

سؤالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال	نام و نام خانوادگی:	تعداد صفحه: ۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
رشته: ریاضی فیزیک	دوره ی پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۳/۲۴	ساعت شروع: ۸ صبح
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خردادماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	
ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)		
نمره			

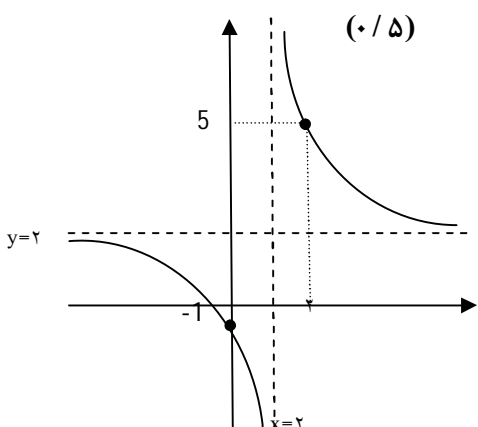
۱	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید: الف) $\log_2$ عددی گویاست. ب) برای هر عدد حقیقی $x$ داریم: $x \leq  x $ پ) بزرگترین کران پایین مجموعه $(-1, 2)$ برابر با $-1$ است. ت) اگر $0 < x < 1$ و $n \in \mathbb{N}$ آنگاه: $0 < x^n \leq x$
۲	به کمک تعریف حد دنباله ها ثابت کنید دنباله $\left\{ \frac{2n+1}{n+1} \right\}$ همگرا به ۲ است.
۳	اگر $f(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$ ، مقادیر مقابل را بیابید: الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
۴	به کمک قضیه بولزانو نشان دهید معادله $x^3 - 2x - 1 = 0$ در بازه $[1, 2]$ جواب دارد.
۱/۵	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید: الف) شیب خط عماس بر نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ در نقطه به طول ۴ واقع بر نمودار تابع برابر است با ..... ب) مکعبی به ضلع $x$ مفروض است، آهنگ تغییر حجم مکعب در لحظه ای که $x = 2$ است برابر است با ..... پ) مشتق چپ تابع $f(x) =  x-2  - x^2$ در $x = 2$ برابر است با .....
۱/۵	مقادیر $a$ و $b$ را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x \leq 0 \\ ax + 2a + b & x > 0 \end{cases}$ در $x = 0$ مشتق پذیر باشد.
۱	اگر $f(x) = x^5 - 4x^3 + 7x - 1$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h}$ را بیابید.
۲	مشتق بگیرید: (ساده کردن مشتق الزامی نیست) پ) $y = \ln(x^2 + 2x^2 + 2)$ ب) $y = \frac{2}{x+1} + e^{\cos x} - 1$ الف) $2x^2 + xy^2 = 4$
۱	اگر تابع $f$ همواره مشتق پذیر باشد و $g(x) = f(3-x^2)$ و $f'(-1) = 3$ ، مقدار $g'(2)$ را بیابید.
۱/۲۵	نقاط عطف تابع $y = \cos x$ را در بازه $(0, 2\pi)$ بیابید.
۱/۷۵	نقاط اکسترمم موضعی تابع $f(x) = x^3 - 3x - 7$ را بیابید.
۲	جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2x+1}{x-1}$ را رسم کنید.
۱/۵	به کمک افرازهای مناسب، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y = x^2 + 1$ و خطوط $x = 0$ ، $x = 3$ و $y = 0$ را به دست آورید.
۰/۷۵	مشتق تابع $H(x) = \int_1^x t^2 dt$ را به دست آورید.
۱/۷۵	انتگرالهای مقابل را محاسبه کنید: الف) $\int_1^3 [x] dx$ ب) $\int (e^{2x} - 2 \cos 3x) dx$
۲۰	جمع نمره «موفق باشید»

تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۳/۲۴	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	دوره ی پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزادسراسر کشور درنوبت خردادماه سال ۱۳۹۹	
نمره	راهنمای تصحیح	

