱۱)

$$(\mathrm{fog})(\mathrm{x}) = f\big(g(x)\big) = \frac{g(x)-۱}{g(x)+۲} \Rightarrow \frac{g(x)-۱}{g(x)+۲} = -\frac{x-۱}{x+۲} \Rightarrow \frac{g(x)-۱}{g(x)+۲} = \frac{-x+۱}{x+۲}$$

$$xg(x)-x+۲\mathrm{g}(x)-۲ = -xg(x)-۲\mathrm{x}+\mathrm{g}(x)+۲ \Rightarrow ۲xg(x)+\mathrm{g}(\mathrm{x}) = -\mathrm{x}+۴$$

$$g(x)\left(۲x+۱\right) = ۴-x \Rightarrow g(x) = \frac{۴-x}{۲x+۱}$$

۱۲)

$$(gof)\left(۵\right) = g\left(f\left(۵\right)\right) = g\left(۷\right) = ۷^{۲}+۳ = ۵۲$$

۱۳)

$$fof(x) = f\big(f(x)\big) = f\left(۳x-\mathrm{a}\right) = ۳\left(۳x-a\right)-a = ۹x-۳a-a$$

$$= ۹x-۴a \Rightarrow bx-۸ = ۹x-۴a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = ۹ \\ -۴a = -۸ \Rightarrow a = ۲ \end{cases}$$

۱۴)

$$f(x) = \sin x \Rightarrow D_f = R \text{ و}$$

$$g(x) = \sqrt{۱-x^{۲}} \Rightarrow ۱-x^{۲} \geq ۰ \Rightarrow -x^{۲} \geq -۱ \Rightarrow x^{۲} \leq ۱ \Rightarrow |x| \leq ۱ \Longrightarrow$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$-۱ \le x \le ۱ \Rightarrow D_g : [-۱, ۱]$

توجه: از طریق تعیین علامت نیز می‌توان دامنه g را تعیین نمود.

$$D_{gof}: \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in R \ \underbrace{\sin x \in [-۱, ۱]}\} = R$$

۱۵) روش اول: $D_g: \{۳ , ۵ , ۲\}$ $D_f: \{۲ ,۳ ,۴\}$

$$D_{fog}: \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \{۳ , ۵ , ۲\} \mid \{۴ , ۶ , ۰\} \in \{۲ ,۳ ,۴\} = \{۳\}$$

در قسمت دوم فقط عدد ۴ در مجموعه $\{۴ \text{ و } ۳ \text{و } ۲\}$ قرار دارد پس ۶ و صفر حذف می‌شوند اکنون باید ببینیم ۶ و ۰ در مجموعه (g) مربوط به چه اعدادی است آن‌ها را حذف کنیم پس ۲ و ۵ حذف می‌شوند و فقط عدد ۳ می‌ماند:

$$fog(۳) = f(g(۳)) = f(۴) = ۵ \Rightarrow fog = \{(۳, ۵)\}$$

روش دوم: از تابع g شروع می‌کنیم.

$$۳ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{f} ۵ \Longrightarrow (۳, ۵)$$
$$۵ \xrightarrow{g} ۶ \xrightarrow{f} -$$
$$۲ \xrightarrow{g} ۰ \xrightarrow{f} -$$
$$\Rightarrow (fog)(x) = \{(۳, ۵)\}$$

۱۶)

$$f = \{(۰,۲), (۳, -\frac{۱}{۳}), (-۲,۴), (-۱,۰), (۱, -۲)\}$$
$$g^{-۱}: \{(-۳,۲), (۰, -۱), (۳, \frac{۱}{۳}), (۲,۰)\}$$

$fog^{-۱}$ را بخواهیم محاسبه کنیم مثل سوال قبل از دو روش می‌توان آن را محاسبه کرد ولی چون شما روش دوم را می‌پسندید از روش دوم حل می‌کنیم. بنابرین از $g^{-۱}$ باید شروع کنیم:

$$-۳ \xrightarrow{g^{-۱}} ۲ \xrightarrow{f} -$$

$$۰ \xrightarrow{g^{-۱}} -۱ \xrightarrow{f} ۰ \Longrightarrow (۰, ۰) \qquad ۳ \xrightarrow{g^{-۱}} \frac{۱}{۳} \xrightarrow{f} - \qquad ۲ \xrightarrow{g^{-۱}} ۰ \xrightarrow{f} ۲ \Longrightarrow (۲, ۲)$$

$$\Longrightarrow fog^{-۱} = \{(۰,۰), (۲,۲)\}$$

۱۷) $\left(g^{-۱} o f^{-۱}\right)(۲) = g^{-۱}\left(f^{-۱}(۲)\right) = g^{-۱}(۰) = -\frac{۳}{۲}$

$$f(x) = ۲ - \sqrt{x} \Rightarrow y = ۲ - \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = ۲ - y \Rightarrow x = (۲ - y)^۲$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = (۲ - x)^۲ \Rightarrow f^{-۱}(۲) = (۲ - ۲)^۲ = ۰$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$g(x) = ۲x + ۳ \Rightarrow y = ۲x + ۳ \Rightarrow ۲x = y - ۳ \Rightarrow x = \frac{y - ۳}{۲} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(x) = \frac{x - ۳}{۲} \Rightarrow g^{-۱}(۰) = \frac{۰ - ۳}{۲} = \frac{-۳}{۲}$$

(۱۸

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x + ۵) = \sqrt{x + ۵ - ۳} = \sqrt{x + ۲}$$

$$y = \sqrt{x + ۲} \Rightarrow y^{۲} = x + ۲ \Rightarrow x = y^{۲} + ۲ \Rightarrow (gof)^{-۱}(x) = x^{۲} + ۲$$

$$(gof)^{-۱}(x) = ۱۱$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

خود را بیازمائید:

۱) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) هرگاه دامنه $f(x)$ برابر $[-۲, ۳]$ باشد دامنه $g(x) = \frac{۱}{۲} f\left(۲x - ۱\right)$ برابر است با.....

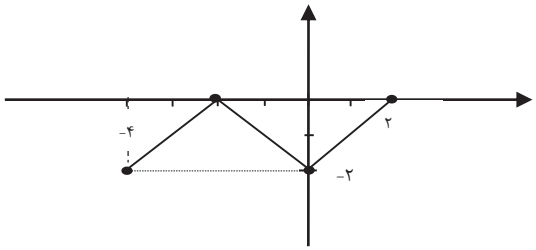
ب) وارون $f(x) = ۲ + \sqrt{x - ۵}$ برابر است با.....

۲) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) توابع اکیداً یکنوا، همواره یکنوا هستند.

ب) اگر $k > ۱$ نمودار $y = f(kx)$ را می‌توان با انبساط نمودار $y = f(x)$ در متداد محور xها به دست آورد.

۳) هرگاه نمودار $f(x)$ به صورت زیر باشد $g(x) = -۲f\left(x - ۱\right)$ را رسم کنید.



۴) هرگاه $f(x) = -۲x - ۳$ و $g(x) = ۵x+۱$ ، معادله‌ی $(fog)(x) = (gof)\left(۱\right)$ را حل کنید.

۵) هرگاه $f(x) = ۳x + a$ و $(fof)(x) = bx - ۳$ باشد مقادیر a و b را بیابید.

۶) الف) تابع $f(x) = \left(۳x^{۲} - ۲x + ۱\right)^{۷}$ از ترکیب دو تابع $g(x)$ و $h(x)$ به دست میآید آن‌ها را بنویسید.

ب) هرگاه $f(x) = \frac{x+۳}{x-۱}$ و $g(x) = \frac{۲x+۳}{x+۲}$ دامنه (fog) را از راه تعریف محاسبه کنید.

۷) الف) نمودار $y = x^{۲} - ۲x$ را رسم کنید و سپس بنویسید در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟

ب) با محدود کردن دامنه از آن تابعی یکنوا بسازید.

۸) هرگاه $f(x) = ۲x + ۱$ و $g(x) = \sqrt{x}$، حاصل $(fog)^{-۱}(۵)$ را محاسبه کنید.

موفق وسربلندباشید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل دوم

مثلثات: (حسابان (۲) و ریاضیات (۳))

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

درس اول: تناوب و تانژانت:

۱) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) دوره تناوب تابع$y=۳\cos(-\frac{\pi}{۴}x)$ برابر با ..... است.(نظام جدید-حسابان خرداد ۹۸)

ب) دوره تناوب تابع $y=\sin ۳x$ برابر با ..... است. (نظام قدیم- حسابان خرداد ۹۸)

۲) الف) درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید (نظام جدید –ریاضی (۳) خرداد ۹۸)

دوره تناوب تابع $y=\tan x$ برابر ۲π است (درست، نادرست)

ب) مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=۱-۲\sin(\frac{-\pi}{۳}x)$ را بدست آورید.

۳) الف) دوره تناوب و مقادیرماکزیمم ومینیمم تابع $y = ۲ - ۳\sin ۴x$ رابه دست آورید(نظام جدید- ریاضی(۳) دی ۹۷)

ب) دامنه تابع $f(x) = \tan(۲x)$ را به دست آورید

۴) درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید(نظام جدید- حسابان خرداد۹۸)

نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in z$ در دامنه تابع تانژانت قرار ندارند.

۵)دوره تناوب، تابع$y = -\tan(\frac{x}{۲})$ را به دست آورید. (مستمر-هماهنگ استانی-خوزستان-۹۸)

۶) دوره تناوب و مقدار ماکسیمم و مینیمم تابع $y = ۲\sin\frac{\pi x}{۲} - \sqrt{۳}$ به ترتیب برابر با ..... و .....و ..... است.(مستمر هماهنگ استانی-کردستان-حسابان(۲)-۹۸)

۷) در تابع $y = a\sin bx + c$ اگر مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب ۶و۴ و دوره تناوب برابر π باشند مقادیر a وb وc را به دست آورید(a وb را مثبت در نظر بگیرید).(مستمر هماهنگ استانی- کردستان-حسابان(۲) -۹۸)

۸) ضابطهٔ تابع سینوسی بنویسید که در آن $t = \frac{\pi}{۳}$ و $max=۴$ و $min=-۶$ باشد.(مستمر هماهنگ استانی- خوزستان-ریاضی (۳)- ۹۸)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ سوالات درس اول: تناوب و تانژانت:

۱)۸ زیرا: $y = a\cos bx + c \qquad T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۴}} = ۸$

ب: زیرا $y = a\sin bx + c \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳}$:

۲) الف) نادرست زیرا: $T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{۱} = \pi$

ب) $y = a\sin bx + c \Rightarrow max = |a| + c\ , min = -|a| + c$

$$y = ۱ - ۲sin\left(\frac{-\pi}{۳}x\right) \Rightarrow max = ۲ + ۱ = ۳, min = -۲ + ۱ = -۱$$

۳) الف): $max = |۳| + ۲ = ۵\ , min = -|۳| + ۲ = -۱$

ب): $D = R - \left\{x \middle| x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}\right\}$ یا $۲x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

۴) درست زیرا: $y = \tan x \Rightarrow D_y = x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$

۵) $y = a\tan bx \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\frac{۱}{۲}} = ۲\pi$

۶) $y = ۲sin\frac{\pi x}{۲} - \sqrt{۳} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}} = ۴, max: ۲ - \sqrt{۳}\ , min: \ -۲ - \sqrt{۳}$

۷) $y = a\sin bx + c \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow b = ۲$

$$max = |a| + c = ۶, min: -|a| + c = ۴ \overset{\text{جمع}}{\Rightarrow} ۲c = ۱۰ \Rightarrow c = ۵$$

$$|a| + c = ۶ \Rightarrow |a| + ۵ = ۶ \Rightarrow |a| = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱ \Rightarrow a = ۱$$

۸)

$$max = ۴ \Rightarrow |a| + c = ۴, min = -۶ \Rightarrow - |a| + c = -۶ \overset{\text{جمع}}{\Rightarrow} ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱$$

$$|a| - ۱ = ۴ \Rightarrow |a| = ۵ \Rightarrow a = \pm ۵, t = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow ۶\pi = \pi|b| \Rightarrow b = \pm ۶$$

بنابراین توابع نظیر $y = ۵sin۶x - ۱$ یا $y = -۵\sin ۶x - ۱$ یا $y = ۵\sin(-۶x) - ۱$ یا $y = -۵\sin(-۶x) - ۱$ قابل قبول است که نوشتن یک مورد کفایت می کند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

درس دوم: معادلات مثلثاتی:

توجه:

سوالات به شماره های ۱۰،۱۳،۱۴،۱۵،۱۶،۲۳،۲۵،۲۶ مخصوص رشته تجربی است. دانش آموزان رشته ریاضی در حسابان (۱) با چنین سوالاتی آشنا شدند اما مطالعه این سوالات خالی از لطف نیست و بهتر است مطالعه شود.

همچنین سوالات به شماره های :۱۸،۱۹،۲۰،۲۱،۲۲ مربوط به حسابان (۲) دانش آموزان رشته ریاضی می باشد.

۱) معادلهٔ مثلثاتی $\sin x - \cos 2x = 0$ را حل کنید.(نظام جدید-ریاضی(۳)- دی ۹۷)

۲) معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$ را حل کرده، جواب های کلی آن را بنویسید.(نظام جدید-ریاضی(۳)- خرداد۹۸)

۳) معادله $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ را حل کنید(نظام جدید-حسابان(۲) خرداد ۹۸)

۴) معادله مثلثاتی $\sin 5x = \sin 2x$ را حل کنید(نظام قدیم-حسابان-خرداد ۹۸)

۵) معادله مثلثاتی $\cos 2x - 2\cos x + 1 = 0$ را حل کنید(نظام قدیم-حسابان-خرداد ۹۷)

۶) معادله $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$ را حل کنید(نظام قدیم-حسابان-خرداد ۹۶)

۷) معادله $2\sin^2 x - \sin x = 0$ را حل کنید.(نظام قدیم-حسابان-خرداد۹۵)

۸) معادله $2\sin^2 x + 9\cos x + 3 = 0$ را حل کنید. (نظام قدیم-حسابان-خرداد ۹۳)

۹) کلیه جواب های معادله $2cos^2 x - \cos x = 0$ را تعیین کنید(نظام قدیم-حسابان-خرداد ۹۱)

۱۰)سینوس زاویه 22.5° را حساب کنید.(نظام قدیم- حسابان-خرداد۹۱)

۱۱)معادله مثلثاتی $sin^2 x - \sin x - 2 = 0$ را حل کنید(نظام قدیم-حسابان-شهریور ۹۷)

۱۲)معادله $sin^2 x = \cos^2 x + 1$ را حل کنید.(نظام قدیم-حسابان-شهریور ۹۷)

۱۳)نشان دهید برای هر زاویه x داریم: $cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ (نظام قدیم-حسابان-شهریور ۹۴)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴)مقدار کسینوس زاویه ۱۵° را حساب کنید(نظام قدیم-حسابان-شهریور ۹۳)

۱۵)اگر x زاویه ای در ربع دوم باشد که $\sin x = \frac{۳}{۵}$ مقدار $\sin ۲x$ را محاسبه کنید.(نظام قدیم-حسابان-دی ۹۵)

۱۶)نشان دهید برای هر زاویه x داریم: $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$ (نظام قدیم-حسابان-دی ۹۲)

۱۷)کلیهٔ جواب های معادله مثلثاتی $cos^۲ x - ۳\cos x + ۲ = ۰$ را تعیین کنید.(نظام قدیم-حسابان-دی ۹۱)

۱۸)تانژانت زاویه ۱۰۵° حساب کنید (نظام قدیم-حسابان-شهریور۹۷)

۱۹)معادله مثلثاتی $\sin x - \cos x = ۱$ را حل کنید(نظام قدیم-حسابان-شهریور۹۲)

۲۰)معادله $\tan x \tan ۲x = ۱$ را حل کنید.(نظام قدیم-حسابان-شهریور۹۰)

۲۱)معادله $\sin x + \cos x = ۱$ را حل کنید(نظام قدیم-حسابان-دی ۹۵)

۲۲)معادله $\tan x - \tan ۲x = ۰$ را حل کنید (نظام قدیم-حسابان-دی ۸۹)

۲۳)درستی برابری مقابل را ثابت کنید(نظام قدیم-ریاضی(۳) خرداد۹۴)

$$\frac{sin ۲x}{۱ + \cos ۲x} = \tan x$$

۲۴)دامنهٔ تابع $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{۳}\right)$ را به دست آورید.(نظام قدیم-ریاضی(۳) خرداد۹۰)

۲۵)درستی تساوی زیر را ثابت کنید(نظام قدیم-ریاضی(۳)- دی ۹۴)

$$cos^۴ x - \sin^۴ x = \cos ۲x$$

۲۶)فرض کنید $\sin x = \frac{۴}{۵}$ و x زاویه ای حاده باشد حاصل $\cos ۲x$ را به دست آورید.(نظام قدیم-ریاضی(۳)- دی۹۳)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ سوالات درس دوم:معادلات مثلثاتی:

۱)

$$sinx - cos۲x = ۰ \Rightarrow sinx - (۱ - ۲sin^۲x) = ۰ \Rightarrow sinx - ۱ + ۲sin^۲x = ۰$$

$$\overset{\text{مرتب}}{\Longrightarrow} ۲\sin^۲x + sinx - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۱ - ۴(۲)(-۱) = ۱ + ۸ = ۹$$

$$\Rightarrow sinx = \frac{-۱ \pm ۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} sinx = \dfrac{-۱ + ۳}{۴} = \dfrac{۲}{۴} = \dfrac{۱}{۲} \\ sinx = \dfrac{-۱ - ۳}{۴} = \dfrac{-۴}{۴} = -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sinx = \frac{۱}{۲} \Rightarrow sinx = sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \\ sinx = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \text{ یا } x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

۲) $cos۲x - sinx + ۱ = ۱ \Rightarrow cos۲x - sinx = ۰ \Rightarrow$

$$۱ - ۲sin^۲x - sinx = ۰ \overset{\text{مرتب}}{\Longrightarrow} -۲sin^۲x - sinx + ۱ = ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱)^۲ - ۴(-۲)(۱) = ۱ + ۸ = ۹$$

$$\Rightarrow sinx = \frac{۱ \pm ۳}{-۴} \Rightarrow \begin{cases} sinx = \dfrac{۱ + ۳}{-۴} = -۱ \\ sinx = \dfrac{۱ - ۳}{-۴} = \dfrac{-۲}{-۴} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \text{ یا } ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳)

$$c۳os۲x + cosx + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲cos^۲x - ۱ + cosx + ۱ = ۰ \Rightarrow$$

$$cosx(۲cosx + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \text{یا} x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ ۲cosx + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\cos x = cos\left(\pi - \frac{\pi}{۳}\right) = cosx = cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$$

۴)

$$sin۵x = sin۲x \Rightarrow \begin{cases} ۵x = ۲k\pi + ۲x \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \\ ۵x = ۲k\pi + \pi - ۲x \Rightarrow ۷x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۷} + \frac{\pi}{۷} \end{cases}$$

۵)

$$cos۲x - ۲cosx + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲cos^۲x - ۱ - ۲cosx + ۱ = ۰ \Rightarrow$$

$$۲cos^۲x - ۲cosx = ۰ \Rightarrow ۲cosx(cosx - ۱) = ۰ \overset{\Rightarrow}{}$$

$$۲cosx = ۰ \Rightarrow cosx = ۰ \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \text{یا} x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$\text{cosx} - ۱ = ۰ \Rightarrow \text{cosx} = ۱ \Rightarrow \text{x} = ۲\text{k}\pi$$

۶)

$$sin۲x - \sqrt{۳}cosx = ۰ \Rightarrow ۲\text{sinxcosx} - \sqrt{۳}\text{cosx} = ۰ \Rightarrow$$

$$cosx\left(۲sinx - \sqrt{۳}\right) = ۰ \Rightarrow$$

$$cosx = ۰ \Rightarrow \text{x} = ۲\text{k}\pi \pm \frac{\pi}{۲} \text{یا} x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$۲sinx - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow ۲\text{sinx} = \sqrt{۳} \Rightarrow \text{sinx} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \text{sinx} = \sin\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \text{x} = ۲\text{k}\pi + \frac{\pi}{۳},\ \text{x} = ۲\text{k}\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \text{x} = ۲\text{k}\pi + \frac{۲\pi}{۳}$$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷)

$$۲sin^{۲}x - sinx = ۰ \Rightarrow sinx(۲sinx - ۱) = ۰ \Rightarrow$$

$$sinx = ۰ \Rightarrow x = kπ$$

$$۲sinx - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲sinx = ۱ \Rightarrow sinx = \frac{۱}{۲} \Rightarrow sinx = sin\frac{π}{۶} \Rightarrow \begin{matrix} x=۲kπ+\frac{π}{۶} \\ x=۲kπ+\frac{۵π}{۶} \end{matrix}$$

۸)

$$۲sin^{۲}x + ۹cosx + ۳ = ۰ \Rightarrow ۲(۱ - cos^{۲}x) + ۹cosx + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲ - ۲cos^{۲}x + ۹cosx + ۳ = ۰ \Rightarrow -۲cos^{۲}x + ۹cosx + ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = b^{۲} - ۴ac = ۸۱ - ۴(۵)(-۲) = ۸۱ + ۴۰ = ۱۲۱$$

$$\Rightarrow cosx = \frac{-۹ \pm ۱۱}{-۴} \Rightarrow \begin{cases} cosx = \frac{-۹ - ۱۱}{-۴} = \frac{-۲۰}{-۴} = ۵ \text{ غ ق ق} \\ cosx = \frac{-۹ + ۱۱}{-۴} = \frac{۲}{-۴} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \\ cosx = cos\left(π - \frac{π}{۳}\right) \Rightarrow cosx = cos\frac{۲π}{۳} \Rightarrow x = ۲kπ \pm \frac{۲π}{۳} \end{cases}$$

۹)

$$۲cos^{۲}x - cosx = ۰ \Rightarrow cosx(۲cosx - ۱) = ۰ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} cosx = ۰ \Rightarrow x = ۲kπ \pm \frac{π}{۲} \text{ یا } x = kπ + \frac{π}{۲} \\ ۲cosx - ۱ = ۰ \Rightarrow cosx = \frac{۱}{۲} \Rightarrow cos\,x = cos\frac{π}{۳} \Rightarrow x = ۲kπ \pm \frac{π}{۳} \end{cases}$$

۱۰)

$$cos۲x = ۱ - ۲sin^{۲}x \Rightarrow cos۴۵ = ۱ - sin^{۲}۲۲.۵ \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱ - ۲sin^{۲}۲۲.۵ \Rightarrow ۲sin^{۲}\,۲۲.۵ = ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲ - \sqrt{۲}}{۲}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\Rightarrow sin^{۲}\ ۲۲.۵ = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow \sin ۲۲.۵ = \pm \frac{\sqrt[۲]{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

منفی قابل قبول نیست زیرا ۲۲.۵ در ناحیه اول واقع می شود و در این ناحیه سینوس مثبت است.

(۱۱

$$sin^{۲}\mathrm{x} - \sin\mathrm{x} - ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱ + ۸ = ۹ \Rightarrow$$

$$sinx = \frac{۱ \pm ۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \sin\mathrm{x} = ۲ \text{ غ ق ق} \\ \sin x = -۱ \Rightarrow \mathrm{x} = ۲\mathrm{k}\pi + \frac{۳\pi}{۲} \text{ یا } x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

(۱۲

$$sin^{۲}\mathrm{x} = \cos^{۲}\mathrm{x} + ۱ \Rightarrow ۱ - \cos^{۲}\mathrm{x} = \cos^{۲}\mathrm{x} + ۱ \Rightarrow ۲\cos^{۲}\mathrm{x} = ۰ \Rightarrow$$

$$cosx = ۰ \Rightarrow \mathrm{x} = ۲\mathrm{k}\pi \pm \frac{\pi}{۲} \text{ یا } x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

(۱۳ $cos۲x = ۲cos^{۲}x - ۱ \Rightarrow ۲\cos^{۲}\mathrm{x} = \cos۲\mathrm{x} + ۱ \Rightarrow \cos^{۲}\mathrm{x} = \frac{\cos۲\mathrm{x}+۱}{۲}$

(۱۴

$$cos۲x = ۲cos^{۲}x - ۱ \Rightarrow \cos۳۰ = ۲\cos^{۲}۱۵ - ۱ \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲cos^{۲}۱۵ - ۱ \Rightarrow ۲\cos^{۲}۱۵ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + ۱ = \frac{\sqrt{۳}+۲}{۲} \Rightarrow$$

$$cos^{۲}۱۵ = \frac{\sqrt{۳}+۲}{۴} \Rightarrow \cos۱۵ = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{۳}+۲}}{۲}$$

منفی قابل قبول نیست چون ۱۵ درجه در ناحیه اول است و در این ناحیه کسینوس مثبت می باشد.

(۱۵

$$cos^{۲}\mathrm{x} = ۱ - \sin^{۲}\mathrm{x} = ۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \cos\mathrm{x} = \pm \frac{۴}{۵}$$

$$\text{ربع دوم} \Rightarrow \cos\mathrm{x} = -\frac{۴}{۵} \Rightarrow \sin۲\mathrm{x} = ۲\sin\mathrm{x}\cos\mathrm{x} = ۲ * \frac{۳}{۵} * \frac{-۴}{۵} = \frac{-۲۴}{۲۵}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۶)

$$cos۲x = cos^۲x - sin^۲x = ۱ - sin^۲x - sin^۲x = ۱ - ۲sin^۲x$$

۱۷)

$$cos^۲x - ۳cosx + ۲ = ۰ \Rightarrow (cosx - ۲)(cosx - ۱) = ۰ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} cosx - ۲ = ۰ \Rightarrow cosx = ۲ \text{ غ ق ق} \\ cosx - ۱ = ۰ \Rightarrow cosx = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi \end{cases}$$

توجه: از راه Δ هم میتوان حل کرد.

۱۸)

$$tan۱۰۵ = \tan(۶۰ + ۴۵) = \frac{tan۶۰ + tan۴۵}{۱ - tan۶۰tan۴۵} = \frac{\sqrt{۳} + ۱}{۱ - \sqrt{۳}}$$

۱۹) روش اول:

$$sinx - cosx = ۱ \Rightarrow sinx = ۱ + cosx \xrightarrow{\text{به توان ۲}} sin^۲x = (۱ + cosx)^۲$$

$$\Rightarrow sin^۲x = ۱ + ۲\,cosx + cos^۲x \Rightarrow ۱ + ۲cosx + cos^۲x = ۱ - cos^۲x$$

$$\Rightarrow ۲cosx + ۲cos^۲x = ۰ \Rightarrow ۲\,cosx(۱ + cosx) = ۰ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ۲cosx = ۰ \Rightarrow cosx = ۰ \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \\ ۱ + cosx = ۰ \Rightarrow cosx = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi \end{cases}$$

روش دوم: از این نکته استفاده میکنیم که $sinx - cosx = \sqrt{۲}\sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$

$$\Rightarrow sinx - cosx = ۱ \Rightarrow \sqrt{۲}\sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = ۱ \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ x - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi \end{cases}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۰)

$$tanxtan۲x = ۱ \Rightarrow \tan x = \frac{۱}{\tan ۲x} \Rightarrow \tan x = \cot ۲x \Rightarrow$$

$$tanx = \tan\left(\frac{\pi}{۲} - ۲x\right) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} - ۲x \Rightarrow ۳x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$$

۲۱)روش اول:

$$sinx + cosx = ۱ \Rightarrow \sin x = ۱ - \cos x \overset{\text{توان ۲}}{\Longrightarrow} sin^۲x = (۱ - cosx)^۲$$

$$\Rightarrow sin^۲x = ۱ - ۲cosx + cos^۲x \Rightarrow ۱ - \cos^۲ x = ۱ - ۲\cos x + \cos^۲ x$$

$$\Rightarrow ۲cos^۲ x - ۲\cos x = ۰ \Rightarrow ۲\cos x(\cos x - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲cosx = ۰ \Rightarrow \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \cos x - ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi \end{cases}$$

توجه: اگر جواب ها در یک بازه خاص مثلا $۰ \le x \le ۲\pi$ بخواهد چون از توان رسانیدن استفاده کردیم باید جواب ها را در معادله اصلی امتحان کنیم.

$$x = \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}$$

$$x = ۲k\pi \overset{k=۱}{\underset{k=۰}{}} x = ۰ , x = ۲\pi$$

هردو قابل قبول.

$$x = \frac{۳\pi}{۲} \left(\text{غ ق ق}\right) \Leftarrow sin\frac{۳\pi}{۲} + cos\frac{۳\pi}{۲} = ۱ \Rightarrow -۱ + ۰ \neq ۱$$

روش دوم: از این نکته استفاده می کنیم که: $sinx + cosx = \sqrt{۲}\sin\left(x + \frac{\pi}{۴}\right)$

$$sinx + cosx = ۱ \Rightarrow \sqrt{۲}\sin\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = ۱ \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi \\ x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۲) $tanx = tan۲x \Rightarrow ۲x = kπ + x = kπ$

۲۳) $\frac{\sin ۲x}{۱+\cos ۲x} = \frac{۲\sin x \cos x}{۱+۲\cos^۲ x-۱} = \frac{۲\sin x \cos x}{۲\cos^۲ x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

۲۴) $f(x) = \tan\left(x + \frac{π}{۳}\right) \Rightarrow D_f: x + \frac{π}{۳} \neq kπ + \frac{π}{۲} \Rightarrow x \neq kπ + \frac{π}{۲} - \frac{π}{۳}$

$$\Rightarrow x \neq kπ + \frac{π}{۶} \text{ یا } D_f: R - \{x | x \epsilon R\ , x = kπ + \frac{π}{۶}\ , k \epsilon z\}$$

۲۵)

$$\cos^۴ x - \sin^۴ x = (\cos^۲ x - \sin^۲ x)\underline{(\cos^۲ x + \sin^۲ x)} = \cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos ۲x$$

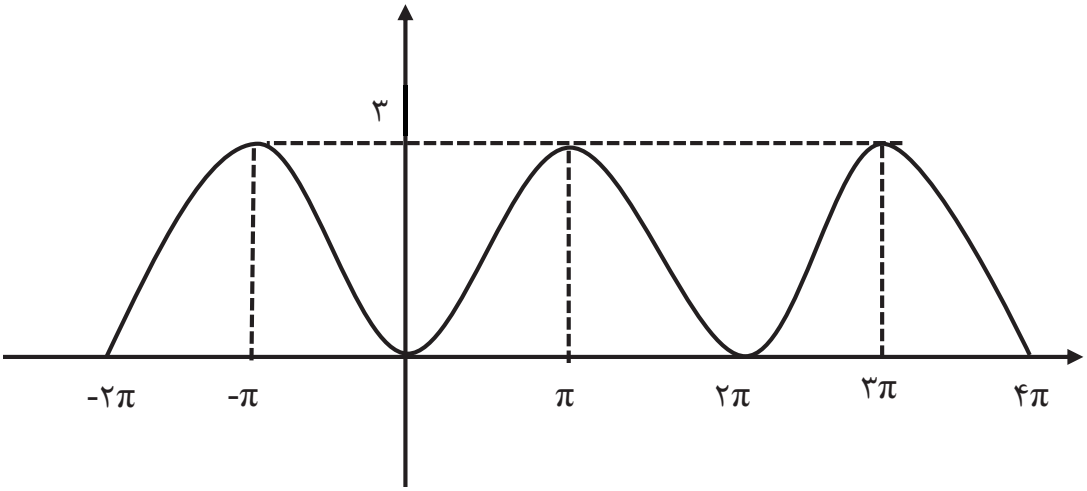
۲۶)

$$\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x = ۱ - ۲\left(\frac{۱۶}{۲۵}\right) = ۱ - \frac{۳۲}{۲۵} = \frac{-۷}{۲۵}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

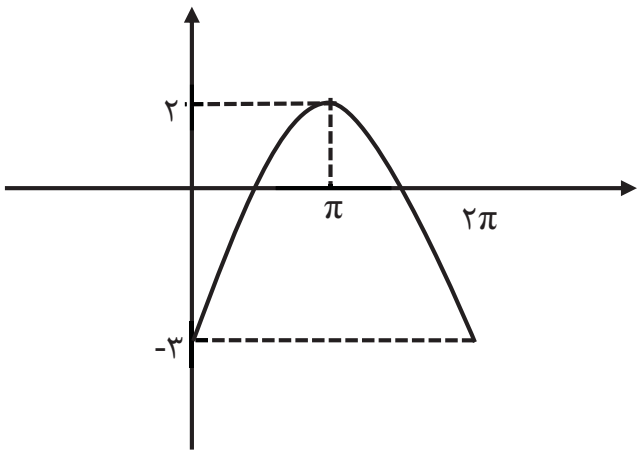
۱) نمودار زیر مربوط به یک تابع مثلثاتی است. با تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.



۲) ضابطه تابع سینوسی بنویسید که در آن: min = -۲، max = ۲ و $T = \pi$. (نوشتن یک مورد کافی است)

۳) اگر $\propto \epsilon \left(۰, \frac{\pi}{۲}\right)$ مقادیر سینوس صعودی است یا نزولی؟

۴) اگر نمودار زیر، نمودار تابع $y = a \cos bx + c$ باشد، مقادیر a و b و c را به دست آورید.



۵) درستی اتحاد $\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}$ را بررسی کنید.

۶) درستی اتحاد $\cos ۲x = \frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$ را بررسی کنید.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۷) درستی اتحاد $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$ را بررسی کنید.

۸) معادله $\sin 2x + \cos x = 0$ را حل کنید و جواب هایی که در بازه $[0 , 2\pi]$ هستند را تعیین کنید.

۹) فرض کنید $\sin \propto = \frac{1}{2} , \propto$ در ربع دوم باشد، مقادیر $\sin 2 \propto$ و $\cos 2 \propto$ را محاسبه کنید.

۱۰) معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کنید.

۱۱) دوره تناوب $y = 2 \sin \frac{m}{3} x + 1$ برابر $\frac{2\pi}{5}$ است، مقدار m را بیابید.

۱۲) معادله $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin x = 0$ را حل کنید.

۱۳) اگر $\tan \propto = \frac{3}{4}$ و $\tan \beta = \frac{5}{6}$ و αو βزاویه هایی در ناحیه اول باشند، حاصل عبارت $\tan(\propto + \beta)$ را به دست آورید. (رشته ریاضی)

۱۴) اگر $\sin \propto = \frac{4}{5}$ و $\propto$ زاویه ای در ناحیه اول باشد، حاصل $\tan 2 \propto$ را به دست آورید. (رشته ریاضی)

۱۵) معادله $\tan 4x \cot 3x = 1$ را حل کنید. (رشته ریاضی)

۱۶) معادله $\tan x + \cot x = 2$ را حل کنید. (رشته ریاضی)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱)

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۲\pi \to b = ۱$$

$$c = \frac{y_{max}+y_{min}}{۲} = \frac{۳+۰}{۲} = \frac{۳}{۲}, |a| = \frac{y_{max}-y_{min}}{۲} = \frac{۳-۰}{۲} = \frac{۳}{۲} \to a = \pm\frac{۳}{۲}$$

$$\to y = a\cos bx + c \to y = -\frac{۳}{۲}\cos x + \frac{۳}{۲}$$

چون نمودار برعکس فرم اصلی cos ( ) است، a را منفی در نظر گرفتیم.

۲)

$$|a| = \frac{۲-(-۲)}{۲} = ۲\,, |c| = \frac{۲+(-۲)}{۲} = ۰\,, T = \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \to |b| = ۲$$

$$y = asinbx + \overset{c}{\Rightarrow} y = ۲sin۲x \text{ یا } y = -۲sin۲x \text{ یا } y = ۲sin(-۲x)$$

یا $y = -۲sin(-۲x)$

۳) در ناحیه اول، مقادیر سینوس صعودی است یا آنکه طبق؛

$\propto$	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$
Sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱

در بازه $۰ <\propto< \frac{\pi}{۲}$ سینوس صعودی است.

۴)

$$c = \frac{y_{max}+y_{min}}{۲} = \frac{۲+(-۳)}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

$$|a| = \frac{y_{max}-y_{min}}{۲} = \frac{۲-(-۳)}{۲} = \frac{۵}{۲}\,, T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۲\pi \to |b| = ۱$$

$$\to a = \pm\frac{۵}{۲}\,, b = \pm۱ \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} a = -\frac{۵}{۲}, b = ۱$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) روش اول:

$$\frac{۲tanx}{۱+tan^۲x}=\frac{\frac{۲sinx}{cosx}}{۱+\frac{sin^۲x}{cos^۲x}}=\frac{\frac{۲sinx}{cosx}}{\frac{cos^۲x+sin^۲x}{cos^۲x}}\xrightarrow{cos^۲x+sin^۲x=۱}$$

$$=\frac{۲sinxcos^۲x}{cosx}=۲sinx\,cosx=sin۲x$$

روش دوم: میدانیم $\frac{۱}{۱+tan^۲x}=cos^۲x$ بنابراین:

$$\frac{۲tanx}{۱+tan^۲x}=۲tanxcos^۲x=۲\times\frac{sinx}{cosx}cos^۲x=۲sinx\,cisx=sin۲x$$

۶) روش اول:

$$\frac{۱-tan^۲x}{۱+tan^۲x}=\frac{۱-\frac{sin^۲x}{cos^۲x}}{۱+\frac{sin^۲x}{cos^۲x}}=\frac{\frac{cos^۲x-sin^۲x}{\cancel{cos^۲x}}}{\frac{cos^۲x+sin^۲x}{\cancel{cos^۲x}}}=\frac{cos^۲x-sin^۲x}{۱}=cos۲x$$

روش دوم: با توجه به آنکه $cos^۲\propto=\frac{۱}{۱+tan^۲\propto}$ داریم:

$$\frac{۱-tan^۲x}{۱+tan^۲x}=cos^۲x(۱-tan^۲x)=cos^۲x\left(۱-\frac{sin^۲x}{cos^۲x}\right)=cos^۲x\left(\frac{\cancel{cos^۲x}-sin^۲x}{\cancel{cos^۲x}}\right)=$$

$$cos۲x$$

۷)

$$(sinx+cosx)^۲=sin^۲x+cos^۲x+۲sinx\,cosx=۱+۲sinx\,cosx=۱+sin۲x$$

۸)

$$sin۲x+cosx=۰\rightarrow ۲sinx\,cosx+cosx=۰\rightarrow$$

$$cosx(۲sinx+۱)=۰\rightarrow\begin{cases}cosx=۰\rightarrow x=۲k\pi\\ ۲sinx+۱=۰\rightarrow ۲sinx=-۱\rightarrow\end{cases}$$

$$sinx=\frac{-۱}{۲}\rightarrow sinx=\sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right)\rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{۶}\right)=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}\end{cases}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جواب های بین صفر و ۲π: $۰, ۲\pi, \frac{۱۱\pi}{۶}, \frac{۷\pi}{۶}$

۹)

$$cos^۲ \propto = ۱ - sin^۲ \propto = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \rightarrow cos \propto = \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\overset{\text{دوم}}{\Rightarrow} cosx = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$sin۲ \propto = ۲sin \propto cos \propto = \cancel{۲} \times \frac{۱}{\cancel{۲}} \times \frac{-\sqrt{۳}}{۲} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$cos۲ \propto = cos^۲ \propto - sin^۲ \propto = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

۱۰)

$$sinx\, cosx = \frac{\sqrt{۲}}{۴} \rightarrow ۲sinx\, cosx = ۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۴} \rightarrow sin۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\rightarrow sin۲x = sin\frac{\pi}{۴} \rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi = \frac{\pi}{۴} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۸} \\ ۲x = ۲k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \rightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۸} \end{cases}$$

۱۱)

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{\left|\frac{m}{۳}\right|} \rightarrow \frac{۲\pi}{\left|\frac{m}{۳}\right|} = \frac{۲\pi}{۵} \rightarrow \left|\frac{m}{۳}\right| = ۵ \rightarrow$$

$$\frac{m}{۳} = \pm ۵ \rightarrow m = \pm ۱۵$$

۱۲)

$$\cos\left(۳x - \frac{\pi}{۶}\right) - sinx = ۰ \rightarrow \cos\left(۳x - \frac{\pi}{۶}\right) = sinx \rightarrow$$

$$\cos\left(۳x - \frac{\pi}{۶}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) \rightarrow ۳x - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi \pm \left(\frac{\pi}{۲} - x\right)$$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\rightarrow \begin{cases} ۳x - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \rightarrow ۴x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶} \\ ۳x - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} + x \rightarrow ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

(۱۳

$$\tan(\propto + \beta) = \frac{tan\propto + tan\beta}{۱ - tan\propto tan\beta} = \frac{\frac{۳}{۴} + \frac{۵}{۶}}{۱ - \frac{۳}{۴} \times \frac{۵}{۶}} = \frac{\frac{۹+۱۰}{۱۲}}{۱ - \frac{۱۵}{۲۴}}$$

$$= \frac{\frac{۱۹}{۱۲}}{\frac{۹}{۲۴}} = \frac{۱۹ \times \cancel{۲۴}^{۲}}{\cancel{۱۲} \times ۹} = \frac{۳۸}{۹}$$

(۱۴

$$cos^{۲} \propto = ۱ - sin^{۲} \propto = ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵} \rightarrow cos \propto = \overset{\text{اول}}{\pm} \frac{۳}{۵} \Rightarrow$$

$$cos \propto = \frac{۳}{۵} \rightarrow tan \propto = \frac{sin\propto}{cos\propto} = \frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۴}{۳}$$

$$tan۲ \propto = \tan(\propto + \propto) = \frac{tan\propto + tan\propto}{۱ - tan\propto tan\propto} = \frac{۲tan\propto}{۱ - tan^{۲}\propto} = \frac{۲ \times \frac{۴}{۳}}{۱ - \frac{۱۶}{۹}} = \frac{\frac{۸}{۳}}{\frac{-۷}{۹}}$$

$$= \frac{۸ \times ۹}{-۷ \times ۳} = \frac{-۲۴}{۷}$$

(۱۵

$$tan۴x cot۳x = ۱ \rightarrow tan۴x = \frac{۱}{cot۳x} \rightarrow tan۴x = tan۳x$$

$$\rightarrow ۴x = k\pi + ۳x \rightarrow x = k\pi$$

(۱۶

$$tanx + cotx = ۲ \rightarrow tanx + \frac{۱}{tanx} = ۲ \rightarrow \frac{tan^{۲}x + ۱}{tanx} = ۲$$

$$\rightarrow tan^{۲}x + ۱ = ۲tanx \rightarrow tan^{۲}x - ۲tanx + ۱ = ۰$$

$$\Delta = (-۲)^{۲} - ۴(۱)(+۱) = ۴ - ۴ = ۰ \rightarrow tanx = \frac{۲ \pm ۰}{۲} = ۱$$

$$tanx = ۱ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

خود را بیازمائید:

۱) دوره تناوب $f(x) = sin۴x + cos\frac{۳}{۴}x + tan\frac{۲x}{۳}$ را محاسبه کنید.

راهنمایی: دوره تناوب هر کدام را جداگانه محاسبه کرده و سپس بین آنها کوچکترین مضرب مشترک بگیرید.

۲) معادله $۲\tan\left(x + \frac{۴\pi}{۳}\right) + ۲ = ۰$ را حل کنید. (رشته ریاضی)

۳) معادله $tan۳x - cotx = ۰$ را حل کنید. (رشته ریاضی)

۴) معادله $۲cos۲x + \sqrt{۳} = ۰$ را حل کنید و مجموعه جواب های واقع در بازه $[۰ , ۲\pi]$ را بیابید.

۵) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = asinbx + c$ به ترتیب $۳ , ۵ , \frac{\pi}{۳}$ می باشند، مقادیر a و b و c را به دست آورید.

۶) اندازه $sin۱۵^{\circ}$ را محاسبه کنید. (رشته تجربی)

۷) اگر آلفا، زاویه ای در ربع سوم باشد، و $sin \propto = \frac{-۴}{۵}$ آنگاه $sin۲ \propto$ را محاسبه کنید. (رشته تجربی)

۸) معادله $cosx + sin۲x = ۰$ را حل کنید و مجموعه جواب های واقع در بازه $[۰ , ۲\pi]$ را بیابید.

۹) نشان دهید $\frac{۱+cosx+cos۲x}{sinx+sin۲x}$ برابر $\cot x$ است.

۱۰) هرگاه دوره تناوب $y = -۲\sin\frac{k}{۳}x$ برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ باشد، مقدار k را حساب کنید.

((موفق و سربلند باشید))

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل سوم

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

حد :(حسابان ۲ و ریاضیات ۳)

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

درس اول: حد بی نهایت – حدهای نامتناهی:

توجه: سوالات ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ مختص دانش‌آموزان رشته ریاضی است.

۱) درست یا نادرست بودن عبارت زیر را تعیین کنید. (نظام جدید – حسابان ۲ – خرداد ۹۸)

حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{x+۱}{۹-x^۲}$ برابر $-\infty$ است.

۲) حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید. (نظام قدیم – حسابان – خرداد ۹۸)

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۱-cosx}}{\sin\frac{x}{۲}}$ (ویرایش شده)

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x+۱}-۲}{x^۲-۹}$

۳) حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. (نظام جدید – ریاضی ۳ – خرداد ۹۸)

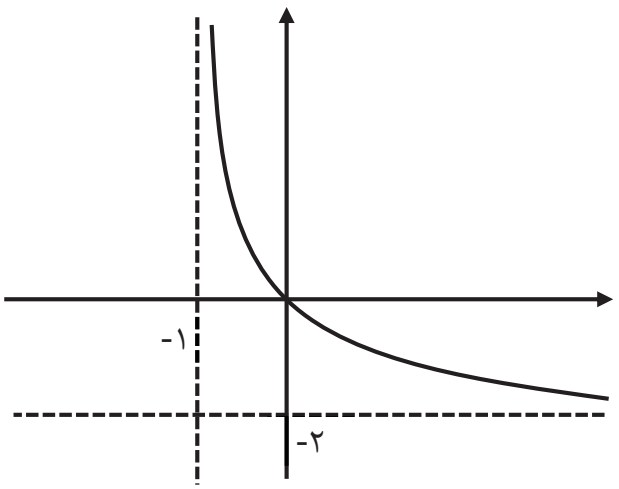
الف) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{[x]}{sinx} =$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{(x-۱)(x+۲)} =$

۴) با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ حدهای خواسته شده را بنویسید. (نظام جدید – ریاضی ۳ – خرداد ۹۸)

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x) =$



۵) حد توابع زیر را به دست آورید. (نظام جدید – ریاضی ۳ – دی ۹۷)

الف) $\lim\limits_{x\to ۳^-} \frac{[x]-۳}{x-۳}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{x^۲-۹}{\sqrt{x+۱}-۲}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۶) هر یک از حدهای زیر را حساب کنید. (نظام قدیم – ریاضی – خرداد ۹۷)

الف) $\lim\limits_{x\to -۱} \frac{x+\sqrt{x+۲}}{x^۲+x}$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^-} \frac{-۱}{(x+۱)^۲}$

۷) هر یک از حدهای زیر را حساب کنید. (نظام قدیم – ریاضی – خرداد ۹۶)

الف) $\lim\limits_{x\to -۱} \frac{۲-\sqrt{۲x+۶}}{x^۳+۱}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{۲}{۱-cosx}$

۸) هر یک از حدهای زیر را حساب کنید. (نظام قدیم – ریاضی – خرداد ۹۵)

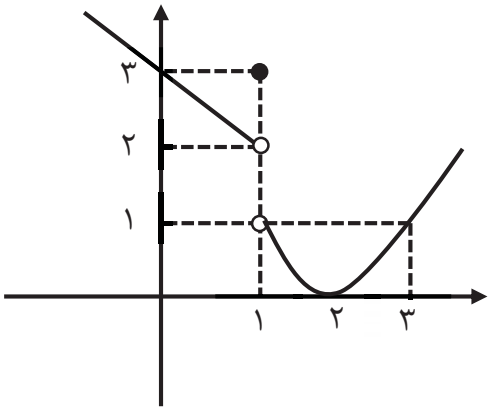
الف) $\lim\limits_{x\to -۲} \frac{\sqrt{x+۶}+x}{x^۲-۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{x-۲}{sinx}$

۹) با استفاده از نمودار زیر، عبارت خواسته شده را (در صورت وجود) محاسبه کنید.

(نظام قدیم – ریاضی – خرداد ۹۴)

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) - \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) + ۲f(۱)$



۱۰) حدهای زیر را محاسبه کنید. (نظام قدیم – ریاضی – خرداد ۹۴)

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۲-\sqrt{x+۳}}{x^۲-۱}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{۲}{cosx}$

۱۱) حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (نظام قدیم – حسابان – خرداد ۹۷ – خرداد ۸۹)

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۲-x}{۱-\sqrt{x-۱}}$

ب) (ویرایش شده) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{[x]+۳}{x^۲-۹}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

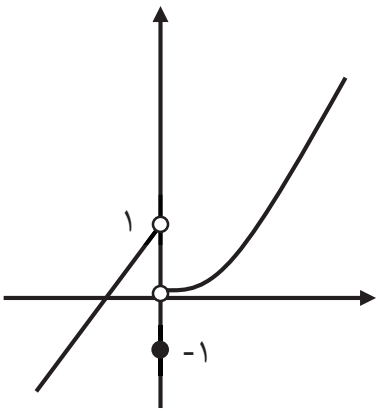
۱۲) در شکل زیر، نمودار تابع f آمده است. مقادیر خواسته شده را بیابید. (نظام قدیم – حسابان – شهریور ۹۶)

الف) $\lim_{x\to ۰^+} f(x) =$

ب) $\lim_{x\to ۰^-} f(x) =$

ج) $f(۰) = ۰$

د) $\lim_{x\to ۰} f(x) =$



۱۳) کدام یک از خطوط $x = -۱$ و $x = ۳$ مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{x^۲-۴x+۳}{x^۲-۲x-۳}$ می‌باشد؟ دلیل ارائه کنید (نظام جدید – حسابان(۲) خرداد ۹۸)

۱۴) نمودار با ضابطه $f(x) = \frac{x+۱}{x^۳+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می‌باشد؟ (کتاب درسی حسابان(۲))

۱۵) مجانب قائم تابع $g(x) = \frac{x^۲+x}{x^۲-x}$ را در صورت وجود بدست آورید (کتاب درسی حسابان (۲))

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ درس اول: حد بی‌نهایت – حدهای نامتناهی:

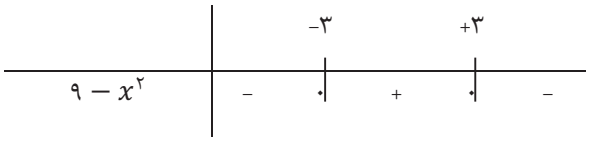
۱) درست زیرا:

روش اول: $\lim\limits_{n\to ۳^+} \frac{x+۱}{۹-x^۲} \frac{۴}{۹-۹^+} = \frac{۴}{۰^-} = -\infty$

چون ۹^+ یکذره از ۹ بزرگتر است پس علامت آن(قبلش) را برای صفر قرار میدهیم.

روش دوم: با استفاده از تعیین علامت، علامت صفر را تشخیص میدهیم.

$$۹-x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = = ۹ \Rightarrow x = \pm ۳ \Rightarrow \lim_{x\to ۳^+} \frac{x+۱}{۹-x^۲} = \frac{۴}{۰^-} = -\infty$$



۲) توجه: از فصل قبل داریم: $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$ بنابراین:

$$\cos x = ۱ - ۲\sin^۲ \frac{x}{۲} \Rightarrow ۲\sin^۲ \frac{x}{۲} = ۱ - \cos x$$

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۱-cosx}}{\sin\frac{x}{۲}} = \lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۲sin^۲\frac{x}{۲}}}{\sin\frac{x}{۲}} = \lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۲}\left|\sin\frac{x}{۲}\right|}{\sin\frac{x}{۲}} = \lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{-\sqrt{۲}\sin\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}} = -\sqrt{۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x+۱}-۲}{x^۲-۹} = \frac{۰}{۰}$ مبهم $\Rightarrow$ رفع ابهام

$$\to \lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x+۱}-۲}{x^۲-۹} \times \frac{\sqrt{x+۱}+۲}{\sqrt{x+۱}+۲} = \lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x+۱}^۲ - ۲^۲}{(x-۳)(x+۳)(\sqrt{x+۱}+۲)} =$$

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x+۱-۴}{(x-۳)(x+۳)(\sqrt{x+۱}+۲)} = \lim_{x\to ۳} \frac{۱}{(x+۳)(\sqrt{x+۱}+۲)} = \frac{۱}{۲۴}$$

۳) آ) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{[x]}{\sin x} = \lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{[۰^-]}{\sin ۰^-} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$

ب) $\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{(x-۱)(x+۲)}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{(x-۱)(x+۲)}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\Rightarrow\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-x}{(x-۱)(x+۲)(x+\sqrt{x})}=$

$\lim_{x\to ۱}\frac{x(x-۱)}{(x-۱)(x+۲)(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to ۱}\frac{x}{(x+۲)(x+\sqrt{x})}=\frac{۱}{۶}$

۴) آ) -۲ ب) $+\infty$

۵) الف) $\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{[x]-۳}{x-۳}=\frac{[۳^{-}]-۳}{۳^{-}-۳}=\frac{۲-۳}{۰^{-}}=\frac{-۱}{۰^{-}}=+\infty$

البته میتوان علامت صفر را از روی تعیین علامت X-۳ هم تشخیص داد.

ب) $\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۹}{\sqrt{x+۱}-۲}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{\sqrt{x+۱}-۲}\times\frac{\sqrt{x+۱}+۲}{\sqrt{x+۱}+۲}=$

$\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)\left(\sqrt{x+۱}+۲\right)}{x+۱-۴}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x+۳)(\sqrt{x+۱}+۲)}{۱}=۲۴$

۶) الف) $\lim_{x\to -۱}\frac{x+\sqrt{x+۲}}{x^{۲}+x}=\frac{۰}{۰}\lim_{x\to ۱}\frac{x+\sqrt{x+۲}}{x^{۲}+x}\times\frac{x-\sqrt{x+۲}}{x-\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^{۲}-x-۲}{x(x+۱)\left(x-\sqrt{x+۲}\right)}$

$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x-۲)(x+۱)}{x(x+۱)\left(x-\sqrt{x+۲}\right)}=\lim_{x\to -۱}\frac{x-۲}{x(x-\sqrt{x+۲})}=\frac{-۳}{۲}$

ب) $\lim_{x\to -۱^{-}}\frac{-۱}{(x+۱)^{۲}}=\frac{-۱}{۰^{+}}=-\infty$

۷)

الف) $\lim_{x\to -۱}\frac{۲-\sqrt{۲x+۶}}{x^{۳}+۱}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow\lim_{x\to -۱}\frac{۲-\sqrt{۲x+۶}}{x^{۳}+۱}\times\frac{۲+\sqrt{۲x+۶}}{۲+\sqrt{۲x+۶}}=\lim_{x\to -۱}\frac{۴-۲x-۶}{(x^{۳}+۱)\left(۲+\sqrt{۲x+۶}\right)}$

$=\lim_{x\to -۱}\frac{-۲(x+۱)}{(x+۱)(x^{۲}-x+۱)(۲+\sqrt{۲x+۶})}=\frac{-۲}{۱۲}=\frac{-۱}{۶}$

ب) $\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۲}{۱-\cos x}=\frac{۲}{۰^{+}}=+\infty$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

توجه: 0^+ در ناحیه اول قرار دارد و در این ناحیه هرچه زاویه بزرگتر شود مقدار cos آن کاهش می‌یابد بنابراین

$$\cos 0^+ = 1^-$$

۸) $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+6}+x}{x^2-4} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+6}+x}{x^2-4} \times \frac{\sqrt{x+6}-x}{\sqrt{x+6}-x} = \lim_{x\to -2} \frac{x+6-x^2}{(x^2-4)(\sqrt{x+6}-x)}$

الف)

$$= \lim_{x\to -2} \frac{-(x^2-x-6)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+6}-x)} = \lim_{x\to -2} \frac{-(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+6}-x)} =$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{-(x-3)}{(x-2)(\sqrt{x+6}-x)} = \frac{-5}{16}$$

ب) $\lim_{x\to 0^-} \frac{x-2}{\sin x} = \frac{0^- -2}{\sin 0^-} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$ (توجه: 0^- درون ناحیه چهارم)

۹) $\lim_{x\to 1^-} f(x) - \lim_{x\to 1^+} f(x) + 2f(1) = 2 - 1 + 2 \times 3 = 7$

۱۰)

الف) $\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} \times \frac{2+\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to 1} \frac{4-x-3}{(x^2-1)(2+\sqrt{x+3})}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)(2+\sqrt{x+3})} = \frac{-1}{8}$$

ب) $\lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{2}{\cos x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$ (ناحیه دوم)

۱۱) الف) $\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{1-\sqrt{x-1}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{1-\sqrt{x-1}} \times \frac{1+\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 2} \frac{(2-x)(1+\sqrt{x-1})}{1-x+1}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(1+\sqrt{x-1})}{1} = 2$$

ب) $\lim_{x\to 3^+} \frac{[x]+3}{x^2-9} = \frac{[3^+]+3}{(3^+)^2-9} = \frac{6}{0^+} = +\infty$

۱۲) حد ندارد (د ۱- (ج ۱ (ب ۰ (الف

۱۳) خط x = -۱ مجانب قائم منحنی است زیرا:

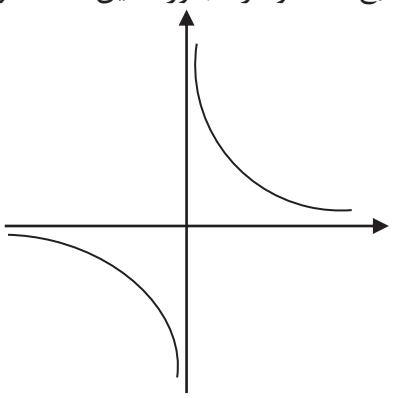
$$\lim_{x\to -۱} \frac{x^۲ - ۴x + ۳}{x^۲ - ۲x - ۳} = \lim_{x\to -۱} \frac{(x-۳)(x-۱)}{(x-۳)(x+۱)} = \frac{-۲}{۰} = \infty$$

ولی: $\lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x-۱)}{(x-۳)(x+۱)} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

۱۴)

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \frac{۱}{۰^+} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۰^-} f(x) = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

بنابراین x=۰ مجانب قائم منحنی تابع است و در مجاورت این خط نمودار تابع به صورت زیر است:



۱۵)

$$x^۲ - x = ۰ \Rightarrow x(x-۱) = ۰ \quad \begin{cases} X=۰ \\ X=۱ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x^۲ + x}{x^۲ - x} = \lim_{x\to ۰} \frac{x(x+۱)}{x(x-۱)} = \frac{۱}{-۱} = -۱ \Rightarrow x = ۰ \text{ مجانب قائم نیست}$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ + x}{x(x-۱)} = \frac{۲}{۰} = \infty \Rightarrow x = ۱ \text{ مجانب قائم است}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

توجه: سوال ۱ مختص رشته تجربی و سوال ۵ مختص رشته ریاضی می‌باشد البته سوال ۱ را بهتر است دانش‌آموزان ریاضی نیز بخوانند.