۱	الف) نادرست (ب) درست (پ) درست (ت) درست	هر مورد (۰/۲۵) نمره															
۱	۲	$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall n \geq M :  a_n - L  < \varepsilon \Rightarrow \left  \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right  < \varepsilon \Rightarrow \left  \frac{1}{n+1} \right  < \varepsilon$ $\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow M \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$															
۱	الف) ۲- (ب) ۲	هر مورد (۰/۵) نمره															
۱	۴	تابع داده شده روی $\mathbb{R}$ و در نتیجه در بازه $[1, 2]$ پیوسته است (۰/۲۵) و داریم $f(1) \cdot f(2) = (-2)(3) < 0$ لذا طبق قضیه بولزانو معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ در بازه $[1, 2]$ دست کم یک ریشه دارد. (۰/۲۵)															
۱/۵	الف) $\frac{1}{4}$ (ب) ۱۲ (پ) ۵-	هر مورد (۰/۵) نمره															
۱/۵	۶	$f(0^-) = f(0^+) \xrightarrow{(0/25)} 1 = 2a + b \quad (0/5)$ $f'_-(0) = f'_+(0) \xrightarrow{(0/25)} 2 = a \xrightarrow{(0/25)} b = -3 \quad (0/25)$															
۱	۷	کسر داده شده همان $f''(1)$ است (۰/۵) و داریم: $f''(x) = 2 \cdot x^2 - 24x \xrightarrow{(0/25)} f''(1) = 20 - 24 = -4 \quad (0/25)$															
۲	۸	الف) $y' = -\frac{6x^2 + y^2}{3xy^2} \quad (0/75)$ ب) $y' = \frac{-2}{(x+1)^2} - \sin x \cdot e^{\cos x} \quad (0/75)$ پ) $y' = \frac{4x^2 + 4x}{x^2 + 2x^2 + 2} \quad (0/5)$															
۱	۹	$g'(x) = -2xf'(3-x^2) \xrightarrow{(0/5)} g'(2) = -4f'(-1) = (-4)(3) = -12 \quad (0/5)$															
۱/۲۵	۱۰	$y' = -\sin x \xrightarrow{(0/25)} y'' = -\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2} \quad (0/5)$ <p>علامت <math>y''</math> در بازه <math>(0, \frac{\pi}{2})</math> منفی، در بازه <math>(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})</math> مثبت و در بازه <math>(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)</math> منفی است. در نتیجه نقاط <math>(\frac{\pi}{2}, 0)</math> و <math>(\frac{3\pi}{2}, 0)</math> نقاط عطف نمودار تابع هستند. (۰/۵)</p>															
۱/۷۵	۱۱	$D_f = \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 3 \quad (0/25)$ $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \quad (0/5)$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td><math>-\infty</math></td> <td>-1</td> <td>1</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td>+</td> <td>o</td> <td>o</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td></td> <td>-5</td> <td>-9</td> <td></td> </tr> </table> <p>نقطه های <math>(-1, -5)</math> و <math>(1, -9)</math> به ترتیب max و min موضعی هستند. (۰/۵)</p>	x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	y'	+	o	o	+	y		-5	-9	
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$													
y'	+	o	o	+													
y		-5	-9														

ادامه در صفحه دوم

تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۳/۲۴	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	دوره ی پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	سال ۱۳۹۹	خردادماه
نمره	راهنمای تصحیح	
		ردیف

۲	<p><math>D = R - \{1\}</math></p> <p><math>y = 2</math> (مجانِب افقی) (۰/۲۵) <math>x = 1</math> (مجانِب قائم)</p> <p>تابع در فواصل پیوسته نزولی اکید است. <math>y' = \frac{-3}{(x-1)^2} &lt; 0 \xrightarrow{(۰/۵)}</math></p> <p>نقاط کمکی: <math>A(0, -1)</math> <math>B(2, 5)</math></p> <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td><math>-\infty</math></td> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td></td> <td>-</td> <td></td> <td>-</td> <td></td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>۲</td> <td>-۱</td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>+\infty</math></td> <td>۲</td> </tr> </table> <p>(۰/۵)</p> 	x	$-\infty$	۰	۱	۲	$+\infty$	y'		-		-		y	۲	-۱	$-\infty$	$+\infty$	۲	۱۲
x	$-\infty$	۰	۱	۲	$+\infty$															
y'		-		-																
y	۲	-۱	$-\infty$	$+\infty$	۲															
۱/۵	<p>بازه <math>[0, 3]</math> را به <math>n</math> قسمت مساوی تقسیم می کنیم پس</p> <p><math>\Delta x_i = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}</math> و <math>x_i = 0 + \frac{3}{n}i = \frac{3}{n}i</math> و <math>f(x_i) = (\frac{3}{n}i)^2 + 1 = \frac{9}{n^2}i^2 + 1</math> (۰/۷۵)</p> <p><math>s_n = \sum_{i=1}^n (\frac{9}{n^2}i^2 + 1) \times \frac{3}{n} = \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{27}{n^3} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) + \frac{3}{n}(n)</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>A = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{27 \times 2}{6} + 3 = 12</math> (۰/۲۵)</p>	۱۳																		
۰/۷۵	<p><math>H(x) = - \int_1^{x^2} t^2 dt = -(2x)(x^2)^2 = -2x^5</math> (۰/۷۵)</p>	۱۴																		
۱/۷۵	<p>الف) <math>\int_1^3  x  dx = \int_1^2  x  dx + \int_2^3  x  dx = 0 + x \Big _1^2 + 2x \Big _2^3 = 0 + 1 + 2 = 3</math> (۰/۲۵)</p> <p>ب) <math>\int (e^{2x} - 2 \cos 3x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{2}{3} \sin 3x + C</math> (۰/۵) (۰/۵)</p>	۱۵																		
۲۰	همکاران گرامی ضمن عرض خسته نباشید به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. (با تشکر) جمع نمره																			