۱) حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۲} \frac{x-\sqrt{x+۲}}{x^۲+x-۶}$

ب) $\lim_{x\to ۱} \frac{۲x^۲+۳x-۵}{x^۲-۱}$

پ) $\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲-x-۶}{x^۲-۹}$

ت) $\lim_{x\to ۸} \frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{x^۲-۵x-۲۴}$

۲) حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۹^-} \frac{-x+۷}{x^۲-۸۱}$

ب) $\lim_{x\to ۱^-} \frac{x^۲+۱}{x-۱}$

پ) $\lim_{x\to ۳^-} \frac{۳}{(x-۳)^۲}$

ت) $\lim_{x\to ۵^-} \frac{۱+x}{(x-۵)^۴}$

ث) $\lim_{x\to ۲^-} \frac{x+۳}{|x-۲|}$

ج) $\lim_{x\to ۱^-} \frac{۲}{(x-۱)^۳}$

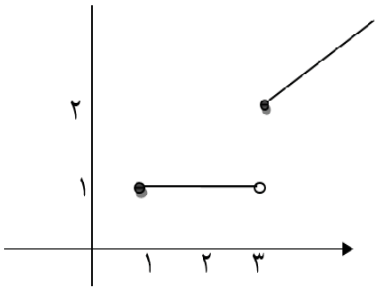
۳)با توجه به نمودار تابع $f(x)$ حاصل عبارات زیر را بنویسید.

الف) $\lim_{x\to ۳^+} f(x) =$

ب) $\lim_{x\to ۱^+} f(x) =$

ج) $\lim_{x\to ۳^-} f(x) =$

د) $f(۳) =$



۴) در صورتیکه $f(x-۳) = \frac{x+۷}{x-۲}$ آنگاه $\lim_{x\to ۱} f(x)$ را حساب کنید.

۵) مجانب قائم $f(x) = \frac{x^۲+x}{x^۲-۳x+۲}$ را محاسبه کنید.

سوال ویژه: اگر $\lim_{x\to ۳} \frac{x}{x^۲+ax+b} = +\infty$ آنگاه $a+b$ را بدست آورید.(از مدرسه تا دانشگاه چاپ ۸۶)

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱)

الف) $\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{x^۲+x-۶}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{x^۲+x-۶}\times\frac{x+\sqrt{x+۲}}{x+\sqrt{x+۲}}=$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-x-۲}{(x^۲+x-۶)\left(x+\sqrt{x+۲}\right)}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۱)}{(x-۲)(x+۳)(x+\sqrt{x+۲})}=\frac{۳}{۲۰}$$

ب) $\lim_{x\to ۱}\frac{۲x^۲+۳x-۵}{x^۲-۱}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \lim_{x\to ۱}\frac{(۲x+۵)(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۷}{۲}$

پ) $\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-x-۶}{x^۲-۹}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۲)}{(x-۳)(x+۳)}=\frac{۵}{۶}$

ت) $\lim_{x\to ۸}\frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{x^۲-۵x-۲۴}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{x^۲-۵x-۲۴}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}\Rightarrow$

$$\lim_{x\to ۸}\frac{(x-۸)}{(x-۸)(x+۳)(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)}=\frac{۱}{۱۳۲}$$

۲)

الف) $\lim_{x\to ۹^-}\frac{-x+۷}{x^۲-۸۱}=\frac{-۲}{۰^-}=+\infty$

(از تعیین علامت $x^۲-۸۱$ هم می‌توان علامت صفر را تشخیص داد)

ب) $\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲+۱}{x-۱}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty$

پ) $\lim_{x\to ۳^-}\frac{۳}{(x-۳)^۲}=\frac{۳}{۰^+}=+\infty$

ت) $\lim_{x\to ۵^-}\frac{۱+x}{(x-۵)^۴}=\frac{۶}{۰^+}=+\infty$

ث) $\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۳}{|x-۲|}=\frac{۵}{۰^+}=+\infty$

ج) $\lim_{x\to ۱^-}\frac{۲}{(x-۱)^۳}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) ۲ (د ۱ (ج ۱ (ب ۲ (الف

۴)

$$x-۳=t \Rightarrow x=۳+t \Rightarrow f(t)=\frac{۳+t+۷}{۳+t-۲}=\frac{۱۰+t}{۱+t}$$

در $f(x-۳)=\frac{x+۷}{x-۲}$ به جای x مقدار مساویش مساویش $t\neq ۳$ را قرار دادیم.

$$\rightarrow f(x)=\frac{۱۰+x}{۱+x} \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x)=\frac{۱۱}{۲}$$

۵)

$$x^۲-۳x+۲=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۲ \text{ و } x=۱$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+x}{x^۲-۳x+۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x(x+۱)}{(x-۱)(x-۲)}=\frac{۶}{۰^{\pm}}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+x}{x^۲-۳x+۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{x(x+۱)}{(x-۱)(x-۲)}=\frac{۲}{۰^{\pm}}=\pm\infty$$

بنابراین $x=۱$ و $x=۲$ هر دو مجانب قائم برای $f(x)$ می‌باشند.

<u>پاسخ سوال ویژه:</u>

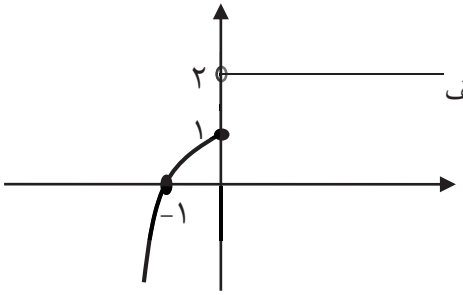
شرط $\lim_{x\to ۳}\frac{x}{x^۲+ax+b}=+\infty$ آن است که مخرج کسر وقتی $x\to ۳$ از مقادیر مثبت به صفر نزدیک شود پس باید: $x^۲+ax+b=(x-۳)^۲$

بنابراین: $x^۲+ax+b=x^۲-۶x+۹ \Rightarrow a=-۶ \text{ و } b=۹ \Rightarrow a+b=۳$

خودرابیازمائید:

توجه: سوال ۴ مختص رشته تجربی و سوال ۵ مختص رشته ریاضی است ولی از آنجائیکه دانش‌آموزان رشته ریاضی در سال قبل با سوال ۴ آشنایی دارند بهتر است این مساله را برای خود حذف نکنند.

۱) با توجه به نمودار تابع f حاصل هریک از حدود زیر را بیابید.



الف) $\lim_{x\to ۰^+} f(x)$ ب) $\lim_{x\to ۰^-} f(x)$

پ) $\lim_{x\to ۰} f(x)$ ت) $f(۰)$

۲) a را طوری بیابید که $\lim_{x\to ۲a} \frac{x-۲a}{x^۲-۴a^۲} = \frac{۱}{۸}$ باشد.

۳) حاصل حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to ۱^-} \frac{۳x+۵}{x^۲-۲x+۱}$

۲) $\lim_{x\to ۲^-} \frac{x-۳}{|x-۲|}$

۳) $\lim_{x\to ۳^+} \frac{۳x+۱}{۳-x}$

۴) $\lim_{x\to ۲^+} \frac{\sqrt{۲x}-۱}{(۲-x)^۲}$

۴) حاصل حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{x^۲-x}$

۲) $\lim_{x\to ۳} \frac{۲x-۶}{\sqrt{۳x}-۳}$

۳) $\lim_{x\to ۱} \frac{۲x^۲-۵x+۳}{۲x-۲}$

۴) $\lim_{x\to -۲} \frac{x^۳+۸}{x^۲+۲x}$

۵) $\lim_{x\to ۳^+} \frac{x-۳}{[x]+[-x]}$

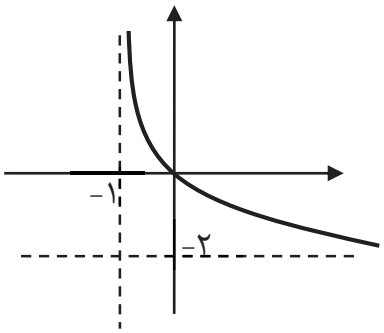
۵) مجانب قائم $f(x) = \frac{x^۲-x}{x^۲-۳x+۲}$ را محاسبه کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

درس دوم: حد در بی‌نهایت:

توجه: سوال ۳ و ۴ مختص رشته ریاضی می‌باشد.

۱) با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.(نظام جدید–ریاضی(۳)– خرداد۹۸)



آ) $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x\to-۱^+} f(x) =$

۲) هریک از حدهای زیر را حساب کنید.

۱) $\lim_{x\to-\infty} \frac{۳x^۲+۷x-۱}{x^۴+۶x^۲}$ (نظام قدیم – ریاضی – خرداد ۹۷)

۲) $\lim_{x\to+\infty} \frac{۳x+۹}{۲x+\sqrt{x^۲}-۲}$ (نظام قدیم – ریاضی – خرداد ۹۶)

۳) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-۶x+\sqrt{x+۱}}{۳x-\sqrt{۴x^۲-۱}}$ (نظام قدیم – ریاضی – خرداد ۹۵)

۴) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{۸x^۳-۲x^۲+۵}{-۲x^۴+۳x-۱}$ (نظام قدیم – ریاضی – خرداد ۹۴)

۵) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{۱۰x^۲+\sqrt{x^۲+x}}{۲x^۳+۱}$ (نظام قدیم – ریاضی – خرداد ۹۳)

۶) $\lim_{X\to+\infty} \frac{۳X^۲+\sqrt{۶X+۲}}{۴X^۲+۵X}$ (نظام قدیم – ریاضی – خرداد ۹۲)

۷) $\lim_{X\to+\infty} \frac{۲X+\sqrt{X+۱}}{۵X+\sqrt{۴X^۲+۱}}$ (نظام قدیم – ریاضی – خرداد ۹۱)

۸) $\lim_{X\to\pm\infty} \frac{(X-۱)(X-۲)(۴-X)}{۲X^۳+۱}$ (نظام قدیم – ریاضی – خرداد ۹۰)

۹) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲-۴x^۳}{-۲x^۳+x}$ (نظام قدیم- ریاضی- شهریور ۹۷)

۱۰) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^۲+\sqrt{x^۲+۱}}{x^۲+x+۲}$ (نظام قدیم- ریاضی- شهریور ۹۵)

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-۳x^۲+\sqrt{x+۲}}{x^۲+۵x-۱}$ (نظام قدیم- ریاضی- شهریور ۹۴)

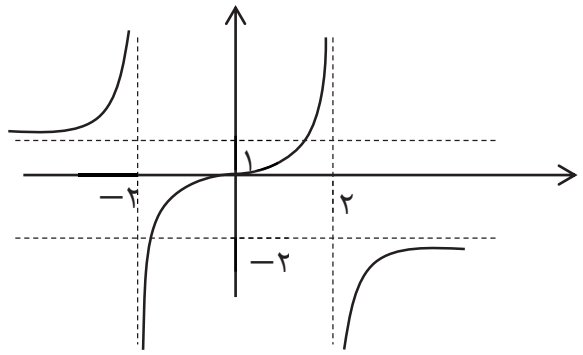
۱۲) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲+۶x-۱}{x^۳+۴x}$ (نظام قدیم- ریاضی- شهریور ۹۳)

۱۳) $\lim_{x\to-\infty} \frac{۶x+۷x^۲}{۳x^۲+x-۴}$ (نظام قدیم- ریاضی- شهریور ۹۲)

۱۴) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲-x+۱+۳x^۴}{۱-x^۴}$ (نظام قدیم- ریاضی- شهریور ۹۱)

۱۵) $\lim_{x\to-\infty} \frac{۳x+\sqrt{x^۲+x+۱}}{۷+۵x}$ (نظام قدیم- ریاضی- شهریور ۹۰)

۳) با توجه به نمودار تابع f که در زیر آمده است مجانب‌های افقی تابع را بنویسید. (نظام جدید- حسابان (۱)- خرداد)



۴) مجانب‌های افقی تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}$ را بدست آورید. (از مدرسه تا دانشگاه- حسابان- چاپ ۸۶)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ درس دوم:حد در بی نهایت:

۱) آ) -۲ ب) $+\infty$

۲)

۱) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۳x^۲}{x^۴}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۳}{x^۲}=۰$

۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x}{۲x+|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x}{۲x+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x}{۳x}=۱$

۳) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-۶x}{۳x-|۲x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-۶x}{۳x-۲x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-۶x}{x}=-۶$

۴) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۸x^۳}{-۲x^۴}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۸}{-۲x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-۴}{x}=۰$

۵) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۱۰x^۲}{۲x^۳}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۵}{x}=۰$

۶) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲}{۴x^۲}=\frac{۳}{۴}$

۷) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x}{۵x+|۲x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x}{۵x+۲x}=\frac{۲x}{۷x}=\frac{۲}{۷}$

۸) $\lim\limits_{X\to\pm\infty}\frac{-X^۳}{۲X^۳}=\frac{-۱}{۲}$

۹) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-۴x^۳}{-۲x^۳}=۲$

۱۰) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-x^۲}{x^۲}=-۱$

۱۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-۳x^۲}{x^۲}=-۳$

۱۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{x^۳}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰$

۱۳) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۷x^۲}{۳x^۲}=\frac{۷}{۳}$

۱۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x^۴}{-x^۴}=-۳$

۱۵) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۳x+|x|}{۵x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۳x-x}{۵x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x}{۵x}=\frac{۲}{۵}$

۳) y=۱، y=-۲

۴)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = ۱$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x} = -۱$$

خط های y=۱ و y=-۱ مجانب های افقی هستند

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

توجه: سوال ۱ مختص رشته ریاضی می باشد.

۱) مجانب افقی $F(X)=\frac{۲X-۳}{x-\sqrt{۴x^۲+۱}}$ را بدست آورید.

۲) حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x^۳-x^۲+۱}{-۲x^۳+x-۲}$

ب) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-۳x^۲+\sqrt{x-۲}}{x^۲+۶x}$

پ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{۸x+۱}{x+\sqrt{x^۲+۱}}$

ت) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{۴x^۲-۱}}{۵-۳x}$

ث) $\lim_{x\to+\infty}\frac{۶x^۲-\sqrt{x-۳}}{۵x^۲-\sqrt{x^۴+۱}}$

ج) $\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+\sqrt{x^۲+x+۵}}{x^۲+\sqrt[۳]{۳x+۱}}$

۳) a وb را طوری بیابید $\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^۳+x^۲+۱}{۶x^b-x}=\frac{-۲}{۳}$ باشد.

۴) در صورتیکه $\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^a-x+۳}{bx^۲-۳x+۱}=\frac{۱}{۲}$ باشد مقادیر a وb را بیابید.

۵) در صورتیکه $\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^a-۳}{x^۳-x+۱}=۰$ باشد a چه مقادیری میتواند باشد.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x}{x-|۲x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x}{x-۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x}{-x} = -۲$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{۲x}{x-|۲x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۲x}{x+۲x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۲x}{۳x} = \frac{۲}{۳}$$

بنابراین $y = -۲$ و $y=\frac{۲}{۳}$ مجانب افقی برای $f(x)$ می باشند.

۲)

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{۴x^۳}{-۲x^۳} = -۲$

ب) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-۳x^۲}{x^۲} = -۳$

پ) $\lim_{x\to+\infty} \frac{۸x}{x+|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۸x}{x+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۸x}{۲x} = ۴$

ت) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+|۲x|}{-۳x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-۲x}{-۳x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{-۳x} = \frac{۱}{۳}$

ث) $\lim_{x\to+\infty} \frac{۶x^۲-\sqrt{x-۳}}{۵x^۲-\sqrt{x^۴+۱}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۶x^۲}{۴x^۲} = \frac{۳}{۲}$

ج) $\lim_{x\to-\infty} \frac{۳x+|x|}{x^۲} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۳x-x}{x^۲} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۲x}{x^۲} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۲}{x} = ۰$

۳) چون پاسخ حد ، یک عدد شده است،بنابراین صورت و مخرج هم درجه اند .بنابراین $b=۳$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^۳}{۶x^۳} = \frac{a}{۶} \to \frac{a}{۶} = \frac{-۲}{۳} \to ۳a = -۱۲ \to a = -۴$$

۴) باید هم درجه باشند ؛پس $a=۲$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۲x^۲}{bx^۲} = \frac{۲}{b} \to \frac{۲}{b} = \frac{۱}{۲} \to b = ۴$$

۵) برای انکه پاسخ حد صفر شود باید درجه صورت از مخرج کوچکتر باشد.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۲x^a}{x^۳} \to a < ۳ \to a = ۰ \text{یا} a = ۱ \text{ یا } a = ۲$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

خود را بیازمائید:

توجه: سوال ۱ و سوال ۲ مختص رشته ریاضی می باشد.

۱) معادلات خطوط مجانب قائم و افقی تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{x}(x+۱)}$ را در صورت وجود بیابید.

۲) *مجانب های افقی تابع* $y = \frac{x+\sqrt{۱-x}}{۲|x|}$ را در صورت وجود پیدا کنید. (به دامنه رادیکال توجه کنید)

۳) حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to-\infty} \frac{۲-\sqrt{x^۲+۳}}{x+۳}$

ب) $\lim_{x\to+\infty} \frac{۴x^۲-\sqrt{x^۴+۳}}{x^۲-۵x}$

ج) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x+۳}}{x^۲}$

د) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^۳-\sqrt{x^۶+۱}}{x^۲-۳x+۱}$

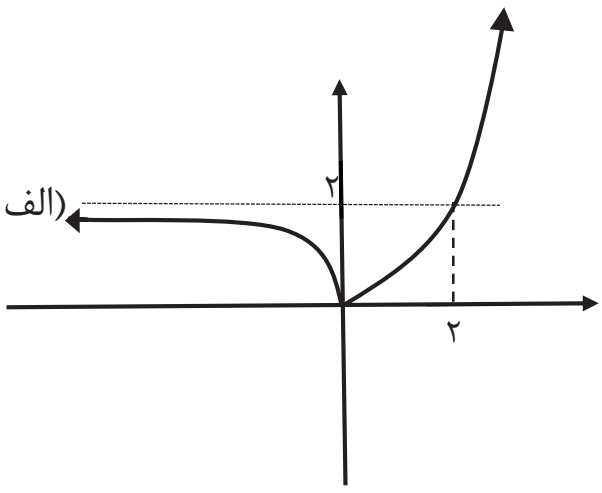
۴) هرگاه $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^۲+x-۱}{۴x^b+۲}=\frac{۳}{۲}$ باشد مقدار ۲a+b را حساب کنید.

۵) با توجه به شکل های زیر عبارتهای خواسته شده را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$$

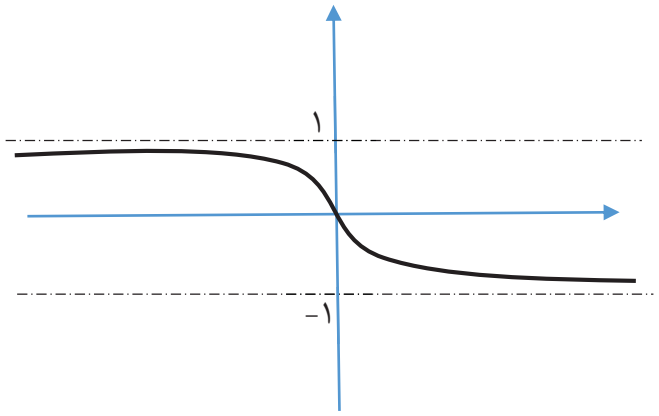
الف)



ب)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$$



موفق و سربلند باشید.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل چهارم

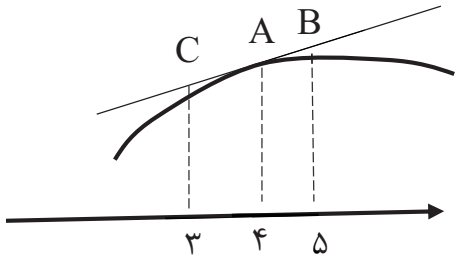
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مشتق: (حسابان (۲) و ریاضی (۳))

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

درس اول:آشنایی با مفهوم مشتق:

۱) برای f در شکل زیر داریم $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۴$ باتوجه به شکل مختصات نقاط A.B.C را بیابید.(نظام جدید-ریاضی (۳)-دی۹۷)



۲) اگر $f(x) = ۱ - ۲x^۲$ باشد. $f'(-۱)$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست اورید(نظام جدید-ریاضی (۳)-دی۹۷)

۳) مشتق تابع $f(x) = x^۳ - ۲$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه ای به طول $x = -۱$ بدست اورید. (نظام جدید-ریاضی (۳)-خرداد۹۸)

۴) با استفاده از تعریف مشتق ،مشتق تابع $f(x) = x^۲ - x$ را درنقطه $x = ۳$ بدست اورید. (نظام قدیم-ریاضی -خرداد۹۷)

۵) با استفاده از تعریف مشتق ،مشتق تابع $f(x) = \frac{x}{x-۱}$ را در نقطه $X = ۲$ به دست آورید. (نظام قدیم-ریاضی (۳)-خرداد۸۹)

۶) با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = x^۲ + ۱$ را در نقطه a محاسبه کنید. (نظام قدیم-حسابان-خرداد۹۸)

۷) با استفاده از تعریف مشتق؛مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه $a > ۰$به دست آورید. نظام قدیم-حسابان-خرداد۹۵)

۸) اگر $f(x) = x^۲ - ۳x + ۲$باشد مقدار $f'(۵)$را به کمک تعریف مشتق به دست آورید.(هماهنگ استانی مستمر۹۸،خوزستان)

۹) با استفاده از تعریف مشتق،مشتق تابع زیر را در نقطه $x=-۱$به دست آورید.(نظام قدیم-ریاضی-شهریور۹۶)

$$F(x) = \frac{۱}{۱ - x}$$

۱۰) شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=x^۳-۲x$ را در نقطه $x=۱$به دست آورید. .(نظام قدیم-ریاضی-شهریور۹۴)

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ درس اول:آشنایی با مفهوم مشتق:

(۱

$$f'(۴) = ۱/۵ \rightarrow \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = ۱/۵ \rightarrow \frac{y_b - ۲۴}{۵ - ۴} \rightarrow ۱/۵ = y_B - ۲۴ \rightarrow y_B = ۲۵/۵$$

$$f'(۴) = ۱/۵ \rightarrow \frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} = ۱/۵ \rightarrow \frac{y_c - ۲۴}{۳ - ۴} = ۱/۵ \rightarrow y_c - ۲۴ = -۱/۵ \rightarrow y_c = ۲۲/۵$$

$$A\Big|_{۲۴}^{۴} \quad ؛ \quad B\Big|_{۲۵/۵}^{۵} \quad ؛ \quad C\Big|_{۲۲/۵}^{۳}$$

(۲

$$f'(-۱) = \lim_{x \to -۱} \frac{f(x) - f(-۱)}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{۱ - ۲x^۲ + ۱}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{۲ - ۲x^۲}{x + ۱}$$
$$= \lim_{x \to -۱} \frac{۲(۱ - x^۲)}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{-۲(x - ۱)(x + ۱)}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \big(-۲(x - ۱)\big) = ۴$$

(۳

$$f'(-۱) = \lim_{x \to -۱} \frac{f(x) - f(-۱)}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^۳ - ۲ + ۳}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^۳ + ۱}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{(x + ۱)(x^۲ - x + ۱)}{x + ۱}$$
$$= ۳$$

(۴

$$f'(۳) = \lim_{x \to ۳} \frac{f(x) - f(۳)}{x - ۳} = \lim_{x \to ۳} \frac{x^۲ - x - ۶}{x - ۳} = \lim_{x \to ۳} \frac{(x - ۳)(x + ۲)}{x - ۳} = ۵$$

(۵

$$f'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{\frac{x}{x - ۱} - ۲}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{\frac{x - ۲x + ۲}{x - ۱}}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{\frac{-(x - ۲)}{x - ۱}}{x - ۲}$$
$$= \lim_{x \to ۲} \frac{-(x - ۲)}{(x - ۲)(x - ۱)}) = \frac{-۱}{۱} = -۱$$

(۶

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^۲ + ۱ - a^۲ - ۱}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^۲ - a^۲}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a}$$
$$= \lim_{x \to a} (x + a) = ۲a$$

(۷

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{۱}{۲\sqrt{a}}$$

۸)

$$f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{f(x)-f(۵)}{x-۵}$$
$$=\lim_{x\to ۵}\frac{x^{۲}-۳x+۲-۱۲}{x-۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{x^{۲}-۳x-۱۰}{x-۵}$$
$$=\lim_{x\to ۵}\frac{(x-۵)(x+۲)}{x-۵}=\lim_{x\to ۵}(x+۲)=۷$$

۹)

$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{\frac{۱}{۱-x}-\frac{۱}{۲}}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{\frac{۲-۱+x}{۲(۱-x)}}{x+۱}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)}{۲(۱-x)(x+۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{۱}{۲(۱-x)}=\frac{۱}{۴}$$

۱۰)

$$M=f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۳}-۲x+۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^{۲}+x-۱)}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}(x^{۲}+x-۱)=۱$$

توجه:۱ $+۲x+۱$ $x^{۳}$ را به روش هورنر میتوان بر $x-۱$ تقسیم نمود تا تجزیه ان را بدست اوریم

$x^{۳}-۳x+۱$	$۱x^{۳}$	$۰x^{۲}$	$-۳x$	۱
$x-۱=۰\to x=۱$	۱	۱	-۱	۰

ضرایب خارج قسمت اعداد ردیف دوم جدول میباشند

وچون میدانیم نتیجه قسمت درجه ۲ می باشدپس: $۱x^{۲}+۱x-۱$

توجه:در درس دوم که با فرمول های مشتق آشنا شدید چنین سوالاتی را می توانید راحت از طریق آنها حل کنید.مگر انکه در صورت سوال قید شده باشد که از راه تعریف حل کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمریناتی بیشتر برای تلاش بیشتر:

۱) تابع fبا ضابطه $\frac{۲}{x}$ را در نظر بگیرید و از راه تعریف مشتق ضابطه مشتق آن را بدست اورید.

۲) مشتق $f(x) = x(x-۱)(x-۲)$ را در $x = ۲$ از راه تعریف مشتق بدست آورید.

۳)مشتق $f(x) = x^{۳} - ۲$ را در نقطه دلخواه a از راه تعریف مشتق محاسبه کنید.

۴) فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق پذیر در نقطه ای مانند aباشد و $g(x) = f(x) + b$ از راه تعریف نشان دهید $g'(a) = f'(a)$

۵) اگر $f'(۱) = f(۱) = ۲$ مقدار $\lim_{x\to ۱} \frac{f^{۲}(x)-f^{۲}(۱)}{x^{۲}-۱}$ را محاسبه کنید.

۶) مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[۳]{x^{۲}}$ را در نقطه دلخواه a از راه تعریف مشتق محاسبه کنید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) $f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{۲}{x}-\frac{۲}{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{۲a-۲x}{xa}}{\frac{x-a}{۱}}=$

$$\lim_{x\to a}\frac{۲(a-x)}{(x-a)xa}=\lim_{x\to a}\frac{-۲(x-a)}{(x-a)xa}=\frac{-۲}{a^{۲}}$$

۲) $f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x(x-۱)(x-۲)-۰}{x-۲}$

$$=\lim_{x\to ۲}x(x-۱)=۲$$

۳) $f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^{۳}-۲-a^{۳}+۲}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^{۳}-a^{۳}}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{۲}+ax+a^{۲})}{x-a}=a^{۲}+a^{۲}+a^{۲}=۳a^{۲}$$

۴) $g'(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+b-f(a)-b}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

۵) $\lim_{x\to ۱}\frac{f^{۲}(x)-f^{۲}(۱)}{x^{۲}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\big(f(x)-f(۱)\big)\big(f(x)+f(۱)\big)}{(x-۱)(x+۱)}=$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}\times\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)+f(۱)}{x+۱}=f'(۱)\times\frac{۲f(۱)}{۲}=۲\times۲=۴$$

۶) $f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{a^{۲}}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{a^{۲}}}{x-a}\times\frac{\sqrt[۳]{x^{۴}}+\sqrt[۳]{x^{۲}a^{۲}}+\sqrt[۳]{a^{۴}}}{\sqrt[۳]{x^{۴}}+\sqrt[۳]{x^{۲}a^{۲}}+\sqrt[۳]{a^{۴}}}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x^{۲}-a^{۲}}{(x-a)\big(\sqrt[۳]{x^{۴}}+\sqrt[۳]{x^{۲}a^{۲}}+\sqrt[۳]{a^{۴}}\big)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)\big(\sqrt[۳]{x^{۴}}+\sqrt[۳]{x^{۲}a^{۲}}+\sqrt[۳]{a^{۴}}\big)}=\frac{۲a}{۳\sqrt[۳]{a^{۴}}}=\frac{۲a}{۳a\sqrt[۳]{a}}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{a}}$$

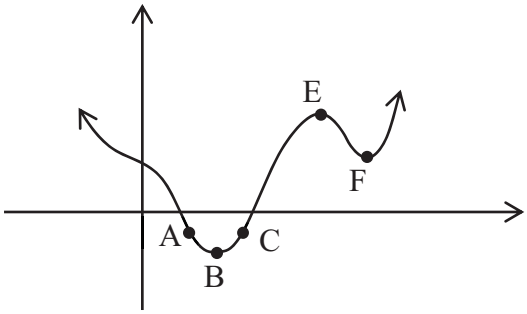
www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

خود را بیازمائید:

۱) اگر $f(x) = ۲x^۳ - ۱$ حاصل $f'(-۱)$ را از تعریف مشتق بدست آورید.

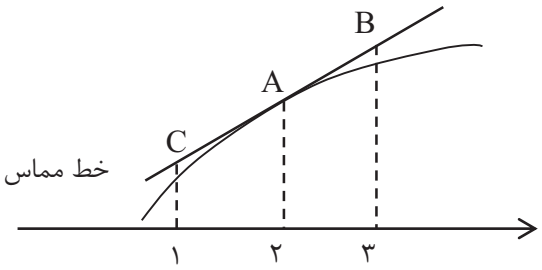
۲) با توجه به شکل توضیح دهید در نقاط مشخص شده مقدار مشتق و مقدار تابع دارای چه علامتی است؟



۳) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن در تمام نقاط منفی باشد.

۴) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن در تمام نقاط مثبت باشد.

۵) برای تابع f در شکل زیر داریم $f'(۲) = ۶$ و $f(۲) = ۱۵$ با توجه به شکل مختصات نقاط A، B و C را بیابید.



موفق و سربلند باشید.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی:

۱) مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست) (نظام جدید- ریاضی (۳)- دی ۹۷)

الف) $g(x)=x^{۲}\ (\sqrt{x+۱}\ )$ ب)$f(x)=\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^{۵}$

۲) تابع $f(x)=\begin{cases}۲x-۱, & x<۰\\ x^{۲}-۱, & x\geq ۰\end{cases}$ رادرنظر بگیرید(نظام جدید-ریاضی(۳)-خرداد۹۸)

الف)نشان دهید $f'(۰)$ وجود ندارد

ب)ضابطه تابع مشتق را بنویسید

ج)نمودارتابع f'را رسم کنید

۳) مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست) (نظام جدید- ریاضی (۳)- دی ۹۷)

الف) $f(x)=(x^{۴}-۳x)^{۵}$ ب) $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{۱-x}$

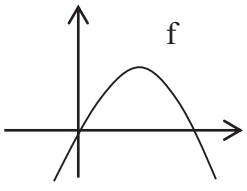
۴) ثابت کنید اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع f در $x=a$ پیوسته است. (نظام جدید- حسابان (۲) خرداد ۹۸)

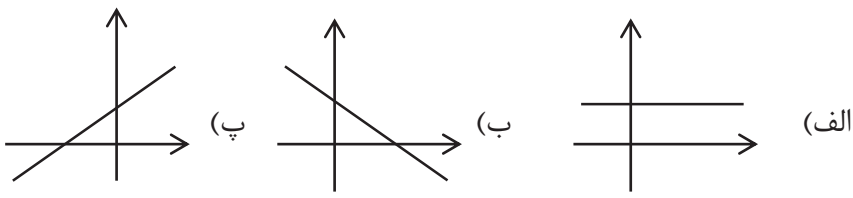
۵) نشان دهید نقطه ای به طول $x=-۱$ نقطه گوشه ای برای تابع $f(x)=|x^{۲}+x|$ می‌باشد. (نظام جدید- حسابان (۲) خرداد ۹۸)

۶) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) (نظام جدید- حسابان (۲) خرداد ۹۸)

الف) $f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x^{۳}+۲x+۱}$ ب) $g(x)=\cos^{۳}۲x$

۷) نمودار تابع f در شکل روبه‌رو آمده است. با بیان دلیل مشخص کنید کدام یک از نمودارهای زیر، نمودار مشتق تابع f است. (نظام جدید- حسابان (۲) خرداد ۹۸)





۸) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (نظام قدیم- حسابان- خرداد ۹۸)

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

الف) $y = \left(\frac{۱}{x} + \sin^۲ x\right)^۳$ ب) $y = \sqrt{x^۲ - ۳x + ۱}$

۹) معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = \frac{۲x}{x-۱}$ را در نقطه $(۲,۴)$ بنویسید. (نظام قدیم- حسابان- خرداد ۹۸)

۱۰) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (نظام قدیم- حسابان- شهریور ۹۷)

الف) $y = \left(x^۴ + \sqrt{x}\right) \sin ۲x$ ب) $y = \left(\frac{۱}{x} + ۲x^۵ + ۱\right)^۶$

۱۱) معادله خط قائم بر نمودار تابع $y = \frac{x^۲-۱}{x+۲}$ را در نقطه ای به طول $x = ۱$ روی منحنی تابع بنویسید. (نظام قدیم- حسابان- شهریور ۹۷)

۱۲) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (نظام قدیم- حسابان- خرداد ۹۶)

الف) $y = \frac{x^۲+۵x}{۲x-۱}$ ب) $y = \sin^۳ \sqrt{x^۲ + ۱}$

۱۳) نقطه ای واقع بر نمودار تابع $y = -۴x^۲ + ۱۶x + ۱$ پیدا کنید به طوری که مماس بر نمودار تابع موازی محور طول‌ها باشد. (نظام قدیم- حسابان- خرداد ۹۶)

۱۴) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید (نظام جدید- ریاضی (۳)- دی ۹۷)

تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $x = ۰$ مشتق‌پذیر است.

۱۵) در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. (نظام جدید- ریاضی (۳)- دی ۹۷)

اگر $f'(۲) = ۳$ و $g'(۲) = ۵$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $(۲g - f)'(۲)$ برابر ..... است.

۱۶) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) (نظام قدیم- ریاضی- دی ۹۷)

الف) $f(x) = \left(\frac{۱}{x}\right)\sqrt{x}$ ب) $g(x) = \frac{۳x+۵}{x^۲-۶x}$

پ) $h(x) = \sin(۵x) - \tan(x^۲)$

۱۷) مشتق تابع $f(x) = (۱ - ۲x)^۴$ را به دست آورده، دامنه مشتق‌پذیری آن را مشخص کنید. (نظام قدیم- ریاضی- دی ۹۷)

۱۸) به سوالات زیر پاسخ دهید. (نظام قدیم- ریاضی- دی ۹۶)

الف) شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = x^۲ - x$ در نقطه $x = \frac{۱}{۲}$ برابر چه عددی است؟

ب) دامنه مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{۱ - ۲x}$ را مشخص کرده و بنویسید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی:

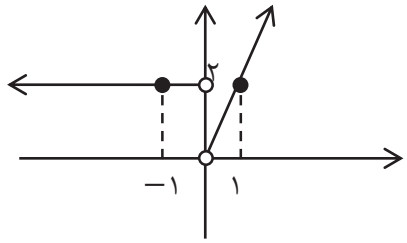
۱) الف) $f'(x)=۵\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^{۴}\left(\frac{۲x-۱-۲x}{(۲x-۱)^{۲}}\right)=۵\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^{۴}\left(\frac{-۱}{(۲x-۱)^{۲}}\right)$

ب) $g'(x)=۲x\left(\sqrt{x+۱}\right)+\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}\times x^{۲}$

۲) الف) $x=۰$ گوشه‌ای و مشتق‌ناپذیر است. $\Rightarrow f'_{-}(۰)=۲$ و $f'_{+}(۰)=۲x=۰$، بنابراین $f'(۰)$ وجود ندارد.

ب) $f'(x)=\begin{cases}۲ & x<۰\\ ۲x & x>۰\end{cases}$

ج)



$f'(x)=\begin{cases}۲ & x<۰\\ ۲x & x>۰\end{cases}$

x	-۱	۰
y	۲	۲
x	۱	۰
y	۲	۰

۳) الف) $f'(x)=۵(x^{۴}-۳x)^{۴}(۴x^{۳}-۳)$

ب) $g'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱-x)-(-۱)\sqrt{x}}{(۱-x)^{۲}}$

۴) کافی است نشان دهیم $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big)=\lim_{x\to a}(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x-a).\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(x-a).f'(a)=۰\times f'(a)=۰\Rightarrow\lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big)=۰\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}f(a)=۰\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)-f(a)=۰\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

۵) چون $\lim_{x\to -۱}f(x)=f(-۱)$ تابع f در $x=-۱$ پیوسته است.

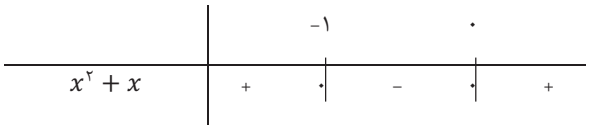
$$f'_{+}(-۱)=\lim_{x\to -۱^{+}}\frac{|x^{۲}+x|-۰}{x+۱}=\lim_{x\to -۱^{+}}\frac{|x^{۲}+x|}{x+۱}=\lim_{x\to -۱^{+}}\frac{-x(x+۱)}{x+۱}=۱$$

$$f'_{-}(-۱)=\lim_{x\to -۱^{-}}\frac{|x^{۲}+x|-۰}{x+۱}=\lim_{x\to -۱^{-}}\frac{x(x+۱)}{x+۱}=-۱$$

مشتق های راست و چپ تابع هر دو متناهی ولی نابرابرند پس $x=-۱$ نقطه گوشه ای تابع است.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

توجه: با توجه به جدول تعیین علامت $x^۲ + x$ را از قدرمطلق بیرون می‌آوریم:



۶) الف) $f'(x) = \frac{۲x(x^۳+۲x+۱)-(۳x^۲+۲)(x^۲-۱)}{(x^۳+۲x+۱)^۲}$

ب) $g'(x) = ۳\cos^۲(۲x) \times ۲ \times (-\sin ۲x)$

توجه: قسمت «ب» مختص رشته ریاضی می‌باشد.

۷) نمودار ب زیرا: سهمی نمودار داده شده ماکزیمم دارد پس ضریب $x^۲$ منفی است. بنابراین در مشتق تابع ضریب x منفی خواهد بود. در نتیجه نمودار مشتق، خطی با شیب منفی است.

۸) الف) $y' = ۳\left(\frac{۱}{x} + \sin^۲ x\right)^۲ \left(\frac{-۱}{x^۲} + ۲\sin x \cos x\right)$

ب) $y' = \frac{۲x-۳}{۲\sqrt{x^۲-۳x+۱}}$

توجه: قسمت الف مختص رشته ریاضی می‌باشد.

۹) $m = y'(۲) = \frac{۲(x-۱)-۱\times ۲x}{(x-۱)^۲} = \frac{-۲}{۱} = -۲$

$y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y - ۴ = -۲(x - ۲) \Rightarrow y = -۲x + ۴ + ۴ = -۲x + ۸$

۱۰) $y' = \left(۴x^۳ + \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)\sin ۲x + ۲\cos ۲x \left(x^۴ + \sqrt{x}\right)$

ب) $y' = ۶\left(\frac{۱}{x} + ۲x^۵ + ۱\right)^۵ \left(\frac{-۱}{x^۲} + ۱۰x^۴\right)$

۱۱) $m = y'(۱) = \frac{۲x(x+۲)-۱(x^۲-۱)}{(x+۲)^۲} = \frac{۲}{۳} \overset{\text{قائم}}{\Longrightarrow} m = -\frac{۳}{۲},\ x = ۱ \Rightarrow y = ۰$

$y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y - ۰ = -\frac{۳}{۲}(x - ۱) \Rightarrow y = -\frac{۳}{۲}x + \frac{۳}{۲}$

۱۲) الف) $y' = \frac{(۲x+۵)(۲x-۱)-۲(x^۲+۵x)}{(۲x-۱)^۲}$

ب) $y' = ۳\sin^۲ \sqrt{x^۲+۱} \times \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}} \cos \sqrt{x^۲+۱}$

توجه: قسمت ب مختص رشته ریاضی می‌باشد.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳) مماس بر نمودار تابع، موازی محور طول ها باشد یعنی شیب در نقطه تماس برابر صفر است. بنابراین:

$$y' = ۰ \Rightarrow -۸x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow -۸x = -۱۶ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow y = ۱۷$$

$$\Rightarrow (۲,۱۷)$$

۱۴) نادرست. زیرا:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow$$

$f_+'(۰) = \frac{۱}{۲\sqrt{۰^+}} = +\infty, f_-'(۰) \Rightarrow$ تعریف نشده است. $\Rightarrow$ مشتق f در صفر تعریف نشده است.

۱۵) $(۲g - f)'(۲) = ۲g'(۲) - f'(۲) = ۲ \times ۵ - ۳ = ۷$

۱۶) الف) $f'(x) = \frac{-۱}{x^۲}\sqrt{x} + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times \frac{۱}{x}$

ب) $g'(x) = \frac{۳(x^۲-۶x)-(۲x-۶)(۳x+۵)}{(x^۲-۶x)^۲}$

پ) $h'(x) = ۵\cos ۵x - ۲x(۱ + \tan^۲ x^۲)$

توجه: قسمت پ مختص رشته ریاضی می‌باشد.

۱۷) $f'(x) = ۴(۱ - ۲x)^۳(-۲) = -۸(۱ - ۲x)^۳ \Rightarrow D_{f'} = \mathbb{R}$

۱۸) الف) $m = y'\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۲x - ۱ = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) - ۱ = ۰$

ب) $f'(x) = \frac{-۲}{۲\sqrt{۱-۲x}} \Rightarrow D_{f'}: ۱ - ۲x > ۰ \Rightarrow x < \frac{۱}{۲} \Rightarrow D_{f'}: \left(-\infty, \frac{۱}{۲}\right)$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

توجه: سوال ۱ و ۱۰ مختص رشته ریاضی است.

۱) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\cos x}$

ب) $y = ۲\sin^۳ x + cos۴x$

پ) $y = \cos x^۲ - ۲sin۳x$

ت) $y = ۲\sin\left(x - \frac{\pi}{۳}\right) + tan۲x$

ث) $y = \sqrt{\sin x} + \frac{۱}{tanx}$

ج) $y=\sin\frac{۲x}{۵}+tan^۲۵x$

۲) شیب خط قائم بر نمودار $y = \frac{۲x-۱}{x+۱}$ را در نقطه ای به طول ۳ واقع بر نمودار به دست آورید.

۳) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $y = (x^۳ - ۴x^۲ - ۱)^۴$

ب) $y = \left(\frac{۳x-۲}{۲x+۵}\right)^۲$

پ) $y = \frac{۲}{x-۳} + \left(\sqrt{۳x}\right)^۳$

ت) $y = \sqrt{۳x^۲ - x + ۵}$

ث) $y = \sqrt{\frac{۲x+۱}{x-۳}}$

ج) $y = (x^۲ - ۲x)\left(\sqrt{x} + ۱\right)$

۴) معادله خط مماس بر نمودار $y = \frac{۳x-۳}{۱-۲x}$ را در نقطه تقاطعش با محور طول ها بنویسید.

۵) مقدار k را طوری تعیین کنید که شیب خط مماس بر نمودار $y = \frac{۲x-k}{x+۳}$ در $x = ۱$ واقع بر نمودار برابر ۳ باشد.

۶) معادله خط قائم بر نمودار $y = x^۲ - ۲x + ۱$ را در محل تلاقی نمودار آن با محور عرض‌ها بنویسید.

۷) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq ۰ \\ x^۲ & x < ۰ \end{cases}$ مفروض است. نمودار تابع را رسم کنید. آیا در نقطه $x = ۰$ مشتق‌پذیر است؟ ضابطه $f'(x)$ را بنویسید.

۸) فرض کنید $f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ + ۵ & x \geq ۳ \\ ax + b & x < ۳ \end{cases}$ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که $f(x)$ در $x = ۳$ مشتق‌پذیر باشد.

۹) مشتق‌پذیری تابع f با ضابطه $f(x) = x|x - ۲|$ را در نقطه $x. = ۲$ بررسی کنید.

۱۰) اگر $f(x) = x^۳ - ۲x$ مشتق تابع $g(x) = f(\cos x)$ را بیابید.

۱۱) اگر $f(x) = g(۲x^۲ + ۳x)$ و $f'(۱) = ۱۴$، مطلوبست محاسبه $g'(۵)$.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲) مقدار مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x-۲a}$ در نقطه $x=۳$ برابر ۱ می‌باشد. مقدار a را به دست آورید.

۱۳) اگر f تابعی خطی باشد و $f(۱)=۵$ و $f'(x)=۲$ مقدار $f(-\frac{۱}{۲})$ را بیابید.

۱۴) اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+ax & x\geq ۲ \\ bx^۳+۲ & x<۲ \end{cases}$ در نقطه $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $۲a+b$ را محاسبه کنید.

۱۵) اگر $f(x)=ax^۳+bx+c$، $f(۰)=۵$، $f'(-۱)=۶$ و $f''(-۲)=۱۲$، مقدار $۲a-b+c$ را محاسبه کنید.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) الف) $y' = \frac{(\cos x+\sin x)\cos x+\sin x(\sin x-\cos x)}{(\cos x)^{۲}}$

ب) $y' = ۶\sin^{۲} x\cos x - ۴\sin ۴x$

پ) $y' = -۲x sin\, x^{۲} - ۶\cos ۳x$

ت) $y' = ۲\cos\left(x-\frac{\pi}{۳}\right) + ۲\times(۱+\tan^{۲} ۲x)$

ث) $y' = \frac{\cos x}{۲\sqrt{\sin x}} + \frac{۰-(۱+\tan^{۲} x)}{\tan^{۲} x}$

ج) $y' = \frac{۲}{۵}\cos\frac{۲x}{۵} + ۶\tan ۵x\,(۱+\tan^{۲} ۵x)\times ۵$

۲) $m = y'(۳) = \frac{۲(x+۱)-۱(۲x-۱)}{(x+۱)^{۲}} = \frac{۲x+۲-۲x+۲}{(x+۱)^{۲}} = \frac{۴}{(x+۱)^{۲}} \xrightarrow{x=۳}$

$m = \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴} \overset{\text{قائم}}{\Longrightarrow} m' = -۴, x = ۳ \Rightarrow y = \frac{۵}{۴}$

$y - y_{۱} = m'(x - x_{۱}) \Rightarrow y - \frac{۵}{۴} = -۴(x-۳) \Rightarrow y = -۴x + ۱۲ + \frac{۵}{۴}$

$\Rightarrow y = -۴x + \frac{۵۳}{۴}$

البته مدنظر سوال $m' = -۴$ است. ولی در ادامه ما معادله خط قائم را هم محاسبه کردیم.

۳) الف) $y' = ۴(x^{۳} - ۴x^{۲} - ۱)^{۳}(۳x^{۲} - ۸x)$

ب) $y' = ۲\left(\frac{۳x-۲}{۲x+۵}\right)\left(\frac{۳(۲x+۵)-۲(۳x-۲)}{(۲x+۵)^{۲}}\right)$

پ) $y' = \frac{۰-۱\times۲}{(x-۳)^{۲}} + ۳\left(\sqrt{۳x}\right)^{۲}\times\frac{۳}{۲\sqrt{۳x}}$

ت) $y' = \frac{۶x-۱}{۲\sqrt{۳x^{۲}-x+۵}}$

ث) $y' = \frac{\frac{۲(x-۳)-۱(۲x+۱)}{(x-۳)^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۲x+۱}{x-۳}}}$

ج) $y' = (۲x-۲)\left(\sqrt{x}+۱\right) + \left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)(x^{۲} - ۲x)$

۴) تقاطع با محور طول‌ها یعنی $y = ۰$ بنابراین:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$y=۰ \Rightarrow \frac{۳x-۳}{۱-۲x}=۰ \Rightarrow ۳x-۳=۰ \Rightarrow ۳x=۳ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow (۱,۰)$$

$$m=y'(۱)=\frac{۳(۱-۲x)+۲(۳x-۳)}{(۱-۲x)^۲}=\frac{۳-۶x+۶x-۶}{(۱-۲x)^۲}=\frac{-۳}{(۱-۲x)^۲} \xRightarrow{x=۱}$$

$$m=\frac{-۳}{۱}=-۳$$

$$y-y_۱=m(x-x_۱) \Rightarrow y-۰=-۳(x-۱) \Rightarrow y=-۳x+۳$$

۵) $$m=y'(۱)=\frac{۲(x+۳)-۱(۲x-k)}{(x+۳)^۲}=\frac{۲x+۶-۲x+k}{(x+۳)^۲}=\frac{۶+k}{(x+۳)^۲}$$

$$\xRightarrow{x=۱}\frac{۶+k}{۱۶}=۳ \Rightarrow ۶+k=۴۸ \Rightarrow k=۴۲$$

۶) محل تلاقی با محور عرض‌ها یعنی $x=۰$

$$m=y'(۰)=۲x-۲ \xRightarrow{x=۰} m=-۲ \xRightarrow{\text{قائم}} m'=\frac{۱}{۲}$$

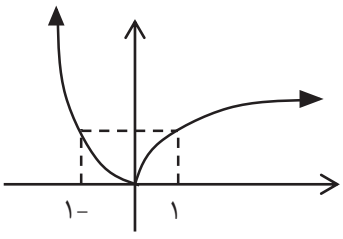
$$x=۰ \Rightarrow y=۱$$

$$y-y_۱=m(x-x_۱) \Rightarrow y-۱=\frac{۱}{۲}(x-۰) \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+۱$$

۷) $$f'(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲\sqrt{x}} & x>۰\\ ۲x & x<۰\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۰\\ x^۲ & x<۰\end{cases}$$

x	۱	۰
y	۱	۰
x	-۱	۰
y	۱	۰



خیر در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا:

$$f'_{x\to ۰^+}(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x}-۰}{x}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{x\sqrt{x}}=+\infty$$

$$f'_{x\to ۰^-}(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۰}{x}=\lim_{x\to ۰^+}x=۰ \Rightarrow$$

در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست.

۸) چون قرار است $f(x)$ در $x=۳$ مشتق پذیر باشد، پس در $x=۳$ پیوسته است. بنابراین:

$$f(۳)=\lim_{x\to ۳^+}f(x)=\lim_{x\to ۳^-}f(x) \Rightarrow ۲۳=۳a+b$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

از طرفی: $f'_+(۳) = f'_-(۳) \Rightarrow ۴x = a \Rightarrow ۱۲ = a \Rightarrow ۲۳ = ۳ \times ۱۲ + b \Rightarrow b = -۱۳$

۹) $f'_+(۲) = \lim\limits_{x \to ۲^+} \frac{x|x-۲|-۰}{x-۲} = \lim\limits_{x \to ۲^+} \frac{x(x-۲)}{x-۲} = \lim\limits_{x \to ۲^+} x = ۲$

$$f'_-(۲) = \lim_{x \to ۲^-} \frac{x|x-۲|-۰}{x-۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{-x(x-۲)}{x-۲} = \lim_{x \to ۲^-} (-x) = -۲$$

و چون $f'_+(۲) \neq f'_-(۲)$، تابع در $x = ۲$ مشتق پذیر نیست.

توجه: برای نوشتن تابع بدون قدرمطلق از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم.

		۲	
$x-۲$	−	۰	+

۱۰) $f'(x) = ۳x^۲ - ۲ \Rightarrow g'(x) = -\sin x \,.\, f'(\cos x) \Rightarrow$

$$g'(x) = -\sin x\,(۳\cos^۲ x - ۲)$$

۱۱) $f'(x) = (۴x+۳)g'(۲x^۲ + ۳x) \Rightarrow f'(۱) = ۷g'(۵) \Rightarrow$

$$۱۴ = ۷g'(۵) \Rightarrow g'(۵) = ۲$$

۱۲) $f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x-۲a}} \Rightarrow f'(۳) = \frac{۱}{۲\sqrt{۳-۲a}} \Rightarrow ۱ = \frac{۱}{۲\sqrt{۳-۲a}}$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۳-۲a} = ۱ \Rightarrow \sqrt{۳-۲a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۳ - ۲a = \frac{۱}{۴} \Rightarrow -۲a = \frac{۱}{۴} - ۳$$

$$\Rightarrow -۲a = \frac{-۱۱}{۴} \Rightarrow a = \frac{۱۱}{۸}$$

۱۳) چون f تابعی خطی است، پس $f(x) = ax + b$

$$f'(x) = a \Rightarrow a = ۲, f(۱) = a + b \Rightarrow ۵ = ۲ + b \Rightarrow b = ۳$$

$$\Rightarrow \mathrm{f(x)} = ۲\mathrm{x} + ۳ \Rightarrow \mathrm{f}\left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۲$$

۱۴) چون تابع f در $x = ۱$ مشتق پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است:

$$f(۲) = \lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} f(x) \Rightarrow ۴ + ۲a = ۸b + ۲ \Rightarrow ۲a - ۸b = -۲$$

از طرفی: $f'_+(۲) = f'_-(۲)$

$$\Rightarrow ۲x + a = ۳bx^۲ \Rightarrow ۴ + a = ۱۲b \Rightarrow a - ۱۲b = -۴$$

$$\begin{cases} ۲a - ۸b = -۲ \\ a - ۱۲b = -۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a - ۸b = -۲ \\ -۲a + ۲۴b = ۸ \end{cases} \Rightarrow ۱۶b = ۶ \Rightarrow b = \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$۲a - ۸b = -۲ \Rightarrow ۲a - ۸ \times \frac{۳}{۸} = -۲ \Rightarrow ۲a - ۳ = -۲ \Rightarrow$$

$$۲a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲a + b = ۲ \times \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۸} = ۱ + \frac{۳}{۸} = \frac{۱۱}{۸}$$

۱۵) $f(x) = ax^{۳} + bx + c \Rightarrow f'(x) = ۳ax^{۲} + b \Rightarrow f''(x) = ۶ax$

$$f(۰) = ۵ \Rightarrow c = ۵, f'(-۱) = ۳a + b \Rightarrow ۳a + b = ۶ *$$

$$f''(-۲) = -۱۲a \Rightarrow -۱۲a = ۱۲ \Rightarrow a = -۱$$

$$* ۳a + b = ۶ \Rightarrow -۳ + b = ۶ \Rightarrow b = ۹$$

$$\Rightarrow ۲\mathrm{a} - \mathrm{b} + \mathrm{c} = -۲ - ۹ + ۵ = -۶$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

خود را بیازمائید:

توجه: سوال ۱ و ۲ مربوط به رشته ریاضی است.

۱) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{\sin x}\,(x^۲ - ۳)^۳$ ب) $f(x) = ۳\tan^۲ ۵x - \cos ۴x$

۲) معادله خط مماس بر منحنی تابع به معادله $f(x) = ۲\sin x + \cos x$ را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{۲}$ واقع بر منحنی بیابید.

۳) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x) = \frac{x}{(x-۱)^۳}$ ب) $f(x) = \sqrt{۴x - ۳}(x^۲ - ۳x)^۲$

۴) نشان دهید نقطه $x = -۲$ برای $f(x) = |x^۲ + ۲x|$ یک نقطه گوشه است.

۵) نقطه‌ای از نمودار تابع $y = x^۲ + ۲x$ را به دست آورید که مماس بر منحنی در آن نقطه موازی محور طول‌ها باشد.

۶) مشتق پذیری تابع f با ضابطه $f(x) = (x + ۱)[x]$ را در نقطه $x = -۱$ بررسی کنید. ([ ] نماد جزءصحیح است.)

۷) اگر $f(x) = g(x^۲ - ۳x)$ و $f'(۱) = ۷$، مطلوبست محاسبه $g'(-۲)$.

۸) مشتق $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۴x}$ را محاسبه کرده و دامنه مشتق پذیری آن را مشخص کنید.

موفق و سربلند باشید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر:

۱) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = ۲t^۲ - t$، برحسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[۰,۴]$ با هم برابرند. (نظام جدید ریاضی (۳)- خرداد ۹۸)

۲) یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + ۲t^۳$ گرم است. آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه زمانی $[۳,۴]$ چقدر است؟ (نظام جدید- ریاضی (۳) دی ۹۷)

۳) آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^۳ - ۲x$ را در بازه $[۰,۲]$ و آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را در $x =$ ۱ محاسبه کنید. (نظام جدید- حسابان- خرداد ۹۸)

۴) معادله حرکت یک متحرک روی یک خط مستقیم به صورت $f(t) = ۲t^۲ - ۵t + ۱$ است.

الف) آهنگ متوسط تغییر مکان این متحرک را وقتی از نقطه $t_۱ = ۲$ به $t_۲ = ۶$ تغییر مکان دهد به دست آورید.

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر مکان این متحرک را در نقطه $t = ۳$ بدست آورید. (نظام قدیم- ریاضی- خرداد ۹۷)

۵) حجم آب یک استخر در حال تخلیه برحسب لیتر به وسیله برابری $V_A = ۱۲۰(۲۵۰۰ - ۵۰t + t^۲)$ به زمان t برحسب دقیقه بستگی دارد. (نظام قدیم- ریاضی- خرداد ۹۶)

الف) آهنگ متوسط تخلیه در ۸ دقیقه اول را پیدا کنید.

ب) آهنگ لحظه‌ای خالی شدن را در دقیقه دهم از آغاز تخلیه به دست آورید.

۶) اگر $p(t) = ۲۰۰۰ + ۵۰۰t^۲$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد (t برحسب ساعت)

الف) آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در ۴ ساعت اول پس از زمان $t. = ۱$ به دست آورید. (نظام قدیم- ریاضی- خرداد ۹۵)

ب) آهنگ لحظه‌ای افزایش جمعیت را در $t = ۲$ به دست آورید.

۷) تابع $f(x) = x^۲ + ۲x - ۱$ داده شده است. (نظام قدیم- ریاضی- خرداد ۹۴)

الف) آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی متغیر از نقطه $x_۱ = ۱$ به $x_۲ = ۳$ تغییر کند، تعیین کنید.

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع را در نقطه $x. = ۲$ به دست آورید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر:

۱) آهنگ متوسط $= \frac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰} = \frac{۲۸-۰}{۴} = ۷$

$f'(t) = ۴t - ۱ \quad \Rightarrow ۴t - ۱ = ۷ \Rightarrow t = ۲$

۲) آهنگ متوسط $= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(۴)-x(۳)}{۴-۳} = \frac{۱۳۰-(\sqrt{۳}+۵۴)}{۱} = ۷۶ - \sqrt{۳}$

۳) آهنگ متوسط $= \frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰} = \frac{۴}{۲} = ۲$

آهنگ لحظه‌ای $f'(x) = ۳x^۲ - ۲ \Rightarrow f'(۱) = ۱$

۴) الف) $\frac{f(۶)-f(۲)}{۶-۲} = \frac{۴۳-(-۱)}{۴} = ۱۱$

ب) $f'(t) = ۴t - ۵ \Rightarrow f'(۳) = ۱۲ - ۵ = ۷$

۵) حجم آب تخلیه شده $V = ۱۲۰ \times (۲۵۰۰) - ۱۲۰ \times (۲۵۰۰ - ۵۰t + t^۲)$

$= ۱۲۰(۵۰t - t^۲)$

الف) $\frac{V(۸)-V(۰)}{۸-۰} = \frac{(۱۲۰)(۳۳۶)-۰}{۸} = ۵۰۴۰$

ب) $V'(t) = ۱۲۰(۵۰ - ۲t) \Rightarrow V'(۱۰) = ۳۶۰۰$

۶) الف) $\frac{p(۵)-p(۱)}{۴} = \frac{۱۴۵۰۰-۲۵۰۰}{۴} = ۳۰۰۰$

ب) $p'(t) = ۱۰۰۰t \Rightarrow p'(۲) = ۲۰۰۰$

۷) الف) $\frac{f(۳)-f(۱)}{۳-۱} = \frac{۱۴-۲}{۲} = ۶$

ب) $f'(x) = ۲x + ۲ \Rightarrow f'(۲) = ۶$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) آهنگ تغییرات مساحت یک دایره که قطر آن ۴ است را به دست آورید. (نظام قدیم- حسابان- خرداد ۹۷)

۲) آهنگ تغییرات مساحت دایره به شعاع $R = ۴$ را به دست آورید (نظام قدیم- حسابان- خرداد ۹۴)

۳) آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن ۱۶ واحد است به دست آورید. (نظام قدیم- حسابان- خرداد ۹۰)

۴) آهنگ تغییرات محیط یک مربع را نسبت به مساحت آن برای مربعی که مساحت آن ۹ واحد است به دست آورید. (نظام قدیم- حسابان- شهریور ۹۱)

۵) آهنگ تغییرات مساحت یک دایره را نسبت به محیط آن بدست آورید. (نظام قدیم- حسابان- دی ۹۵)

۶) آهنگ متوسط تغییر حجم مکعبی به ضلع x را نسبت به تغییرات x وقتی x از ۲ به ۴ تغییر کند به دست آورید.

۷) توپ تنیسی را به هوا پرتاب می‌کنیم. اگر مسافت پیموده شده توسط توپ برحسب متر، تابعی از زمان به صورت $S = ۱۲t - ۳t^۲$ باشد:

الف) سرعت متوسط را در ۲ ثانیه اول بدست آورید.

ب) در چه زمانی و در چه ارتفاعی سرعت صفر می‌شود؟

ج) در لحظه $t = ۴$ وضعیت توپ چگونه است و چه سرعتی دارد؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) $S(r) = \pi r^۲ \Rightarrow S'(r) = ۲\pi r \Rightarrow S'(۲) = ۴\pi$

۲) $S(R) = \pi R^۲ \Rightarrow S'(R) = ۲\pi R \Rightarrow S'(۴) = ۸\pi$

۳) $S = x^۲, p = ۴x \Rightarrow x = \frac{p}{۴} \Rightarrow S = \left(\frac{p}{۲}\right)^۲ = \frac{p^۲}{۱۶} \Rightarrow S'(p) = \frac{p}{۸} \Rightarrow$

$S'(۱۶) = \frac{۱۶}{۸} = ۲$

۴) $\left.\begin{matrix} S = x^۲ \Rightarrow x = \sqrt{S} \\ P = ۴x \end{matrix}\right\} \Rightarrow P(S) = ۴\sqrt{S} \Rightarrow P'(S) = \frac{۲}{\sqrt{S}} \Rightarrow P'(۹) = \frac{۲}{۳}$

۵) $\left.\begin{matrix} S = \pi r^۲ \\ P = ۲\pi r \Rightarrow r = \frac{P}{۲\pi} \end{matrix}\right\} \Rightarrow S(P) = \pi\left(\frac{P}{۲\pi}\right)^۲ \Rightarrow S(P) = \pi \times \frac{P^۲}{۴\pi^۲} \Rightarrow S'(P) = \frac{P}{۲\pi}$

۶) آهنگ متوسط $= \frac{V(۴)-V(۲)}{۴-۲} = \frac{۴^۳-۲^۳}{۲} = \frac{۶۴-۸}{۲} = \frac{۵۶}{۲} = ۲۸$

توجه: حجم مکعب به ضلع x برابر $x^۳$ می‌باشد.

۷) آهنگ متوسط $= \frac{S(۲)-S(۰)}{۲-۰} = \frac{۱۲-۰}{۲} = ۶$

ب) سرعت $= S'(t) = ۱۲ - ۶t \Rightarrow ۱۲ - ۶t = ۰ \Rightarrow -۶t = -۱۲ \Rightarrow t = ۲$

$\Rightarrow$ ارتفاع $= ۱۲(۲) - ۳(۲)^۲ = ۱۲$ متر

ج) $S'(۴) = ۱۲ - ۶(۴) = -۱۲$

چون در $t = ۲$ سرعت صفر شده و توپ به اوج می‌رسد و سپس مسیر پایین آمدن را در پیش می‌گیرد، در لحظه $t = ۴$ توپ به مکان اولیه بر می‌گردد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

خود را بیازمائید:

(توجه: سوال ۲ مختص رشته ریاضی است)

۱) محیط هر دایره‌ای تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره‌ای به مساحت ۲π حساب کنید.

۲) آهنگ آنی تغییر تابع $f(x) = ۳x + ۴\cos ۳x$ نسبت به x در $x = \frac{\pi}{۶}$ را بدست آورید.

۳) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(x) = t^۲ + ۵t$ است. در چه لحظه‌ای سرعت متوسط در بازه $[۰,۱]$ برابر با سرعت لحظه‌ای آن می‌شود؟

۴) متحرکی که بر محور xها در حرکت است دارای معادله $x = t^۲ - ۲t - ۱$ است، سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t = ۱$ تا $t = ۴$ بدست آورید.

۵) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = ۲۰۰t^۲ - ۵۰t$ می‌باشد.

الف) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t = ۰$ تا $t = ۴$ بدست آورید.

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییرات تابع را در نقطه $t = ۳$ بدست آورید.

موفق و سربلند باشید.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل پنجم

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

کاربردهای مشتق :حسابان (۲) (ریاضی فیزیک)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

درس اول: اکسترمم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی:

۱) مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۲x + ۴}$ را در بازه $[۲ \text{ و } ۰]$ تعیین کنید. (نظام جدید – خرداد ۹۸)

۲) تابع $f(x) = \frac{x^۲}{x^۲+۱}$ در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است؟ (نظام جدید – خرداد ۹۸)

۳) ضرایب a و b را در تابع $f(x) = -x^۴ + ax + b$ طوری تعیین کنید که در نقطه (۲ و ۱) ماکزیمم نسبی داشته باشد. (نظام جدید – دی ۹۷)

۴) در تابع $y = ۳x^۲ + ۶ax - b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که نقطه $A(-۱ , ۲)$ نقطه مینیمم تابع باشد.

۵) در تابع $y = ax^۲ + bx$ ضرایب a و b را چنان بیابید که رأس سهمی روی خط $x = ۱$ واقع باشد و منحنی تابع از نقطه (۴ و ۲-) بگذرد.

۶) تابع $y = ax^۳ + bx + c$ مفروض است. مقادیر a، b و c را چنان بیابید که منحنی نمودار تابع محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۲ قطع کند و نقطه $m(۱ , ۰)$ نقطه مینیمم تابع باشد.

۷) مقادیر ماکزیمم و مطلق مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = ۳x^۴ - ۸x^۳$ را در بازه $[۳ \text{ و } ۱]$ بیابید. (نظام قدیم – دیفرانسیل – خرداد ۹۳)

۸) مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{x^۲}{x-۱}$ را در بازه $\left[-۱, \frac{۱}{۲}\right]$ در صورت وجود بیابید. (نظام قدیم – دیفرانسیل – شهریور ۹۱)

۹) تابع $y = x + \frac{۱}{x}$ در کدام بازه صعودی و در کدام بازه نزولی است؟ (نظام قدیم – دیفرانسیل – خرداد ۹۱)

۱۰) مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = x + ۱ + \frac{۴}{x+۱}$ را در بازه $[۲ \text{ و } ۰]$ در صورت وجود بیابید. (نظام قدیم – دیفرانسیل – خرداد ۹۲)

۱۱) نقطه ای روی تابع $f(x) = \sqrt{x}$ بیابید که از نقطه (۰ و ۴) کمترین فاصله را داشته باشد. (نظام قدیم – حسابان – شهریور ۸۷)

۱۲) می خواهیم استوانه ای به حجم ۴ لیتر بسازیم. شعاع استوانه چقدر باشد تا کمترین مقدار مواد برای ساختن قوطی مصرف شده باشد؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ درس اول: اکسترمم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی:

(۱

$$f'(x)=\frac{۲x-۲}{۲\sqrt{x^۲-۲x+۴}} \to f'(x)=۰ \to ۲x-۲=۰ \to ۲x=۲ \to x=۱$$

$$\begin{cases} f(۰)=f(۲)=۲ \to \text{مقدار ماکزیمم مطلق} \\ f(۱)=\sqrt{۳} \to \text{مقدار مینیمم مطلق} \end{cases}$$

(۲

$$f'(x)=\frac{۲x}{(x^۲+۱)^۲} \to f'(x)=۰ \to ۲x=۰ \to x=۰$$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		-	۰	+	
f		↘	۰	↗	

$(-\infty,۰]$ → نزولی ، $[۰,+\infty)$ → صعودی

(۳

$$f'(x)=-۴x^۳+a \xRightarrow{f'(۱)=۰} -۴+a=۰ \to a=۴$$

$$f(۱)=۲ \to -۱+۴+b=۲ \to b=-۱$$

(۴

$$y'=۶x+۶a \xRightarrow{f'(-۱)=۰} -۶+۶a=۰ \to ۶a=۶ \to a=۱$$

$$f(-۱)=۲ \to ۳-۶a-b=۲ \to -۳-b=۲ \to -b=۵ \to b=-۵$$

(۵

$$f'(۱)=۰ \to ۲ax+b=۰ \to ۲a+b=۰$$

$$f(-۲)=۴ \to ۴a-۲b=۴$$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\begin{cases} ۲a + b = ۰ \\ ۴a - ۲b = ۴ \end{cases} \overset{\times ۲}{\Rightarrow} \begin{cases} ۴a + ۲b = ۰ \\ ۴a - ۲b = ۴ \end{cases} \rightarrow ۸a = ۴ \rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

$$۲a + b = ۰ \rightarrow ۱ + b = ۰ \rightarrow b = -۱$$

۶)

$$\text{به عرض } ۲ \rightarrow x = ۰ \rightarrow f(۰) = ۲ \rightarrow c = ۲$$

$$\begin{matrix} f(۱) = ۰ \rightarrow a + b + ۲ = ۰ \rightarrow \\ f'(۱) = ۰ \rightarrow ۳ax^۲ + b = ۰ \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} a + b = -۲ \\ ۳a + b = ۰ \end{cases} \rightarrow ۲a = ۲ \rightarrow a = ۱ \rightarrow b = -۳$$

۷)

$$D = R \ , \ f'(x) = ۱۲x^۳ - ۲۴x^۲ = ۰ \rightarrow ۱۲x^۲(x - ۲) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۱۲x^۲ = ۰ \rightarrow x = ۰ \quad \text{غ ق ق} \\ x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۲ \end{cases}$$

$$f(۱) = -۵ \ , \underbrace{f(۲) = -۶}_{\text{مینیمم مطلق}} , \underbrace{f(۳) = ۲۷}_{\text{ماکزیمم مطلق}}$$

۸)

$$f'(x) = \frac{x^۲ - ۲x}{(x-۱)^۲} = ۰ \rightarrow x^۲ - ۲x = ۰ \rightarrow x(x - ۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$f(۰) = ۰$ ماکزیمم مطلق , $f\left(\frac{۱}{۲}\right) = f(-۱) = \frac{-۱}{۲}$ مینیمم مطلق

۹)

$$f'(x) = ۱ - \frac{۱}{x^۲} = \frac{x^۲ - ۱}{x^۲} \overset{f'(x)=۰}{\Longrightarrow} x \pm ۱$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		+	۰	-	-	۰	+		

تابع در بازه های $(-\infty, -۱], [۱, +\infty)$ صعودی و در بازه $[-۱, ۰), (۰, ۱]$ نزولی است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰)

$$f'(x) = ۱ - \frac{۴}{(x+۱)^۲} \to f'(x) = \frac{(x+۱)^۲ - ۴}{(x+۱)^۲} \overset{f'=۰}{\Longrightarrow} (x+۱)^۲ - ۴ = ۰ \to$$

$$(x+۱)^۲ = ۴ \to x + ۱ = \pm ۲ \to \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۳ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$f(۰) = ۵$ ماکزیمم مقدار , $f(۱) = ۴$ مینیمم مقدار , $f(۲) = \frac{۱۳}{۳}$

۱۱)

$$d = \sqrt{(x-۴)^۲ + \left(\sqrt{x}\right)^۲} = \sqrt{x^۲ - ۷x + ۱۶} \to d' = \frac{۲x-۷}{۲\sqrt{x^۲-۷x+۱۶}} = ۰ \to$$

$$۲x - ۷ = ۰ \to ۲x = ۷ \to x = \frac{۷}{۲} \to \left(\frac{۷}{۲}, \sqrt{\frac{۷}{۲}}\right)$$

توجه: نقطه مورد نظر را $\left(x, \sqrt{x}\right)$ در نظر گرفتیم.

۱۲) شعاع استوانه را r و ارتفاع آن را h در نظر می گیریم. می دانیم حجم استوانه برابر $\pi r^۲ h$ است:

$$\pi r^۲ h = ۴ \to h = \frac{۴}{\pi r^۲} \to \text{کل مواد مصرفی} : A = \underbrace{۲\pi r^۲}_{\text{مساحت قاعده ها}} + \underbrace{۲\pi r h}_{\text{مساحت جانبی}}$$

$$\to A = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r \times \frac{۴}{\pi r^۲} = ۲\pi r^۲ + \frac{۸}{r} \to A' = ۴\pi r - \frac{۸}{r^۲} = ۰ \to r = \sqrt[۳]{\frac{۲}{\pi}}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

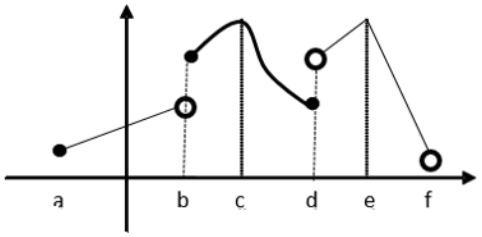
۱) تابع $y = \frac{ax-۲}{x+a-۳}$ داده شده است. آیا مقدار یا مقادیری از a وجود دارد که تابع به ازای آنها اکیداً صعودی باشد تعیین کنید. (نظام قدیم – حسابان – دی ۸۴)

۲) ابتدا نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ۳ - x^۲ & x \leq ۰ \\ ۱ - \frac{۱}{۲}x & x \geq ۱ \end{cases}$ را رسم کنید. سپس از روی نمودار نقاط اکسترمم نسبی و مطلق را در صورت وجود تعیین کنید. (نظام قدیم – حسابان – دی ۸۴)

۳) تابع $f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳ - \frac{۳}{۲}x^۲ + ۲x$ روی بازه [a , b] نزولی است. بیشترین مقدار b – a را محاسبه کنید.

۴) اگر طول نقطه مینیمم نسبی تابع به معادله $y_۱ = x^۲ - ۲(a+۱)x - ۴$ مساوی طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع به معادله $y_۲ = -x^۲ + (a-۱)x$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

۵) با توجه به شکل زیر، نقاط اکسترمم مطلق و نسبی تابع f را مشخص کنید.



www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱)

$$y' = \frac{a(a-۳)-(-۲)(۱)}{(x+a-۳)^۲} = \frac{a^۲-۳a+۲}{(x+a-۳)^۲}$$

برای اینکه تابع اکیداً صعودی باشد، باید $y' > ۰$ باشد، بنابراین:

$$\frac{a^۲-۳a+۲}{(x+a-۳)^۲} > ۰ \rightarrow a^۲ - ۳a + ۲ > ۰ \quad (a-۲)(a-۱) > ۰$$

a		۱		۲	
$a^۲ - ۳a + ۲$	+	۰	-	۰	+

$$a < ۱ \cup a > ۲$$

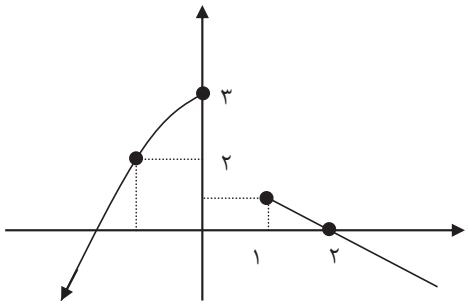
۲)

$$f(x) = \begin{cases} ۳ - x^۲ & x \le ۰ \\ ۱ - \frac{۱}{۲}x & x \ge ۱ \end{cases}$$

x	-۱	۰
y	۲	۳

x	۱	۲
y	$\frac{۱}{۲}$	۰

ماکزیمم و مینیمم نسبی ندارد.



ماکزیمم مطلق: (۳ و ۰)

مینیمم مطلق: ندارد.

۳)

$$f'(x) = x^۲ - ۳x + ۲ = ۰ \rightarrow (x-۲)(x-۱) = ۰ \rightarrow x = ۲, x = ۱$$

x		۱		۲	
$f'(x)$	+	۰	-	۰	+

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

بنابراین کمترین مقدار a برابر ۱ و بیشترین مقدار b برابر ۲ است. در نتیجه بیشترین مقدار b − a برابر است با: ۲ − ۱ = ۱

۴)

$$y_۱ = x^۲ - ۲(a+۱)x - ۴ \to x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۲(a+۱)}{۲} = a + ۱$$

$$y_۲ = -x^۲ + (a-۱)x \to x = \frac{-b}{۲a} = \frac{a-۱}{۲}$$

$$\to a + ۱ = \frac{a-۱}{۲} \to ۲a + ۲ = a - ۱ \to a = -۳$$

۵) ماکزیمم نسبی: c , e ماکزیمم مطلق: c مینیمم نسبی: d

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

خود را بیازمائید:

۱) در تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ ضرایب a و b را چنان بیابید که نقطه (۲- و ۱) اکسترمم نسبی تابع باشد.

۲) تابع $x^4 - 4x^3 - 8x^2$ در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی است؟

۳) مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x-3}$ را در بازه [۲ و ۱-] بیابید.

۴) مینیمم فاصله $A(3, 0)$ از منحنی به معادله $y^2 = 3x$ را حساب کنید.

توجه: نقطه $B(\alpha, \beta)$ روی $y^2 = 3x$ را نقطه ای در نظر بگیرید که فاصله AB کمترین فاصله باشد، سپس AB را محاسبه کنید و از این فاصله که بر حسب α به دست می آید، مشتق گرفته و ...

۵) مجموع دو عدد مثبت برابر ۷ است. بزرگترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آنها را پیدا کنید.

۶) محدوده ای برای b چنان بیابید که تابع $y = \frac{x+b}{x-1}$ برای $x \in (1, +\infty)$ همواره نزولی باشد.

((موفق و سربلند باشید))

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

درس دوم: جهت تعقر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن:

۱) مقادیر a و b را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 - 1$ چنان بیابید که $A(1, 1)$ نقطه عطف منحنی باشد. (نظام جدید – حسابان (۲) – خرداد ۹۸)

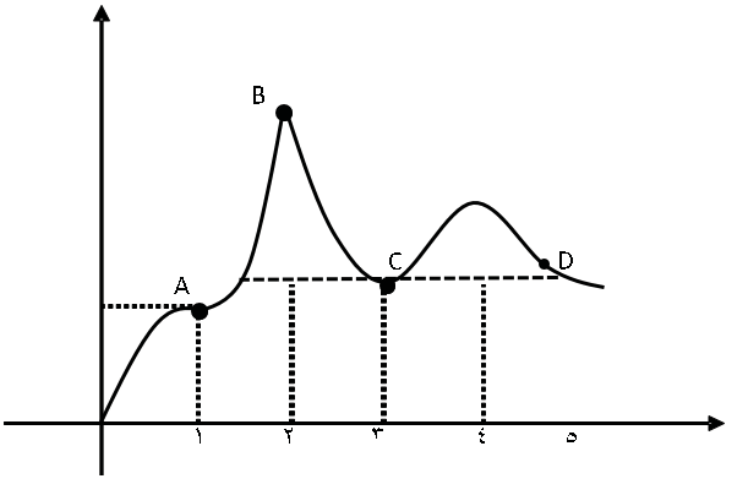
۲) جهت تقعر و نقطه عطف نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ را به دست آورید. (نظام جدید – حسابان ۲ – دی ۹۷)

۳) با توجه به نقاط مشخص شده در نمودار داده شده به سوالات زیر پاسخ دهید. (نظام قدیم – حسابان – خرداد ۸۸)

الف) نقطه عطف تابع کدام است؟ ب) تابع در چه نقطه ای مینمم نسبی دارد؟

ج) تابع در چه نقطه ای ماکزیمم مطلق دارد؟ د) علامت y' در (۲ و ۰) چگونه است؟

هـ) علامت y'' در (۴ و ۲) چگونه است؟ و) تابع در چه نقطه ای مشتق پذیر نیست؟



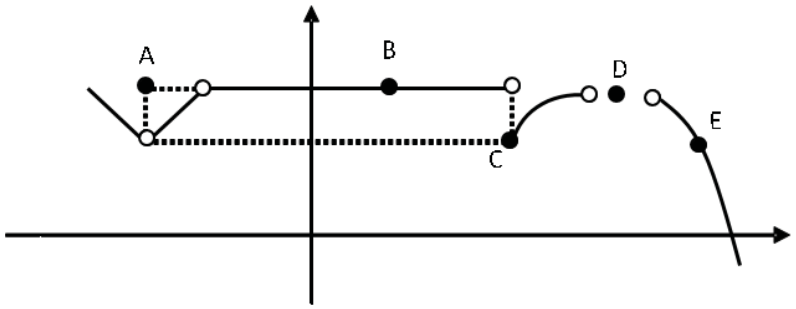
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۴) شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. (نظام قدیم – حسابان – خرداد ۸۷)

الف) کدامیک از نقاط مشخص شده در شکل، نقطه بحرانی نیست؟

ب) کدامیک از نقاط مشخص شده ماکزیمم و مینیمم نسبی می باشد؟

ج) کدام نقطه عطف است؟



۵) با استفاده از آزمون مشتق دوم تعیین کنید تابع $y = \sqrt[3]{x}$ در چه بازه ای تقعر رو به بالا و در چه بازه ای تقعر رو به پایین دارد؟

۶) نمودار $f(x) = |-x^3 + 1|$ را رسم کرده و مختصات نقطه عطف را تعیین کنید.

۷) جهت تغییرات و نقطه عطف تابع $y = x^3 + 3x^2 - 3x - 3$ را در صورت وجود پیدا کنید. (نظام قدیم – دیفرانسیل – خرداد ۹۱)

۸) به ازای چه مقداری برای a نقطه ای به طول ۱ نقطه عطف منحنی $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + 3ax^2$ می باشد؟ (نظام قدیم – دیفرانسیل – شهریور ۹۲)

۹) تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ مفروض است. a و b و c را چنان بیابید که نقطه اکسترمم تابع (۱- و ۱) و طول نقطه عطف آن صفر باشد. (نظام قدیم – ریاضی ۳ – دی ۸۷)

۱۰) معادله خط مماس بر منحنی $y = x^3 - 3x + 1$ را در نقطه عطف منحنی بنویسید. (نظام قدیم – ریاضی ۳ – دی ۸۸)

۱۱) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ محور x ها را در نقطه ای به طول (۱-) قطع کند و نقطه عطفی به طول ۱ داشته باشد. (نظام قدیم – ریاضی – خرداد ۸۷)

۱۲) تابعی درجه سوم مثال بزنید که (۳ و ۲-) نقطه عطف آن باشد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ درس دوم: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن:

۱)

$$f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx \to f''(x) = ۶ax + ۲b \to f''(۱) = ۰ \to ۶a + ۲b = ۰$$

$$f(۱) = ۱ \to a + b - ۱ = ۱ \to a + b = ۲$$

$$\to \begin{cases} ۶a + ۲b = ۰ \\ a + b = ۲ \end{cases} \to a = -۱ \, , b = ۳$$

۲)

$$f'(x) = -۳x^۲ + ۶x \to f''(x) = -۶x + ۶ = ۰ \to x = ۱$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y''		+	۰	-	
y		∪	۳	∩	

(۳ , ۱) : نقطه عطف

۳) الف) A ب) C ج) B

د) مثبت هـ) مثبت و) B

۴) الف) نقطه E بحرانی نیست.

ب) نقاط ماکزیمم نسبی: A و B مینیمم نسبی: C و B

ج) هیچکدام

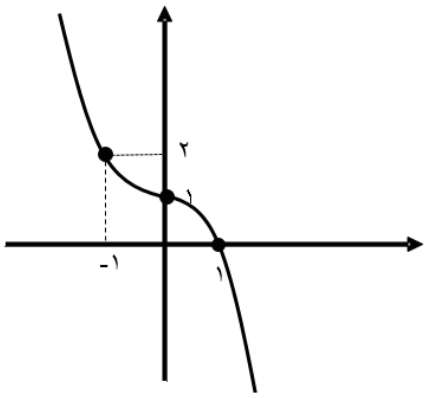
۵)

$$y' = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} \quad x \neq ۰ \to y'' = \frac{-۲}{۹x\sqrt[۳]{x^۲}} \quad x \neq ۰$$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
y''		+	|	-	
y		∪	۰	∩	

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۶) ابتدا نمودار $y = -x^3 + 1$ را رسم می کنیم و سپس قسمتی که زیر محور x هاست را به بالا انتقال می دهیم. (به دلیل قدرمطلق)



در نقطه $x = 0$ تقعر منحنی تغییر می کند

پس (۱ و ۰) نقطه عطف است

البته در $x = 1$ نیز تقعر منحنی تغییر می کند

اما چون تابع در این نقطه دارای

خط مماس نیست، نقطه عطف محسوب نمی شود.

۷)

$$y' = 3x^2 + 6x - 3 \to y'' = 6x + 6 \overset{y''=0}{\Longrightarrow} x = -1$$

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
y''		-	۰	+	
		∩	۲	∪	

نقطه عطف: (۲ و ۱-)

۸)

$$f'(x) = x^3 + 3x^2 + 6ax \to f''(x) = 3x^2 + 6x + 6a \to$$

$$f''(1) = 0 \to 3 + 6 + 6a = 0 \to 9 + 6a = 0 \to a = -\frac{9}{6} = \frac{-3}{2}$$

۹)

$$(1, -1) \epsilon f(x) \to -1 = 1 + a + b + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \to f'(1) = 3 + 2a + b = 0$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$f''(x) = ۶x + ۲a \to f''(۰) = ۲a = ۰ \to a = ۰$$

$$\begin{cases} b + c = -۲ \\ ۳ + b = ۰ \to b = -۳ \end{cases} \to c = ۱$$

(۱۰

$$y' = ۳x^۲ - ۳ \to y'' = ۶x \overset{y''=۰}{\Longrightarrow} x = ۰ \to y = ۱ \to (۰,۱)$$

$$m = y'(۰) = ۳(۰)^۲ - ۳ = -۳$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \to y - ۱ = -۳(x - ۰) \to y = -۳x + ۱$$

(۱۱

$$(-۱,۰)\epsilon f \to ۰ = -۱ + a + b \to a + b = ۱$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax \to f''(x) = ۶x + ۲a \to f''(۱) = ۰ \to ۶ + ۲a = ۰ \to a = -۳$$

$$a + b = ۱ \to -۳ + b = ۱ \to b = ۴$$

۱۲) در تابع درجه سوم نقطه عطف منحنی همان مرکز تقارن آن است، پس:

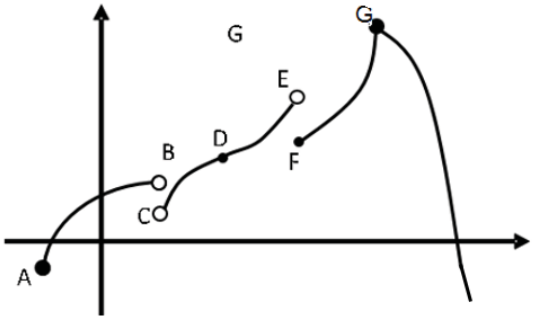
$$f(x) = (x + ۲)^۳ + ۳ \to f(x) = x^۳ + ۶x^۲ + ۱۲x + ۸ + ۳ \to$$

$$f(x) = x^۳ + ۶x^۲ + ۱۲x + ۱۱$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) با توجه به شکل زیر، برای تابع f نقاط خواسته شده را در صورت وجود مشخص کنید.



الف) ماکزیمم نسبی

ب) مینیمم نسبی

ج) ماکزیمم مطلق

د) مینیمم مطلق

هـ) عطف

۲) مقادیر a و b را چنان بیابید که نقطه (۲ و ۱) نقطه عطف تابع $y = ax^3 + bx^2 + 4$ باشد. (نظام قدیم – دیفرانسیل – بزرگسالان خرداد ۹۱)

۳) جهت تقعر و نقطه عطف تابع $f(x) = x^4 + 4x$ را در صورت وجود پیدا کنید.

۴) تابع $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ مفروض است، a و b و c را طوری بیابید که نقطه (۱- و ۱) اکسترمم منحنی و طول نقطه عطف آن ۲ باشد.

۵) هرگاه $A(-1, 1)$ نقطه عطف $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 10$ باشد، بزرگترین بازه از دامنه f را مشخص کنید که تابع در آن بازه نزولی اکید باشد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) الف) G ب) F ج) G د) وجود ندارد. هـ) D

۲)

$$f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx \rightarrow f''(x) = ۶ax + ۲b$$

$$\begin{cases} f''(۱) = ۰ \rightarrow ۶a + ۲b = ۰ \\ f(۱) = ۲ \rightarrow a + b + ۴ = ۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۳a + b = ۰ \\ a + b = -۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۳a + b = ۰ \\ -a - b = ۲ \end{cases} \rightarrow ۲a = ۲ \rightarrow$$

$$a = ۱ , b = -۳$$

۳)

$$y' = ۴x^۳ + ۴ \rightarrow y'' = ۱۲x^۲ \overset{y''=۰}{\Longrightarrow} x = ۰$$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
y''		+	۰	+	
y		∪	۰	∪	

جهت تقعر همواره رو به بالاست و نقطه عطف ندارد.

۴)

$$y' = ۳x^۲ + ۲ax + b$$

$$(۱ , -۱) \text{ اکسترمم} \rightarrow \begin{cases} f(۱) = -۱ \rightarrow ۱ + a + b + c = -۱ \rightarrow a + b + c = -۲ \\ f'(۱) = ۰ \rightarrow ۳ + ۲a + b = ۰ \end{cases}$$

$$x = ۲ \rightarrow \text{نقطه عطف} \rightarrow y''(۲) = ۰ \rightarrow ۶x + ۲a = ۰ \rightarrow ۱۲ + ۲a = ۰ \rightarrow a = -۶$$

$$۳ + ۲a + b = ۰ \rightarrow ۳ - ۱۲ + b = ۰ \rightarrow b = ۹$$

$$a + b + c = -۲ \rightarrow -۶ + ۹ + c = -۲ \rightarrow ۳ + c = -۲ \rightarrow c = -۵$$

۵) ابتدا باید a و b را به دست آوریم.

$$f(-۱) = ۱ \rightarrow f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx - ۱۰ \rightarrow -۱ + a - b - ۱۰ = ۱ \rightarrow a - b = ۱۲$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$f''(-۱) = ۰ \rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b \rightarrow f''(x) = ۶x + ۲a \rightarrow$

$-۶ + ۲a = ۰ \rightarrow ۲a = ۶ \rightarrow a = ۳ , a - b = ۱۲ \rightarrow ۳ - b = ۱۲ \rightarrow b = -۹$

$\rightarrow f(x) = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x - ۱۰ \rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۶x - ۹ = ۰ \rightarrow$

$x^۲ + ۲x - ۳ = ۰ \rightarrow (x + ۳)(x - ۱) = ۰ \rightarrow x = -۳ , x = ۱$

x		-۳		۱	
y'	+	۰	-	۰	+
y	صعودی		نزولی		صعودی

بازه [۳ و ۱-] بزرگترین بازه ای است که تابع در آن نزولی اکید است.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

خود را بیازمائید:

۱) جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = ۱ + \sqrt[۳]{x}$ را در دامنه اش بررسی نموده و نقطه عطف آن را به دست آورید. (نظام قدیم – دیفرانسیل – خرداد ۹۴)

۲) جهت تقعر و نقطه عطف تابع $f(x) = x^۳ - ۳x^۲$ را در صورت وجود پیدا کنید.

۳) تابع $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + ۵x + c$ مفروض است. مقادیر a و b و c را چنان بیابید که $m(-۱ , ۲)$ نقطه عطف تابع بوده و تابع محور عرض ها را در نقطه ۱ قطع کند. (نظام قدیم – ریاضی ۳ – خرداد ۸۹)

۴) تابع $y = x^۳ + ax^۲ + b$ مفروض است، مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که $I(-۲ , ۱)$ نقطه عطف منحنی باشد.

۵) تابع $f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ مفروض است. a، b و c را چنان بیابید که تابع در نقطه ای به طول ۱ دارای مینیمم بوده و $A(۰ , ۱)$ نقطه عطف باشد.

((موفق و سربلند باشید))

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

درس سوم: رسم نمودار تابع:

۱) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+۱}{x-۲}$ را رسم کنید. (نظام جدید – حسابان ۲ – دی ۹۷)

۲) تابع $y = \frac{ax+۲}{bx+۲}$ مفروض است. ضرایب a و b را چنان بیابید که خطوط $x = ۲$ و $y = -۲$ مجانب های آن باشند. (نظام قدیم – حسابان – شهریور ۸۹)

۳) تابع $y = \frac{ax+b}{x+c}$ را در نظر بگیرید. a، b و c را چنان تعیین کنید که منحنی تابع محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۳- قطع کند و دارای مجانبی به معادله $x = -۲$ باشد و خط مماس بر منحنی در نقطه ای به طول ۲ موازی خط $y = \frac{۳}{۴}x - \frac{۵}{۴}$ شود. (نظام قدیم – حسابان – خرداد ۸۸)

۴) تابع $y = \frac{ax+۲}{x+(a-۱)}$ مفروض است. در صورتی که نقطه $O\ (-۲\ ,\ ۳)$ مرکز تقارن تابع باشد، شیب خط مماس بر منحنی تابع را در نقطه تلاقی آن با محور عرض ها بیابید.

۵) از نقاط برخورد نمودار $f(x) = \frac{x-۴}{x-۲}$ با محورهای مختصات دو مماس بر تابع رسم شده است. نشان دهید این دو مماس با یکدیگر موازی اند. (نظام قدیم – حسابان – دی ۸۸)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

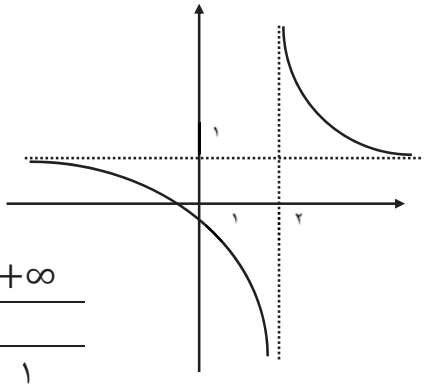
پاسخ درس سوم: رسم نمودار تابع:

۱)

$f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$ $\quad x-۲=۰\rightarrow x=۲$ مجانب قائم

$\lim_{x\to\infty} f(x)=۱\rightarrow y=۱\rightarrow$ مجانب افقی

$y'=\frac{۱(x-۲)-۱(x+۱)}{(x-۲)^۲}=\frac{-۳}{(x-۲)^۲}$



x	$-\infty$		۲		$+\infty$
		-		-	
	۱	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	۱

۲)

$y=\frac{ax+۲}{bx+۲}$ $\quad x=۲$ مجانب قائم $\rightarrow bx+۲=۰\rightarrow ۲b+۲=۰\rightarrow b=-۱$

$y=-۲\rightarrow y=\frac{a}{b}\rightarrow \frac{a}{b}=-۲\rightarrow \frac{a}{-۱}=-۲\rightarrow a=۲$ مجانب افقی

۳)

$(۰,-۳)\rightarrow\ -۳=\frac{b}{c}$

$x+c=۰\rightarrow x=-c\rightarrow -۲=-c\rightarrow c=۲$ مجانب قائم

$\frac{b}{c}=-۳\rightarrow b=-۳c\rightarrow b=-۶$

$y'=\frac{a(x+c)-۱(ax+b)}{(x+c)^۲}=\frac{ac-b}{(x+c)^۲}\rightarrow y'(۲)=\frac{۳}{۴}\rightarrow\frac{۲a+۶}{(۲+۲)^۲}=\frac{۳}{۴}$

$\rightarrow\frac{۲a+۶}{۱۶}=\frac{۳}{۴}\rightarrow ۴(۲a+۶)=۱۶\times ۳\rightarrow ۲a+۶=۱۲\rightarrow ۲a=۶\rightarrow a=۳$

۴)

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\begin{cases} \text{مجانب قائم: } x+(a-۱)=۰ \rightarrow x=-(a-۱) \rightarrow x=۱-a \\ \text{مجانب افقی: } \lim\limits_{x\to\pm\infty} y=a \rightarrow y=a \end{cases}$$

$$\text{مرکز تقارن } O(-۲,۳) \rightarrow \begin{cases} ۱-a=-۲ \rightarrow a=۳ \rightarrow y=\frac{۳x+۲}{x+۲} \rightarrow y'=\frac{۴}{(x+۲)^۲} \\ \rightarrow m=y'(۰)=\frac{۴}{۴}=۱ \end{cases}$$

۵)

$$\begin{matrix} x=۰ \rightarrow y=۲ \rightarrow (۰,۲) \\ y=۰ \rightarrow x=۴ \rightarrow (۴,۰) \end{matrix} \rightarrow f'(x)=\frac{۲}{(x-۲)^۲} \rightarrow \begin{cases} m_۱=f'(۰)=\frac{۱}{۲} \\ m_۲=f'(۴)=\frac{۱}{۲} \end{cases} \rightarrow \text{موازی اند}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+۱}{x-۱}$ را رسم کنید. (نظام جدید – حسابان ۲ – خرداد ۹۸)

۲) تابع با ضابطه $y = \frac{ax+b}{x+c}$ مفروض است. ضرایب a، b و c را به قسمی تعیین کنید که منحنی تابع در نقطه ای به طول صفر دارای خط مماسی با شیب ۲ باشد و نقطه $O'(۱, -۲)$ مرکز تقارن تابع باشد.

۳) نشان دهید تابع هموگرافیک $y = \frac{ax-۲}{x+a+۲}$ برای تمام مقادیر a قبل و بعد از مجانب قائم خود صعودی است، سپس برای $a = ۱$ مرکز تقارن تابع را معین کنید. (نظام قدیم – حسابان – شهریور ۸۷)

۴) تابع $y = ax + b + \frac{x^۲}{x+۲}$ را در نظر بگیرید. a و b را چنان حساب کنید که این تابع هموگرافیک شود و مرکز تقارنش روی خط $y = ۲x$ قرار گیرد. (نظام قدیم – حسابان – خرداد ۸۹)

۵) جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۱$ را رسم کنید. (نظام قدیم – دیفرانسیل – دی ۹۱)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

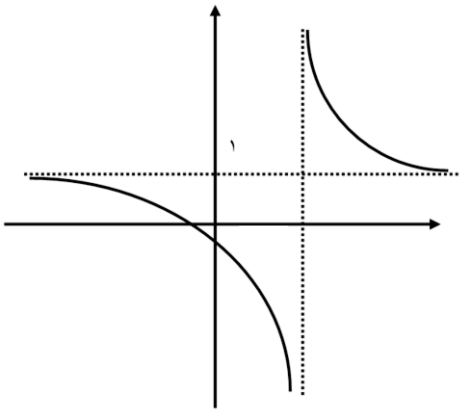
پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر:

(۱)

$f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ $\quad x-۱=۰\rightarrow x=۱$ مجانب قائم

$\lim_{x\to\infty} f(x)=۱\rightarrow y=۱\rightarrow$ مجانب افقی

$y'=\frac{۱(x-۱)-۱(x+۱)}{(x-۱)^۲}=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}$



x	$-\infty$		۰		۱				
y'	-		-						
y	۱	↘	-۱	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	۳	↘	۱

(۲)

$y=\frac{ax+b}{x+c}\rightarrow y'=\frac{a(x+c)-۱(ax+b)}{(x+c)^۲}=\frac{ac-b}{(x+c)^۲}$

$\rightarrow y'(۰)=۲\rightarrow\frac{ac-b}{c^۲}=۲\quad(۱)$

مرکز تقارن محل تقاطع مجانب هاست، بنابراین:

$x=۱$ مجانب قائم $\rightarrow x+c=۰\rightarrow x=-c\rightarrow ۱=-c\rightarrow c=-۱$

$y=-۲$ مجانب افقی $\rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} y=a\rightarrow y=a\rightarrow a=-۲$

$(۱)\ \frac{ac-b}{c^۲}=۲\rightarrow\frac{۲-b}{۱}=۲\rightarrow b=۰$

(۳)

$y'=\frac{a(x+a+۲)-۱(ax-۲)}{(x+a+۲)^۲}=\frac{a^۲+۲a+۲}{(x+a+۲)^۲}$

چون مخرج کسر مثبت (توان دو) و صورت کسر هم به دلیل آنکه $\Delta=-۴<۰$ همواره موافق ضریب $a^۲$ یعنی مثبت است، پس $y'>۰$ لذا تابع قبل و بعد از مجانب خود صعودی است.

$a=۱\rightarrow y=\frac{x-۲}{x+۳}\rightarrow\begin{cases}x+۳=۰\rightarrow x=-۳ & \text{مجانب قائم}\\ \lim_{x\to\pm\infty} y=۱\rightarrow y=۱ & \text{مجانب افقی}\end{cases}\rightarrow$ مرکز تقارن $\rightarrow(-۳,۱)$

(۴)

$$y = ax + b + \frac{x^۲}{x+۲} \to y = \frac{(ax+b)(x+۲)+x^۲}{x+۲} = \frac{ax^۲+۲ax+bx+۲b+x^۲}{x+۲}$$

$$\to y = \frac{x^۲(a+۱)+x(۲a+b)+۲b}{x+۲}$$

تابع هموگرافیک به صورت $\frac{ax+b}{cx+d}$ می باشد، بنابراین:

$$a + ۱ = ۰ \to a = -۱ \to y = \frac{x(b-۲)+۲b}{x+۲}$$

مجانب افقی: $b - ۲$

مجانب قائم: $x = -۲$ $\to$ مرکز تقارن $(-۲ , b - ۲)$

از طرفی مرکز تقارن روی خط $y = ۲x$ قرار می گیرد، پس:

$$b - ۲ = -۴ \to b = -۲$$

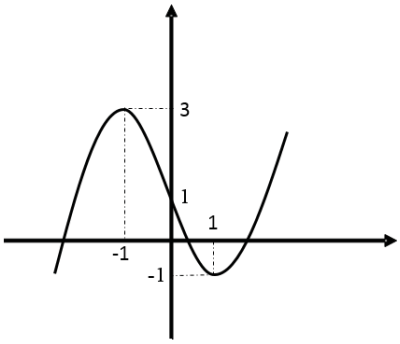
۵)

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۳(x^۲ - ۱) = ۰ \to x^۲ - ۱ = ۰ \to x^۲ = ۱ \to x = \pm ۱$$

$$f''(x) = ۶x = ۰ \to x = ۰$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
f'		+	۰	-		-	۰	+	
f''		-		-	۰	+		+	
f	$-\infty$	↗	۳	↘	۱	↘	-۱	↗	$+\infty$

ردیف مشتق دوم جهت تعقر رانشان میدهد. $\to$



www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

خود را بیازمائید:

۱) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x-۴}$ را رسم کنید. (نظام قدیم – دیفرانسیل – شهریور ۹۳)

۲) جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = -x^{۳} + ۳x$ را رسم کنید. (نظام قدیم – دیفرانسیل – شهریور ۹۲)

۳) از نقاط برخورد محورهای مختصات با منحنی $y = \frac{۲x-۴}{x-۱}$ دو مماس رسم کردیم، شیب این مماس ها را محاسبه کنید. آیا این دو مماس موازی اند؟

۴) در تابع $y = \frac{ax+b}{x+c}$ مقادیر a، b و c را چنان بیابید که (۱ و ۲-) مرکز تقارن بوده و منحنی نمایش تابع محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۳- قطع کند.

((موفق و سربلند باشید))

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

کاربردهای مشتق :ریاضی (۳) (تجربی)

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

درس اول: اکسترمم های تابع:

۱) الف) جدول تغییرات تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید. (نظام جدید – ریاضی ۳ – دی ۹۷)

ب) نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق این تابع را در بازه [۳ و ۱-] مشخص کنید.

۲) اگر تابع $f(x) = ax^۲ + bx$ در $x = ۱$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید. (نظام جدید – ریاضی ۳ – خرداد ۹۸)

۳) اکسترمم های مطلق تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x$ را در بازه [۳ و ۱-] به دست آورید. (نظام جدید – ریاضی ۳ – خرداد ۹۸)

۴) جدول تغییرات $y = -x^۲ + ۲x + ۳$ را رسم کنید. (نظام قدیم – ریاضی ۳ – دی ۸۸)

۵) نقاط بحرانی و ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $y = -x^۳ + ۳x^۲ + ۵$ را در بازه [۳ و ۱-] بیابید. (نظام قدیم – پیش دانشگاهی – خرداد ۸۸)

۶) نقاط بحرانی تابع $y = (x^۲ - ۱)^{\frac{۱}{۳}}$ را مشخص کنید. (نظام قدیم – پیش دانشگاهی – خرداد ۸۸)

۷) مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $g(x) = \frac{۱}{۱+x^۲}$ را روی بازه [۲ و ۱-] در صورت وجود تعیین کنید. (نظام قدیم – پیش دانشگاهی – خرداد ۹۱)

۸) تابع $f(x) = x^۲ + ۲ax + b$ مفروض است. a و b را چنان بیابید که A (۲ , ۴) مینیمم تابع باشد.

۹) یکنوایی تابع $f(x) = x - \sqrt{x}$ را در دامنه تعریفش بررسی کنید.

۱۰) بزرگترین بازه که تابع $f(x) = x^۳ - ۱۵x + ۷$ در آن اکیداً نزولی است را محاسبه کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ درس اول: اکسترمم های تابع:

۱)

الف) $f'(x) = ۶x^۲ + ۶x - ۱۲ = ۰ \rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰ \rightarrow (x+۲)(x-۱) = ۰$

$$\rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۲ \end{cases}$$

x		-۲		۱	
f′	+	۰	-	۰	+
		Max		Min	

ب) $f(۱) = -۷ \ , f(-۲)$ ق ق غ $(-۲ \notin [-۱,۳])$

$f(-۱) = ۱۳ \ , \ f(۳) = ۴۵$

نقاط بحرانی: (۷- و ۱) و (۷- و ۱) min و (۴۵ و ۳) max

۲)

$$f'(x) = ۲ax + b \xrightarrow{f'(۱)=۰} ۲a + b = ۰ \rightarrow b = -۲a$$

$$f(۱) = ۷ \rightarrow ۷ = a + b \rightarrow a - ۲a = ۷ \rightarrow -a = ۷ \rightarrow a = -۷ \, , b = ۱۴$$

۳)

$$f'(x) = ۶x^۲ + ۶x - ۱۲ \rightarrow f'(x) = x^۲ + x - ۲ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = -۲ \notin [-۱,۳] \\ x = ۱ \end{cases}$$

(۷- و ۱) مینیمم مطلق و نقطه (۴۵ و ۳) ماکزیمم مطلق

توجه: این سوال در دی ۹۷ نیز وجود داشت.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴)

$$y' = -۲x + ۲ = ۰ \rightarrow x = ۱ \rightarrow y = ۴$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		+	۰	-	
y	$-\infty$	↗	۴	↘	$-\infty$

۵)

$$y' = -۳x^۲ + ۶x = ۰ \rightarrow -۳x(x-۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \rightarrow y = ۵ \\ x = ۲ \rightarrow y = ۹ \end{cases}$$

$$f(-۱) = ۹ \, , f(۳) = ۵$$

x	-۱		۰		۲		۳
y'		-	۰	+	۰	-	
y	۹	↘	۵	↗	۹	↘	۵
	ماکزیمم مطلق		بحرانی(مینیمم مطلق)		بحرانی(ماکزیمم مطلق)		مینیمم مطلق

۶)

$$y' = \frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}} = ۰ \rightarrow x = ۰ \rightarrow y = -۱$$

$$x^۲ - ۱ = ۰ \rightarrow x^۲ = ۱ \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \rightarrow y = ۰ \\ x = -۱ \rightarrow y = ۰ \end{cases}$$

۷)

$$f'(x) = \frac{-۲x}{(۱+x^۲)^۲} = ۰ \rightarrow x = ۰$$

$f(۰) = ۱$ ماکزیمم مطلق $\quad f(-۱) = \frac{۱}{۲} \quad f(۲) = \frac{۱}{۵}$ مینیمم مطلق

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸)

$$\begin{cases} f(۲) = ۴ \to ۴ + ۴a + b = ۴ \to ۴a + b = ۰ \\ f'(۲) = ۰ \to ۲x + ۲a = ۰ \to ۴ + ۲a = ۰ \to a = -۲ \end{cases} \quad \to b = ۸$$

۹)

$$D_f: [۰, +\infty] \qquad f(x) = x - \sqrt{x} \to f'(x) = ۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{x}} = \frac{۲\sqrt{x}-۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$\to f'(x) = ۰ \to ۲\sqrt{x} - ۱ = ۰ \to \sqrt{x} = \frac{۱}{۲} \to x = \frac{۱}{۴}$$

$$۲\sqrt{x} = ۰ \to x = ۰$$

x	۰		$\frac{۱}{۴}$		$+\infty$
f′		-	۰	+	
	۰	↘	$-\frac{۱}{۴}$	↗	$+\infty$
		اکیداً نزولی		اکیداً صعودی	

۱۰) تابع f در R پیوسته و مشتق پذیر است. f در بازه ای اکیداً نزولی است که مشتق f در آن بازه، منفی باشد، بنابراین:

$$f(x) = x^۳ - ۱۵x + ۷ \to f'(x) < ۰ \to ۳x^۲ - ۱۵ < ۰ \to x^۲ - ۵ < ۰$$

$$\to x^۲ < ۵ \to |x| < \sqrt{۵} \to -\sqrt{۵} < x < \sqrt{۵}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) نقاط بحرانی و ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $y = ۲x^۳ - ۶x - ۱$ را در بازه [۳ و ۲-] بیابید.

۲) طول نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$ را در دامنه اش به دست آورید. (نظام قدیم – دیفرانسیل – شهریور ۹۴)

۳) الف) نقطه بحرانی را تعریف کنید.

ب) نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{x}{x^۲+۱}$ را در صورت وجود تعیین کنید.

۴) در صورت وجود، مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق $f(x) = \sqrt{۹ - x^۲}$ را در دامنه آن تعیین کنید. (نظام قدیم – دیفرانسیل – خرداد ۹۱)

۵) مقادیر a و b را طوری بیابید که نقطه $A\begin{vmatrix} -۱ \\ -۳ \end{vmatrix}$ اکسترمم تابع $f(x) = ax^۳ + bx$ باشد.

۶) تابع $y = ax^۳ + bx + c$ مفروض است. مقادیر a، b و c را چنان بیابید که منحنی نمودار تابع محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۲ قطع کند و نقطه $m(۱ , ۰)$ نقطه مینیمم تابع باشد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱)

$$y' = ۶x^۲ - ۶ = ۰ \to ۶(x^۲ - ۱) = ۰ \to x^۲ - ۱ = ۰ \to \begin{cases} x = ۱ \to y = -۵ \\ x = -۱ \to y = ۳ \end{cases}$$

$$f(-۲) = -۵ \ , \ f(۳) = ۳۵$$

نقاط بحرانی: (۵- و ۱) و (۳ و ۱-) / مینیمم مطلق: (۵- و ۲-) و (۵- و ۱) / ماکزیمم مطلق: (۳۵ و ۳)

۲)

$$D: ۱ - x^۲ \geq ۰ \to -x^۲ \geq -۱ \to x^۲ \leq ۱ \to |x| \leq ۱ \to -۱ \leq x \leq ۱ \to D: [-۱,۱]$$

$f'(x) = \frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^۲}} = ۰ \to -۲x = ۰ \to x = ۰$ نقطه بحرانی

$۲\sqrt{۱ - x^۲} = ۰ \to ۱ - x^۲ = ۰ \to x^۲ = ۱ \to x = \pm ۱$ نقاط بحرانی

۳) الف) نقطه $c \epsilon D_f$ را نقطه بحرانی تابع f می نامند هرگاه $f'(c)$ موجودنباشد یا $f'(c) = ۰$

ب) $f'(x) = \frac{-x^۲+۱}{(x^۲+۱)^۲} \overset{f'=۰}{\Longrightarrow} -x^۲ + ۱ = ۰ \to x^۲ = ۱ \to x = \pm ۱$ نقاط بحرانی

۴)

$$۹ - x^۲ \geq ۰ \to -x^۲ \geq -۹ \to x^۲ \leq ۹ \to |x| \leq ۳ \to -۳ \leq x \leq ۳$$

$$\to D_f: [-۳ \ , ۳]$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{۹-x^۲}} = ۰ \to x = ۰ \to \begin{cases} f(-۳) = ۰ \text{ مینیمم مطلق} \\ f(۰) = ۳ \text{ ماکزیمم مطلق} \\ f(۳) = ۰ \text{ مینیمم مطلق} \end{cases}$$

۵)

$$\begin{matrix} f(-۱) = -۳ \to -a - b = -۳ \\ f'(-۱) = ۰ \to ۳ax^۲ + b = ۰ \to ۳a + b = ۰ \end{matrix} \to \begin{cases} -a - b = -۳ \\ ۳a + b = ۰ \end{cases} \to$$

$$a = -\frac{۳}{۲}, b = \frac{۹}{۲}$$

۶)

$$\begin{matrix} (۰,۲) \to c = ۲ \ , y(۱) = ۰ \to a + b + c = ۰ \to \\ y'(۱) = ۰ \to ۳ax^۲ + b = ۰ \to ۳a + b = ۰ \to \end{matrix} \begin{cases} a + b + ۲ = ۰ \\ -۳a - b = ۰ \end{cases} \to -۲a = -۲$$

$$\to a = ۱ \ , b = -۳$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

خود را بیازمائید:

۱) تابع $f(x) = x^۳ - x^۲ + ۱$ را در نظر گرفته، نقاط بحرانی را تعیین کنید.

۲) نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{-x^۲ + ۴x}$ را پیدا کنید.

۳) نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۱$ را در $\left[-\frac{۳}{۲}, ۳\right]$ به دست آورید.

۴) الف) با رسم نمودار تابع $f(x) = |x - ۲|$ نشان دهید که f در $x = ۲$ چه نوع اکسترمم نسبی دارد؟

ب) آیا $f'(۲)$ موجود است؟ چرا؟ پ) آیا $x = ۲$ طول نقطه بحرانی f است؟ چرا؟

۵) اگر نقطه (۲ و ۱) نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^۳ + ax^۲ + b$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

((موفق و سربلند باشید))

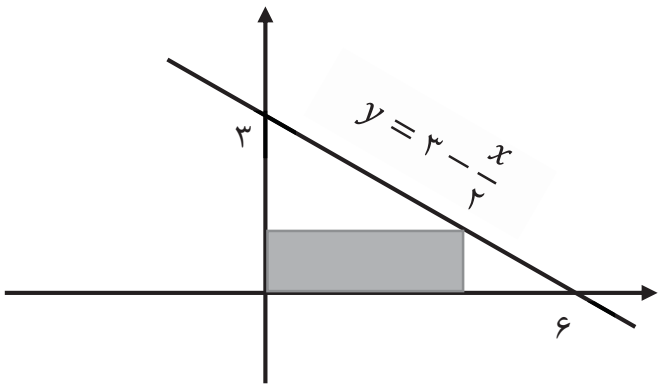
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

درس دوم: بهینه سازی:

۱) اگر محیط یک مستطیل ۲۴ سانتیمتر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود. (نظام جدید – ریاضی ۳ – دی ۹۷)

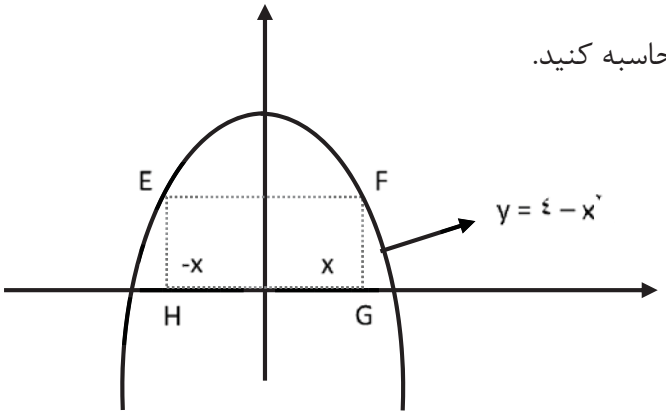
۲) ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می خواهیم از چهار گوشه آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x بر می گردانیم تا یک جعبه درباز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد. (نظام جدید – ریاضی ۳ – خرداد ۹۸)

۳) در شکل زیر، یک مستطیل به محور x ها و y ها و نمودار تابع $y = ۳ - \frac{x}{۲}$ محدود شده است. طول و عرض مستطیل چقدر باشد تا مساحت آن ماکزیمم شود؟ (نظام قدیم – حسابان – خرداد ۸۸)



۴) دو عدد مثبت چنان بیابید که حاصل جمع عدد اول با دو برابر عدد دوم برابر ۲۴ و حاصل ضرب آنها ماکزیمم شود. (نظام قدیم – حسابان – شهریور ۸۸)

۵) در شکل زیر بیشترین مساحت EFGH را محاسبه کنید.



www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۶) بیشترین مساحت مثلث قائم الزاویه با وتر $\sqrt{۱۲}$ را محاسبه کنید.

۷) مجموع دو عدد مثبت برابر ۱۶ است. بزرگترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آنها را پیدا کنید. (نظام قدیم – دیفرانسیل – شهریور ۹۳)

۸) بیشترین مساحت مستطیلی که به وسیله یک طناب به اندازه ۱۲۰ متر در حاشیه یک رودخانه می توان محصور کرد، چند مترمربع است؟

۹) کمترین فاصله نقطه $A\ (۲\ ,\ ۰)$ را از منحنی $y^۲ = ۲x$ حساب کنید.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ درس دوم: بهینه سازی:

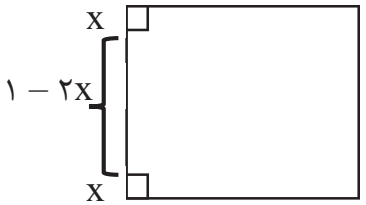
۱)

$$۲(x+y)=۲۴\rightarrow x+y=۱۲\rightarrow y=۱۲-x$$
$$s(x)=xy=x(۱۲-x)=۱۲x-x^{۲}\rightarrow s'(x)=۱۲-۲x=۰\rightarrow x=۶\,,y=۶$$

۲)

$$V(x)=(۱-۲x)^{۲}x=x-۴x^{۲}+۴x^{۳}\rightarrow V'(x)=۱-۸x+۱۲x^{۲}=۰$$
$$\rightarrow \Delta=۶۴-۴۸=۱۶\rightarrow x=\frac{۸\pm۴}{۲۴}\rightarrow$$
$$\begin{cases}x=\frac{۸+۴}{۲۴}=\frac{۱۲}{۲۴}=\frac{۱}{۲}\ \text{غ ق ق}\\ x=\frac{۸-۴}{۲۴}=\frac{۴}{۲۴}=\frac{۱}{۶}\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۳)



$$s=xy=x\left(۳-\frac{x}{۲}\right)=۳x-\frac{x^{۲}}{۲}\rightarrow s'=۰\rightarrow ۳-x=۰\rightarrow x=۳$$
ابعاد مستطیل $\begin{cases}x=۳\\ y=۳-\frac{۳}{۲}=\frac{۳}{۲}\end{cases}$

۴)

$$x+۲y=۲۴\rightarrow y=\frac{۲۴-x}{۲}\rightarrow P=x.y=x\left(\frac{۲۴-x}{۲}\right)=۱۲x-\frac{x^{۲}}{۲}$$
$$\rightarrow P'(x)=۰\rightarrow ۱۲-x=۰\rightarrow x=۱۲\,,y=۶$$

۵)

$$s=۲xy=۲x(۴-x^{۲})=۸x-۲x^{۳}\rightarrow s'=۰$$
$$۸-۶x^{۲}=۰\rightarrow -۶x^{۲}=-۸\rightarrow x^{۲}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}\rightarrow x=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$
$$y=۴-x^{۲}=۴-\frac{۴}{۳}=\frac{۸}{۳}\rightarrow s=۲xy=۲\times\frac{۲}{\sqrt{۳}}\times\frac{۸}{۳}=\frac{۳۲}{۳\sqrt{۳}}$$

توجه:

x		$\frac{۲}{\sqrt{۳}}$	
s'	+	۰	-
s	↗	$\frac{۳۲}{۳\sqrt{۳}}$	↘

۶)

$$x^{۲}+y^{۲}=۱۲\rightarrow y^{۲}=۱۲-x^{۲}\rightarrow y=\sqrt{۱۲-x^{۲}}$$
$$s=\frac{۱}{۲}xy=\frac{۱}{۲}x\sqrt{۱۲-x^{۲}}\rightarrow s'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۲-x^{۲}}+\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱۲-x^{۲}}}\times\frac{۱}{۲}x=۰$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$\rightarrow \frac{۱۲-x^۲-x^۲}{۲\sqrt{۱۲-x^۲}} = ۰ \rightarrow ۱۲ - ۲x^۲ = ۰ \rightarrow -۲x^۲ = -۱۲ \rightarrow x^۲ = ۶ \rightarrow$

$x = \sqrt{۶} \rightarrow y = \sqrt{۱۲ - x^۲} = \sqrt{۱۲ - ۶} = \sqrt{۶}$

$s = \frac{۱}{۲}xy = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۶} \times \sqrt{۶} = ۳$

۷)

$x + y = ۱۶ \rightarrow y = ۱۶ - x \rightarrow P(x) = xy = x(۱۶ - x) = ۱۶x - x^۲$

$P'(x) = ۰ \rightarrow ۱۶ - ۲x = ۰ \rightarrow x = ۸ , y = ۸ \rightarrow P_{max} = ۸ \times ۸ = ۶۴$

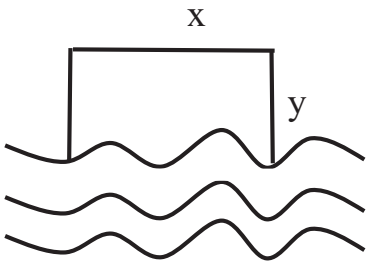
۸)

$x + ۲y = ۱۲۰ \rightarrow y = \frac{۱۲۰-x}{۲}$

$s = xy = x\left(\frac{۱۲۰-x}{۲}\right) = x\left(۶۰ - \frac{x}{۲}\right) = ۶۰x - \frac{x^۲}{۲}$

$\rightarrow s' = ۰ \rightarrow ۶۰ - x = ۰ \rightarrow x = ۶۰ \rightarrow y = ۳۰$

$\rightarrow s_{max} = ۶۰ \times ۳۰ = ۱۸۰۰$



۹) فاصله نقطه A (۲ , ۰) از نقطه B (x , y) روی منحنی $y^۲ = ۲x$ عبارت است از:

$d = \sqrt{(۲ - x)^۲ + (۰ - y)^۲} = \sqrt{۴ - ۴x + x^۲ + y^۲} = \sqrt{۴ - ۴x + x^۲ + ۲x} = \sqrt{x^۲ - ۲x + ۴}$

$d' = ۰ \rightarrow \frac{۲x-۲}{۲\sqrt{x^۲-۲x+۴}} = ۰ \rightarrow ۲x - ۲ = ۰ \rightarrow ۲x = ۲ \rightarrow x = ۱$

$\rightarrow d(۱) = \sqrt{۱ - ۲ + ۴} = \sqrt{۳}$ کمترین فاصله

$y^۲ = ۲x \rightarrow y^۲ = ۲ \rightarrow y = \pm\sqrt{۲} \rightarrow B\left(۱, \sqrt{۲}\right), c\left(۱, -\sqrt{۲}\right)$

دو نقطه با این خاصیت وجود دارند.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل ششم

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

هندسه :ریاضی (۳) (تجربی)

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی:

۱) در جای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.

هرچه خروج از مرکز بیضی ..... (کوچکتر- بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد. (نظام جدید- ریاضی- خرداد ۹۸)

۲) درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید (نظام جدید- ریاضی- خرداد ۹۸)

شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه به صورت مخروط توپر می‌باشد.

(درست، نادرست)

۳) در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است. فاصله کانونی بیضی را به دست آورید. (نظام جدید- ریاضی- خرداد ۹۸)

۴) در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید. (نظام جدید- ریاضی- دی ۹۷)

شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن برابر ..... است.

۵) در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟ (نظام جدید- ریاضی- خرداد ۹۸)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی:

۱) کوچکتر

۲) این سوال ابهام دارد. با توجه به دو سوالی که در کتاب درسی صفحات ۱۲۳ و ۱۲۵ همراه شکل آمده است برای پاسخگویی ۲ تصور مختلف می‌توانیم داشته باشیم. بهتر بود سوال به صورت: شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه توپر حول محور یک مخروط توپر می‌شود نگاشته می‌شد که عبارت درستی است.

توجه: بدون داشتن شکل (طبق کتاب درسی) عبارت داده شده در سوال هم می‌تواند درست باشد هم نادرست.

۳)

$$۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴, ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$
$$c^۲ = a^۲ - b^۲ \Rightarrow c^۲ = ۱۶ - ۹ = ۷ \Rightarrow c = \sqrt{۷} \Rightarrow ۲c = ۲\sqrt{۷}$$

۴) کره توخالی

۵)

$$۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴, ۲b = ۶, b = ۳, c^۲ = a^۲ - b^۲ \Rightarrow c^۲ = ۱۶ - ۹ = ۷ \Rightarrow c = \sqrt{۷}$$
$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) مستطیلی را حول طول آن دوران داده ایم:

الف) شکل حاصل چه نام دارد؟

ب) اگر ابعاد مستطیل ۳ و ۵ سانتی متر باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه افقی با این مستطیل دوران داده شده را محاسبه کنید.

۲) سطح مقطع استوانه توپر با صفحه‌های افقی، عمودی و مایل که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشند چه شکل هایی است؟

۳) کانون‌های یک بیضی نقاط $(۲,۵)$ و $(۲,۹)$ هستند، فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

۴) جاهای خالی را پر کنید.

الف) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره خط دیگری که بر آن عمود است ..... می‌باشد.

ب) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن ..... می‌باشد.

ج) سطح مقطع یک جعبه توخالی به شکل مکعب مستطیل در برخورد با صفحه‌ای قائم به شکل ..... و در برخورد با صفحه‌ای افقی به شکل ..... و در برخورد با صفحه‌ای مایل به شکل ..... می‌باشد.

۵) خروج از مرکز یک بیضی $\frac{۲}{۳}$ و اندازه قطر بزرگ آن ۱۲ است. اندازه قطر کوچک و فاصله کانونی بیضی را به دست آورید.

۶) اندازه قطر بزرگ و قطر کوچک یک بیضی به ترتیب ۴ و ۶ می‌باشد. خروج از مرکز و فاصله کانونی را محاسبه کنید.

۷) نقاط $F(-۴,۴)$ و $F'(۴,۴)$ کانون‌های یک بیضی‌اند. اگر بزرگترین قطر بیضی برابر ۱۶ باشد، مختصات دو سر قطر بزرگ و خروج از مرکز بیضی را بدست آورید.

۸) در یک بیضی $A(۶,۲)$ و $A'(-۲,۲)$ دو رأس قطر بزرگ آن بوده و خروج از مرکز بیضی $e = \frac{۳}{۴}$ است. مختصات مرکز بیضی و اندازه قطر کوچک را محاسبه کنید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ و قطر کوچک به ترتیب ۸ و ۴ می‌باشد. اگر مرکز بیضی $O(۳,-۲)$ باشد، فاصله کانونی و مختصات کانون‌ها را محاسبه کنید.

۱۰) فاصله کانونی یک بیضی برابر $۴\sqrt{۳}$ و مجموع طول قطر بزرگ و قطر کوچک برابر ۸ است. خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.

۱۱) خروج از مرکز بیضی که $A'|_{۲}^{۳}$ رأس کانونی و $B'|_{۲}^{-۱}$ رأس غیرکانونی آن باشد را محاسبه کنید.

۱۲) خروج از مرکز یک بیضی عمودی $\frac{۲}{۳}$ و مرکز آن $(۴,۱)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. مختصات دو سر قطر بزرگ بیضی را حساب کنید.

۱۳) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف- شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن برابر است با .....

ب) اگر یک لوزی با طول قطرهای ۳ و ۵ را حول قطر بزرگ آن دوران دهیم، حجم شکل حاصل برابر است با .....

ج) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه توپر حول محور ..... است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) الف) استوانه

ب) سطح مقطع یک دایره است که شعاع آن با عرض مستطیل برابر است، پس:

$$\text{مساحت سطح مقطع} = \pi r^{۲} = \pi \times ۳^{۲} = ۹\pi$$

۲) با صفحه افقی دایره، با صفحه عمودی مستطیل و با صفحه مایل یک بیضی است.

۳) این بیضی قائم است، چون کانون‌های آن طول‌های مساوی دارند.

بنابراین اختلاف عرض‌های کانون‌ها برابر $۲c$ می‌باشد:

$$۲c = ۹ - ۵ = ۴ \Rightarrow \text{فاصله کانونی} = ۴$$

$$\text{مختصات مرکز بیضی } \left(\frac{۲+۲}{۲}, \frac{۹+۵}{۲}\right) = (۲,۷)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{معادله قطر بزرگ} \Rightarrow x = ۲ \\ \text{معادله قطر کوچک} \Rightarrow y = ۷ \end{cases}$$

۴) الف) دایره ب) نیم کره ج) مستطیل- مستطیل- مستطیل یا مثلث

۵)

$$۲a = ۱۲ \Rightarrow a = ۶$$

$$e = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{c}{۶} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow c = ۴$$

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \Rightarrow b^{۲} = a^{۲} - c^{۲} \Rightarrow b^{۲} = ۳۶ - ۱۶ = ۲۰ \Rightarrow b = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

$$\text{فاصله کانونی} = ۲c = ۲ \times ۴ = ۸ \quad \text{و} \quad \text{قطر کوچک} = ۲b = ۴\sqrt{۵}$$

۶)

$$۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳, \qquad ۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲, c^{۲} = a^{۲} - b^{۲} = ۹ - ۴ = ۵$$

$$\Rightarrow \mathrm{c} = \sqrt{۵} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}, \quad \text{فاصله کانونی} = ۲c = ۲\sqrt{۵}$$

۷) این بیضی افقی است، چون کانون‌های آن عرض‌های مساوی دارند. بنابراین:

$$۲c = ۴ - (-۴) = ۸ \Rightarrow c = ۴, ۲a = ۱۶ \Rightarrow a = ۸$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$O(\frac{-۴+۴}{۲},\frac{۴+۴}{۲}) \Rightarrow O(۰,۴)$$

$$A(۰+۸,۴),\ \ A'(۰-۸,۴) \Rightarrow A(۸,۴), A'(-۸,۴)$$

۸)

$$O\left(\frac{۶-۲}{۲},\frac{۲+۲}{۲}\right) = (۲,۲)$$

$$۲a = |۶-(-۲)| = ۸ \Rightarrow a = ۴, e = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{c}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \mathrm{c} = ۳, \mathrm{b}^{۲} = a^{۲} - c^{۲} \Rightarrow b^{۲} = ۱۶ - ۹ = ۷ \Rightarrow b = \sqrt{۷} \Rightarrow ۲b = ۲\sqrt{۷}$$

۹)

$$۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴, ۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲ \Rightarrow c^{۲} = a^{۲} - b^{۲} = ۱۶ - ۴ = ۱۲$$

$$c = \sqrt{۱۲},\ \text{فاصله کانونی} = ۲c = ۲\sqrt{۱۲}$$

$$F\left(\sqrt{۱۲}+۳,-۲\right), \qquad F'\left(-\sqrt{۱۲}+۳,-۲\right)$$

توجه: چون بیضی افقی است، عرض کانون‌ها با عرض مرکز بیضی مساوی است.

۱۰)

$$۲c = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow c = ۲\sqrt{۳}$$

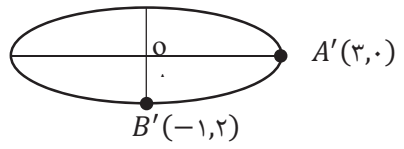
$$۲a + ۲b = ۸ \Rightarrow a + b = ۴ \quad (۱)$$

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \Rightarrow c^{۲} = a^{۲} - b^{۲} \Rightarrow \left(۲\sqrt{۳}\right)^{۲} = (a-b)(a+b) \overset{(۱)}{\Longrightarrow}$$

$$۱۲ = ۴(a-b) \Rightarrow a - b = ۳ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow ۲a = ۷ \Rightarrow a = \frac{۷}{۲} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۲\sqrt{۳}}{\frac{۷}{۲}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۷}$$

۱۱) یک شکل فرضی رسم می‌کنیم تا اطلاعات مساله دقیقتر مشخص شود:



در این بیضی عرض همه نقاط روی قطر اصلی برابر صفر و طول همه نقاط روی قطر اصلی برابر ۱−

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

می‌باشدبنابراین:

$$\Rightarrow O(-۱,۰) \Rightarrow OA' = \sqrt{\left(۳-(-۱)\right)^۲ + (۰-۰)^۲} = \sqrt{۱۶} = ۴ \Rightarrow a = ۴$$

$$OB' = \sqrt{\left(-۱-(-۱)\right)^۲ + (۲-۰)^۲} = \sqrt{۰^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۴} = ۲ \Rightarrow b = ۲$$

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ \Rightarrow c^۲ = ۱۶ - ۴ = ۱۲ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(۱۲

$$۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۲}{۳} \quad (۱)$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{\div a^۲} ۱ = \left(\frac{b}{a}\right)^۲ + \left(\frac{c}{a}\right)^۲ \xrightarrow{(۱)} ۱ = \left(\frac{۳}{a}\right)^۲ + \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۳}{\mathrm{a}}\right)^۲ = ۱ - \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{۹} \Rightarrow \frac{۹}{a^۲} = \frac{۵}{۹} \Rightarrow a^۲ = \frac{۸۱}{۵} \Rightarrow$$

$$a = \frac{۹}{\sqrt{۵}} \Rightarrow A|^{۴}_{۱+\frac{۹}{\sqrt{۵}}} \quad A'|^{۴}_{۱-\frac{۹}{\sqrt{۵}}}$$

۱۳) الف) دو مخروط هم قاعده

ب) حجم حاصل برابر حجم دو مخروط با ارتفاع $\frac{۵}{۲}$ و شعاع $\frac{۳}{۲}$ است. پس:

$$\text{حجم شکل حاصل} = ۲ \times \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = ۲ \times \frac{۱}{۳} \times \pi \times \left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ \times \frac{۵}{۲}$$

$$= \frac{۲}{۳}\pi \times \frac{۹}{۴} \times \frac{۵}{۲} = \frac{۱۵\pi}{۴}$$

پ) مخروط توپر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

خود را بیازمائید:

۱) اگر $F(-۱,۱)$ و $F'(-۳,۱)$ دو کانون بیضی با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشند، طول قطرهای کوچک و بزرگ بیضی را بیابید.

۲) در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۱۲ و قطر کوچک ۱۰ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(-۱, ۲)$ باشد:

الف) فاصله کانونی بیضی را بیابید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک بیضی را مشخص کنید.

۳) خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن $(-۱, -۲)$ و طول قطر کوچک آن ۸ واحد است. مختصات دو سر قطر بزرگ بیضی را پیدا کنید.

۴) در یک بیضی مختصات دو سر قطر بزرگ $A(۷,۳)$ و $A'(-۳,۳)$ است. اگر فاصله دو رأس فرعی بیضی برابر ۶ باشد، خروج از مرکز و مختصات دو سر قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید.

۵) حجم شکل حاصل از دوران یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ تر را بیابید.

۶) خروج از مرکز یک بیضی $\frac{\sqrt{۷}}{۵}$ است. در صورتیکه طول قطر کوچک آن ۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.

۷) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) اگر صفحه p سطح مخروطی را، هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را ..... می‌نامیم.

ب) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره خط دیگر که بر آن عمود است ..... می‌باشد.

ج) شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود ..... آن نامیده می‌شود.

۸) اگر مستطیلی به طول ۳ و عرض ۲ را حول عرضش دوران دهیم، حجم جسم حاصل را محاسبه کنید.

۹) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطرش یک ..... ایجاد می‌شود که شعاعش برابر شعاع ..... است.

ب) از دوران یک دایره حول یکی از قطرهایش یک ..... که شعاعش برابر شعاع ..... است.

۱۰) یک لوزی با قطرهای ۴ و ۶ را حول قطر کوچکش دوران می‌دهیم حجم جسم حاصل را محاسبه کنید.

موفق و سربلند باشید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

درس دوم: دایره

۱) وضعیت دو دایره به معادلات $(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۱$ و $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$ را نسبت به هم مشخص کنید. (نظام قدیم- ریاضی (۳)- خرداد ۹۸)

۲) معادله گسترده دایره‌ای به صورت $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۶=۰$ می‌باشد. مرکز و شعاع دایره را بنویسید. (نظام جدید- ریاضی (۳)- دی ۹۷)

۳) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-۱,۳)$ و خط $۴x-۳y-۲=۰$ بر آن مماس باشد. (نظام قدیم- پیش دانشگاهی- تیر ۸۸)

۴) معادله دایره‌ای را بنویسید که از دو نقطه $A(۲,-۳)$ و $B(-۴,-۱)$ بگذرد و AB قطر آن باشد. (نظام قدیم- پیش دانشگاهی- خرداد ۸۷)

۵) در نقطه $A(۲,۳)$ روی دایره $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماس رسم کرده ایم. معادله این خط مماس را بدست آورید. (نظام جدید- هندسه ۳- خرداد ۹۸)

۶) معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=-۵$ بر آن مماس باشد. (نظام جدید- هندسه ۳- خرداد ۹۸)

۷) معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(۴,-۱)$ و $B(-۲,۱)$ دو سر قطری از آن باشد. (نظام جدید- هندسه ۳- دی ۹۷)

۸) حدود a را طوری بدست آورید که $x^۲+y^۲-۳x+۵y+a=۰$ بتواند معادله یک دایره باشد. (نظام جدید- هندسه ۳- دی ۹۷)

۹) دایره‌های $x^۲+y^۲-۲x=۴$ و $x^۲+y^۲=۴$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (نظام جدید- هندسه ۳- دی ۹۷)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ درس دوم: دایره

۱) دو دایره متخارج هستند، زیرا:

$$O_۱(-۱,۲), r_۱ = ۱ \quad O_۲(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) \Rightarrow O_۲(۱,-۲)$$

$$r_۲ = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۱۶ - ۴} = \frac{۱}{۲} \times ۴ = ۲$$

$$d = \sqrt{(-۱ - ۱)^۲ + (۲ + ۲)^۲} = \sqrt{۲۰} \Rightarrow \sqrt{۲۰} > ۱ + ۲ = ۳$$

۲)

$$O\left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right) = (۳,-۱)$$

$$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶ + ۴ - ۲۴} = ۲$$

۳)

$$R = \frac{|۴(-۱) - ۳(۳) - ۲|}{\sqrt{۱۶ + ۹}}$$

$$(x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow (x + ۱)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۹$$

۴)

$$O\left(\frac{-۴ + ۲}{۲}, \frac{-۱ - ۳}{۲}\right) = (-۱,-۲)$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴ - ۲)^۲ + (-۱ + ۳)^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶ + ۴} = \sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow (\mathrm{x} - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow (x + ۱)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۱۰$$

۵)

$$O\left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right) \Rightarrow O(۱,۱) \Rightarrow M_{OA} = \frac{۱ - ۳}{۱ - ۲} = ۲ \Rightarrow m' = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y - ۳ = -\frac{۱}{۲}(x - ۲) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x + ۴$$

۶)

$$\begin{cases} x + y = ۱ \\ x - y = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ y = -۱ \end{cases} \Rightarrow O(۲,-۱)$$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

چون خط $۴x + ۳y = -۵$ بر دایره مماس است، فاصله مرکز تا این خط برابر شعاع دایره است.

$$r = \frac{|۴(۲) + ۳(-۱) + ۵|}{\sqrt{۴^۲ + ۳^۲}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۴$$

۷)

$$O\left(\frac{۴-۲}{۲}, \frac{-۱+۱}{۲}\right) = (۱,۰)$$

$$|AB| = \sqrt{(۴+۲)^۲ + (-۱-۱)^۲} = \sqrt{۳۶+۴} = ۲\sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow \mathrm{r} = \frac{۲\sqrt{۱۰}}{۲} = \sqrt{۱۰} \Rightarrow (x-۱)^۲ + y^۲ = ۱۰$$

۸)

$$a^۲ + b^۲ - ۴c > ۰ \Rightarrow ۹ + ۲۵ - ۴a > ۰ \Rightarrow -۴a > -۳۴ \Rightarrow$$

$$a < \frac{۳۴}{۴} \Rightarrow a < \frac{۱۷}{۲}$$

۹)

$$O(۰,۰), O'(۱,۰), r = ۲, r' = \sqrt{۵}$$

$$OO' = \sqrt{۱^۲ + ۰} = ۱ \Rightarrow |r - r'| = \left|۲ - \sqrt{۵}\right| = \sqrt{۵} - ۲ < OO' < \sqrt{۵} + ۲$$

بنابراین دو دایره متقاطع اند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) معادله خطی را بنویسید که در نقطه $A(۳,-۳)$ بر دایره به معادله $(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۹$ مماس باشد.

۲) معادله دایره‌ای را بیابید که مرکز آن $(۱,-۱)$ بوده و بر خط به معادله $x-۲y=۱$ مماس باشد.

۳) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $(-۱,۴)$ باشد و روی خط به معادله $۴x-۳y+۱=۰$ وتری به طول ۴ جدا کند.

۴) معادله گسترده دایره‌ای به شکل $x^۲+y^۲-۴x-۶y+۸=۰$ می‌باشد. مختصات مرکز و اندازه شعاع آن را تعیین کنید و معادله دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

۵) وضعیت خط $y=x-۲$ را نسبت به دایره $x^۲+y^۲=۴$ بررسی کنید. در صورت وجود مختصات نقاط اشتراک را حساب کنید.

۶) مرکز دایره‌ای نقطه $(-۲,-۳)$ و شعاع آن $\sqrt{۳}$ است. معادله استاندارد دایره را بنویسید و سپس محل تلاقی این دایره را با خط $y=-۳$ در صورت وجود پیدا کنید.

۷) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(۲,۰)$ بوده و با دایره $x^۲+y^۲-۲x=۸$ مماس داخل باشد.

۸) معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $۲x-y-۳=۰$ مماس بوده و مرکز آن $(۲,-۳)$ باشد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱) می‌دانیم شعاع وارد بر نقطه تماس بر خط مماس عمود است. بنابراین:

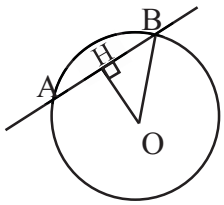
$$A(۳,-۳), O(-۱,۲) \Rightarrow m_{OA} = \frac{-۳-۲}{۳-(-۱)} = \frac{-۵}{۴} \overset{\text{عمود}}{\Longrightarrow} m' = \frac{۴}{۵}$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y - (-۳) = \frac{۴}{۵}(x - ۳) \Rightarrow y = \frac{۴}{۵}x - \frac{۱۲}{۵} - ۳$$

$$\Rightarrow y = \frac{۴}{۵}x - \frac{۲۷}{۵}$$

۲) $r = \frac{|۱-۲(-۱)-۱|}{\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \Rightarrow$ معادله دایره : $(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = \frac{۴}{۵}$

۳) برای راحتی کار شکلی ترسیم می‌کنیم.



$$AB = ۴ \Rightarrow BH = ۲$$

فاصله مرکز تا وتر $O(-۱,۴) \Rightarrow OH = \frac{|۴(-۱)-۳(۴)+۱|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$

$$OB^۲ = OH^۲ + BH^۲ = (۳)^۲ + ۲^۲ = ۹ + ۴ = ۱۳ \Rightarrow r = \sqrt{۱۳}$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲ + (y-۴)^۲ = ۱۳$$

۴)

$$x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y + ۸ = ۰ \Rightarrow O\left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right) = \left(\frac{۴}{۲}, \frac{۶}{۲}\right) = (۲,۳)$$

$$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ + ۳۶ - ۳۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰} = \sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۵$$

۵)

$$x^۲ + y^۲ = ۴ \Rightarrow O(۰,۰), R = ۲$$

فاصله مرکز را تا خط $y = x - ۲$ حساب می‌کنیم:

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$OH = \frac{|۱(۰) - ۱(۰) - ۲|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} \Rightarrow OH < R$$

بنابراین خط دایره را در ۲ نقطه قطع می‌کند. حال، مختصات نقطه تقاطع را حساب می‌کنیم.

$$x^۲ + y^۲ = ۴ \xrightarrow{y=x-۲} x^۲ + (x-۲)^۲ = ۴ \Rightarrow x^۲ + x^۲ - ۴x + ۴ = ۴$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow ۲x(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = ۰ - ۲ = -۲ \\ x = ۲ \Rightarrow y = ۲ - ۲ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}(۰,-۲), \mathrm{B}(۲,۰)$$

۶)

$$(x+۳)^۲ + (y+۲)^۲ = ۳ \xrightarrow{y=-۳} (x+۳)^۲ + (-۱)^۲ = ۳ \Rightarrow$$

$$(x+۳)^۲ = ۳ - ۱ \Rightarrow (x+۳)^۲ = ۲ \Rightarrow x + ۳ = \pm\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{۲} - ۳ \\ x = -\sqrt{۲} - ۳ \end{cases}$$

۷)

$$x^۲ - ۲x + y^۲ = ۸ \Rightarrow O(۱,۰)$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + ۰^۲ - ۴(-۸)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶} = ۳$$

برای مماس درون باید داشته باشیم: $OO' = |R - R'|$

$$O'(۲,۰) \Rightarrow OO' = \sqrt{۱^۲ + ۰^۲} = \sqrt{۱} = ۱$$

$$\Rightarrow ۱ = |۳ - R'| \Rightarrow ۳ - R' = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} R' = ۲ \\ R' = ۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲ + (y-۰)^۲ = ۴, \qquad (x-۲)^۲ + (y-۰)^۲ = ۱۶$$

۸) می‌دانیم خط مماس بر دایره در نقطه تماس با دایره بر شعاع آن دایره عمود است. بنابراین:

$$۲x - y - ۳ = ۰, \qquad O(۲,-۳) \Rightarrow OH = R = \frac{|۲ \times ۲ - (-۳) - ۳|}{\sqrt{۲^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۳)^۲ = \frac{۱۶}{۵}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

خود را بیازمائید:

۱) معادله دایره‌ای که بر خط $۲x - ۳y + ۱ = ۰$ مماس بوده و مرکز آن $(-۲,۰)$ باشد، را بنویسید.

۲) وضعیت دو دایره $x^۲ + y^۲ + ۸x - ۴y + ۱۲ = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۴$ را مشخص کنید.

۳) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ای به مختصات $(-۵, -۵)$ باشد و با دایره به معادله $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y + ۶ = ۰$ مماس بیرون باشد.

۴) وضعیت خط $x - y = ۳$ را نسبت به دایره $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۱ = ۰$ بررسی کنید.

۵) هرگاه دو دایره $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y = ۳$ و $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۲y = k$ مماس بیرون باشند، مقدار k را بیابید.

موفق و سربلند باشید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل هفتم

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

احتمال: ریاضی (۳) (تجربی)

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

قانون احتمال کل:

۱) یک سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال این که دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود، چقدر است؟ (نظام قدیم- ریاضی (۳)- دی ۹۷)

۲) سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی است. ظرف دوم شامل ۷ مهره سبز و ۳ مهره آبی است. ظرف سوم شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟ (نظام جدید- ریاضی (۳)- خرداد ۹۷)

۳) فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۰۹ و به فرزند دختر ۰/۰۷ باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند انتظار فرزندی را دارند. (نظام قدیم- پیش دانشگاهی- ۸۶)

الف) احتمال اینکه فرزند آنها سالم باشد، چقدر است؟

ب) اگر بدانیم این فرزند پسر است، احتمال سالم بودن آن چقدر است؟

۴) سه ظرف داریم. ظرف اول شامل ۴ مهره سیاه و ۵ مهره سفیدوظرف دوم شامل ۲مهره سیاه و۴مهره سفید وظرف سوم فقط شامل ۷مهره سفید است. یک ظرف به تصادف انتخاب نموده و مهره‌ای به تصادف از آن بیرون می‌آوریم. احتمال سیاه بودن آن چقدر است؟

۵) ۵۴٪ جمعیت کشوری را زنان و بقیه را مردان تشکیل می‌دهند. اگر ۱۵٪ زنان و ۴۰٪ مردان این کشور تحصیلات دانشگاهی داشته باشند و یک نفر از این کشور را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه فرد انتخاب شده دارای تحصیلات دانشگاهی باشد، چقدر است؟

۶) در دو ظرف به ترتیب ۲۴ و ۱۸ مهره یکسان موجود است. در ظرف اول ۶ مهره سفید و در ظرف دوم ۳ مهره سفید قرار دارد. از اولی ۷ مهره و از دومی ۵ مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری می‌ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (تست گسسته- کنکور ۹۴)

۷) در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبه اول ۴ عدد و در جعبه دوم ۳ عدد لامپ معیوب اند. از اولی ۸ و از دومی ۶ لامپ به تصادف برداشته و در جعبه قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است؟ (تست گسسته- کنکور ۹۸)

۸) در جعبه‌ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رؤیت خارج می‌کنیم، سپس از بین بقیه مهره ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهره اخیر سفید است؟ (تست کنکور نظام جدید تجربی ۹۸)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ قانون احتمال کل:

۱)

$$P(A)=\frac{۱}{۲}+\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)\times ۳=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۱۶}=\frac{۱۱}{۱۶}$$

۲)

$$P(A)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۹}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۱۰}+\frac{۱}{۳}\times ۰=\frac{۶۷}{۲۷۰}$$

۳) E را سالم بودن فرزند در نظر می‌گیریم. بنابراین:

الف) $P(E)=\frac{۱}{۲}(۱-۰/۰۹)+\frac{۱}{۲}(۱-۰/۰۷)=\frac{۱}{۲}\times ۰/۹۱+\frac{۱}{۲}\times ۰/۹۳=۰/۹۲$

ب) $P\left(E\middle|\text{پسر}\right)=۱-۰/۰۹=۰/۹۱$

۴) A را سیاه بودن مهره در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$P(A)=\left(\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۹}\right)+\left(\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۶}\right)+\left(\frac{۱}{۳}\times\frac{۰}{۷}\right)=\frac{۴}{۲۷}+\frac{۱}{۹}=\frac{۷}{۲۷}$$

۵) A را داشتن تحصیلات دانشگاهی فرض کنیم:

$$P(A)=٪۵۴\times٪۱۵+٪۴۶\times٪۴۰=٪۰۱۵$$

۶) A را سفید بودن مهره در نظر می‌گیریم:

$$P(A)=\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۶}{۲۴}+\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۳}{۱۸}=\frac{۳۱}{۱۴۴}$$

در واقع

$P(A)=$ مهره سفید ظرف دوم و مهره از ظرف دوم خارج $+$ مهره سفید ظرف اول و مهره از ظرف اول خارج

۷) A را معیوب بودن لامپ انتخابی در نظر می‌گیریم:

$$P(A)=\frac{۸}{۱۴}\times\frac{۴}{۲۴}+\frac{۶}{۱۴}\times\frac{۳}{۱۵}=\frac{۱۹}{۱۰۵}$$

۸) احتمال سفید بودن هر دو مهره اخیر را $P(A)$ در نظر می‌گیریم:

$$P(A)=\frac{۵}{۱۱}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}+\frac{۶}{۱۱}\times\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۵}{۱۱}\times\frac{۶}{۴۵}+\frac{۶}{۱۱}\times\frac{۱۰}{۴۵}$$

$$=\frac{۱}{۱۱}\times\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۱۱}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۳۳}+\frac{۴}{۳۳}=\frac{۶}{۳۳}=\frac{۲}{۱۱}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

خود را بیازمائید:

۱) سه ظرف داریم که ظرف اول شامل ۴ مهره سیاه و ۵ مهره سفید و ظرف دوم شامل ۳ مهره سیاه و ۶ مهره سفید و ظرف سوم فقط شامل تعدادی مهره سیاه است. یک ظرف به تصادف انتخاب نموده و به تصادف مهره‌ای از آن بیرون می‌کشیم. احتمال سفید بودن آن چقدر است؟

۲) دو ظرف داریم. ظرف اول شامل ۸ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۳ مهره قرمز است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره قرمز است؟

۳) فرض کنید در شهری که جمعیت مردان و زنان برابر است، ۱۵ درصد مردان و ۶ درصد زنان به بیماری هپاتیت مبتلا باشند و احتمال بهبودی مبتلایان به این بیماری در مردان ۰/۴ و در زنان ۰/۱۲ باشد. اگر به تصادف فردی از این جامعه انتخاب کنیم با چه احتمالی فرد موردنظر به بیماری هپاتیت مبتلا شده و بهبود یافته است؟

۴) احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن نزده ۰/۱ است. اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان واکسن زده باشند احتمال اینکه یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟ (آمار و احتمال- یازدهم ریاضی چاپ ۹۷)

۵) در دو جعبه به ترتیب، ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب است. از هر کدام از جعبه‌ها ۵ لامپ به تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می‌دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب باشد را محاسبه کنید. (آمار و احتمال- یازدهم ریاضی چاپ ۹۷)

موفق وسربلند باشید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

منابع:

۱- مجموعه سوالات امتحانات نهایی حسابان ۸۳ تا ۹۸

۲- مجموعه سوالات امتحانات نهایی ریاضی تجربی ۸۳ تا ۹۸

۳- مجموعه سوالات امتحانات نهایی دیفرانسیل و ریاضی عمومی پیش‌دانشگاهی ۹۴-۸۶

۴- از مدرسه تا دانشگاه- حسابان- چاپ هفتم ۸۶

مؤلفان: احمد قندهاری، یدالله ایلخانی‌پور، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

انتشارات کتاب هرمز منتشر کرده است:

۱- از جنوب گریه‌ها(شعرجوان‌خوزستان/جلداول)، به کوشش شهرام فروغی‌مهر

۲- از جنوب گریه‌ها(شعرجوان‌خوزستان/جلددوم)، به کوشش شهرام فروغی‌مهر

۳- از جنوب گریه‌ها(شعرجوان‌خوزستان/جلد سوم)، به کوشش شهرام فروغی‌مهر

٤- از جنوب گریه‌ها(شعرجوان‌خوزستان/جلدچهارم)، به کوشش شهرام فروغی‌مهر

۵- بگذار زخم‌ها آفتاب بگیرند، مریم حشمت پور، مجموعه شعر

٦- منظومه نام تو(شعرهای‌شهرام‌فروغی‌مهر)،دوزبانه(فارسی-انگلیسی)، مترجم: زهرا قناعتی

۷- نغمه‌های آبی شیدا، شیدا اعرابی، مجموعه شعر و قطعه ادبی

۸- زیر چترآفتابگردان‌ها(شعرمعاصرایران/ جلد اول)، به کوشش شهرام فروغی‌مهر

۹- زیر چترآفتابگردان‌ها(شعرمعاصرایران/ جلد دوم)، به کوشش شهرام فروغی‌مهر

۱۰- زیر چترآفتابگردان‌ها(شعرمعاصرایران/ جلد سوم)، به کوشش شهرام فروغی‌مهر

۱۱- سپید دم، اشرف‌السادات کمانی، مجموعه شعر

۱۲- مشق‌های حوّا، لاله بختیاری، مجموعه شعر

۱۳- درتونمی‌شودسکوت‌کرد، شهرام‌فروغی‌مهر، مجموعه شعر

۱٤- زیر چتر این زمستان، شهرام‌فروغی‌مهر، مجموعه شعر

۱۵- به وقت انگور،شهرام‌فروغی‌مهر، مجموعه رباعی

۱٦- در قرن عایق‌ها، شهرام‌فروغی‌مهر، مجموعه شعر

۱۷-تقویم تنهایی، شهرام‌فروغی‌مهر، مجموعه شعر

۱۸- از بی‌قراری‌ها، شیدا اعرابی، مجموعه شعر

۱۹- و ما بی‌همانیم همان دوخط موازی، الهام صادقی، مجموعه شعر

۲۰- ابوالیل از اعماق،شهرام‌فروغی‌مهر، مجموعه شعر

۲۱- مانکن‌ها هم می‌میرند، محمدرضا داودی، مجموعه داستان

۲۲- چمدانی که تو را برد، پریزاد حیجوان، مجموعه شعر

۲۳- آبی آسمانی،فرهنگ دشتی، مجموعه شعر آیینی

۲٤- درجریان چشم‌های تو بودم، حمیدرضا اکبری(شروه)، برگزیده شعرهای لیراو

۲۵- زیر باران بی‌تو، الهه وفادارشوشتری، مجموعه دوبیتی و رباعی

۲٦- زیر چترآفتابگردان‌ها(شعرمعاصرایران/ جلد پنجم)، به کوشش شهرام فروغی‌مهر

۲۷- زیر چترآفتابگردان‌ها(شعرمعاصرایران/ جلد چهارم)، به کوشش شهرام فروغی‌مهر

۲۸- شکل من باید بشوی، حمیدرضا اکبری(شروه)، مجموعه شعر

۲۹- از جنوب گریه‌ها(شعرجوان‌خوزستان/جلدپنجم)، به کوشش شهرام فروغی‌مهر

۳۰- ستاره، حسین بازپور، مجموعه داستان کوتاه برای نوجوانان

۳۱- مهتاب عاشقانه‌ها، شیدا اعرابی، مجموعه شعر

۳۲- خواب برف‌ها، عشرت اشتری لرکی، مجموعه شعر

۳۳- داغ آدم که تازه می‌شود، محمد نوروزی بابادی، مجموعه شعر

۳٤- پوچیدگی، زینب فرجی، مجموعه شعر

۳۵- اندوهزارزیست، شهرام فروغی‌مهر، مجموعه شعر

۳٦- دسته کلید دنیا، شهرام فروغی‌مهر، مجموعه شعر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۷- روزهای اندوهگین، شهرام فروغی‌مهر، مجموعه شعر

۳۸- عاشق،عمودی می‌میرد، شهرام فروغی‌مهر، مجموعه شعر

۳۹- رویاهای آتشفشان خاموش،مریم سلیمانی‌صالح، مجموعه شعر

٤۰- سطرهای ساکت، مجموعه شعر، احسان کوشامهر

٤۱- شهر تنها می‌ماند، یک داستان بلند، میثم فروزش‌مهر

۵۵- در خاطرم بودی، مجموعه ترانه، پگاه اکبری

۵٦- تقاص بی‌قانون، یک داستان بلند، سارا بهوندی

۵۷- درازترین خیابان، برگزیده داستان انجمن داستان‌نویسان ایذه، سیدمحمدموسوی‌ده‌شیخ

۵۸- سه‌نمایش، مجموعه نمایشنامه، محمد نوروزی‌بابادی

۵۹- اتفاق‌ها، مجموعه داستان‌های لیراو، حمیدرضا اکبری(شروه)

٦۰- خط خون، مجموعه شعر عاشورایی، محمد کردزنگنه

٦۱- اینجا سایه نیست، برگزیده شعر شاعران رامهرمز، محمد کردزنگنه

٦۲- صدای استخوان‌هایم گریه است، مجموعه شعر، پریزاد حیجوان

٦۳- مجموعه اشعار شهرام فروغی‌مهر، جلد اول(۱۳۸٤-۱۳۷۰)

٦٤- دست سایه‌ام سرد است، مجموعه شعر، علیرضا ایمانی‌فر

٦۵- چشم تو آخر دنیاست، مجموعه شعر، الهام صادقی

٦٦- آن‌سوی در شکسته، مجموعه شعر، ابراهیم آقابابایی

٦۷- الفبای خوشبختی، مجموعه شعر، اصغر رضایی‌گماری

٦۸- ناگهان نگاه تو، مجموعه شعر، حجت‌الله جانبی

٦۹- کز کردن درخت در چوب‌بری، مجموعه شعر، وسعت‌اله کاظمیان‌دهکردی

۷۵- تعویض اذهان، مجموعه شعر، شهرام فروغی‌مهر

۷٦- عاشقانه‌های دریا، مجموعه شعر، شهرام فروغی‌مهر

۷۹- تا ما با هم، مجموعه شعر، روح‌اله آقاجری

۸۰- درخت بخشنده، داستان کوتاه، شل سیلوراستاین، مترجم زهرا قناعتی

۸۱- به کلمات پا می‌دهی، مجموعه شعر کوتاه، شهرام فروغی‌مهر

۸۲- از توبه‌فرمایان چرا، مجموعه شعر، شهرام فروغی‌مهر

۸۳- مگس‌های خوشحال، مجموعه شعر، شهرام فروغی‌مهر

۸٤- نقش علف، مجموعه شعر، شهرام فروغی‌مهر

۸۵- از کرامات میخ، مجموعه شعر، شهرام فروغی‌مهر

۸٦- با حروف سربی، مجموعه شعر، شهرام فروغی‌مهر

۸۷- بهشت داخلی، مجموعه شعر، شهرام فروغی‌مهر

۸۸- پناهنده به پیراهن، مجموعه شعر، شهرام فروغی‌مهر

۸۹- پیوست به پوست، مجموعه شعر، شهرام فروغی‌مهر

۹۰- سنگ بر ساغر مینایی، مجموعه شعر، شهرام فروغی‌مهر

۹۱- گریه بر لب کارون، مجموعه شعر، شهرام فروغی‌مهر

۹۲- مأموریت سری کلمات، مجموعه شعر، شهرام فروغی‌مهر

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۳- ماهی‌ها در خونم شنا می‌کنند، مجموعه شعر، ابراهیم آرمات

۹٤- ماسک‌های بلوطی، مجموعه شعر، فریبا حمزه‌ای

۹٦- از شانه‌های من پاییز را ببین، مجموعه شعر، یاسر زیدونی

۹۷- الفبای آجری، برگزیده شعر شاعران شمال خوزستان، سعید سروش راد

۹۸- زنی آن سو موهایش را می‌بافد، مجموعه شعر، بهاره نوروزی سده

۹۹- من جلاد خویشم، مجموعه شعر، عذرا هندالی

۱۰۵- آن گل سرخ، جلد اول، برگزیده شعر عاشقانه ایران، شهرام فروغی‌مهر

۱۰٦- آن گل سرخ، جلد دوم، برگزیده شعر عاشقانه ایران، شهرام فروغی‌مهر

۱۰۷ -آن گل سرخ، جلد سوم، برگزیده شعر عاشقانه ایران، شهرام فروغی‌مهر

۱۰۸- قارچِ سَمّی موجود است، مجموعه شعر، علیرضا کامرانی

۱۰۹- همین بغل تو، مجموعه شعر، شهرام فروغی‌مهر

۱۱۰- خروش کارون، تاریخچه انجمن ادبی خروش کارون اهواز، به کوشش محمد بقالان

۱۱۱- تنهاتر از ماندلا، خاطرات اسیر آزاد شده ایرانی لطف‌اله پیرمرادی، به روایت حبیب پیام

۱۱۲- خیال تو را می‌پوشم، مجموعه شعر، زینب سعیدی

۱۱۳- رستم وارونه، نمایشنامه، حمید تقوی‌فر

۱۱٤- به سایه‌ام که تکیه می‌دهم شانه‌هایم سیاه می‌شوند، مجموعه شعر، هرمز فرهادی بابادی

۱۱۵- آموخته‌ام که هیچ اندوهی کوچک نیست، مجموعه شعر، هرمز فرهادی بابادی

۱۱۹- سپیدارها برایم ایستاده دست تکان می‌دهند، مجموعه شعر، مهتاب نصیری رامش

۱۲۰- در شعله خاطره‌ها، مجموعه شعر، مریم دلیری

۱۲۱- داروگ، مجموعه شعر و نقد و نظر، شماره نخست، پاییز۹۸، به کوشش ابوالفضل پاشا و آفاق شوهانی

۱۲۲- سفر به سرزمین آفتاب، سفرنامه، مهدی عرب

۱۲۳- زیبا با توام، مجموعه قطعه ادبی، مهدی عرب

۱۲٤- حسرت حرف‌های نگفته، یک داستان بلند، سحر کیانی

۱۲۵- شوق پریدن، مجموعه شعر، جواد مجیدی‌راد

۱۲٦- بهای سنگین سکوت، رمان، پوران نوروزی

۱۲۷- آزمون نهایی، ریاضی و حسابان رشته های ریاضی و تجربی، فرزانه بایمانی

۱۲۸- کلاه شیطان، مجموعه شعر، محمد پورمطهری

۱۲۹- هیچ سنگفرشی به فکر کوچه خاکی نیست، مجموعه شعر فارسی و عربی، کوثر دیلم‌زادی

۱۳۰- چیزی بین زمستان و درد، مجموعه شعر، یعقوب سهوزاده

۱۳۱- بدون آدرس فرستنده، برگزیده داستان‌های کوتاه جشنواره بلوطیکا، به کوشش سیدمحمد موسوی‌ده‌شیخ

۱۳۲- ریحان حریزان، مجموعه شعر، شراره جمشید

۱۳۳- ناقور حلال شد، مجموعه شعر، شراره جمشید

۱۳٤- زمزمه انتظار، بر اساس زندگی شهید منوچهر آسوده، فاطمه سلطانی‌لرکی

۱۳۵- شب را به اول برگردان، مجموعه شعر، علی‌رضا ایمانی‌فر

۱۳٦- مادرم، آهو و من ـ رمان، سلیمان هرمزی

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

مجموعه کتاب‌های سپاس:

۴۲- شهری پر از همه‌جا، ابوالفضل پاشا، مجموعه شعر، شعر امروز ایران(۱)

۴۳- شما پاسخ من باشید، آفاق شوهانی، برگزیده شعر، شعر امروز ایران(۲)

۴۴- شرجی سرد، افسانه نجومی، یک شعر بلند، شعر امروز ایران(۴)

۴۵- سودابه که تن نبود، نرگس دوست، مجموعه شعر، شعر امروز ایران(۵)

۴۶- پیراهنم به سردسیر دلم به گرمسیر، سریا داودی‌حموله، برگزیده شعر، شعر امروز ایران(۳)

۴۷- رویکردهای زیباشناختی، سریاداودی‌حموله، نقد شعر سریاداودی‌حموله، نقد و تحلیل و نظر(۱)

۴۸- لب‌های باز کلمه، کورش همه‌خانی، برگزیده شعر، شعر امروز ایران(۸)

۴۹- احتمال، فیض شریفی، مجموعه شعر - داستان، شعر امروز ایران(۱۰)

۵۰- از خویش می‌دوم، علی‌رضا پنجه‌ای، برگزیده شعر، شعر امروز ایران(۶)

۵۱- شب مداد کوتاه شده، حبیب پیام، برگزیده غزل - داستان، غزل روزگار ما(۱)

۵۲- در گذرگاه همیشه و همواره، سیدمحمود سجادی، برگزیده شعر، شعر امروز ایران(۹)

۵۳- تمام نام‌های زیبا تویی، حمیدرضا اکبری (شروه)، مجموعه شعر، شعر امروز ایران(۷)

۵۴- بی‌شیخ چشمان تو، علی بهرامی‌کهیش، برگزیده غزل، غزل روزگار ما(۲)

۷۰- یک روز قرن‌ها بعد شد، مجموعه شعر، علیرضا شکرریز، شعر امروز ایران(۱۳)

۷۱- فلامینکو برای بیدها، مجموعه شعر، محمدعلی شکیبایی، شعر امروز ایران(۱۵)

۷۲- سرخوردن از گرینویچ، شهرام فروغی‌مهر، برگزیده شعر، شعر امروز ایران(۱۲)

۷۳- روایتی تایید نشده از شب، حبیب پیام، مجموعه شعر، شعر امروز ایران(۱۱)

۷۴- برشانه ناگزیر مورچه‌ها، مجموعه شعر، حجت‌اله جانبی، شعر امروز ایران(۱۴)

۷۷- فرازهای پنهانی(جلداول)، شهرام فروغی‌مهر، نقد شعر خوزستان، نقد و تحلیل و نظر(۲)

۷۸- فقط باران، نکوداشت سیدعلی صالحی،به کوشش حبیب پیام و شهرام فروغی‌مهر، نکوداشت(۱)

۹۵- چیز، فرزاد میراحمدی، مجموعه شعر فراسپید، شعر امروز ایران(۱۷)

۱۰۰- صِفر سَفر، بهزاد خواجات، برگزیده شعر، شعر امروز ایران(۱۶)

۱۰۱- بیرون پریدن از کادر دنیا، شهرام فروغی‌مهر، برگزیده شعر، شعر امروز ایران(۲۳)

۱۰۲- در خاطره درخت پرنده‌ام، شهرام فروغی‌مهر، برگزیده شعر، شعر امروز ایران(۱۸)

۱۰۳- بر رگ‌های بریده این سطرها، شهرام فروغی‌مهر، برگزیده شعر، شعر امروز ایران(۱۹)

۱۰۴- لذت لبخند تو بر کاغذ، شهرام فروغی‌مهر، برگزیده شعر، شعر امروز ایران(۲۰)

۱۱۶- اهلی کردن قاب عکس، ضد غزل، حبیب پیام، غزل روزگار ما(۳)

۱۱۷- انگشتانم گر می‌گیرد از لمس پیراهنت، پرویز حسینی، مجموعه شعر، شعر امروز ایران(۲۱)

۱۱۸- هشت کتاب غمگین، فرامرز سه‌دهی، برگزیده شعر، شعر امروز ایران(۲۲)

۱۲۰- فریاد ملی ماه، شعر زنان ایران، جلد اول، به کوشش نرگس دوست و ...، شعر امروز ایران(۲۵)

۱۳۷- شعله به ملافه رویا، پرویز حسینی، مجموعه شعر، شعر امروز ایران(۲۴)

Final Exams

(mathematics 3 and calculus 2

for experimental sciences

and mathematical physics fields)

Farzaneh Baimani

First Edition

Hormoz Book Publishing

Ahwaz. 2019

sh.fm2024@gmail.com
09167304711
@hormoz_book
@shahram_foroughimehr

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا